

da cui la parte radiale di $u_L(r)$ diventa:

$$u_L(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2L+1) i^L A_L \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2}L + \delta_L)}{k}$$

dove δ_L è lo spostamento di fase (phase shift).

A_L deve essere fissato.

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) i^L \frac{1}{kr} P_L(\cos\theta)$$

$$\left[A_L \sin(kr - \frac{\pi}{2}L + \delta_L) - \sin(kr - \frac{\pi}{2}L) \right]$$

Considero la parte tra parentesi

$$\frac{1}{2i} \left\{ A_L \left(e^{i(kr - \frac{\pi}{2}L + \delta_L)} - e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}L + \delta_L)} \right) - \left(e^{i(kr - \frac{\pi}{2}L)} - e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}L)} \right) \right\}$$

$$= \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}L} \left(A_L e^{i\delta_L} - 1 \right) e^{+ikr} + e^{i\frac{\pi}{2}L} \left(1 - A_L e^{-i\delta_L} \right) e^{-ikr} \right\} \frac{1}{2i}$$

dato che solo l'onda uscente e^{+ikr} è presente in eq. 2

$$A_L = e^{i\delta_L}$$

Nota che $e^{-i\frac{\pi}{2}L} = (-i)^L$

Quindi

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) i^L \frac{1}{kr} P_L(\cos\theta) (-i)^L \left(e^{i\delta_L} - 1 \right) e^{+ikr} \frac{1}{2i}$$

da cui confrontando con eq. 2

$$f(\theta) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) \frac{1}{k} \left(e^{i2\delta_L} - 1 \right) P_L(\cos\theta) \frac{1}{2i} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) e^{i\delta_L} \sin\delta_L P_L(\cos\theta)$$