

Applicando la 5.3.17 al nostro caso si ha:

$$\vec{\nabla} \left(r^l z_{\ell\mu} \right) = - \left(\frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} (l-l) r^{l-1} \vec{z}_{l, l+1, 1}^{\mu} + \left(\frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} (l+l+1) r^{l-1} \vec{z}_{l, l-1, 1}^{\mu}$$

Dato che il 1° termine è nullo, si ha per il laplaciano:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(r^l z_{\ell\mu} \right) &= \left(\frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} (2l+1) \vec{\nabla} \left(r^{l-1} \vec{z}_{l, l-1, 1}^{\mu} \right) = \text{per } 5.3.23 \\ &= \left(\frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} (2l+1) \left(\frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} (l-1 - (l-1)) r^{l-2} z_{\ell\mu} = 0 \end{aligned}$$

• La 5c è valida perché lo stato è antisimmetrizzato.

Prendiamo ad es. uno stato composto da due sole particelle:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \nabla_a^2 |i\rangle &= \sum_{a=1}^2 \nabla_a^2 \left(\phi_q(\vec{r}_1) \phi_s(\vec{r}_2) - \phi_s(\vec{r}_1) \phi_q(\vec{r}_2) \right) = \\ &= \phi_q''(\vec{r}_1) \phi_s(\vec{r}_2) - \phi_s''(\vec{r}_1) \phi_q(\vec{r}_2) + \phi_q(\vec{r}_1) \phi_s''(\vec{r}_2) - \phi_s(\vec{r}_1) \phi_q''(\vec{r}_2) \end{aligned}$$

Quando questa espressione viene inserita in un integrale come viene fatto in eq. 4) il 2° e 3° termine danno lo stesso contributo con segno opposto, così come il primo e l'ultimo termine.

• Per la 5) il 1° 3° e 4° termine della 87 sono nulli. Si ha quindi

$$\sum_{f \neq i} (\bar{E}_f - \bar{E}_i) \left| \langle f | Q_{\partial M} | i \rangle \right|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2} \sum_M \sum_{a=1}^2 \sum_{a' \neq i} \left| \nabla_a \left(r_a^{\bar{l}} z_{\ell\mu}^*(\hat{r}_a) \right) \nabla_{a'} \left(r_a^{\bar{l}} z_{\ell\mu}(\hat{r}_a) \right) \right|$$

Dato che:

$$\nabla^2(ab) = b \nabla_a^2 + 2 (\vec{\nabla}_a) (\vec{\nabla}_b) + a \nabla_b^2$$

$$\sum_{f \neq i} (\bar{E}_f - \bar{E}_i) \left| \langle f | Q_{\partial M} | i \rangle \right|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_M \sum_{a=1}^2 \sum_{a' \neq i} \left| \vec{\nabla}_a \left(r_a^{\bar{l}} z_{\ell\mu}^*(\hat{r}_a) \right) \vec{\nabla}_{a'} \left(r_a^{\bar{l}} z_{\ell\mu}(\hat{r}_a) \right) \right|$$

Si può dimostrare che:

$$\sum_M \left(\vec{\nabla} \phi(r) z_{\ell\mu}^*(\hat{r}) \right) \left(\vec{\nabla} \phi(r) z_{\ell\mu}(\hat{r}) \right) = \frac{2l+1}{4\pi} \left[\left(\frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \left(\phi(r) \right)^2 \right]$$