

Lezione 14

Dimensioni del nucleo

Dimensioni legate all'interazione tra proiettile e bersaglio.

Elettroni diffusi da carica sferica omogenea.

Diffusione di neutroni.

Per i nuclei le sonde migliori sono elettroni.

1) Interazioni elettromagnetica e debole (trascurata)

2) L'interazione elettromagnetica è ben nota

3) L'interazione elettromagnetica è molto meno intensa della forte che tiene legato il nucleo.

Stima delle energie da utilizzare

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad \Delta pc \geq \frac{\hbar c}{\Delta x} \simeq \frac{200 \text{ MeV fm}}{\Delta x \text{ fm}}$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{\epsilon^2 - m^2 c^4} \simeq p = \frac{\epsilon}{c} \quad \epsilon \gg m$$

Ipotesi

1. Forze puramente coulombiane.
2. Diffusione singola.
3. Elettroni atomici trascurati.
4. Proiettile bersaglio puntiformi.
5. Bersaglio ∞ pesante.
6. Bersaglio ha spin nullo.

Funzioni d'onda dell'elettrone, onde piane ($\hbar = c = 1$)

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad ; \quad \psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$$

Al termine del calcolo $V \rightarrow \infty$

$$\sigma(\epsilon_f) = \frac{2\pi}{\hbar v} | \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle |^2 \rho(\epsilon_f) V = \frac{2\pi}{\hbar v} |M_{fi}|^2 \rho(\epsilon_f) V$$

Ψ include sia la parte nucleare che elettronica.

Parte nucleare descritta dal potenziale elettrostatico ϕ generato dal nucleo, descritto dalle Eq. di Maxwell.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dove ho usato la gauge di Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$M_{fi} = \int d^3r \psi_f^*(\mathbf{r}) e \phi(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) = \frac{e}{V} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = \frac{e}{V} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r})$$

Momento trasferito $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \nabla^2 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

$$M_{fi} = \frac{e}{V} \int d^3r \left[-\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} (\nabla^2 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}) \phi(\mathbf{r}) \right]$$

Teorema di Green. $u(\mathbf{r})$ e $w(\mathbf{r})$ sono due funzioni $\rightarrow 0$ per $\mathbf{r} \rightarrow \infty$

$$\int d^3r u(\mathbf{r}) \nabla^2 w(\mathbf{r}) = \int d^3r [\nabla^2 u(\mathbf{r})] w(\mathbf{r})$$

Nel nostro caso $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + i\epsilon$ poi $\epsilon \rightarrow 0$

$$M_{fi} = \frac{-e}{V|\mathbf{q}|^2} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{V|\mathbf{q}|^2 \epsilon_o} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} e \rho(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{V|\mathbf{q}|^2 \epsilon_o} F(\mathbf{q})$$

Fattore di forma

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad F(0) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = Z$$

$$\rho(\epsilon_f) = \frac{V}{(2\pi)^3} p_f^2 \frac{dp_f}{d\epsilon_f} 4\pi$$

4π angolo solido totale $d\Omega$ seleziona l'angolo solido

$$d\sigma(\epsilon_f) = \frac{2\pi}{\hbar v} \left| \frac{e^2}{V|\mathbf{q}|^2 \epsilon_o} F(\mathbf{q}) \right|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} p_f^2 \frac{dp_f}{d\epsilon_f} d\Omega V$$

$m \ll \epsilon$ quindi $|\mathbf{k}| = \epsilon$ e anche $v = c = 1$

$$\frac{d\sigma(\epsilon_f)}{d\Omega} = 2\pi \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \right)^2 (4\pi)^2 \frac{1}{V^2 |\mathbf{q}|^4} \frac{V^2}{(2\pi)^3} p_f^2 \frac{dp_f}{d\epsilon_f} |F(\mathbf{q})|^2 = \frac{4\tilde{e}^2}{|\mathbf{q}|^4} \epsilon_f^2 |F(\mathbf{q})|^2$$

Diffusione

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f \quad q^2 = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f)^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f| \cos \theta$$

Caso elastico $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = \epsilon$

$$q^2 = \epsilon^2 2(1 - \cos \theta) = 4\epsilon^2 \sin^2 \theta / 2$$

$$|\mathbf{q}| = 2\epsilon \sin \theta / 2$$

$$\frac{d\sigma(\epsilon_f)}{d\Omega} = \frac{4\tilde{e}^2\epsilon^2}{16\epsilon^4 \sin^4 \theta/2} |F(\mathbf{q})|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R |F(\mathbf{q})|^2$$

R - Rutherford

Consideriamo lo spin del proiettile

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{rel} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \theta/2\right] = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \cos^2 \theta/2$$

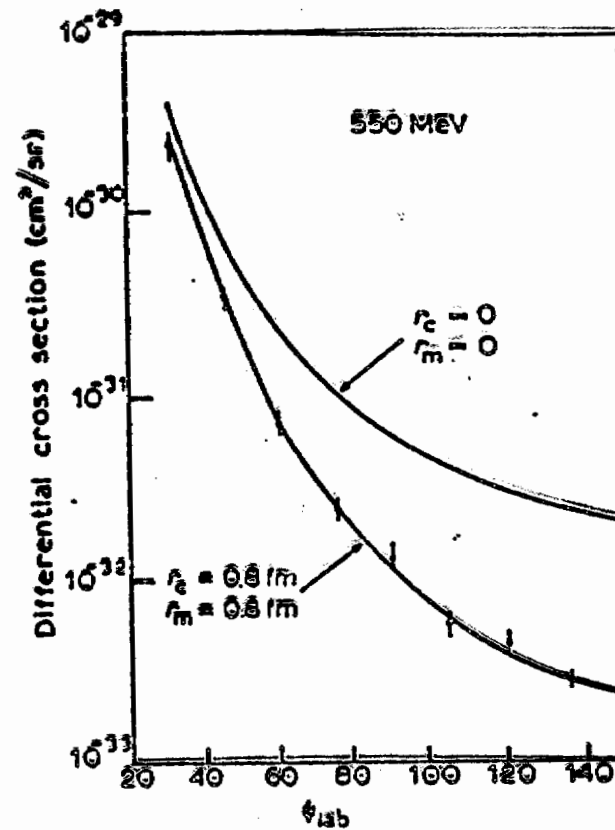
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{rel} = \frac{\tilde{e}^2 \cos^2 \theta/2}{4\epsilon^2 \sin^4 \theta/2} \equiv \sigma_M$$

M - Mott

Sezione d'urto

$$\frac{d\sigma(\epsilon_f)}{d\Omega} = \sigma_M |F(\mathbf{q})|^2$$

Proton



$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} Z \delta(\mathbf{r}) = Z$$

Per densità di carica a simmetria sferica $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(r) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \int d\Omega_r \sum_{l,\mu} i^l j_l(qr) Y_{l\mu}^*(\Omega_q) Y_{l\mu}(\Omega_r) \rho(r)$$

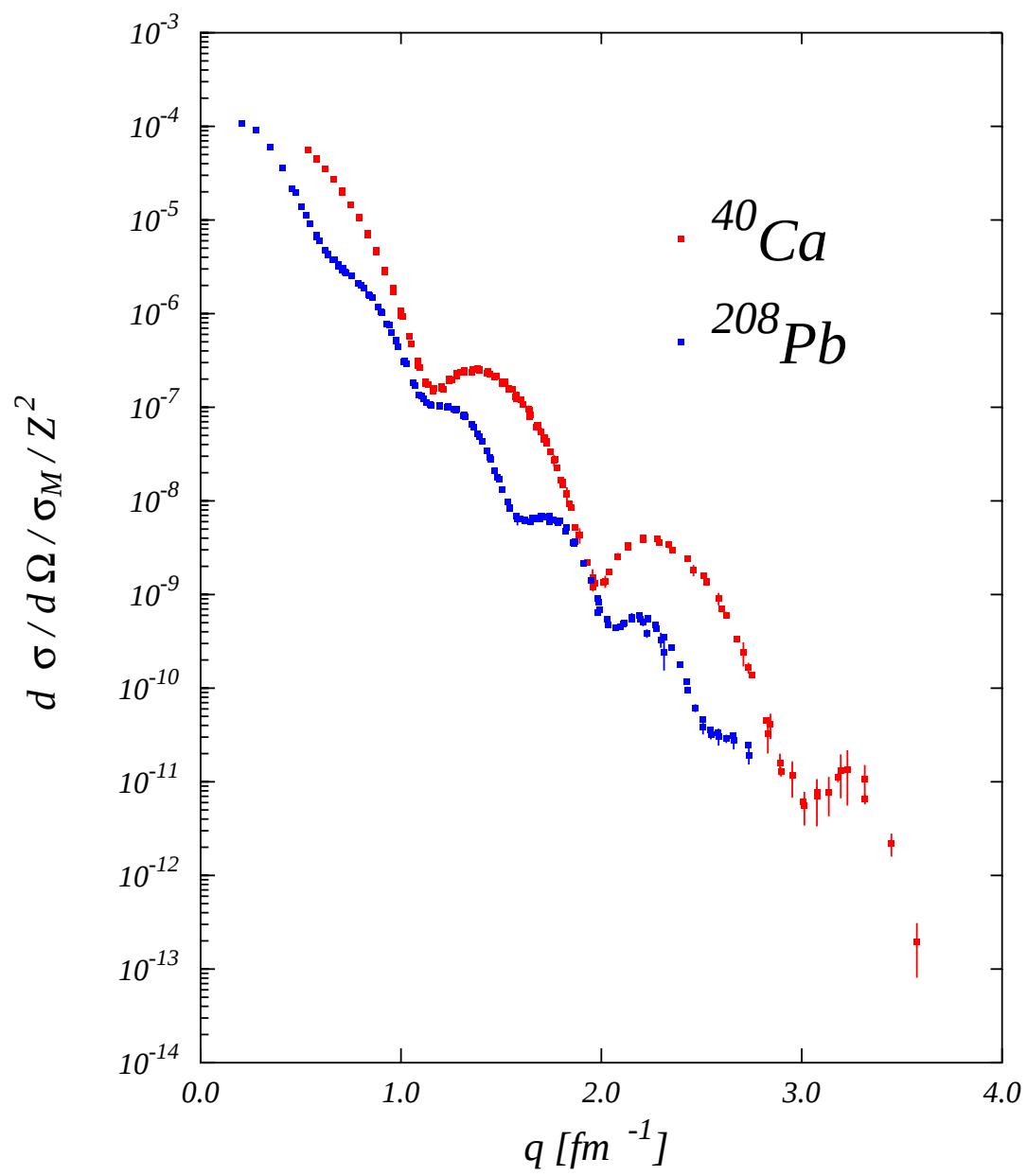
z nella direzione di $\mathbf{q}$

$$Y_{l\mu}^*(\Omega_q) = Y_{l\mu}^*(0,0) = \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\mu,0}$$

$$\begin{aligned} \int d\Omega_r Y_{l0}(\Omega_r) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) Y_{l0}(\theta, \phi) \\ &= \sqrt{4\pi} \int d\Omega_r Y_{0,0}^*(\Omega_r) Y_{l0}(\Omega_r) = \sqrt{4\pi} \delta_{l,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) = F(q) &= 4\pi \sum_{l,\mu} \sqrt{4\pi} \delta_{l,0} \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\mu,0} i^l \int_0^\infty dr r^2 j_l(qr) \rho(r) \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 j_0(qr) \rho(r) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) \rho(r) \end{aligned}$$

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} F(q) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 j_0(qr) F(q)$$



Problema inverso.

Approccio diretto.

1) Sfera uniformemente carica.

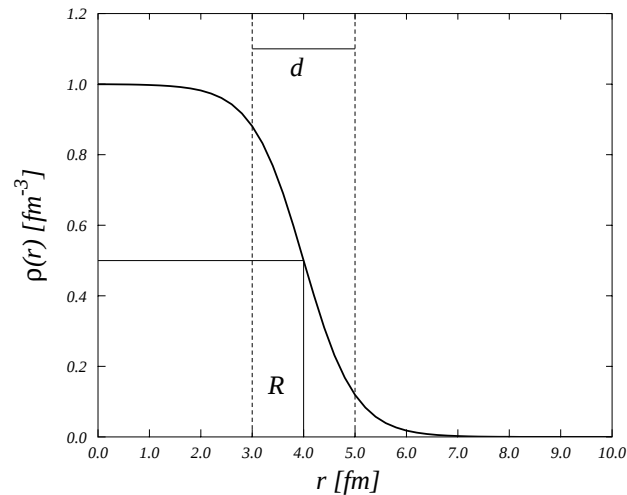
$$\rho(r) = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi R^3} \theta(R - r)$$

$$F(q) = 4\pi \frac{3Z}{4\pi R^3} \int_0^R dr r^2 j_0(qr) = \frac{3Z}{qR} j_1(qR)$$

Zeri di $j_1(x)$, per $x=4.49, 7.73, 10.90$

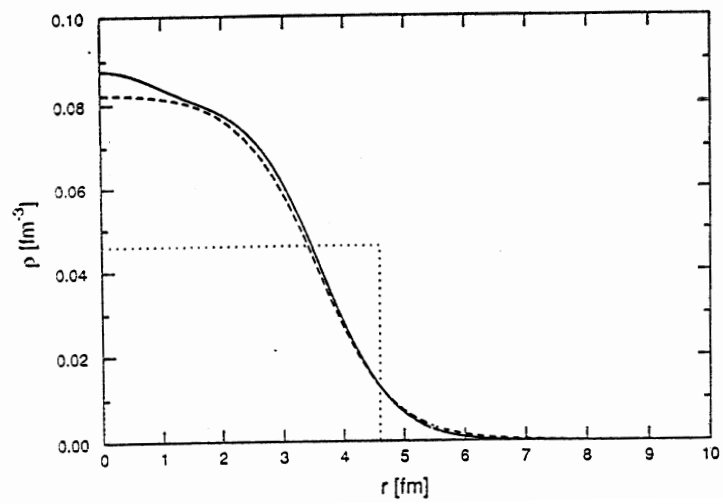
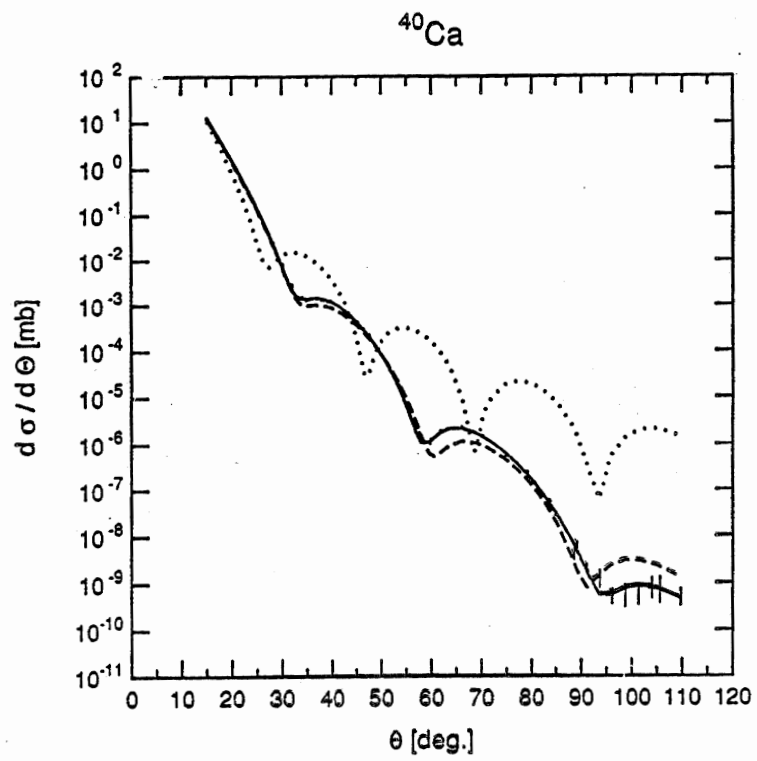
2) Distribuzione di Fermi.

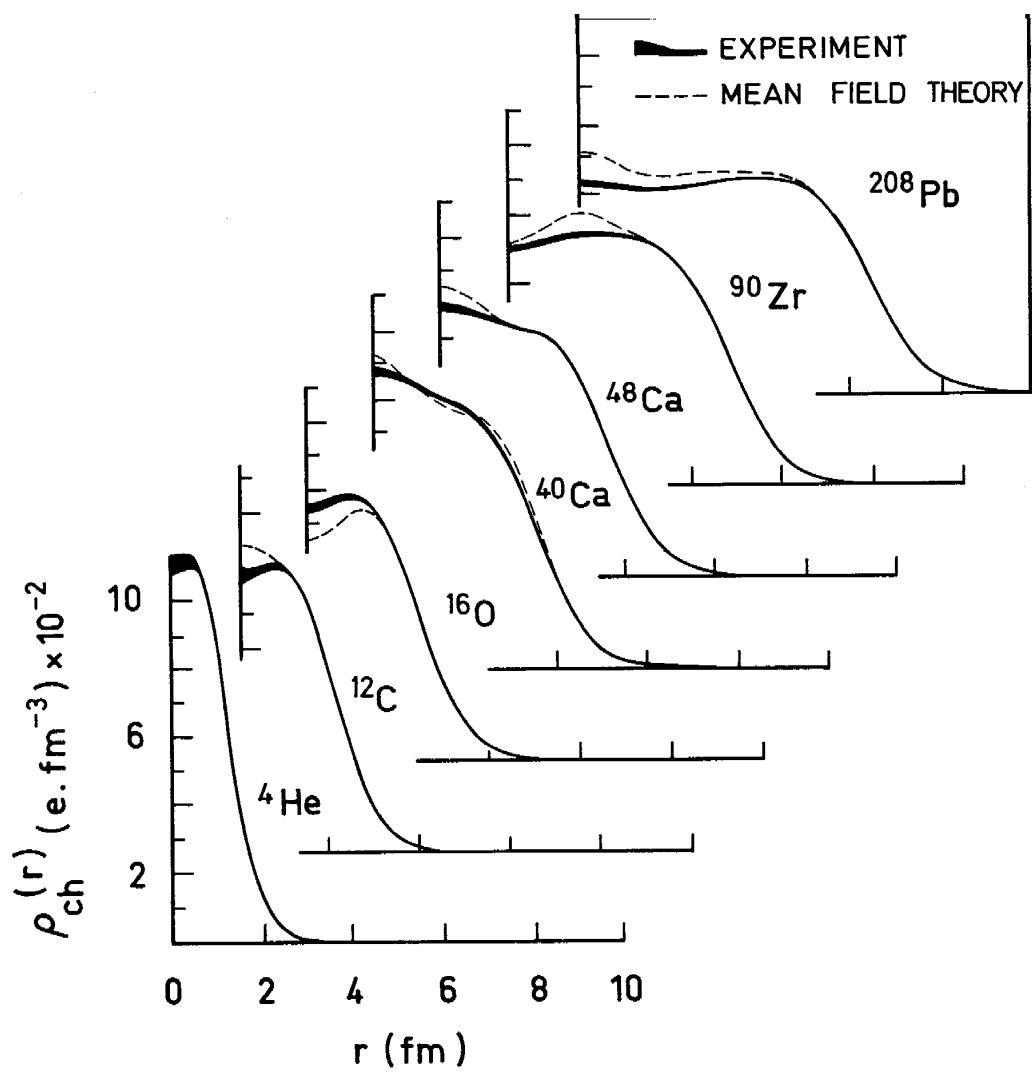
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{d}}}$$

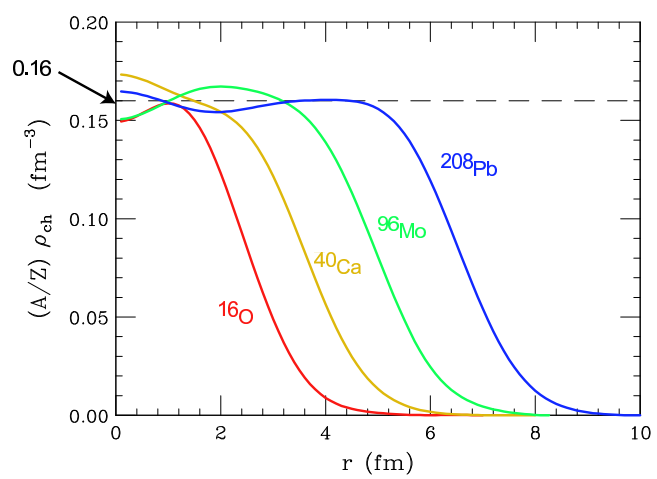


$$R \simeq r_0 A^{1/3}, \quad r_0 \simeq 1.2 \text{ fm}, \quad d \simeq 0.5 \text{ fm}$$

3) Sviluppo su base ortonormale. $\rho(r) = \sum_{n=1}^{Max} A_n P_n(r)$







Domande

[N1-7] Che tipo di andamento hanno le densità di carica dei nuclei? Confronta in un disegno le densità di un nucleo leggero e uno più pesante (ad es. ^{12}C e ^{208}Pb).

[N1-8] Qual'è l'ordine di grandezza dell'energia degli elettroni usati in processi di diffusione per lo studio dei nuclei atomici? Perché?

[N2-10] Qual'è il legame tra distribuzione di carica, fattore di forma e sezione d'urto elastica di elettroni su nuclei?

[N2-17] Un fascio di elettroni di energia ϵ_i diffonde da un bersaglio nucleare di massa M . L'energia degli elettroni rivelati ad un angolo di diffusione θ è ϵ_f . Utilizzando unità naturali ($\hbar = c = 1$), e considerando l'approssimazione ultra-relativistica ($m_e \ll \epsilon$):

- calcolare $|\mathbf{q}|$, il modulo del momento trasferito al nucleo,
- identificare per quale valore di θ il valore di $|\mathbf{q}|$ è massimo,
- nel caso b), e per un processo elastico, calcolare l'energia cinetica di rinculo del bersaglio.

[N3-3] Il fatto che il valore delle distribuzioni di carica al centro del nucleo non subisca grosse variazioni per tutti i nuclei con $A > 10$ è utilizzato per inferire una proprietà dell'interazione forte. Di quale proprietà si tratta? Qual'è la relazione tra questa proprietà e l'osservazione fatta sopra?

[N3-5] Nello studio della struttura nucleare che vantaggi presentano le sonde elettromagnetiche, soprattutto fotoni ed elettroni, rispetto a quelle adroniche?

[N3-13] Quali ipotesi riguardanti il proiettile e il bersaglio sono necessarie per ottenere la sezione d'urto di Mott? Quali sono le ipotesi che differiscono da quelle necessarie per ottenere la sezione d'urto di Rutherford ?

[N4-5] Che procedimento si usa per estrarre le distribuzioni di carica dei nuclei dai dati di sezione d'urto elastica elettrone-nucleo?

[P4-2] La sezione d'urto di diffusione elastica di elettroni su muoni nel sistema del laboratorio è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = f_{rec}\sigma_M \left[1 + 2\frac{\mathbf{q}^2 - \omega^2}{4M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

dove f_{rec} è un fattore che considera il rinculo del bersaglio, σ_M la sezione d'urto di Mott, $\mathbf{q}$ il trimomento trasferito, e ω l'energia persa dall'elettrone. Che tipo di processi descrive la sezione d'urto di Mott ? Quali sono le ipotesi che portano alla sua espressione ? Perchè nel caso in questione la sezione d'urto di Mott è corretta dalla presenza del secondo termine tra parentesi quadre ?