



Introduzione alla teoria formale dei molti corpi

Giampaolo Co'

Dipartimento di Fisica, Università del Salento
e
INFN, Sezione di Lecce

Indice

1	Introduzione	1
2	Rappresentazione dei numeri di occupazione	3
2.1	Determinanti di Slater	3
2.2	Operatori di creazione e di distruzione	4
2.3	Operatori di creazione e distruzione nel modello a Shell	6
2.4	Operatori a uno o a due corpi	7
2.5	Operatori di campo	9
3	Teoria Perturbativa dei sistemi a molti corpi	10
3.1	Rappresentazioni	10
3.1.1	Rappresentazione di Schrödinger	10
3.1.2	Rappresentazione di Heisenberg	10
3.1.3	Rappresentazione di interazione	11
3.2	Operatore di evoluzione temporale	12
3.3	Teorema di Wick	14
3.3.1	Operatore di ordinamento temporale T	14
3.3.2	Prodotto normale ordinato N	14
3.3.3	Contrazione	15
3.3.4	Formulazione del teorema di Wick	15
3.4	Accensione adiabatica dell'interazione	16
4	Teorema di Goldstone	18
4.1	Diagrammi di Goldstone	18
4.2	Teorema di Goldstone	20

1 Introduzione

Lo scopo delle teorie a molti corpi è quello di descrivere le proprietà di un sistema composto da molte particelle partendo dalla loro mutua interazione.

In realtà le teorie a molti corpi affrontano un problema tecnico, non di principio. Le equazioni da risolvere sono note e definite dal sistema in oggetto. Per un sistema classico si tratta di risolvere le equazioni di Newton oppure, nel caso relativistico, quelle di Einstein. Nel caso quantistico non relativistico le equazioni da risolvere sono quelle di Schrödinger. Queste equazioni sono ben definite per un numero qualsiasi di particelle, anche infinito. Purtroppo la soluzione esatta di queste equazioni diventa sempre più difficile con l'aumentare il numero delle particelle che compongono il sistema.

Il nucleo atomico è un esempio di sistema a molti corpi. Ipotizziamo sia composto solamente da neutroni e protoni. L'equazione di Schrödinger che descrive un nucleo di A nucleoni può essere scritta come:

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (1)$$

in cui sia l'hamiltoniana H che la funzione d'onda $|\Psi\rangle$ dipendono dalle A coordinate spaziali dei nucleoni che compongono il nucleo, e dal loro stato di spin e isospin. Il valore dell'energia del sistema è dato da:

$$\frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = E. \quad (2)$$

Per risolvere questa equazione è necessario calcolare un numero di integrali a $3A$ dimensioni (le coordinate spaziali dei nucleoni) pari al numero delle possibili configurazioni di spin e isospin. Per un nucleo composto da A nucleoni, di cui Z protoni, questo numero è dato dalla formula:

$$N_{conf} = 2^A \frac{A!}{Z!(A-Z)!} \quad (3)$$

Il numero delle configurazioni di spin e isospin per alcuni nuclei, è mostrato nella tabella.

Per nuclei come ^{40}Ca questo numero raggiunge l'ordine di grandezza del numero di Avogadro e, supponendo di poter calcolare l'integrale a 3^A dimensioni in un millisecondo (fantascienza al momento), significa che il computer dovrebbe lavorare per 10^{19} secondi, (ricordo che l'età stimata dell'universo è dell'ordine di 10^{18} secondi).

Questo esempio fa capire come l'approccio diretto al problema dei molti corpi sia pragmaticamente fallimentare e come sia necessario sviluppare delle metodologie di soluzione approssimate delle equazioni che descrivono il sistema: questo è lo scopo delle teorie a molti corpi.

Le tecniche a molti corpi che descriverò prescindono dalle caratteristiche dell'interazione e dalla struttura interna dei componenti fondamentali del sistema.

Strettamente parlando, oggi, in fisica, si ritiene che le uniche entità puntiformi, ovvero prive di struttura interna, siano leptoni e quark. Ovviamente tutta la materia è composta da leptoni e quark, ma nessuno penserebbe di descrivere il ^{208}Pb , l'acqua o una galassia partendo dalla loro composizione in termini di quark e leptoni. Il punto di partenza della descrizione dei sistemi a molti corpi è la scelta delle entità da considerare puntiformi a cui poi applicare le tecniche a molti corpi.

Anche se recentemente sono state presentate alcune formulazioni di teorie quantistiche a molti corpi relativistiche, il maggior sviluppo delle teorie a molti corpi è avvenuto nell'ambito della Meccanica Quantistica non Relativistica, ed è a questo ambito che si riferiscono queste note.

Le teorie a molti corpi non relativistiche possono essere divise in due grandi famiglie. Una è ispirata a tecniche di teoria dei campi, mentre l'altra proviene dalla meccanica statistica. Il linguaggio e le tecniche sono molto differenti e anche gli aspetti fisici che si preoccupano di descrivere sono molto diversi, anche se, a

Tabella 1: Numero di configurazioni di spin e isospin per alcuni nuclei.

Nucleo	Z	N=A-Z	N_{conf}
^3H	1	2	24
^3He	2	1	24
^4He	2	2	96
^6He	2	4	960
^6Li	3	3	1280
^8He	2	6	7168
^{12}C	6	6	3784704
^{16}O	8	8	$8.4 \cdot 10^8$
^{40}Ca	20	20	$1.5 \cdot 10^{23}$
^{48}Ca	20	28	$4.7 \cdot 10^{27}$

mio avviso, pregi e difetti dei due diversi approcci si equivalgano. Resta il fatto che l'approccio ispirato alla teoria dei campi è quello più noto ed ha imposto la nomenclatura e le problematiche nell'ambito della fisica dei multicorpi. Questo è l'approccio che viene presentato in queste note che sono concepite per essere **introduzione** alle tecniche a multicorpi, come d'altronde dice chiaramente il titolo. Lo scopo che mi sono prefisso è quello di esporre soprattutto le idee base e le problematiche. Per questo motivo molti argomenti sono trattati senza entrare nei dettagli delle dimostrazioni che, ho pensato, avrebbero ulteriormente appesantito il già pesante apparato formale. I lettori interessati ad approfondire le tematiche trattate possono fare riferimento ai testi che cito nella bibliografia.

Un ultimo avvertimento, in queste note mi occuperò esclusivamente di sistemi fermionici. L'estensione a sistemi bosonici non presenta difficoltà rilevanti sia dal punto di vista concettuale che dal punto di vista tecnico. Non è comunque da considerarsi immediata.

2 Rappresentazione dei numeri di occupazione

2.1 Determinanti di Slater

La Rappresentazione dei Numeri di Occupazione (RNO) basata sugli operatori di creazione e di distruzione è stata introdotta nella teoria dei campi. In questa teoria il formalismo della RNO è necessario dato che il numero di particelle non è fisso, poiché è energeticamente possibile creare coppie particella-antiparticella. In Meccanica Quantistica non relativistica, la creazione di coppie non è possibile. Il formalismo della RNO, anche se non necessario, risulta essere comunque comodo anche in ambito non relativistico per lo studio di sistemi composti da molte particelle.

Come è stato accennato nell'introduzione, considererò solo il caso fermionico.

Un sistema di N particelle è descritto dalla funzione d'onda che soddisfa l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo:

$$H\Psi(x_1, x_2 \dots x_N) = E\Psi(x_1, x_2 \dots x_N) \quad (4)$$

dove x indica tutti i numeri quantici che caratterizzano lo stato della particella: posizione (\mathbf{r}), spin (σ), isospin (τ) ed eventualmente, sapore e colore.

Dato che stiamo trattando un sistema fermionico Ψ deve essere antisimmetrica per lo scambio di due particelle:

$$\Psi(\dots x_i, \dots, x_j \dots) = -\Psi(\dots x_j, \dots, x_i \dots) \quad (5)$$

Ognuna di queste autofunzioni può essere scritta come combinazione lineare di un sistema completo di autofunzioni ortonormali. Lo stesso concetto può essere formulato dicendo che ogni autofunzione può essere sviluppata su una base ortonormale:

$$\Psi = \sum_i C_i \Phi_i, \quad (6)$$

dove ho indicato con Φ_i dei determinanti di Slater e con C_i delle costanti. Il determinante di Slater è costruito con prodotti di funzioni d'onda di particella singola che formano una base di funzioni ortonormali. Questa base viene costruita partendo da un'equazione di Schrödinger di singola particella:

$$h_\nu \phi_\nu(x) = \epsilon_\nu \phi_\nu(x), \quad (7)$$

dove ν è l'insieme dei numeri quantici caratterizzanti lo stato della particella; ad esempio le tre componenti dell'impulso \mathbf{p} nel caso di onde piane, o i numeri quantici principale, n , orbitale l , momento angolare j e la sua proiezione sull'asse di quantizzazione m , nel caso di stati generati da un potenziale a simmetria sferica.

Date le funzioni d'onda di singola particella ϕ_ν il determinante di Slater per N particelle viene costruito come:

$$\Phi(x_1, \dots x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-)^P P \phi_{\nu_1}(x_1) \phi_{\nu_2}(x_2) \dots \phi_{\nu_N}(x_N), \quad (8)$$

in cui ho indicato con P le permutazioni tra gli indici delle coordinate. Il fattore $\sqrt{N!}$ garantisce la normalizzazione:

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = 1 \quad (9)$$

L'eq. 8) può essere scritta come

$$\Phi(x_1 \dots x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{\nu_1}(x_1) & \dots & \phi_{\nu_N}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{\nu_1}(x_N) & \dots & \phi_{\nu_N}(x_N) \end{vmatrix} \quad (10)$$

Il determinante di Slater è autostato di un'hamiltoniana a multicorpi che è somma delle hamiltoniane di singola particella:

$$\sum_\nu h_\nu \Phi = H_{MF} \Phi = E_{MF} \Phi \quad (11)$$

2.2 Operatori di creazione e di distruzione

Il determinante di Slater contiene informazioni ridondanti. Ciò che interessa, dal punto di vista fisico, è sapere se lo stato di singola particella ϕ_ν sia occupato oppure no. L'informazione su quali siano i fermioni che occupano quello stato è irrilevante dato che tutti i fermioni che compongono il sistema sono identici. L'informazione contenuta nel determinante di Slater può essere condensata in un insieme di numeri ordinati che indicano quali stati di singola particella sono occupati. Si può quindi costruire una corrispondenza tra determinante di Slater e questo insieme di numeri ordinati:

$$|\Phi\rangle \longrightarrow |\nu_N, \nu_2 \dots \nu_1\rangle. \quad (12)$$

L'ordine normalmente utilizzato è quello dell'energia crescente dello stato di singola particella. A ν_N corrisponde lo stato ad energia più alta ecc.

Questo modo di rappresentare un determinante di Slater stato è chiamato Rappresentazione dei Numeri di Occupazione RNO.

È utile legare tra loro stati con diverso numero di particelle. Ad esempio, lo stato di singola particella

$$|\phi_\nu\rangle \equiv |\nu\rangle, \quad (13)$$

può essere pensato come ottenuto dallo stato vuoto $|0\rangle$ aggiungendo una particella. Simbolicamente:

$$|\nu\rangle = a_\nu^+ |0\rangle, \quad (14)$$

dove a_ν^+ rappresenta l'operatore che crea una particella nello stato caratterizzato dai numeri quantici ν .

In generale si ha che:

$$a_\nu^+ |\nu_N \dots \nu_1\rangle = |\nu \nu_N \dots \nu_1\rangle. \quad (15)$$

Lo stato di $N + 1$ particelle non è necessariamente ordinato. Per sistemare nella posizione corretta la particella ν è necessario considerare che ogni cambio di posizione produce una fase negativa che moltiplica lo stato (questo sempre perché consideriamo fermioni). Le possibili ambiguità del segno si possono fissare scegliendo la convenzione che il segno del determinante rimanga lo stesso se si crea una particella nella prima posizione, come è stato ipotizzato nello scrivere l'eq. 15).

Ad esempio:

$$a_{\nu_1}^+ |\nu_3 \nu_2\rangle = |\nu_1 \nu_3 \nu_2\rangle = -|\nu_3 \nu_1 \nu_2\rangle = |\nu_3 \nu_2 \nu_1\rangle \quad (16)$$

Dalle equazioni 14) e 15) segue che:

$$|\nu_N \dots \nu_1\rangle = a_{\nu_N}^+ a_{\nu_2}^+ \dots a_{\nu_1}^+ |0\rangle \quad (17)$$

Per le proprietà del determinante di Slater si ha che:

$$a_\nu^+ |\nu_N \dots \nu \dots \nu_1\rangle = 0. \quad (18)$$

Questa operazione inserisce in un determinante una riga, o colonna, uguale a una riga, o colonna, già presente. Dal punto di vista fisico l'eq. 18) esprime il principio di esclusione di Pauli.

Da quanto detto si può dedurre che gli operatori di creazione godono della seguente proprietà di anticommutazione:

$$a_{\nu_1}^+ a_{\nu_2}^+ = -a_{\nu_2}^+ a_{\nu_1}^+ \quad (19)$$

Per dimostrare l'eq. 19) supponiamo $\nu > \nu'$

$$\begin{aligned} a_\nu^+ a_{\nu'}^+ \Phi^N(N \dots \dots 1) &= \theta_\nu^A a_\nu^+ \Phi^{N+1}(N \dots \nu' \dots 1) = \theta_\nu^A \theta_{\nu'}^A \Phi^{N+2}(N \dots \nu \dots \nu' \dots 1) \\ a_{\nu'}^+ a_\nu^+ \Phi^N(N \dots \dots 1) &= \theta_{\nu'}^B a_{\nu'}^+ \Phi^{N+1}(N \dots \nu \dots 1) = \theta_{\nu'}^B \theta_\nu^B \Phi^{N+2}(N \dots \nu \dots \nu' \dots 1) \end{aligned} \quad (20)$$

In queste equazioni ho indicato con $\theta_\nu^A = (-)^p$ dove p è il numero di permutazioni necessarie per sistemare la particella ν , e analogamente $\theta_{\nu'}^A = (-)^{p'}$, mentre con θ_ν^B e $\theta_{\nu'}^B$ ho indicato le fasi ottenute nel secondo caso. Dato che ho ipotizzato che ν' sia minore di ν , ho che $\theta_\nu^A = \theta_{\nu'}^B$ perché il numero di permutazioni necessario per

sistemare ν è lo stesso nei due casi. D'altra parte $\theta_{\nu'}^A = -\theta_{\nu'}^B$ perchè nel secondo caso c'è una permutazione in più da effettuare per sistemare ν' . Quindi:

$$a_{\nu'}^+ a_{\nu'}^+ \Phi = -a_{\nu'}^+ a_{\nu'}^+ \Phi \quad (21)$$

da cui l'equazione operatoriale 19). Ovviamente l'equazione 19) implica che:

$$(a_{\nu'}^+)^2 = 0 \quad (22)$$

che è un altro modo di esprimere l'eq. 18).

Si può definire l'aggiunto dell'operatore a^+ la cui azione può essere compresa facendo l'aggiunto dell'eq. 14).

$$(a_{\nu}^+)^+ = a_{\nu} \quad (23)$$

$$|\nu\rangle = a_{\nu}^+ |0\rangle \quad \langle\nu| = \langle 0| a_{\nu} \quad (24)$$

$$\langle\nu_1\nu_2 \dots \nu_N| = \langle 0| a_{\nu_1} \dots a_{\nu_{N-1}} a_{\nu_N} \quad (25)$$

dato che $\langle\nu|\nu\rangle = 1$ si ha che:

$$\langle 0| \underbrace{a_{\nu} a_{\nu}^+}_{|0\rangle} |0\rangle = 1 \quad (26)$$

quindi,

$$\begin{aligned} |0\rangle &= a_{\nu} a_{\nu}^+ |0\rangle \\ &= a_{\nu} |\nu\rangle = |0\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

L'azione di a_{ν} sullo stato ket è quindi quella di distruggere una particella che si trova nello stato $|\nu\rangle$, da cui il nome di operatore di distruzione. Analizziamo il comportamento di a_{ν} .

$$a_{\nu} |\nu_N \dots \nu_{r+1} \nu_r \nu_{r-1} \dots \nu_1\rangle = |\nu_N \dots \nu_{r+1} \nu_{r-1} \dots \nu_1\rangle (-)^{r-1} \quad \text{se } \nu = \nu_r \quad (28)$$

Dato che, per definizione, nello stato vuoto non ci sono particelle, si ha che:

$$a_{\nu} |0\rangle = 0. \quad (29)$$

Quindi se il vettore $|\nu_N \dots \nu_1\rangle$ non contiene lo stato ν allora

$$a_{\nu} |\nu_N \dots \nu_1\rangle = 0. \quad (30)$$

Anche nel caso degli operatori di distruzione, utilizzando le metodologie descritte per gli operatori di creazione, si può dimostrare che:

$$a_{\nu_1} a_{\nu_2} = -a_{\nu_2} a_{\nu_1} \quad \text{quindi} \quad (a_{\nu})^2 = 0. \quad (31)$$

Allo stesso modo si può anche dimostrare che, per $\nu_1 \neq \nu_2$, si ha:

$$a_{\nu_1} a_{\nu_2}^+ = -a_{\nu_2}^+ a_{\nu_1}. \quad (32)$$

Utilizzando le proprietà precedentemente mostrate si ottiene:

$$a_{\nu} a_{\nu}^+ |\nu_N \dots \nu_1\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu \in S \\ |\nu_N \dots \nu_1\rangle & \text{se } \nu \notin S \end{cases} \quad S = \{\nu_N \dots \nu_1\} \quad (33)$$

$$a_{\nu}^+ a_{\nu} |\nu_N \dots \nu_1\rangle = \begin{cases} |\nu_N \dots \nu_1\rangle & \text{se } \nu \in S \\ 0 & \text{se } \nu \notin S \end{cases} \quad (34)$$

Dalle equazioni 33) e 34) si ha che:

$$(a_\nu a_\nu^+ + a_\nu^+ a_\nu) |\nu_N \dots \nu_1\rangle = |\nu_N \dots \nu_1\rangle. \quad (35)$$

Questa equazione è valida per qualsiasi vettore $|\nu_N \dots \nu_1\rangle$ dato che uno dei due addendi darà risultato nullo, mentre l'altro produrrà il vettore di partenza.

L'eq. 34) definisce l'operatore numero di occupazione:

$$n_\nu = a_\nu^+ a_\nu \quad (36)$$

i cui autovalori sono 1 o 0 se lo stato a multicorpi a cui è applicato contiene o no lo stato di singola particella ν .

La relazione operatoriale data dalle 33) e 34) è:

$$a_\nu a_\nu^+ + a_\nu^+ a_\nu = 1 \quad (37)$$

Le relazioni 19), 31), 32) che definiscono le proprietà degli operatori di creazione e di distruzione, possono essere sintetizzate come:

$$\{a_\nu, a_{\nu'}^+\} = \delta_{\nu\nu'} \quad \{a_\nu, a_{\nu'}\} = 0 \quad \{a_\nu^+, a_{\nu'}^+\} = 0, \quad (38)$$

dove il simbolo $\{, \}$ indica l'operatore di anticommutazione.

2.3 Operatori di creazione e distruzione nel modello a Shell

Questo paragrafo riguarda la definizione degli operatori di creazione e di distruzione nel caso specifico in cui si voglia utilizzare una descrizione basata sulla simmetria sferica del problema.

La tematica è piuttosto specialistica e non verrà ripresa nelle parti successive. Il lettore non interessato a questo problema può tranquillamente passare ai paragrafi successivi senza comprometterne la comprensione.

Nel caso di un'hamiltoniana di singola particella che gode di simmetria sferica, i numeri quantici che caratterizzano gli stati sono: il numero quantico principale n , il momento angolare orbitale l , il momento angolare totale j e anche m , la proiezione di j sull'asse di quantizzazione z (abbiamo ipotizzato una descrizione in cui l'accoppiamento tra momenti angolari e spin avviene nello schema jj). Nel seguito supporrò sottintesi n e l .

L'azione degli operatori di creazione sarà:

$$a_{j,m}^+ |0\rangle = |jm\rangle \quad (39)$$

che indica che l'operatore $a_{j,m}^+$ crea una particella sul livello $|jm\rangle$. Il livello j è $2j+1$ volte degenero, per questo motivo è necessario specificare anche m .

Le $2j+1$ componenti di $a_{j,m}^+$ si comportano in modo tale da formare un tensore sferico irriducibile che soddisfa le equazioni:

$$[J_z, a_{j,m}^+] = m a_{j,m}^+ \quad (40)$$

$$[J_\pm, a_{j,m}^+] = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{1/2} a_{j,m \pm 1}^+, \quad (41)$$

dove abbiamo indicato con J_\pm e J_z le componenti sferiche del momento angolare generalizzato del sistema.

L'equazione che trasforma le componenti di un tensore sferico irriducibile in quelle del suo hermitiano è:

$$(T_q^k)^+ = (T_{-q}^k) (-)^q. \quad (42)$$

Questo significa che l'aggiunto di $a_{j,m}^+$, $a_{j,m}$, non è componente di un tensore sferico irriducibile, ma lo è invece

$$\tilde{a}_{j,m} = (-)^{j+m} a_{j,-m} \quad (43)$$

Nei sistemi a invarianza rotazionale è molto conveniente lavorare con operatori che si comportano come tensori sferici irriducibili, quindi si preferisce utilizzare $\tilde{a}_{j,m}$ al posto di $a_{j,m}$. Le proprietà di anticommutazione sono:

$$\left\{ a_{j,m}^+, a_{j,m'}^+ \right\} = 0 \quad \left\{ \tilde{a}_{j,m}, \tilde{a}_{j',m'} \right\} = 0 \quad (44)$$

$$\left\{ \tilde{a}_{j,m}, a_{j',m'}^+ \right\} = (-)^{j-m} \delta_{j,j'} \delta_{-m,m'} \quad (45)$$

Si può creare uno stato di N particelle applicando successivamente $a_{j,m}^+$ al vuoto e utilizzando le regole di accoppiamento dei momenti angolari. Per esempio l'operatore di creazione di due particelle diventa:

$$A^+(j_1 j_2; JM) = \frac{1}{(1 + \delta_{j_1 j_2})^{1/2}} [a_{j_1}^+ \otimes a_{j_2}^+]_M^J \quad (46)$$

dove abbiamo definito:

$$[a_{j_1}^+ \otimes a_{j_2}^+]_M^J = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle a_{j_1, m_1}^+ a_{j_2, m_2}^+ \quad (47)$$

in cui abbiamo indicato con $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$ il coefficiente di Clebsch Gordan. L'operatore di distruzione di una coppia di particelle diventa:

$$\tilde{A}(j_1 j_2; JM) = (-)^{J-M} [A^+(j_1 j_2 J - M)]^+ = -\frac{1}{(1 + \delta_{j_1 j_2})^{1/2}} [\tilde{a}_{j_1} \otimes \tilde{a}_{j_2}]_M^J \quad (48)$$

e l'operatore di creazione di una coppia particella-buca è:

$$U(j_1 j_2 JM) = [a_{j_1}^+ \otimes \tilde{a}_{j_2}]_M^J \quad (49)$$

Nel caso $j_1 = j_2$, le due particelle sono distinte da $m_1 \neq m_2$ quindi, dato che le equazioni precedenti comprendono una somma sulle componenti m_1 e m_2 bisogna dividere per $\sqrt{2}$ dato che si contano due volte configurazioni indistinguibili. Ad esempio la configurazione in cui la terza componente della particella 1 è m_1 e quella della particella 2 è m_2 , è identica a quella in cui la terza componente della particella 1 è m_2 e quella della particella 2 è con m_1 .

2.4 Operatori a uno o a due corpi

La corrispondenza tra vettori nella RNO e vettori nello spazio delle configurazioni può essere spinta più avanti per trovare una corrispondenza tra operatori.

Chiamiamo $|S\rangle$ e $|S'\rangle$ due vettori nella RNO e $|\Phi_S\rangle$ e $|\Phi_{S'}\rangle$ i due corrispondenti determinanti di Slater. Considero nello spazio delle configurazioni un qualsiasi operatore a molti corpi $O(x_1 \dots x_N)$. Si ottiene l'espressione corrispondente O dell'operatore nella RNO imponendo l'uguaglianza degli elementi di matrice:

$$\langle \Phi_{S'} | O | \Phi_S \rangle = \langle S' | O | S \rangle \quad (50)$$

Nello studio dei problemi a multicorpi gli operatori che si incontrano più frequentemente sono quelli a uno e due corpi.

Nello spazio delle coordinate, un operatore a un corpo è dato dalla somma di operatori che dipendono solo da una coordinata;

$$O^I(x_1 \dots x_N) = \sum_{i=1}^N o^I(x_i) \quad (51)$$

L'energia cinetica è un tipico operatore a un corpo.

Utilizzo per semplicità una base di funzioni d'onda di singola particella in cui O^I è diagonale

$$o^I(x) \phi_\nu(x) = \omega_\nu \phi_\nu(x). \quad (52)$$

Utilizzando il determinante di Slater formato dalle ϕ_ν si ha che:

$$\begin{aligned}
O^I(x_1 \dots x_N) \Phi_S(x_1 \dots x_N) &= \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-)^P \sum_{i=1}^N o^I(x_i) P \phi_{\nu_1}(x_1) \dots \phi_{\nu_N}(x_N) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-)^P \sum_{i=1}^N P o^I(x_i) \phi_{\nu_1}(x_1) \dots \phi_{\nu_N}(x_N) \\
&= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-)^P \sum_{i=1}^N (\omega_{\nu_i} P \phi_{\nu_1}(x_1) \dots \phi_{\nu_N}(x_N)) \\
&= \sum_{i=1}^N \omega_{\nu_i} \Phi_S = \sum_{\nu \text{ occupati}} \omega_\nu \Phi_S = \sum_{\nu} \omega_\nu n_\nu \Phi_S \tag{53}
\end{aligned}$$

Dove ho indicato con P l'operatore che effettua tutte le possibili permutazioni. Nel risultato precedente $n_\nu = 1$ per i livelli occupati e $n_\nu = 0$ per quelli non occupati. Il calcolo dell'elemento di matrice diventa:

$$\langle \Phi_{S'} | O^I | \Phi_S \rangle = \sum_{\nu} \omega_\nu n_\nu \langle \Phi_{S'} | \Phi_S \rangle = \tag{54}$$

$$= \sum_{\nu} \omega_\nu \langle S' | n_\nu | S \rangle = \langle S' | O^I | S \rangle \tag{55}$$

dove è stato usato l'operatore numero di occupazione definito in eq. 34). Sostituendo si ha che:

$$\langle S' | O^I | S \rangle = \langle S' | \sum_{\nu} \omega_\nu a_\nu^+ a_\nu | S \rangle \tag{56}$$

da cui:

$$O^I = \sum_{\nu\nu'} \omega_{\nu\nu'} a_\nu^+ a_\nu \tag{57}$$

dove

$$\omega_{\nu\nu'} = \int d^3r \phi_\nu^*(\mathbf{r}) o^I(\mathbf{r}) \phi_{\nu'}(\mathbf{r}). \tag{58}$$

Riferendosi ad una base qualsiasi l'operatore ad un corpo può essere scritto come:

$$O^I = \sum_{\nu\nu'} O_{\nu\nu'}^I a_\nu^+ a_{\nu'} \tag{59}$$

$$O_{\nu\nu'}^I = \int d^3x \phi_\nu^*(\mathbf{x}) o^I(\mathbf{x}) \phi_{\nu'}(\mathbf{x}) \equiv \langle \nu | o^I | \nu' \rangle \tag{60}$$

Questa equazione mostra che l'operatore ad un corpo distrugge una particella in ν' e ne crea una nel livello ν . È ovvio che ν' deve essere occupato e ν vuoto. Quindi l'operatore può creare una coppia particella-buca. Nel caso in cui $|S\rangle = |S'\rangle$ i soli contributi non nulli sono quelli in cui $\nu' = \nu$.

La stessa procedura può essere utilizzata per ottenere l'espressione in RNO degli operatori a due corpi, definiti come somma di operatori che dipendono da due coordinate:

$$O^{II}(x_1 \dots x_N) = \sum_{i < j} o^{II}(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} o^{II}(x_i, x_j) \tag{61}$$

Un tipico esempio di operatore a due corpi è il potenziale d'interazione $V = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(x_i, x_j)$. Operatori di questo tipo nella RNO si esprimono come:

$$O^{II} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} O_{\nu\nu'\mu\mu'}^{II} a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'}, \tag{62}$$

in cui abbiamo definito:

$$O_{\nu\mu\nu'\mu'}^{II} = \langle \nu\mu | O^{II} | \nu'\mu' \rangle = \int dx dx' \phi_\nu^*(x) \phi_\mu^*(x') o^{II}(x, x') \phi_{\nu'}(x) \phi_{\mu'}(x') \quad (63)$$

Da notare l'ordine degli operatori e degli indici.

In questo caso, l'operatore distrugge due particelle al di sotto della superficie di Fermi e ne crea due al di sopra.

2.5 Operatori di campo

Gli operatori di creazione a_ν^+ e distruzione a_ν si riferiscono a una base specifica i cui stati di particella singola sono caratterizzati dai numeri quantici ν . Si può passare ad una rappresentazione indipendente dalla base utilizzando gli operatori di campo.

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_\nu a_\nu \phi_\nu(\mathbf{r}) \quad \text{distrugge una particella nel punto } \mathbf{r} \quad (64)$$

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \sum_\nu a_\nu^+ \phi_\nu^*(\mathbf{r}) \quad \text{crea una particella nel punto } \mathbf{r}. \quad (65)$$

Nota che ϕ è una funzione d'onda di singola particella, mentre ψ^+ e ψ sono operatori che creano e distruggono una particella nel punto \mathbf{r} .

Le equazioni precedenti possono essere invertite per esprimere gli operatori di creazione e di distruzione in funzione degli operatori di campo.

$$a_\nu = \int d^3r \phi_\nu^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad a_\nu^+ = \int d^3r \phi_\nu(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) \quad (66)$$

Utilizzando le proprietà di anticommutazione 38) degli operatori di creazione e distruzione, si ottengono analoghe relazioni per gli operatori di campo:

$$\{\psi^+(\mathbf{r}), \psi^+(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = 0 \quad \{\psi^+(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (67)$$

Gli operatori a uno o due corpi possono essere espressi in termini di operatori di campo come:

$$O^I = \int d^3r \psi^+(\mathbf{r}) o^I(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad (68)$$

$$O^{II} = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \psi^+(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}') O^{II}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \quad (69)$$

L'operatore hamiltoniano può essere espresso come:

$$H = T + V = \sum_{\nu\nu'} \langle \nu | T | \nu' \rangle a_\nu^+ a_{\nu'} + \frac{1}{2} \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} \langle \nu\mu | V | \nu'\mu' \rangle a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'} \quad (70)$$

$$= \int d^3r \psi^+(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \psi^+(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}). \quad (71)$$

3 Teoria Perturbativa dei sistemi a molti corpi

3.1 Rappresentazioni

I valori degli osservabili in meccanica quantistica sono ottenuti calcolando elementi di matrice di operatori. Queste quantità sono invarianti se si applica la stessa trasformazione unitaria agli stati e agli operatori. Queste trasformazioni unitarie possono contenere il tempo e, per esempio, possono trasformare gli stati $|\Psi_S(t)\rangle$ in stati indipendenti dal tempo. In questo caso la dipendenza temporale sarà inserita nella definizione degli operatori. Queste trasformazioni unitarie dipendenti dal tempo definiscono quelle che sono chiamate *rappresentazioni* della Meccanica Quantistica.

3.1.1 Rappresentazione di Schrödinger

La rappresentazione più comune è quella di Schrödinger in cui i vettori che descrivono lo stato del sistema sono dipendenti dal tempo, mentre gli operatori sono indipendenti dal tempo. In questa rappresentazione, l'evoluzione temporale del sistema è descritta dall'equazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = H |\Psi_S(t)\rangle, \quad (72)$$

detta appunto equazione di Schrödinger.

Per sistemi in cui l'energia è conservata, l'operatore hamiltoniano H non dipende esplicitamente dal tempo. In questo caso la soluzione formale della 72) è:

$$|\Psi_S(t)\rangle = e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}} |\Psi_S(t_0)\rangle. \quad (73)$$

In questa equazione è presente la funzione esponenziale di un operatore. L'azione di questa funzione sullo stato $|\Psi_S(t_0)\rangle$ è definita in termini dello sviluppo in serie dell'esponenziale. Inoltre, dato che H è un operatore hermitiano, e^H è unitario.

L'equazione 73) permette di costruire la soluzione dell'eq. di Schrödinger ad un qualsiasi tempo t una volta noto lo stato del sistema ad un tempo t_0 .

3.1.2 Rappresentazione di Heisenberg

In questa rappresentazione gli stati sono indipendenti dal tempo mentre gli operatori hanno una esplicita dipendenza temporale. Gli stati del sistema in rappresentazione di Heisenberg sono legati a quelli della rappresentazione di Schrödinger dalla relazione:

$$|\Psi_H(t)\rangle \equiv e^{i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle. \quad (74)$$

L'evoluzione temporale degli stati in rappresentazione di Heisenberg è data da:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_H(t)\rangle &= -He^{i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle + e^{i\frac{Ht}{\hbar}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle = \text{per la 72)} \\ &= -He^{i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle + He^{i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

da cui risulta che $|\Psi_H\rangle$ è indipendente dal tempo.

Per ottenere la relazione che descrive gli operatori nella rappresentazione di Heisenberg in termini degli operatori in rappresentazione di Schrödinger è conveniente uguagliare gli elementi di matrice espressi nelle due rappresentazioni:

$$\langle \Psi_S(t) | O_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_H | e^{i\frac{Ht}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | \Psi_H \rangle, \quad (76)$$

da cui si ottiene la definizione:

$$O_H \equiv e^{i\frac{Ht}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \quad (77)$$

L'evoluzione temporale dell'operatore dà l'equazione del moto:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O_H(t) &= -He^{i\frac{Ht}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} + e^{i\frac{Ht}{\hbar}} O_S H e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} = \\ &= -HO_H + O_H H = [O_H, H] \end{aligned} \quad (78)$$

dove si è sfruttato il fatto che H e $e^{i\frac{Ht}{\hbar}}$ commutano. In generale, O_H e H non commutano. Se commutano l'equazione 78) implica che O_H sia una costante del moto.

3.1.3 Rappresentazione di interazione

Questa rappresentazione intermedia tra quella di Heisenberg e quella di Schrödinger è quella di maggior interesse nella descrizione di sistemi a multicorpi.

Supponiamo che l'hamiltoniana sia indipendente dal tempo e possa essere suddivisa in due termini:

$$H = H_0 + H_1. \quad (79)$$

Definiamo un vettore di stato in rappresentazione di interazione come:

$$|\Psi_I(t)\rangle \equiv e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle. \quad (80)$$

Lo sviluppo temporale dello stato $|\Psi_I(t)\rangle$ è dato da:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle &= -H_0 e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle + e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle \\ &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} [-H_0 + H_0 + H_1] e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle = \\ &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} H_1 e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_I(t)\rangle = H_1(t) |\Psi_I(t)\rangle \end{aligned} \quad (81)$$

Bisogna considerare che in generale H_1 e H_0 non commutano.

Anche in questo caso, l'espressione degli operatori in rappresentazione di interazione in termini di operatori in rappresentazione Schrödinger può essere ottenuta eguagliando due elementi di matrice arbitrari nelle due rappresentazioni:

$$\langle \Psi_S(t) | O_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_I | e^{+i\frac{H_0 t}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} | \Psi_I \rangle \quad (82)$$

da cui si ottiene la definizione:

$$O_I(t) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \quad (83)$$

Dalle equazioni precedenti appare chiaro che nella rappresentazione di interazione, sia gli operatori che gli stati dipendono dal tempo. L'equazione del moto in rappresentazione di interazione è:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O_I(t) &= -H_0 e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} + e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} O_S H_0 e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \\ &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} H_0 - H_0 e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} O_S e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \\ &= O_I H_0 - H_0 O_I = [O_I(t), H_0] \end{aligned} \quad (84)$$

Ricavo le espressioni degli operatori di creazione e di distruzione in rappresentazione di interazione. Per semplificare il calcolo considero una situazione in cui H_0 sia diagonale. Questo equivale a dire che H_0 è un operatore ad un corpo.

$$H_0 = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (85)$$

L'equazione del moto per un operatore di distruzione in rappresentazione di interazione è:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} a_{kI}(t) &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} [a_{kS}, H_0] e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \left[a_{kS}, \sum_{k'} \hbar\omega_{k'} a_{k'S}^+ a_{k'S} \right] e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \\
&= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} \sum_{k'} [a_{kS}, a_{k'S}^+ a_{k'S}] e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \hbar\omega_{k'} =
\end{aligned}$$

Il termine tra parentesi diventa (tralasciando il pedice S):

$$[a_k a_{k'}^+ a_{k'} - a_{k'}^+ (-a_k a_{k'})] = [a_k a_{k'}^+ a_{k'} - (-\delta_{kk'} a_{k'} + a_k a_{k'}^+ a_{k'})] = a_k$$

Si ha quindi:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} a_{kI}(t) = \hbar\omega_k a_{kI}(t) \quad (86)$$

da cui:

$$a_{kI}(t) = a_k e^{-i\omega_k t}. \quad (87)$$

Per l'aggiunto si ottiene:

$$a_{kI}^+(t) = a_k^+ e^{i\omega_k t} \quad (88)$$

Siccome la dipendenza temporale è presente solo nella fase complessa, le proprietà di (anti)commutazione degli operatori di creazione e distruzione risultano identiche nelle rappresentazioni di interazione e di Schrödinger. Abbiamo visto che, in rappresentazione di Schrödinger ogni operatore può essere rappresentato in termini di a_k e a_k^+ . Per ottenere l'espressione dell'operatore in rappresentazione d'interazione basta sostituire a_k con $a_{kI}(t)$ e analogamente con gli operatori di creazione. Anche gli operatori di campo sono esprimibili in termini di a_k e a_k^+ , e quindi la loro espressione in rappresentazione di interazione può essere ottenuta applicando la stessa regola empirica.

3.2 Operatore di evoluzione temporale

Definiamo un operatore $U(t, t_0)$, detto di evoluzione temporale, che determina il vettore di stato al tempo t una volta noto il vettore di stato al tempo t_0 .

$$|\Psi_I(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle \quad (89)$$

Dalla definizione di stato in rappresentazione di interazione e dall'equazione 73) si ha:

$$\begin{aligned}
|\Psi_I(t)\rangle &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} |\Psi_S(t_0)\rangle \\
&= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)} e^{-i\frac{H_0 t_0}{\hbar}} |\Psi_I(t_0)\rangle
\end{aligned}$$

da cui:

$$U(t, t_0) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}} e^{-i\frac{H_0 t_0}{\hbar}} \quad (90)$$

Le proprietà di $U(t, t_0)$ vengono dedotte dalle equazioni precedenti. Ad esempio:

$$U(t_0, t_0) = 1, \quad (91)$$

e anche:

$$U^+(t, t_0) U(t, t_0) = U(t, t_0) U^+(t, t_0) = 1 \quad (92)$$

che implica:

$$U^+(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0) \quad (93)$$

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \quad (94)$$

$$U(t, t_0)U(t_0, t) = 1 \quad \text{che implica} \quad U(t_0, t) = U^+(t, t_0). \quad (95)$$

L'equazione 90) non è molto utile per il calcolo di osservabili. Dal punto di vista della complessità di calcolo, risolvere l'eq. 89) utilizzando l'espressione 90) equivale a risolvere l'equazione di Schrödinger. Per superare questo problema è conveniente utilizzare un'espressione integrale di $U(t, t_0)$.

Riscrivo l'equazione 81)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = H_1(t) |\Psi_I(t)\rangle \quad (96)$$

e, usando la 89) ottengo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle = H_1(t) U(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle. \quad (97)$$

Dato che $|\Psi_I(t_0)\rangle$ è costante nel tempo si ha l'equazione operatoriale:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_1(t) U(t, t_0) \quad (98)$$

e integrando da t_0 a t si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} U(t', t_0) dt' &= \int_{t_0}^t H_1(t') U(t', t_0) dt' \\ = i\hbar [U(t, t_0) - U(t_0, t_0)] &= \int_{t_0}^t dt' H_1(t') U(t', t_0). \end{aligned}$$

Considerando l'equazione 91) si ha:

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_1(t') U(t', t_0) \quad (99)$$

La soluzione formale dell'equazione 99) si ottiene sostituendo al posto di $U(t', t_0)$ l'equazione stessa:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t'') [1 - \dots] \right] \\ U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_1(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t') H_1(t'') + \dots \end{aligned} \quad (100)$$

$$t > t'$$

Consideriamo il terzo termine dell'equazione:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t') H_1(t'') &= 1/2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t') H_1(t'') + 1/2 \int_{t_0}^t dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' H_1(t'') H_1(t') \\ &\quad t' > t'' \qquad \qquad \qquad t'' > t' \end{aligned} \quad (101)$$

Nella parte destra dell'equazione 101) ho cambiato solo l'ordine degli indici muti. Dato che in generale si ha che:

$$\int_a^b dy \int_y^b dx f(x) f(y) = \int_a^b dx \int_a^x dy f(x) f(y) \quad (102)$$

l'eq. 101) può essere scritta come segue:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t') H_1(t'') = \\
1/2 & \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t') H_1(t'') + 1/2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' H_1(t'') H_1(t') = \\
1/2 & \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' [H_1(t') H_1(t'') \theta(t' - t'') + H_1(t'') H_1(t') \theta(t'' - t')] = \\
1/2 & \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' T [H_1(t') H_1(t'')] \tag{103}
\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto l'operatore di ordinamento temporale $T[H_1(t')H_1(t'')]$ la cui azione consiste nel sistemare in ordine di tempo decrescente da sinistra a destra gli operatori su cui agisce.

Generalizzando il risultato 103) per un termine qualsiasi, si ottiene per l'eq. 100) l'espressione

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T [H_1(t_1) \dots H_1(t_n)]. \tag{104}$$

3.3 Teorema di Wick

Prima di affrontare l'utilizzazione dell'operatore di evoluzione temporale nell'ambito dello sviluppo perturbativo presenterò un teorema estremamente utile per calcolare valori di aspettazione di operatori espressi in seconda quantizzazione.

3.3.1 Operatore di ordinamento temporale T

Ho già introdotto nell'equazione 103) l'operatore di ordinamento temporale

$$T[ABC\dots], \tag{105}$$

che ordina gli operatori di creazione e distruzione in modo da avere i tempi più grandi a sinistra. Nell'effettuare questo ordinamento bisogna considerare una fase negativa per ogni scambio tra due operatori.

Ad esempio, supponendo $t_{n+1} > t_n$ si ha che:

$$T [a(t_3)a^+(t_1)a^+(t_2)] = -a(t_3)a^+(t_2)a^+(t_1). \tag{106}$$

Un altro esempio:

$$T [a(t_2)a^+(t_1)a^+(t_3)] = a^+(t_3)a(t_2)a^+(t_1) \tag{107}$$

3.3.2 Prodotto normale ordinato N

L'azione di questo operatore su un insieme di operatori di creazione e distruzione è quella di ordinarli in modo tale che il loro valore medio sullo stato fondamentale sia zero.

L'ordinamento Normale dipende quindi dalla definizione di stato fondamentale del sistema.

Considero come stato fondamentale il vuoto fisico $|0\rangle$, cioè uno stato privo di particelle. In questo caso l'azione dell'operatore Prodotto Normale Ordinato è quella di sistemare a destra gli operatori di distruzione e a sinistra quelli di creazione, questo perchè $a|0\rangle = 0$, e $\langle 0|a^+ = 0$.

Ad esempio:

$$N[a_1 a_2^+ a_3 a_4^+] = -a_2^+ a_4^+ a_1 a_3 \tag{108}$$

Questo è il modo in cui il Prodotto Normale Ordinato viene utilizzato in teoria dei campi.

Nel caso della descrizione di sistemi a molti corpi, è molto più conveniente considerare come stato fondamentale del sistema, non tanto lo stato di vuoto $|0\rangle$ ma piuttosto lo stato fondamentale di campo medio $|\Phi_0\rangle$ in

cui tutti i livelli al di sotto della superficie di Fermi (stati buca) sono occupati e quelli sopra (stati particella) sono vuoti. L'azione di N sugli operatori di creazione e distruzione è più complessa che nel caso precedente. Indicando, come è tradizione, con le lettere $(ijkl)$ gli stati buca e con $(mnpq)$ gli stati particella si ha:

$$\begin{aligned} a_j|\Phi_0\rangle \neq 0 \quad \text{ma} \quad a_m|\Phi_0\rangle = 0 \\ a_j^+|\Phi_0\rangle = 0 \quad \text{ma} \quad a_m^+|\Phi_0\rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (109)$$

In questo caso l'azione del Prodotto Normale Ordinato consiste nello spostare a destra gli a_m e gli a_j^+ , e nello spostare a sinistra a_j e a_m^+ . Ovviamente questo viene fatto considerando tutti i segni negativi generati dalle varie permutazioni dell'ordine degli operatori. Ad esempio:

$$N[a_m a_j^+ a_j a_m^+] = a_j a_m^+ a_m a_j^+ \quad (110)$$

3.3.3 Contrazione

L'operazione di contrazione tra due operatori viene definita come la differenza tra Operatore Temporale T e Prodotto Normale Ordinato N .

$$A^\alpha B^\alpha \equiv T[AB] - N[AB] \quad (111)$$

Identificherò i due operatori a cui intendo applicare l'operazione di contrazione utilizzando in apice la stessa lettera greca.

Se gli operatori sono indipendenti dal tempo, o se sono definiti allo stesso tempo si ha:

$$T[AB] = AB \quad (112)$$

Consideriamo come esempio la contrazione di un operatore di creazione di particella con l'operatore distruzione di uno stato buca:

$$a_m^{+\alpha} a_i^\alpha = T[a_m^+ a_i] - N[a_m^+ a_i] = a_m^+ a_i - a_m^+ a_i = 0 \quad (113)$$

Il risultato dell'operazione di contrazione non è un operatore, ma un numero complesso. Questo fatto discende dalle regole di anticommutazione degli operatori di creazione e di distruzione. In realtà la contrazione è strettamente legata al commutatore di due di questi operatori.

Si può dimostrare che la contrazione è il valore di aspettazione dei due operatori sullo stato fondamentale:

$$\langle \Phi_0 | AB | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | A^\alpha B^\alpha | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | N[AB] | \Phi_0 \rangle = A^\alpha B^\alpha \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \quad (114)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\langle \Phi_0 | N[AB] | \Phi_0 \rangle$ è nullo.

In un gruppo di più operatori con più di una contrazione, la coppia di operatori che verrà contratta deve essere sistemata con gli operatori uno accanto all'altro e il segno deve tenere conto delle varie permutazioni.

Esempio:

$$A^\alpha B^\beta C^\alpha D E F^\beta = -A^\alpha C^\alpha B^\beta F^\beta D E \quad (115)$$

3.3.4 Formulazione del teorema di Wick

Il teorema Wick afferma che un prodotto di operatori può essere scritto come somma di Prodotti Normali Ordinati in cui tutte le possibili contrazioni sono effettuate:

$$\begin{aligned} T[ABC \dots Z] = N[ABC \dots Z] &+ N[A^\alpha B^\alpha \dots Z] + N[A^\alpha B C^\alpha \dots Z] \\ &+ N[A^\alpha B^\alpha C^\beta \dots Z] + N[A^\alpha B^\beta C^\alpha \dots Z] \\ &+ N[A^\alpha B^\alpha C^\beta \dots Z] + \dots \end{aligned}$$

Dato che il risultato dell'operazione di contrazione è un numero, tutti gli operatori contratti non sono soggetti all'azione di N .

Ad esempio, il teorema di Wick applicato al prodotto di quattro operatori dà:

$$\begin{aligned}
ABCD &= N[ABCD] + N[A^\alpha B^\alpha CD] + N[A^\alpha BC^\alpha D] + N[A^\alpha BCD^\alpha] \\
&+ N[AB^\alpha C^\alpha D] + N[A^\alpha BCD^\alpha] + N[ABC^\alpha D^\alpha] \\
&+ N[A^\alpha B^\alpha C^\beta D^\beta] + N[A^\alpha B^\beta C^\alpha D^\beta] + N[A^\alpha B^\beta C^\beta D^\alpha] = \\
&= N[ABCD] + A^\alpha B^\alpha N[CD] - A^\alpha C^\alpha N[BD] + A^\alpha D^\alpha N[BC] \\
&+ B^\alpha C^\alpha N[AD] - B^\alpha D^\alpha N[AC] + C^\alpha D^\alpha N[AB] \\
&+ A^\alpha B^\alpha C^\beta D^\beta - A^\alpha C^\alpha B^\beta D^\beta + A^\alpha D^\alpha B^\beta C^\beta
\end{aligned}$$

Dall'espressione ricavata sopra appare chiaro che il calcolo del valore di aspettazione di questi operatori rispetto allo stato fondamentale è ridotto al solo calcolo delle contrazioni. Questo perché per definizione i valori di aspettazione dei termini contenenti N sono nulli.

3.4 Accensione adiabatica dell'interazione

L'accensione adiabatica dell'interazione è un espediente matematico che permette di descrivere gli autostati di un sistema di particelle interagenti in termini di autostati di un sistema di particelle non interagenti. Questo è ovviamente molto utile dato che si presume si sappia descrivere perfettamente il sistema di particelle non interagenti.

Si introduce una hamiltoniana del tipo:

$$H = H_0 + e^{-\epsilon|t|} H_1 \quad (116)$$

in cui ϵ è un numero reale positivo. Ovviamente:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H = H_0 \quad (117)$$

e al tempo $t = 0$ l'hamiltoniana corrisponde all'intera hamiltoniana:

$$\lim_{t \rightarrow 0} H = H_0 + H_1 \quad (118)$$

Il parametro ϵ può diventare piccolo a piacere, in modo da accendere e spegnere lentamente a piacere la perturbazione. I risultati devono essere indipendenti da ϵ .

Gli autostati dell'hamiltoniana 116) in rappresentazione d'interazione sono espressi come:

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_\epsilon(t, t_0) |\Psi_I(t_0)\rangle. \quad (119)$$

Il pedice ϵ è stato aggiunto all'operatore di evoluzione temporale U dato che ora, nella sua definizione (equazione 90), al posto di $H_1(t)$ bisogna sostituire $e^{-\epsilon|t|} H_1(t)$.

L'equazione 104) che esprime l'operatore di evoluzione temporale in termini perturbativi diventa:

$$\begin{aligned}
U_\epsilon(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \\
&e^{-\epsilon[|t_1|+|t_2|+\dots]} T[H_1(t_1) \dots H_1(t_n)]
\end{aligned} \quad (120)$$

dove i termini esponenziali sono stati estratti da T dato che commutano con H_1

Riscriviamo l'eq. 81) del moto per un sistema descritto dall'hamiltoniana 116).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_I(t)\rangle = e^{-\epsilon|t|} H_1(t) |\Psi_I(t)\rangle \rightarrow_{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (121)$$

quindi nel $\lim t \rightarrow \pm\infty$ si ha che $|\Psi_I(-\infty)\rangle$ è indipendente dal tempo. Dato che nel $\lim t \rightarrow \pm\infty$ l'hamiltoniana si riduce a H_0 si ha che:

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_\epsilon(t, -\infty) |\Phi_0\rangle \quad (122)$$

dove $|\Phi_0\rangle$ è l'autostato di H_0 .

Se non ci fosse l'interazione $|\Psi_I\rangle$ sarebbe sempre uguale a $|\Phi_0\rangle$. Al crescere del tempo l'interazione viene accesa, fino a $t = 0$ quando è completamente accesa.

Le definizioni degli stati nelle rappresentazioni di Heisenberg, Schrödinger e interazione determinano gli stati a $t = 0$.

$$|\Psi_H(t)\rangle_{t \rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i \frac{Ht}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle \quad (123)$$

$$|\Psi_I(t)\rangle_{t \rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i \frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle \quad (124)$$

$$|\Psi_H(0)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle = |\Psi_S(0)\rangle \quad (125)$$

da cui:

$$|\Psi_H(0)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle = U_\epsilon(0, -\infty)|\Phi_0\rangle \quad (126)$$

L'equazione 126) esprime l'autostato di un sistema interagente in termini di un autostato di un sistema non interagente H_0 . Il risultato ottenuto sarà significativo dal punto di vista della fisica se il $\lim \epsilon \rightarrow 0$ sarà finito.

A questo quesito risponde il *teorema di Gell-Mann and Low* che afferma che se, ad ogni ordine perturbativo, la seguente entità matematica,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_\epsilon(0, -\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle} \equiv \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle}, \quad (127)$$

esiste, è finita, allora questa è autostato dell'hamiltoniana H :

$$H \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} = E \frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (128)$$

Moltiplicando a sinistra per $\langle \Phi_0 |$ ho che:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Phi_0 | H | \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} = E &= \frac{\langle \Phi_0 | H_0 | \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} + \frac{\langle \Phi_0 | H_1 | \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \\ &= E_0 + \frac{\langle \Phi_0 | H_1 | \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \end{aligned}$$

da cui:

$$E - E_0 = \frac{\langle \Phi_0 | H_1 | \Psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0 \rangle} \quad (129)$$

Il punto essenziale del teorema è che il numeratore e denominatore di 127) non esistono separatamente, ma esiste solo il loro rapporto. Il numeratore ha divergenze dell'ordine ϵ^{-1} che vengono cancellate da analoghe divergenze presenti nel denominatore.

Il risultato 129) è importante perché dà la differenza di energia tra un sistema interagente e un sistema non interagente. Tutti gli ingredienti per poter calcolare questa quantità sono noti. Per definizione $|\Phi_0\rangle$ è noto e $|\Psi_0\rangle$ può essere calcolato utilizzando l'equazione 126). In questa equazione U_ϵ viene calcolato utilizzando lo sviluppo dato dalla 104) in cui, il teorema di Wick, permette di valutare il valore di aspettazione dell'operatore T applicato all'interazione che agisce in tempi diversi.

4 Teorema di Goldstone

4.1 Diagrammi di Goldstone

L'analisi dei vari termini dello sviluppo perturbativo è semplificata da tecniche grafiche. Queste tecniche consistono nell'attribuire un simbolo grafico ad ogni elemento dell'equazione che deve essere sviluppata perturbativamente. Ne risulta quindi che ogni termine dello sviluppo è identificato da un diagramma.

Nella teoria relativistica dei campi questi diagrammi sono denominati *diagrammi di Feynmann*. Esiste una serie di regole che permette, partendo da un diagramma di Feynmann, di ricostruire esattamente (fasi comprese) l'espressione del termine perturbativo descritto.

Non è mio interesse, nell'ambito di queste note, arrivare a questa utilizzazione delle tecniche diagrammatiche. Sono piuttosto interessato ad utilizzare le tecniche grafiche come ausilio per identificare termini dello sviluppo perturbativo che hanno caratteristiche simili.

Dato che i diagrammi di Feynmann sono utilizzati nell'ambito relativistico, preferisco denominare i diagrammi utilizzati in meccanica quantistica non relativistica come *diagrammi di Goldstone*.

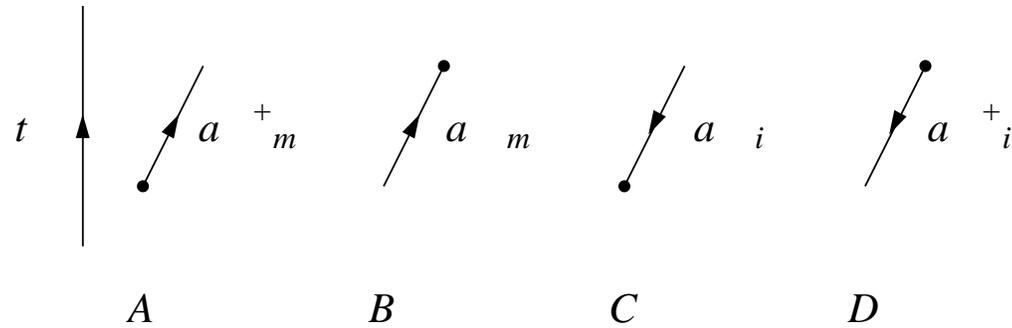


Figura 1:

Nella Figura 1 sono presentati i vari elementi che compongono il diagramma.

Il diagramma immagina una ideale freccia del tempo orientata dal basso verso l'alto. Nella Figura 1 questa linea è stata disegnata, ma nelle altre figure sarà sempre sottintesa.

Una freccia che esce da un punto e si muove nella direzione dei tempi positivi (A nella figura) rappresenta la creazione di una particella. Questo diagramma nella rappresentazione dei momenti, o dei numeri quantici di funzioni d'onda a simmetria sferica, è collegato all'operatore di creazione a_m^+ . Anche qui utilizzo la convenzione di identificare gli stati al di sopra della superficie di Fermi con le lettere m, n, p, q, r , e quelle al di sotto la superficie di Fermi con le lettere i, j, k, l . Nel caso della rappresentazione delle coordinate questo simbolo è legato all'operatore di campo $\psi^+(\mathbf{r})$, che indica la creazione di una particella nel punto \mathbf{r} .

Una freccia che si muove nella direzione dei tempi positivi e scompare in un punto (B nella Figura) rappresenta la distruzione di una particella. A questo diagramma sono associati gli operatori a_m o $\psi(\mathbf{r})$ nella rappresentazione delle coordinate.

Le frecce che si muovono nella direzione contraria a quella della freccia dei tempi (tempi negativi) rappresentano gli stati buco. In meccanica quantistica relativistica, nei diagrammi di Feynmann, queste linee rappresentano le antiparticelle. Nel nostro caso, diagrammi di Goldstone, rappresentano invece stati buco sotto la superficie di Fermi.

In questo caso la freccia che scompare (C nella Figura) rappresenta la creazione di uno stato buco e gli operatori associati sono a_i^+ o $\psi(\mathbf{r})$. Ovviamente la freccia che esce da un punto e si propaga nella direzione dei tempi negativi rappresenta la distruzione di uno stato di buco a_i o $\psi^+(\mathbf{r})$.

L'ultimo elemento grafico necessario a comporre i diagrammi è quello legato all'interazione $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$: una linea tratteggiata che unisce due punti, dato che si tratta di un operatore a due corpi.

Dato che operiamo nell'ambito di una teoria non relativistica e utilizziamo il concetto di potenziale, l'interazione è istantanea, quindi nei diagrammi di Goldstone le linee tratteggiate sono sempre orizzontali. Questo non è il caso dei diagrammi di Feynmann in cui l'interazione si propaga con velocità finita.

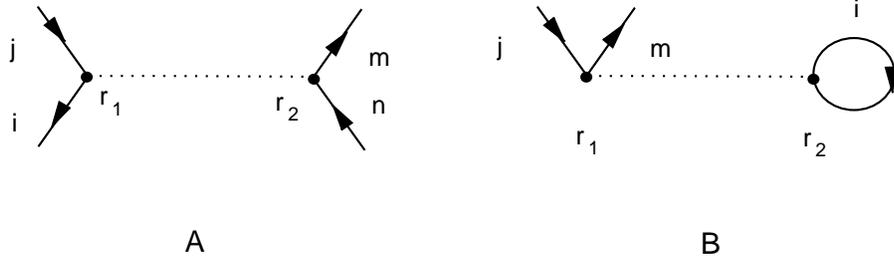


Figura 2:

Nella Figura 2 presento come esempio due diagrammi di cui scriverò l'espressione. I diagrammi rappresentano valori di aspettazione del tipo:

$$\langle \Psi_a | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | \Psi_b \rangle \quad (130)$$

in cui $|\Psi_a\rangle$ rappresenta lo stato iniziale e $|\Psi_b\rangle$ quello finale.

Considero il diagramma A della Figura 2. Lo stato iniziale è composto da uno stato particella n e uno stato buca i :

$$\langle \Psi_a | = \langle \Phi_0 | a_i^+ a_n \quad (131)$$

In questo caso anche lo stato finale è composto da stati buca e particella che, però sono differenti rispetto a quelli dello stato iniziale:

$$|\Psi_b\rangle = a_m^+ a_j |\Phi_0\rangle. \quad (132)$$

L'espressione del diagramma rappresentato dal grafico A della Figura 2 è:

$$\langle \Phi_0 | a_i^+ a_n V a_m^+ a_j | \Phi_0 \rangle. \quad (133)$$

Ovviamente a questo punto bisogna inserire l'espressione dell'interazione V nella RNO:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} V_{\nu\mu\nu'\mu'} a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'}, \quad (134)$$

e quindi utilizzare il teorema di Wick per calcolare il valore di aspettazione.

La valutazione del termine B della figura 2 procede in maniera analoga. La differenza qui consiste nel fatto che gli stati buca dello stato iniziale e finale coincidono. L'espressione del diagramma è:

$$\langle \Phi_0 | a_i^+ a_n V a_m^+ a_i | \Phi_0 \rangle. \quad (135)$$

4.2 Teorema di Goldstone

Il teorema di Goldstone afferma che la differenza tra l'energia di un sistema di particelle interagenti e quella di un sistema di particelle non interagenti, può essere espressa come:

$$E - E_0 = \langle \Phi_0 | H_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_0 - H_0} H_1 \right)^n | \Phi_0 \rangle_c \quad (136)$$

dove H_0 e H_1 sono operatori indipendenti dal tempo nella rappresentazione di Schrödinger. Il significato del pedice c sarà chiarito più avanti.

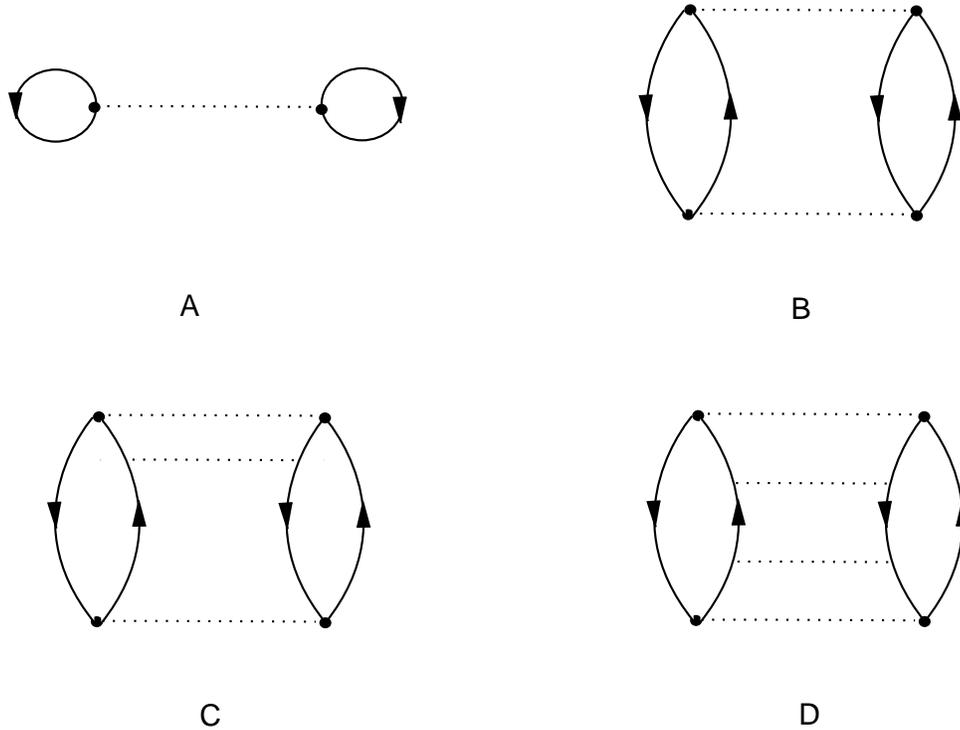


Figura 3:

Esplicitiamo l'eq. 136) per i primi termini di n

$$\begin{aligned} E - E_0 &= \langle \Phi_0 | H_1 | \Phi_0 \rangle \\ &+ \langle \Phi_0 | H_1 \frac{1}{E_0 - H_0} H_1 | \Phi_0 \rangle \\ &+ \langle \Phi_0 | H_1 \frac{1}{E_0 - H_0} H_1 \frac{1}{E_0 - H_0} H_1 | \Phi_0 \rangle \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (137)$$

Alcuni dei diagrammi prodotti dallo sviluppo sono presentati nella Figura 3. Il diagramma A è contenuto nel primo termine dell'eq. 137). Una sola linea tratteggiata indica la presenza di una sola interazione H_1 . Non ci sono linee di particella o buca aperte perché il valore di aspettazione viene valutato sullo stato fondamentale

di campo medio. L'altro diagramma presente nel primo termine è il cosiddetto termine di scambio, in cui le linee particella e buca sono scambiate tra i vari punti (è il diagramma B della Figura 4).

Ovviamente il diagramma B della Figura 3 è uno dei diagrammi del secondo termine dell'eq.137) dato che contiene due linee di interazione H_1 . Anche qui bisogna aggiungere il termine di scambio.

Questi diagrammi mostrano che H_1 crea uno stato intermedio caratterizzato da 2 stati particella e 2 stati buca ($2p - 2h$), questo perché è un operatore a due corpi. Questo stato intermedio si propaga nel tempo ($(E_0 - H_0)^{-1}$ indica il propagatore) e poi viene de -eccitato dall'azione di un altro termine H_1 .

L'espressione tradizionale dello sviluppo perturbativo, può essere ottenuta inserendo una completezza di autostati di H_0 , $I = \sum_{n \neq 0} |\Phi_n\rangle\langle\Phi_n|$, (ho indicato con I l'operatore identità):

$$E - E_0 = \langle\Phi_0|H_1|\Phi_0\rangle + \sum_{n \neq 0} \frac{\langle\Phi_0|H_1|\Phi_n\rangle\langle\Phi_n|H_1|\Phi_0\rangle}{E_0 - E_n} + \dots \quad (138)$$

Nel seguito darò l'indicazione di come si procede nella prova dell'eq. 136) partendo dall'espressione data dal teorema di Gell-Mann e Low. L'eq. 129) può essere riscritta come:

$$E - E_0 = \frac{\langle\Phi_0|H_1|\Psi_0\rangle}{\langle\Phi_0|\Psi_0\rangle} = \frac{\langle\Phi_0|H_1U(0, -\infty)|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_0|U(0, -\infty)|\Phi_0\rangle} \quad (139)$$

Utilizzando l'espressione 104) dell'operatore di evoluzione temporale, si ottiene per il numeratore:

$$\langle\Phi_0|H_1U(0, -\infty)|\Phi_0\rangle = \sum_{\nu=0} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_\nu \langle\Phi_0|T[H_1, H_1(t_1) \dots, H_1(t_\nu)]|\Phi_0\rangle \quad (140)$$

dove abbiamo usato il $\lim \varepsilon \rightarrow 0$ di eq. 120). Il primo H_1 a sinistra è stato inserito al primo posto all'interno delle parentesi di T . Questa operazione non modifica il risultato, poiché questo H_1 è definito a $t = 0$ che è il tempo maggiore.

I vari termini dello sviluppo perturbativo possono essere calcolati utilizzando il teorema di Wick. L'analisi dei diagrammi che vengono generati in questo modo, indica la possibilità di suddividerli in due categorie: i diagrammi *connessi* e quelli *non connessi*. I diagrammi connessi sono quelli in cui esistono contrazioni tra gli operatori che definiscono $H_1(0)$ e gli altri operatori definiti a tempi precedenti.

Considero ad esempio il termine con $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} &\langle\Phi_0|H_1(0)H_1(t_1)|\Phi_0\rangle = \\ &\langle\Phi_0|V_{\mu\nu\mu'\nu'}a_\mu^+(0)a_\nu^+(0)a_{\nu'}(0)a_{\mu'}(0)V_{\eta\xi\eta'\xi'}a_\eta^+(t_1)a_\xi^+(t_1)a_{\xi'}(t_1)a_{\eta'}(t_1)|\Phi_0\rangle \end{aligned} \quad (141)$$

dove i termini di interazione sono stati esplicitati utilizzando gli operatori di campo.

Se non si effettuano contrazioni tra operatori definiti al tempo t_1 e operatori definiti al tempo $t = 0$, i due termini possono essere separati inserendo l'operatore identità $|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| = I$:

$$\langle\Phi_0|V_{\mu\nu\mu'\nu'}a_\mu^+a_\nu^+a_{\nu'}a_{\mu'}|\Phi_0\rangle_{t=0}\langle\Phi_0|V_{\eta\xi\eta'\xi'}a_\eta^+a_\xi^+a_{\xi'}a_{\eta'}|\Phi_0\rangle_{t=t_1} \quad (142)$$

Le contrazioni non nulle in questi due termini sono:

$$a_\mu^{+\alpha}(t)a_\nu^{+\beta}(t)a_{\nu'}^\beta(t)a_{\mu'}^\alpha(t) \quad (143)$$

e

$$a_\mu^{+\alpha}(t)a_\nu^{+\beta}(t)a_{\nu'}^\alpha(t)a_{\mu'}^\beta(t) \quad (144)$$

dove ho indicato con α e β gli operatori a cui la contrazione viene applicata. Il primo di questi termini è raffigurato dal diagramma A della Figura 3 e il secondo dal diagramma B della stessa Figura.

Il termine di eq. 142) produce quattro diagrammi, ognuno di questi ottenuto accoppiando due dei diagrammi di Figura 4: uno al tempo $t = 0$ e l'altro al tempo $t = t_1$. Chiaramente questi sono diagrammi *non connessi*.

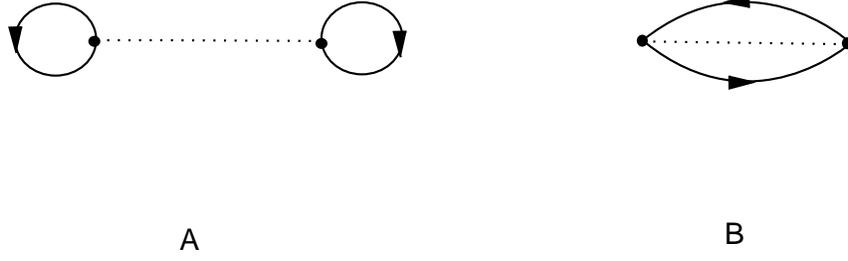


Figura 4:

Se invece, applicando il teorema di Wick, si opera con delle contrazioni che collegano gli operatori definiti a $t = 0$ con quelli definiti a $t = t_1$, si hanno diagrammi connessi. Ad esempio:

$$\langle \Phi_0 | V_{\mu\nu\mu'\nu'} a_\mu^{+\alpha}(0) a_\nu^{+\beta}(0) a_{\nu'}^\gamma(0) a_{\mu'}^\delta(0) V_{\eta\xi\eta'\xi'} a_\eta^{+\gamma}(t) a_\xi^{+\delta}(t) a_{\xi'}^\alpha(t) a_{\eta'}^\beta(t) | \Phi_0 \rangle. \quad (145)$$

In questo caso le lettere α , β , γ e δ indicano le coppie di operatori a cui la contrazione viene applicata. Il diagramma che rappresenta questo termine è mostrato in Figura 5.

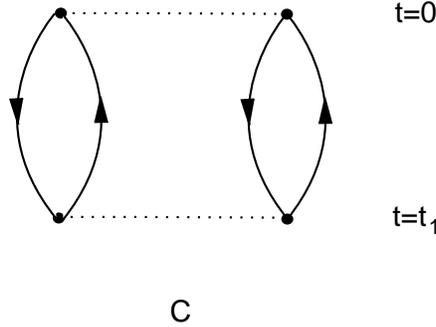


Figura 5:

Il termine con $\nu = 1$, eq. 141), produce quindi diagrammi non connessi, come il diagramma A in Figura ??, e diagrammi connessi, come il diagramma di B della stessa Figura.

Dopo questa discussione sulla struttura dei vari termini dello sviluppo presenterò la prova dell'eq. 136).

Considero un termine dell'eq. 140) e ipotizzo che sia composto da due parti non connessi, come ad esempio il diagramma mostrato nella figura 7:

Il contributo di un diagramma di questo tipo è:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | H_1 U(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle_\nu &= \\ \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^\nu \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots dt_n \langle \Phi_0 | T[H_1(0) \dots H_1(t_n)] | \Phi_0 \rangle_c & \\ \int_{-\infty}^0 dt_{n+1} \dots \int_{-\infty}^0 dt_{n+m} \langle \Phi_0 | T[H_1(t_{n+1}) \dots H_1(t_{n+m})] | \Phi_0 \rangle_c & \end{aligned} \quad (146)$$

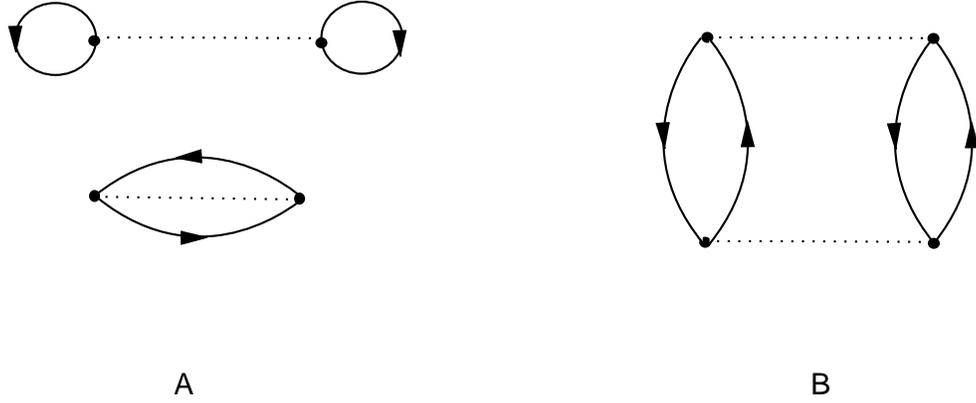


Figura 6:

Ho separato le due parti connesse, la prima contenente n interazioni H_1 e la seconda con m interazioni.

Valuto il contributo totale dei diagrammi di ordine ν che possono essere suddivisi in due parti, di ordine n e m ($\nu = m + n$).

Diagrammi di questo tipo possono essere ottenuti scambiando tra loro gli operatori H_1 . E' da notare che scambiando tra loro due operatori H_1 definiti a tempi differenti si scambiano 4 operatori di creazione e distruzione, quindi la fase totale generata dallo scambio è sempre positiva. Il numero delle possibili permutazioni è $\nu!$. D'altra parte lo scambio di due operatori H_1 appartenenti alla stessa partizione non produce un nuovo diagramma. Il numero delle permutazioni che non generano nessun nuovo diagramma è $n!m!$.

Il contributo totale dei diagrammi del tipo di quello di Figura 7 all'eq. 140) è dato da :

$$\sum_n \sum_m \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^{n+m} \frac{\nu!}{n!m!} \frac{1}{\nu!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n \langle \Phi_0 | T[H_1, H_1(t_1) \dots H_n(t_n)] | \Phi_0 \rangle_c \int_{-\infty}^0 dt_{n+1} \dots \int_{-\infty}^0 dt_{n+m} \langle \Phi_0 | T[H_1(t_{n+1}) \dots H_1(t_{n+m})] | \Phi_0 \rangle_c \quad (147)$$

Il secondo termine è presente nel denominatore di eq. 139). In questo secondo termine, sotto il simbolo dell'operatore di ordinamento temporale T non c'è $H_1(0)$ che è l'unico elemento estraneo al denominatore di eq. 139). Tutti i diagrammi non collegati con $H_1(0)$, diagrammi che abbiamo definito come non connessi, sono eliminati dal denominatore.

Dopo aver chiarito perché nell'espressione del teorema di Goldstone appaiono soltanto diagrammi connessi, non resta che calcolare gli integrali sul tempo.

Considero l'ordine n e uso l'espressione esplicita dell'operatore H_1 in rappresentazione di interazione:

$$H_1(t) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} H_1 e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}. \quad (148)$$

Il termine di ordine n può essere scritto come:

$$[E - E_0]_n = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n e^{\epsilon(t_1 + \dots + t_n)} \langle \Phi_0 | H_1 e^{i\frac{H_0 t_1}{\hbar}} H_1 e^{-i\frac{H_0 t_2}{\hbar}} H_1 \dots e^{-i\frac{H_0 t_{n-1}}{\hbar}} e^{i\frac{H_0 t_n}{\hbar}} H_1 e^{-i\frac{H_0 t_n}{\hbar}} | \Phi_0 \rangle_c$$

dove ho eliminato T scrivendo esplicitamente i limiti di integrazione e ho inserito il fattore $e^{\epsilon t}$. Faccio un cambio delle variabili di integrazione:

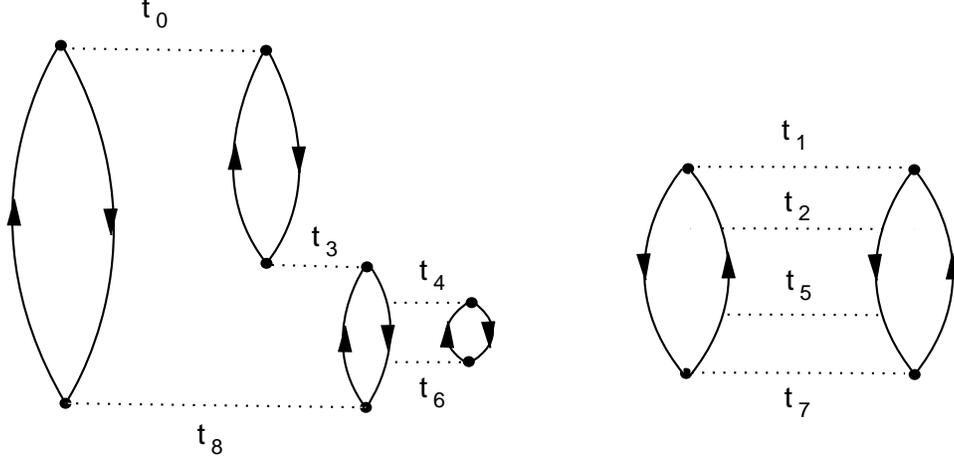


Figura 7:

$$\begin{aligned}
 x_1 = t_1 \quad , \quad x_2 = t_2 - t_1 \quad , \quad x_3 = t_3 - t_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = t_n - t_{n-1} \\
 t_1 = x_1 \quad , \quad t_2 = x_2 + x_1 \quad , \quad t_3 = x_3 + x_2 + x_1 \quad , \quad \dots \quad , \quad t_n = \sum_n x_n
 \end{aligned}$$

e usando $H_0|\Phi_0\rangle = E_0|\Phi_0\rangle$ ottengo:

$$\begin{aligned}
 [E - E_0]_n &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \langle \Phi_0 | H_1 \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_{-\infty}^0 dx_2 \dots \int_{-\infty}^0 dx_n \\
 &e^{\epsilon(x_1 + (x_2 + x_1) + (x_3 + x_2 + x_1) + \dots + (x_n + x_{n-1} + \dots + x_2 + x_1))} \\
 &H_1 e^{i\frac{H_0 x_1}{\hbar}} H_1 e^{i\frac{H_0 x_2}{\hbar}} H_1 \dots e^{i\frac{H_0 x_n}{\hbar}} H_1 e^{-i\frac{H_0 t_n}{\hbar}} | \Phi_0 \rangle_c
 \end{aligned}$$

Considero il termine a destra dell'equazione precedente,

$$e^{-i\frac{H_0 t_n}{\hbar}} | \Phi_0 \rangle = e^{-i\frac{E_0}{\hbar} t_n} | \Phi_0 \rangle = e^{-i\frac{E_0}{\hbar} (x_1 + \dots + x_n)} | \Phi_0 \rangle_c \quad (149)$$

che inserito nell'integrale permette di scrivere:

$$\begin{aligned}
 [E - E_0]_n &= \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \langle \Phi_0 | H_1 \int_{-\infty}^0 dx_1 e^{n\epsilon x_1} e^{i\frac{(H_0 - E_0)}{\hbar} x_1} \cdot H_1 \\
 &\int_{-\infty}^0 dx_2 e^{(n-1)\epsilon x_2} e^{i\frac{(H_0 - E_0)}{\hbar} x_2} \cdot H_1 \dots \int_{-\infty}^0 e^{\epsilon x_n} e^{i\frac{(H_0 - E_0)}{\hbar} x_n} H_1 | \Phi_0 \rangle_c
 \end{aligned}$$

Abbiamo espresso il termine n -esimo come prodotto di n integrali del tipo:

$$\int_{-\infty}^0 dx_1 e^{\frac{i}{\hbar}(H_0 - E_0 - i n \epsilon \hbar) x_1} = \frac{\hbar}{-i} \frac{1}{[E_0 - H_0 + i n \epsilon \hbar]} \quad (150)$$

Dato che ci sono n termini uguali, c'è un fattore $\left(\frac{\hbar}{-i}\right)^n$, che può essere fattorizzato, quindi:

$$[E - E_0]_n = \langle \Phi_0 | H_1 \frac{1}{E_0 - H_0 + i\epsilon n \hbar} H_1 \frac{1}{E_0 - H_0 + i\epsilon(n-1)\hbar} \cdots H_1 \frac{1}{E_0 - H_0 + i\epsilon \hbar} H_1 | \Phi_0 \rangle_c \quad (151)$$

Facendo il $\lim \epsilon \rightarrow 0$ si prova il teorema. E' da notare che il fatto che l'equazione sia valida per i soli diagrammi connessi impedisce di inserire $|\Phi_0\rangle$ questo motivo non sono presenti divergenze dato che il denominatore $E_0 - H_0$ è sempre diverso da zero.

- [Fet71] A.L.Fetter and J.D.Walecka, Quantum theory of many-particle systems, Mc Graw-Hill, New York (1971).
Questo è il testo che ho principalmente seguito, nella notazione e nello sviluppo delle tematiche. A mio avviso questo è il testo fondamentale per ogni riferimento di teorie a molti corpi.
- [Abr63] A.A.Abrikosov, L.P.Gorkov and I.E.Dzyaloshinski, Methods of quantum field theory in statistical physics, Dover, New York (1975).
Traduzione in inglese, ed in edizione economica, del testo base russo. Penso che questo testo abbia ispirato Fetter e Walecka nella scrittura del loro libro. Il testo è ottimo ma ha i soliti problemi dei testi russi: notazioni inusuali e spiegazioni troppo succinte sullo stile di Landau.