

Lezione 8

Decadimento α

Il decadimento radioattivo α avviene spontaneamente quando il Q valore della reazione

$$M(A, Z) \rightarrow M(A - 4, Z - 2) + M(4, 2)$$

è positivo.

Empiricamente la zona di emissione α risulta essere quella dei nuclei con $Z \geq 83$, anche se si conoscono alcuni nuclei che decadono α pur avendo un valore di Z più basso.

Un altro dato empiricamente rilevante è il fatto che ogni specie radioattiva α emette uno o più gruppi di particelle α aventi tutte la stessa energia. In altre parole gli spettri energetici delle particelle α sono discreti.

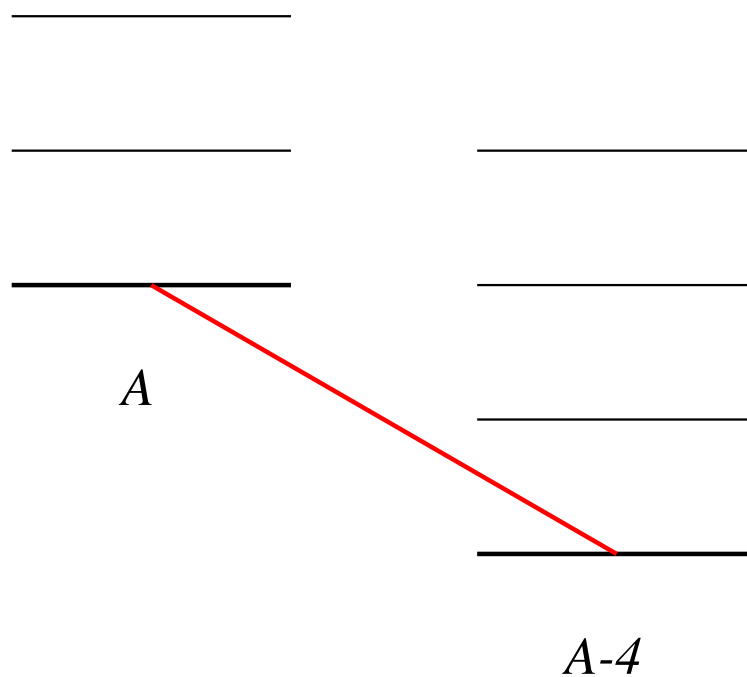
$$M = M_1 + M_2 + T_1 + T_2 \quad ; \quad M - M_1 - M_2 = T_1 + T_2$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad ; \quad \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$$

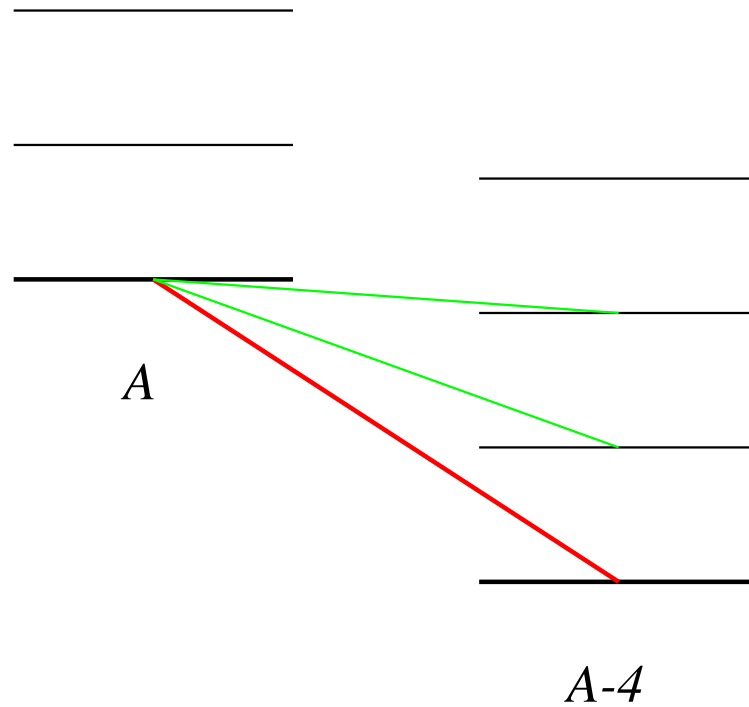
$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2M_2} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2} \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right] = M - M_1 - M_2$$

Si osservano spettri di tre tipi.

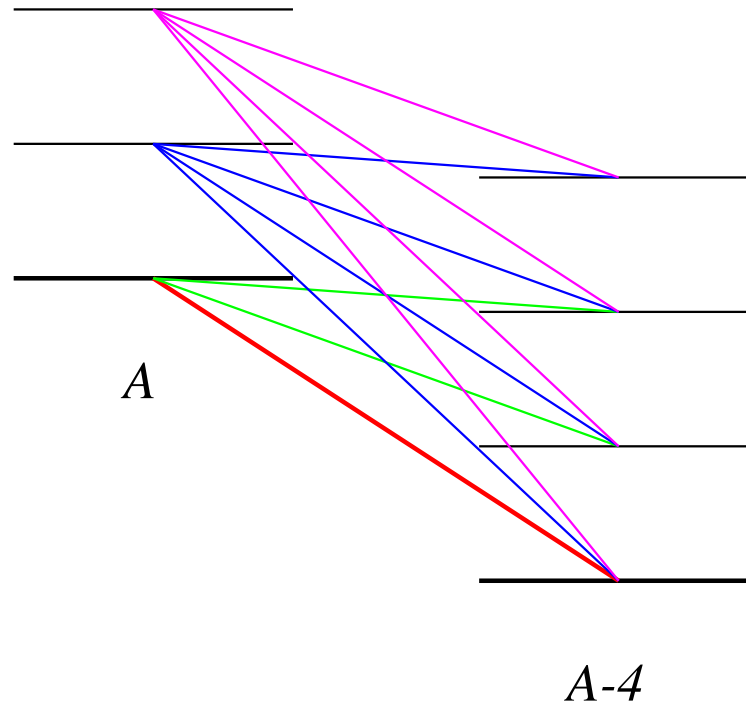
1) Spettri con una sola riga di emissione.

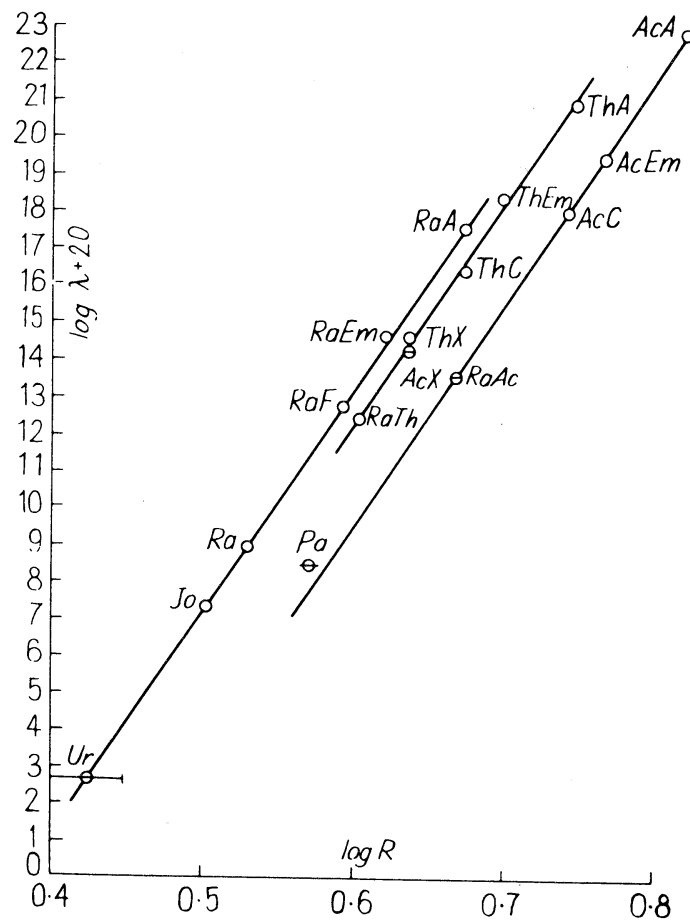


2) Spettri con più righe la cui riga più intensa è quella con energia massima.



3) Spettri in cui alle righe tipiche dei casi precedenti, si aggiungono gruppi di righe di particelle α di energia più elevata ma poco intensi.





La legge di Geiger e Nuttal (1911)

$$\log \lambda = B \log R_\alpha - C.$$

λ costante di decadimento

R_α percorso in aria (15° , 1 atmosfera) ; B e C costanti

Descrizione del processo di emissione α

Costante di decadimento

$$\lambda = f \nu P$$

f frazione di tempo in cui nel nucleo esiste α

ν frequenza dei tentativi di emissione

P probabilità di emissione (per ogni tentativo)

Schema del potenziale visto dalla particella α

R - raggio del nucleo

Z - numero di protoni del nucleo figlio ($Z+2$ quelli del nucleo genitore)

z - protoni della particella emessa ($z=2$ nel nostro caso)

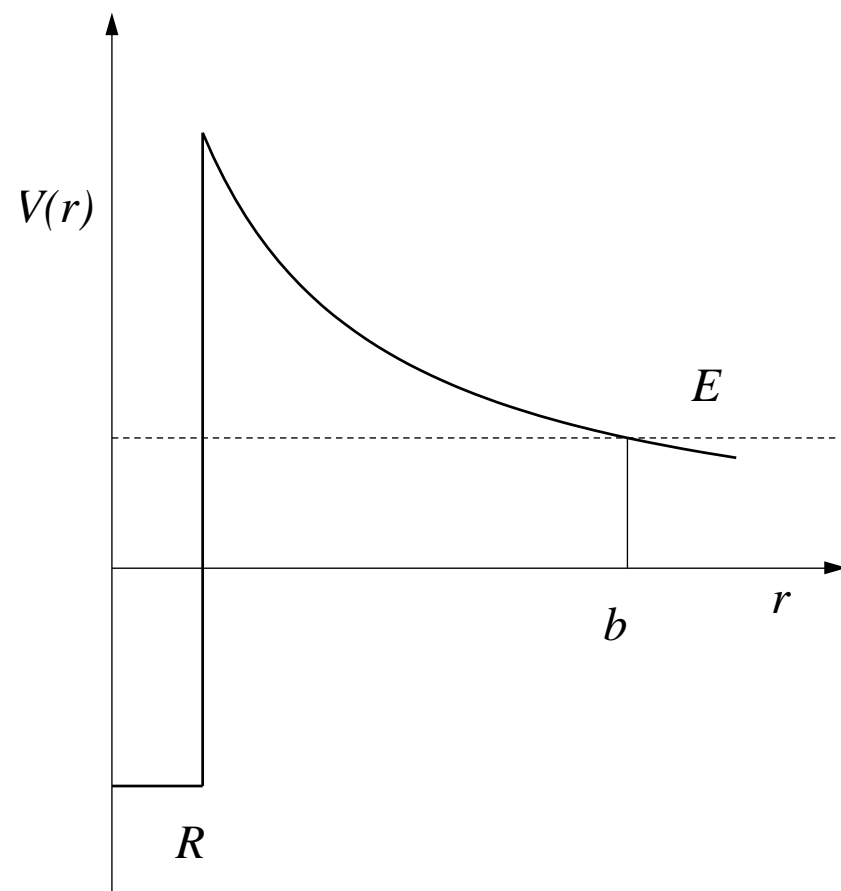
$K = e^2/4\pi\epsilon_0 \simeq 1.44 \text{ MeV fm}$ - costante di interazione elettrostatica

$$V(r) = v(r) \quad ; \quad r < R$$

$$V(r) = K \frac{Zz}{r} \quad ; \quad r > R$$

R definito quando le interazioni nucleari sono spente.

$$K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha \hbar c \simeq \frac{200 \text{ MeV fm}}{137} \simeq 1.44 \text{ MeV fm}$$



Schema del potenziale visto dalla particella α

Energia della particella α .

$$E = K \frac{Zz}{b}$$

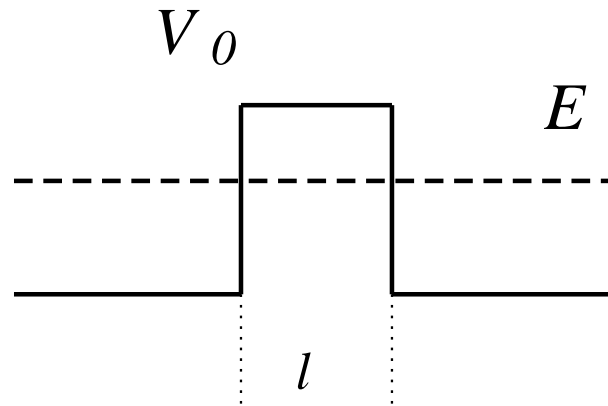
Valore del potenziale nel suo massimo

$$V(R) = K \frac{Zz}{R}$$

$$z = 2, Z \simeq 100 \quad R \simeq 10 \text{ fm}$$

$$V(R) \simeq \frac{(1.44)(100)(2) \text{ MeV fm}}{10 \text{ fm}} \simeq \frac{300}{10} \text{ MeV}$$

L'emissione α avviene per effetto tunnel



Coefficiente di trasmissione

$$T \sim e^{-G} \quad ; \quad G = 2l \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$$

$$m = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \text{ massa ridotta}$$

Nel nostro caso

$$G = 2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E)} dr$$

$$G = 2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E)} \, dr$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} K Z z} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} \, dr$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} K Z z} \sqrt{b} \left[\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]$$

Calcolo dell'integrale

$r = b \cos^2 \theta$ cambio di variabile

$\theta_i = 0$, $r(\theta_f) = b$

$R = b \cos^2 \theta_i$, $R/b = \cos^2 \theta_i$, $\theta_i = \arccos \sqrt{R/b}$

$dr = -2b \cos \theta \sin \theta$

$$\begin{aligned} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[\frac{1}{b \cos^2 \theta} - \frac{1}{b} \right]^{\frac{1}{2}} (-2b \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= -2 \sqrt{b} \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left[\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2 \sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \sin^2 \theta d\theta = 2 \sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2 \sqrt{b} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right]_0^{\theta_i} = 2 \sqrt{b} \left[\frac{\theta_i}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_i \right] \\ &= \sqrt{b} \left[\theta_i - \frac{1}{2} 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \right] = \sqrt{b} \left[\theta_i - \cos \theta_i \sqrt{\sin \theta_i} \right] \\ &= \sqrt{b} \left[\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \end{aligned}$$

$$\lambda = f \nu T = f \frac{v}{2R} e^{-G}$$

$(v/2R)$ numero di volte che la particella α attraversa il nucleo.

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - G$$

per $z = 2$ abbiamo

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - 4 \sqrt{\frac{m}{\hbar^2} K Z z} \sqrt{b} \left[\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]$$

Normalmente si ha che $b \gg R$ quindi

$$\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} \simeq \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}} K Z \sqrt{b} \frac{\pi}{2} + 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}} K Z \sqrt{b} \left[\sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right]$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{2ZK}{E}} \quad ; \quad \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \simeq 1$$

$$\ln \lambda = \ln f + \ln\left(\frac{v}{2R}\right) - KZ \frac{4\pi}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} \sqrt{\frac{1}{E}} + 4\sqrt{\frac{m}{\hbar^2}} K Z R$$

Dipendenza dall'energia proporzionale a $-1/\sqrt{E}$.

In Geiger e Nuttall $\log E$.

Nell'intervallo energetico in esame $-A/\sqrt{E} \simeq B \log E$ con errori attorno al 3%

Approssimazioni

- Abbiamo utilizzato l'espressione per $b \gg R$. Questa semplificazione non era necessaria ma ci ha facilitato il confronto tra le due equazioni.
- Abbiamo considerato costante la probabilità di trovare una particella α all'interno del nucleo.
- Abbiamo semplificato il potenziale all'interno del nucleo con una semplice buca quadrata.
- Abbiamo ipotizzato che i nuclei fossero sferici e pari-pari.

Domande

[N2-2] Descrivi lo spettro di emissione dei nuclei di ${}^4\text{He}$ provenienti da un decadimento α .

[N2-18] Un nucleo pari-pari decade α nello stato fondamentale o negli stati eccitati del nucleo figlio. Quali combinazioni del momento angolare J e della parità P sono permessi per gli stati accessibili al decadimento? Perché?

[N3-1] Quali sono le considerazioni che indicano nell'effetto tunnel il meccanismo responsabile del decadimento α ?