

La condizione $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r}, t) = 0$ impone che:

$$\vec{\nabla} \cdot N_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = i N_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0$$

se $\vec{E}_{\vec{k}} \cdot \vec{k} = 0$

$\vec{E}_{\vec{k}}$ è un vettore di polarizzazione con norma 1.

La parte arbitraria della normalizzazione è assorbita in $N_{\vec{k}}$. Chiaramente la propagazione dell'onda è trasversa rispetto alla direzione di propagazione.

La stessa condizione è presente anche con la condizione di Lorentz.

$$\square A^\mu = 0 \quad A^\mu = (\phi, \vec{A}) = N \epsilon^\mu e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

$$k^2 = k_\mu k^\mu = \omega^2 - \vec{k}^2 = 0 \quad \text{per fotoni reali}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \partial_\mu N \epsilon^\mu e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = -i N \epsilon^\mu k_\mu e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = 0$$

se $\epsilon^\mu k_\mu = 0$

Facendo una trasformazione di Gauge tale che

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi \quad \text{se } \square \chi = 0$$

si può sempre trovare un ϵ'^μ tale che

$$\epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \beta k^\mu \quad \epsilon'^\mu k_\mu = \epsilon^\mu k_\mu + \beta k^\mu k_\mu = 0$$

$$\vec{E}' \cdot \vec{q} = (\vec{E} + \beta \vec{q}) \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{E} + \beta q^2 = 0 \quad \beta = -\frac{\vec{q} \cdot \vec{E}}{q^2}$$