

INTRODUZIONE ALLA TEORIA  
DEI MOMENTI ANGOLARI  
IN MECCANICA QUANTISTICA

Giampaolo Co'

Dipartimento di Fisica Università di Lecce

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sez. di Lecce

# 1 Introduzione

Questa introduzione alla teoria dei momenti angolari in Meccanica Quantistica vuole essere una breve guida all'utilizzazione di tecniche di calcolo di momenti angolari utili quando si tratta di descrivere sistemi quantistici dominati da simmetrie di tipo sferico. Questo avviene soprattutto in fisica nucleare e atomica ma anche in fisica molecolare ed in chimica quantistica.

Il livello della trattazione è quello della collezione di formule per la loro facile utilizzazione nei calcoli di elementi di matrice. Il lettore che desideri una trattazione più esaustiva dell'argomento deve quindi rivolgersi ai manuali di meccanica quantistica e ai testi specialistici riportati nella bibliografia.

Per semplificare la notazione ho utilizzato  $\hbar = 1$  e il simbolo  $\hat{j} \equiv \sqrt{2j+1}$ .

## 2 Definizioni e proprietà dei momenti angolari in Meccanica Quantistica

In Meccanica Quantistica un operatore vettoriale è composto da tre operatori scalari linearmente indipendenti. Ad esempio, riferendosi a coordinate cartesiane:

$$\mathbf{B} \equiv (B_x, B_y, B_z) \quad (1)$$

Le tre componenti permettono di definire l'operatore lungo una direzione arbitraria  $\mathbf{u}$ :

$$B_u \equiv (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) = u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z \quad (2)$$

L'operatore **momento angolare** è un operatore vettoriale le cui tre componenti soddisfano la regola di commutazione:

$$[l_i, l_j] = i\hbar \sum_k l_k \epsilon_{ijk} \quad (3)$$

In questa equazione ho scritto esplicitamente  $\hbar$  per mettere in evidenza che in Meccanica Classica questo commutatore è nullo. Gli indici  $i, j, k$  possono assumere i valori 1, 2, 3 che corrispondono a  $x, y, z$  cartesiane. Ho indicato con  $\epsilon_{ijk}$  il pseudotensore totalmente antisimmetrico di Levi-Civita, nullo se due indici sono uguali, uguale ad 1 se la sequenza degli indici è ordinata secondo la progressione 1,2,3 oppure uguale a -1. La prima  $i$  a destra dell'uguaglianza (3) indica l'unità immaginaria  $\sqrt{-1}$  e non l'indice  $i$  del vettore.

L'analogo quantistico del momento angolare della meccanica classica, definito come  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , è un momento angolare secondo la definizione data dall'equazione (3), come si può dimostrare calcolando esplicitamente i commutatori e utilizzando  $[r_i, p_j] = i\hbar \delta(i, j)$  dove ho indicato con  $\delta(i, j)$  il simbolo di Kroenecker.

Dato che le tre componenti dell'operatore momento angolare non commutano, non possono avere autostati e autovalori comuni. D'altra parte l'operatore

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad (4)$$

commuta con ognuna delle componenti:

$$[\mathbf{J}^2, J_x] = [\mathbf{J}^2, J_y] = [\mathbf{J}^2, J_z] = 0 \quad (5)$$

Si possono quindi formare autostati comuni tra  $\mathbf{J}^2$  e una delle tre componenti operatoriali. Normalmente si sceglie la componente  $J_z$ . La scelta è ovviamente arbitraria perché è possibile definire come  $z$  una qualsiasi delle tre componenti. Indicando con  $|jm\rangle$  l'autostato comune a  $\mathbf{J}^2$  e  $J_z$  si ha che:

$$\mathbf{J}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle \quad (6)$$

$$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle \quad (7)$$

Ho indicato con  $j(j+1)$  l'autovalore di  $\mathbf{J}^2$ , in unità  $\hbar^2$ , e con  $m$  quello di  $J_z$ , in unità  $\hbar$ . Si può dimostrare che nel caso  $\mathbf{J}$  sia un **momento angolare orbitale**, ovvero del tipo  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ,  $j$  può assumere solo valori interi positivi valore nullo incluso. Una volta fissato il valore di  $j$ ,  $m$  può assumere tutti i valori interi, zero incluso, compresi tra  $-j$  e  $j$ . Gli autostati comuni di  $\mathbf{L}^2 = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})^2$  e  $L_z$  sono le armoniche sferiche  $Y_{l,m}(\theta, \phi)$  dove  $\theta$  e  $\phi$  sono gli angoli definiti dal vettore posizione  $\mathbf{r}$  nella solita definizione di coordinate polari sferiche. Qui sotto elenco alcune proprietà delle armoniche sferiche.

Definizione in termini di polinomi associati di Legendre  $P_l^m(\cos\theta)$ :

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (8)$$

Ortogonalità:

$$\int d\hat{r} Y_{l,m}^*(\hat{r}) Y_{l',m'}(\hat{r}) = \delta(l,l') \delta(m,m') \quad (9)$$

dove  $\hat{r} \equiv (\theta, \phi)$ .

Completezza:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l,m}(\theta_2, \phi_2) = \frac{\delta(\theta_1 - \theta_2) \delta(\phi_1 - \phi_2)}{\sin\theta} = \delta(\hat{r}_1 - \hat{r}_2) \quad (10)$$

Complesso coniugato e parità:

$$Y_{l,m}^*(\hat{r}) = (-1)^m Y_{l,-m}(\hat{r}) \quad (11)$$

$$Y_{l,m}(-\hat{r}) = Y_{l,m}(\theta \pm \pi, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{l,m}(\hat{r}) \quad (12)$$

Relazione con i polinomi associati di Legendre:

$$\sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\theta_1, \phi_1) Y_{l,m}(\theta_2, \phi_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\alpha_{12}) \quad (13)$$

Evidenze sperimentali mostrano che in Meccanica Quantistica esiste anche un momento angolare intrinseco delle particelle detto spin. Questo è un osservabile che non ha analogo classico. Per una categoria di particelle, dette fermioni,  $j$  assume solo valori positivi seminteri. Il valore minimo in questo caso è  $1/2$ . Analogamente  $m$  può assumere tutti i valori seminteri compresi tra  $-j$  e  $j$ .

Il caso più semplice di spin fermionico è quello dell'elettone. In questo caso si ha che:

$$s^2 \chi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \chi \quad (14)$$

$$s_z \chi = \pm \frac{1}{2} \chi \quad (15)$$

dove

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Si utilizzano normalmente le matrici hermitiane di Pauli per rappresentare le tre componenti dell'operatore di spin  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$  dove:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

con le seguenti proprietà:

$$\sigma_i^2 = 1, \quad \sigma_i \sigma_j = i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \sigma_x \sigma_y \sigma_z = 1 \quad (18)$$

$$\text{Tr} \sigma_i = 0, \quad \det \sigma_i = -1, \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (19)$$

### 3 Somma di momenti angolari

La somma vettoriale di momenti angolari produce un altro operatore vettoriale che ha le caratteristiche del momento angolare. Dato che gli autovalori del momento angolare sono quantizzati, anche gli autovalori del nuovo operatore lo saranno. Lo studio della somma dei momenti angolari consiste quindi nell'identificare la relazione tra gli autovalori e gli autostati degli operatori originari con quelli del nuovo operatore.

#### 3.1 Somma di due momenti angolari

Supponiamo che  $|j_a m_a j_b m_b\rangle$  sia un autostato comune a  $\mathbf{J}_a^2, \mathbf{J}_b^2, j_{a,z}$  e  $j_{b,z}$ :

$$\mathbf{j}_a^2 |j_a m_a j_b m_b\rangle = j_a(j_a + 1) |j_a m_a j_b m_b\rangle; \quad j_{a,z} |j_a m_a j_b m_b\rangle = m_a |j_a m_a j_b m_b\rangle \quad (20)$$

$$\mathbf{j}_b^2 |j_a m_a j_b m_b\rangle = j_b(j_b + 1) |j_a m_a j_b m_b\rangle; \quad j_{b,z} |j_a m_a j_b m_b\rangle = m_b |j_a m_a j_b m_b\rangle \quad (21)$$

Il vettore  $\mathbf{J}$  è somma di  $\mathbf{j}_a$  e  $\mathbf{j}_b$  e l'autostato comune di  $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{j}_a^2, \mathbf{j}_b^2$  è  $|j_a j_b J, M\rangle$ :

$$\mathbf{J}^2 |j_a j_b J M\rangle = J(J + 1) |j_a j_b J M\rangle; \quad J_z |j_a j_b J M\rangle = M |j_a j_b J M\rangle \quad (22)$$

I valori che  $J$  può assumere sono:

$$j_a + j_b, j_a + j_b - 1, \dots, |j_a - j_b|, \quad (23)$$

e  $M = m_a + m_b$ . Indichiamo l'insieme dei valori che  $J$  può assumere con la relazione triangolare:

$$|j_a - j_b| \leq J \leq j_a + j_b \quad (24)$$

Gli stati  $|j_a m_a j_b m_b\rangle$  e  $|JM\rangle$  formano basi complete nello spazio di Hilbert. E' possibile passare da una base all'altra con una trasformazione unitaria:

$$|j_a j_b J M\rangle = \sum_{m_a m_b} |j_a m_a j_b m_b\rangle \langle j_a m_a j_b m_b | J M \rangle \quad (25)$$

I coefficienti di questa trasformazione,  $\langle j_a m_a j_b m_b | J M \rangle$ , detti coefficienti di Clebsch-Gordan, dipendono solo dai momenti angolari, sono reali, sono diversi da zero solo se la relazione triangolare (24) e  $M = m_a + m_b$  sono soddisfatte, e godono delle seguenti proprietà di ortogonalità:

$$\sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | J M \rangle \langle j_a m_a j_b m_b | J' M' \rangle = \delta(J, J') \delta(M, M') \quad (26)$$

$$\sum_{JM} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle \langle j_a m'_a j_b m'_b | JM \rangle = \delta(m_a, m'_a) \delta(m_b, m'_b) \quad (27)$$

I valori dei coefficienti di Clebsch–Gordan sono per l'accoppiamento con spin  $\frac{1}{2}$  sono:

$$\langle l \mu \frac{1}{2} \frac{1}{2} | (l + \frac{1}{2})(\mu + \frac{1}{2}) \rangle = \sqrt{\frac{l + \mu + 1}{2l + 1}} \quad (28)$$

$$\langle l \mu \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | (l + \frac{1}{2})(\mu - \frac{1}{2}) \rangle = \sqrt{\frac{l - \mu + 1}{2l + 1}} \quad (29)$$

$$\langle l \mu \frac{1}{2} \frac{1}{2} | (l - \frac{1}{2})(\mu + \frac{1}{2}) \rangle = -\sqrt{\frac{l - \mu}{2l + 1}} \quad (30)$$

$$\langle l \mu \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | (l + \frac{1}{2})(\mu - \frac{1}{2}) \rangle = \sqrt{\frac{l + \mu}{2l + 1}} \quad (31)$$

Per lo sviluppo dei calcoli è utile l'uso dei simboli  $3j$  di Wigner che sono collegati ai coefficienti di Clebsch–Gordan dalla relazione:

$$\langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle = (-1)^{j_a - j_b + M} \widehat{J} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & -M \end{pmatrix} \quad (32)$$

da notare la fase e il segno  $-$  in  $M$ . Ovviamente:

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & M \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{se} \quad |j_a - j_b| \leq J \leq j_a + j_b \quad \text{e} \quad m_a + m_b + M = 0 \quad (33)$$

L'uso dei simboli  $3j$  è preferito rispetto a quello dei coefficienti di Clebsch–Gordan per le loro proprietà di simmetria:

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & M \end{pmatrix} = \quad (34)$$

$$= \begin{pmatrix} J & j_a & j_b \\ M & m_a & m_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_b & J & j_a \\ m_b & M & m_a \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$= (-1)^{j_a + j_b + J} \begin{pmatrix} j_a & J & j_b \\ m_a & M & m_b \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$= (-1)^{j_a + j_b + J} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ -m_a & -m_b & -M \end{pmatrix} \quad (37)$$

Le proprietà di ortogonalità dei Clebsch–Gordan si riproducono sui  $3j$  secondo le espressioni:

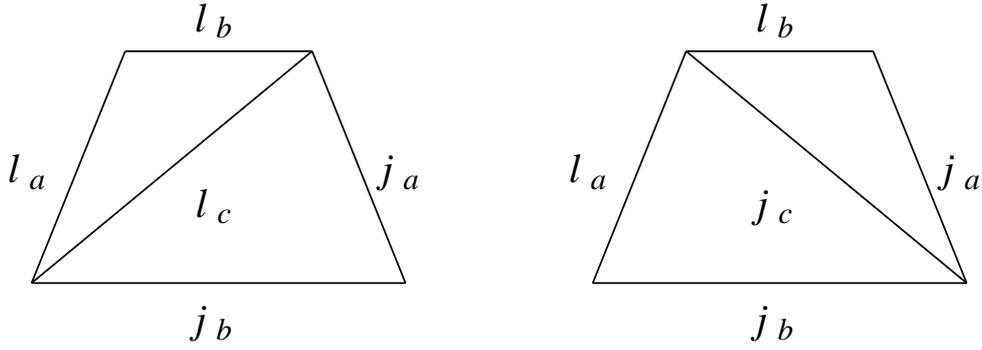
$$\sum_{JM} \widehat{J}^2 \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m'_a & m'_b & M \end{pmatrix} = \delta(m_a, m'_a) \delta(m_b, m'_b) \quad (38)$$

e

$$\sum_{m_a m_b} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J' \\ m_a & m_b & M' \end{pmatrix} = \frac{1}{\widehat{J}^2} \delta(J, J') \delta(M, M') \quad (39)$$

Un valore speciale dei  $3j$  è:

$$\begin{pmatrix} j_a & j_b & 0 \\ m_a & m_b & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_a - m_a}}{\widehat{j_a}} \delta(j_a, j_b) \delta(m_a, -m_b) \quad (40)$$



### 3.2 Somma di tre momenti angolari

I coefficienti di Clebsch–Gordan, ed i  $3j$ , stanno alla base di ogni tipo di somma di momenti angolari. Se si vogliono sommare 3 momenti angolari  $j_a$ ,  $j_b$  e  $j_c$ , si può prima sommare  $j_a$  e  $j_b$  e poi si può sommare  $j_c$ . D'altra parte si può ottenere lo stesso risultato cambiando l'ordine degli addendi. Date queste proprietà e le proprietà di simmetria dei  $3j$  si possono definire i coefficienti  $6j$  di Wigner che in analogia ai  $3j$  descrivono la somma di tre momenti angolari. Utilizzando la figura si può identificare ognuno dei simboli del  $6j$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} l_a & l_b & l_c \\ j_a & j_b & j_c \end{array} \right\} \neq 0 \quad (41)$$

solo se sono soddisfatte le seguenti relazioni triangolari

$$(l_a, l_b, l_c); (l_a, j_b, j_c); (j_a, l_b, j_c); (j_a, j_b, l_c) \quad (42)$$

La relazione che lega i  $6j$  ai simboli  $3j$  è:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc} l_a & l_b & l_c \\ n_a & n_b & n_c \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & l_b & l_c \\ j_a & j_b & j_c \end{array} \right\} &= \\ \sum_{m_a m_b m_c} (-1)^{j_a+j_b+j_c+m_a+m_b+m_c} &\left( \begin{array}{ccc} j_a & j_b & l_c \\ m_a & -m_b & n_c \end{array} \right) \\ &\left( \begin{array}{ccc} j_b & j_c & l_a \\ m_b & -m_c & n_a \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} j_c & j_a & l_b \\ m_c & -m_a & n_b \end{array} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Bisogna notare che i simboli  $6j$  sono indipendenti dagli autovalori delle componenti  $z$  dei momenti angolari coinvolti nella somma.

Le proprietà di simmetria dei  $3j$  inducono proprietà di simmetria anche nei  $6j$  che sono invarianti per ogni permutazione delle colonne e per lo scambio di due elementi della prima linea con i loro corrispondenti della seconda linea:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} l_a & l_b & l_c \\ j_a & j_b & j_c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} l_a & j_b & j_c \\ j_a & l_b & l_c \end{array} \right\} \quad (44)$$

Anche i simboli  $6j$  godono di una proprietà di ortogonalità:

$$\sum_{j_c} \hat{j}_c^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & j_c \\ l_a & l_b & l_c \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & j_c \\ l_a & l_b & l'_c \end{array} \right\} = \frac{\delta(l_c, l'_c)}{l_c^2} \quad (45)$$

Un valore interessante è:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & j_c \\ j_b & j_a & 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_a & 0 \\ j_b & j_b & j_c \end{array} \right\} = \frac{(-1)^{j_a+j_b+j_c}}{\hat{j}_a \hat{j}_b} \quad (46)$$

### 3.3 Somma di quattro momenti angolari

In stretta analogia ai simboli  $6j$  esistono anche i simboli  $9j$  di Wigner che descrivono la somma di quattro momenti angolari:

$$\sum_{\text{all } m} \left\{ \begin{matrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} \left( \begin{matrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} j_{31} & j_{32} & j_{33} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{matrix} \right) \\ \left( \begin{matrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ m_{11} & m_{21} & m_{31} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{matrix} \right) \end{matrix} \quad (47)$$

Nel caso dei  $9j$  le relazioni triangolari deono verificarsi per ogni riga e per ogni colonna. I  $9j$  sono invarianti per scambio di righe con colonne e per una permutazione ciclica delle righe o delle colonne. Nel caso di una permutazione non ciclica bisogna moltiplicare il  $9j$  per una fase data dalla somma dei 9 valori del simbolo.

Un valore particolare

$$\left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J \\ j_c & j_d & J' \\ L & L' & 0 \end{matrix} \right\} = \delta(J, J') \delta(L, L') \frac{(-)^{j_b+j_c+L+J}}{\widehat{L}\widehat{J}} \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J \\ j_d & j_c & L \end{matrix} \right\} \quad (48)$$

## 4 Tensori sferici irriducibili

### 4.1 Definizioni

Per collegare due sistemi di riferimento ruotati uno rispetto all'altro si fa uso delle matrici degli angoli di Eulero solitamente definiti come  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Rispetto questi angoli si definisce una matrice di rotazione  $D(\alpha, \beta, \gamma)$  che permette di collegare un punto  $\mathbf{r}$  nel sistema originario con un punto  $\mathbf{r}'$  nel sistema ruotato:

$$\mathbf{r}' = D(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{r} = e^{i\gamma J_z} e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z} \mathbf{r} \quad (49)$$

dove  $J_z$  e  $J_y$  sono le componenti  $z$  e  $y$  del momento angolare che origina la rotazione. La matrice  $D(\alpha, \beta, \gamma)$  descrive una trasformazione unitaria da un sistema di riferimento all'altro. Se  $|jm\rangle$  sono gli autostati di  $\mathbf{j}^2$ , si definiscono le matrici di Wigner come:

$$\langle jm' | D(\alpha, \beta, \gamma) | jm \rangle \equiv D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) \quad (50)$$

che risultano essere indipendenti dal sistema di riferimento.

Il concetto di un operatore tensore sferico irriducibile generalizza quello di operatore momento angolare. Si definisce **tensore sferico irriducibile**  $\mathbf{T}^k$ , di rango  $k$  un insieme di  $2k + 1$  operatori che si trasformano sotto rotazione di coordinate come:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) T_q^k D^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{q'=-k}^k T_{q'q}^k D_{q'q}^k(\alpha, \beta, \gamma) \quad (51)$$

Questa definizione mostra come la trasformazione delle componenti di un tensore sia legata solo alle matrici di rotazione di Wigner, quindi scollegata dal sistema di riferimento in cui si opera. Le tre componenti di un momento angolare si trasformano una nell'altra secondo la (51). I momenti angolari sono tensori sferici irriducibili di rango 1.

Dal punto di vista operativo è importante sapere come costruire tensori sferici irriducibili, partendo da altri operatori. Per questo scopo si utilizza il **prodotto tensoriale** definito come:

$$[T^p \otimes U^q]_{m_r}^r = \sum_{m_p m_q} \langle p m_p q m_q | r m_r \rangle T_{m_p}^p U_{m_q}^q \quad (52)$$

In questo modo partendo da due componenti dei tensori  $T$  e  $U$ , di rango  $p$  e  $q$  rispettivamente, si è costruita la componente  $m_r$  di un nuovo tensore di rango  $r$ , come prodotto tensoriale dei due tensori.

Gli operatori scalari sono tensori sferici irriducibili di rango 0, mentre, come già detto, i momenti angolari sono di rango 1.

Per poter utilizzare il formalismo dei tensori sferici irriducibili è necessario utilizzare le coordinate sferiche, legate a quelle cartesiane dalle relazioni:

$$r_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(x + iy) \quad ; \quad r_0 = z \quad ; \quad r_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy) \quad (53)$$

dove  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ .

Si può generare un tensore di rango 0, scalare, utilizzando due tensori con lo stesso rango:

$$[T^p \otimes U^p]_0^0 = \sum_{m_p} \langle p m_p p - m_p | 0 0 \rangle T_{m_p}^p U_{-m_p}^p = \sum_{m_p} \frac{(-)^{p-m_p}}{\hat{p}} T_{m_p}^p U_{-m_p}^p \quad (54)$$

Da questa relazione si ha che il prodotto scalare tra due tensori sferici irriducibili è definito come:

$$T^p \cdot U^p = \sum_m (-1)^m T_m^p U_{-m}^p = (-1)^p \hat{p} [T^p \otimes U^p]_0^0 \quad (55)$$

## 4.2 Il teorema di Wigner – Eckart

L'utilizzazione dei tensori sferici irriducibili viene fatta per il calcolo di elementi di matrice. Se il problema in oggetto possiede una simmetria di tipo sferico, è conveniente lavorare in coordinate polari sferiche. La parte degli elementi di matrice legate alle coordinate angolari può essere calcolata analiticamente utilizzando le tecnologie di somma di momenti angolari e i prodotti tensoriali.

L'elemento di matrice di un tensore sferico irriducibile tra due autostati di  $\mathbf{J}^2$  e  $J_z$  può essere scritto in modo da separare la parte dipendente dalle proiezioni sull'asse di quantizzazione. Questa parte è puramente geometrica ed è completamente esplicitata da un coefficiente di Clebsch–Gordan:

$$\langle j_a m_a | T_q^k | j_b m_b \rangle = (-1)^{2k} \frac{\langle j_b m_b k q | j_a m_a \rangle}{\hat{j}_a} \langle j_a || T^k || j_b \rangle \quad (56)$$

$$= (-1)^{j_a - m_a} \begin{pmatrix} j_a & k & j_b \\ -m_a & q & m_b \end{pmatrix} \langle j_a || T^k || j_b \rangle \quad (57)$$

L'equazione precedente in realtà è la definizione dell'elemento di matrice ridotto  $\langle j_a || T^k || j_b \rangle$ . Il messaggio importante del teorema è che la parte geometrica, il  $3j$ , e quella che contiene la fisica, l'elemento di matrice ridotto, possono essere fattorizzate.

L'hermitiano coniugato di un operatore congiunto secondo le definizioni che abbiamo adottato è :

$$(T_q^k)^\dagger = (-)^q T_{-q}^k \quad (58)$$

Questo porta alla seguente relazione tra elementi di matrice ridotti:

$$\langle j_a \| T^k \| j_b \rangle = (-)^{j_b - j_a} \langle j_b \| T^{k\dagger} \| j_a \rangle \quad (59)$$

che nel caso di operatori hermitiani diventa:

$$\langle j_a \| T^k \| j_b \rangle = (-)^{j_b - j_a} \langle j_b \| T^k \| j_a \rangle \quad (60)$$

Si possono costruire elementi di matrice elementari da cui, utilizzando la (52), si ottengono elementi di matrice più complessi.

$$m = \langle j m | J_z | j m \rangle = \langle j m | J_0^1 | j m \rangle = (-)^2 \frac{\langle j m 1 0 | j m \rangle}{\hat{j}} \langle j \| \mathbf{J} \| j \rangle \quad (61)$$

Dato che:

$$\langle j m 1 0 | j m \rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}} \quad (62)$$

si ha:

$$\langle j \| \mathbf{J} \| j \rangle = m \hat{j} \frac{\sqrt{j(j+1)}}{m} = \sqrt{j(j+1)(2j+1)} \quad (63)$$

Applicando (63) si ha che:

$$\langle \frac{1}{2} \| \mathbf{s} \| \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad ; \quad \langle \frac{1}{2} \| \boldsymbol{\sigma} \| \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{6} \quad (64)$$

Gli operatori tensoriali possono essere generati dal prodotto di due operatori tensoriali. In questo caso è possibile separare l'elemento di matrice ridotto dell'operatore in due elementi di matrice. Quando gli operatori agiscono nello stesso spazio si ha che:

$$\langle j_a \| [T^p \otimes T^q]^r \| j_b \rangle = (-1)^{j_a + r + j_b} \hat{r} \sum_{j_c} \left\{ \begin{matrix} j_b & j_a & r \\ p & q & j_c \end{matrix} \right\} \langle j_a \| T^p \| j_c \rangle \langle j_c \| T^q \| j_b \rangle \quad (65)$$

mentre quando agiscono in spazi differenti si ha che:

$$\langle j_a j_b J \| [T^p \otimes T^q]^r \| j_c j_d J' \rangle = \hat{J} \hat{r} \hat{J}' \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J \\ j_c & j_d & J' \\ p & q & r \end{matrix} \right\} \langle j_a \| T^p \| j_c \rangle \langle j_b \| T^q \| j_d \rangle \quad (66)$$

Le armoniche sferiche  $Y_{LM}$  sono operatori tensoriali irriducibili di rango  $L$ . I loro elementi di matrice ridotti possono essere espressi in termini di funzioni elementari:

$$\langle l_a \| Y_L \| l_b \rangle = (-1)^{l_a} \frac{\hat{l}_a \hat{l}_b \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l_a & L & l_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (67)$$

o nel caso di autostati di  $\mathbf{l} + \mathbf{s}$ :

$$\langle l_a \frac{1}{2} j_a \| Y_L \| l_b \frac{1}{2} j_b \rangle = (-1)^{j_a + \frac{1}{2}} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_a & L & j_b \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xi(l_a + l_b + L) \quad (68)$$

dove è  $\xi(L) = 1$  se  $L$  è pari e  $\xi(L) = 0$  altrimenti.

## 5 Formula di Landè

Questa espressione è utile per calcolare gli elementi di matrice diagonali in  $\mathbf{J}$  di un operatore vettoriale  $\mathbf{V}$ .

$$\langle JM|\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|JM \rangle = \sum_m (-)^m \langle JM|V_m J_{-m}|JM \rangle \quad (69)$$

dove è stata utilizzata la definizione (55) di prodotto scalare in coordinate sferiche.

Inserendo un set completo in (69) si ha:

$$\langle JM|\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|JM \rangle = \langle JM| \sum_m (-)^m V_m \sum_{J'M'} |J'M' \rangle \langle J'M'|J_{-m}|JM \rangle \quad (70)$$

e dato che  $J_{-m}$  è diagonale in  $J$  si ha:

$$\langle JM|\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|JM \rangle = \sum_{M'} \langle JM| \sum_m (-)^m V_m |JM' \rangle \langle JM'|J_{-m}|JM \rangle \quad (71)$$

Applicando il teorema di Wigner–Eckart ai due elementi di matrice si ha:

$$\langle JM|V_m|JM' \rangle = \frac{\langle JM'1m|JM \rangle}{\hat{J}} \langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle \quad (72)$$

$$\langle JM|J_m|JM' \rangle = \frac{\langle JM'1m|JM \rangle}{\hat{J}} \langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle \quad (73)$$

Data l'eguaglianza dei due coefficienti di Clebsch–Gordan si ha:

$$\begin{aligned} \langle JM|V_m|JM' \rangle &= \frac{\langle JM|J_m|JM' \rangle}{\langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle} \hat{J} \frac{\langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle}{\hat{J}} \\ &= \frac{\langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle}{\langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle} \langle JM|J_m|JM' \rangle \end{aligned} \quad (74)$$

Inserendo (74) nella (71) si ha:

$$\begin{aligned} \langle JM|\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|JM \rangle &= \sum_{M'} \sum_m (-)^m \frac{\langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle}{\langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle} \langle JM|J_m|JM' \rangle \langle JM'|J_{-m}|JM \rangle \\ &= \frac{\langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle}{\langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle} \langle JM| \sum_m (-)^m J_m J_{-m} |JM \rangle \\ &= \frac{\langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle}{\langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle} \langle JM|\mathbf{J}^2|JM \rangle = \frac{\langle J\|\mathbf{V}\|J \rangle}{\langle J\|\mathbf{J}\|J \rangle} J(J+1) \end{aligned} \quad (75)$$

Inserendo (75) in (74) si ha:

$$\langle JM|V_m|JM' \rangle = \frac{\langle JM|\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|JM \rangle}{J(J+1)} \langle JM|J_m|JM' \rangle \quad (76)$$

che generalizzata a tutte le componenti dà la formula di Landè:

$$\langle JM|\mathbf{V}|JM' \rangle = \frac{\langle JM|\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|JM \rangle}{J(J+1)} \langle JM|\mathbf{J}|JM' \rangle \quad (77)$$

## 6 Bibliografia

Una introduzione ai momenti angolari in Meccanica Quantistica si trova in ogni manuale: ad esempio il capitolo XIII del libro di **A. Messiah, Quantum Mechanics – North Holland, Amsterdam 1961** oppure il capitolo VI di **C. Cohen-Tannodji, B. Diu, F. Laloë, Quantum Mechanics – John Wiley and Sons, New York 1977**.

Ci sono vari libri che trattano specificamente dei momenti angolari in Meccanica Quantistica. Io ho adottato terminologia e convenzioni del libro di **A. E. Edmonds Angular Momentum in Quantum Mechanics – Princeton University Press, Princeton 1957**.

Vari libri contengono appendici che collezionano formule, un po' con lo stesso spirito di queste note. Particolarmente interessanti sono l'appendice C del libro di Messiah, l'appendice A del libro di Brussaard e Glaudemans e l'introduzione alle tavole di 3,6,9, e 12j di Manuel Rotenberg.