

• Verifica che $\vec{j}^e$ e $\vec{j}^t$ definite dalla 21b e 21c soddisfino la 21a)

$$\int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' = \text{per parti} = \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' - \int \vec{j}(\vec{r}', t) \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r'$$

Il primo integrale viene calcolato utilizzando il teorema di Gauss

$$\int_S \vec{\nabla}' \cdot \vec{f}(\vec{r}') d^3 r' = \int_S \vec{f}(\vec{r}') d^3 r' \xrightarrow{S \rightarrow \infty} 0$$

La superficie $S \rightarrow \infty$ se il raggio R che la definisce $\rightarrow \infty$

$$\int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' = - \int \vec{j}(\vec{r}', t) \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' =$$

$$= \int \vec{j}(\vec{r}', t) \vec{\nabla}' \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad 25$$

$$\vec{j}^e + \vec{j}^t = \frac{1}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right] \quad 26$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' - \nabla^2 \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right] = \frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}', t) \nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}', t) (-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')) d^3 r' = \vec{j}(\vec{r}, t) \quad 27$$