

L'equazione di Schrödinger da risolvere è:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{L(L+1)}{r^2} \right] u_L(r) = 0$$

Le condizioni al contorno per la soluzione all'origine impongono: $(u_L(r)=0)$

$$e^{ikz} = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) i^L j_L(kr) P_L(\cos\theta)$$

• Esercizio •

Ottenere la 6) dall'espressione generale

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{L,M} i^L j_L(kr) \frac{Y_L^M(\hat{k})}{\sqrt{4\pi}} \frac{Y_L^M(\hat{r})}{\sqrt{4\pi}} \quad (k/r \ll 1)$$

j_L è la funzione sferica di Bessel

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

L'eq. 6) è soluzione dell'equazione quando $u_L(r)=0$.

Infinitamente, dato che $V(r)$ è a corto raggio,

l'espressione della soluzione vera di 5) sarà uguale alla 6) + una costante dato la fase.

Utilizzando lo sviluppo asintotico di j_L si può scrivere per l'onda piana:

$$e^{ikz} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) i^L \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2}L)}{kr} P_L(\cos\theta)$$