

IL PROBLEMA DELL'INTERAZIONE NUCLEARE

SOMMARIO

- 1 Un po' di storia dell'interazione NN
- 2 L'interazione 3N
- 3 Cenni ai problemi attuali

Un po' di storia ... mesonica

- 1 GLI ANNI SPECULATIVI (32-50)
- 2 GLI ANNI D' ORO DELLA OPE (40-50)

IL DISASTRO TPE (50-70), & ALTERNATIVE

IL RITORNO DELLA TPE versione '70 & '80

GLI ANNI DEL **RI**-RITORNO DELLA TPE '90

Lezioni per la scuola di Otranto, 2005

I PRIMI ANNI

- 1932 -> neutrone
- Heisenberg, Majorana
Bartlett
- 1933 Wigner: Corta !
- 1935 Breit: C.I.
- 1935 Yukawa:
- 36-37 Anderson et al!
??? massa~ 106 MeV
- Ipotesi su campi
mesonici π , ρ , ω , $T=1$
- 1939 (Rabi) **d**: quadru-
polo elettrico $Q > 0$!
- 1940 Bethe: cut-offs
- 1944 Pauli: predisse la
natura pseudoscalare e
isovettoriale del
mesone di Yukawa

$$V^Y(r) = C \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

45-47 Conversi-Pancini
 Piccioni: "mesoni" mu
 non sono i mesoni di Y !

47 Occhialini et al: Trova i
 mesoni di Yukawa, di
 massa 140 MeV: **i pioni!**

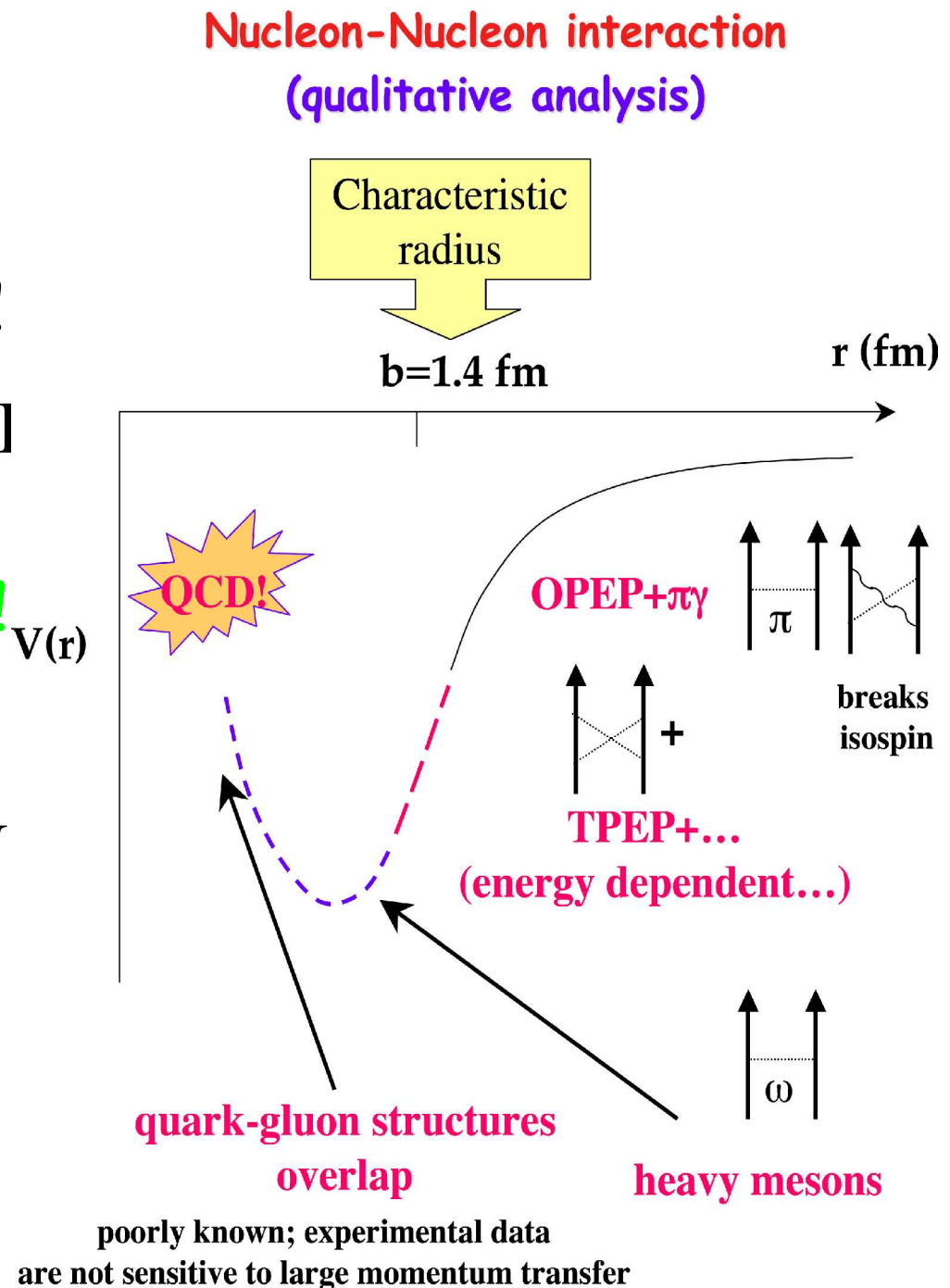
49 Nobel a Yukawa

~50 Prog di Taketani: NN

LR: $2 \text{ fm} < r$

IR: $1 \text{ fm} < r < 2 \text{ fm}$

SR $r < 1 \text{ fm}$



50-60 gli anni d'oro della OPE

Si afferma il concetto della OPE, x il raggio lungo:

Evidenze dai dati di scattering NN e deuterio.

Analisi in fase onde periferiche NN: -> ampiezza di scattering OPE. Test χ^2 produce un minimo in corrispondenza alla massa del pione.

Deuterio: Quadrupolo elettrico e rapporto asindotico D/S vengono spiegati interamente (quasi) con il termine OPE del potenziale NN

OPE -> SUCCESSO!

LA PARTE INTERMEDIA TPE (SCAMBIO DI PIU' PIONI 1950-1960)

- 1953 Bethe: Il problema NN e' stata la questione scientifica che in assoluto ha occupato piu' ore/uomo in ricerca che qualsiasi altra nella storia dell'uomo.
- 1960 Goldberger: La ricerca sull'interazione fondamentale NN e' stata al centro dell'attenzione piu' di ogni altra in fisica nucleare. Molte persone – scarsi risultati! It is hard to believe that many authors are talking about the same problem or they know what the problem is...

Schemi alternativi alla TPE

- APPROCCIO EMPIRICO: POTENZIALE NN COME SVILUPPO IN OPERATORI DI SPIN.

CENT - SS - TENS - SL - SL**2:

- 1957 GAMMEL -THALER (HardCore)
- 1962 HAMADA-JOHNSTON & YALE (hc+ope)
- 1970 REID (Soft/Hard Core +ope) RSC70
- [fenomenologia 50 parametri da fittare!]

Il potenziale AV18

- Il Potenziale AV18 e' una versione estremamente sofisticata e accurata (rispetto ai dati NN) dello stesso tipo.

$$v_{ij} = v_{ij}^{\gamma} + v_{ij}^{\pi} + v_{ij}^R$$

$$v^{\gamma}(pp) = V_{C1}(pp) + V_{C2} + V_{VP} + V_{DF} + V_{MM}(pp) ,$$

$$v^{\gamma}(np) = V_{C1}(np) + V_{MM}(np) ,$$

$$v^{\gamma}(nn) = V_{MM}(nn) .$$

$$v_{ij}^{\pi} = f^2 \left(\frac{m}{m_s} \right)^2 \frac{1}{3} m c^2 \left[X_{ij} \tau_i \cdot \tau_j + \tilde{X}_{ij} T_{ij} \right] \quad \text{OPE CD -differences in pion masses.}$$

$$X_{ij} = \frac{1}{3} \left(X_{ij}^0 + 2X_{ij}^{\pm} \right) ,$$

$$\tilde{X}_{ij} = \frac{1}{3} \left(X_{ij}^0 - X_{ij}^{\pm} \right) ,$$

$$X_{ij}^m = [Y(mr_{ij}) \sigma_i \cdot \sigma_j + T(mr_{ij}) S_{ij}]$$

Il potenziale AV18

$$v_{ij}^{\pi} + v_{ij}^R = \sum_{p=1,18} v_p(r_{ij}) O_{ij}^p \quad .$$

$$O_{ij}^{p=1,14} = [1, (\sigma_i \cdot \sigma_j), S_{ij}, (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}), \mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2(\sigma_i \cdot \sigma_j), (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})^2] \otimes [1, (\tau_i \cdot \tau_j)]$$

$$O_{ij}^{p=15,18} = [1, (\sigma_i \cdot \sigma_j), S_{ij}] \otimes T_{ij}, (\tau_{zi} + \tau_{zj})$$

CIB

CSB

ALTRA ALTERNATIVA: IL MODELLO OBE

~1961-62 scoperti i mesoni vettoriali pesanti (Rho-Omega). Insuccesso nel programma TPE porta a sviluppare modello a scambio di un bosone. E' una descrizione teorica pulita e chiara che consente estensioni. Semplifica i meccanismi di TPE come meccanismi di scambio di UN bosone correlato.

~ Vantaggi: meno parametri (coupling-constants e cut-offs) buona riproduzione della fenomenologia NN. **Un grosso problema:** L'attrazione middle-range ? Bosone scalare fittizio. Potenziale di questo tipo: **1970 Nijmegen**

Qualita' fisiche della forza $2N$

- 1 e' a corto raggio
- 2 e' attrattiva nella regione intermedia
- 3 e' repulsiva alle corte distanze
- 4 c'e' una componente tensoriale
- 5 c'e' una componente di spin-orbita
- 6 la coda e' pionica (dominata dalla OPE)

Le basi del modello OBE

Various meson-nucleon couplings and their consequences for the NN interaction as deduced from the OBE contribution

<u>Coupling</u>	<u>Type of Forces</u>	
ps	spin-spin (weak)	tensor (strong)
s	attractive central (strong)	spin-orbit
v	repulsive central (strong)	spin-orbit (same sign as s)
t	spin-spin (weak)	tensor (sign opposite to ps)

Abbreviations: pseudoscalar (ps), scalar (s), vector (v), tensor (t).

Note: the signs assumed in this table for s and v refer to isoscalar bosons of that type.

Tabella dei mesoni < 1400 MeV

NON-STRANGE MESONS
WITH MASSES LESS THAN 1350 MeV AND THEIR PROPERTIES*

Name	J^P	I^G	Mass (MeV)	Full Width (MeV)	Dominant Decay Mode
π^\pm	0^-	1^-	139.57	0	$\mu^\pm \nu$
π^0	0^-	1^-	134.96	0	$\gamma\gamma$
η	0^-	0^+	548.8	0.001	$\gamma\gamma, 3\pi^0$
ρ	1^-	1^+	769	154	2π
ω	1^-	0^-	782.6	9.9	3π
η'	0^-	0^+	957.6	0.3	$\eta\pi\pi$
S^*	0^+	0^+	975	33	$2\pi, K\bar{K}$
δ	0^+	1^-	983	54	$\eta\pi, K\bar{K}$
ϕ	1^-	0^-	1020	4	K^+K^-
B	1^+	1^+	1234	150	$\omega\pi$
f	2^+	0^+	1274	178	2π
A_1	1^+	1^-	1275	315	$\rho\pi$
D	1^+	0^+	1283	26	$\eta\pi\pi, 4\pi$
ϵ	0^+	0^+	1300	200-600	2π
A_2	2^+	1^-	1318	110	$\rho\pi$

$J \equiv \text{Spin}, P \equiv \text{Parity}, I \equiv \text{Isospin}, G \equiv G\text{-Parity}$

Il calcolo di alcuni termini dell'interazione

YUKAWA

$$\nabla^2 \phi_E = -\rho(r) \quad \rho(r) = e \delta(r)$$

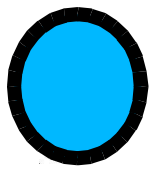
POT STATICO ELETTRICO

$$V_E = e \Phi_E = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{r}$$

$$(\nabla^2 - m^2) \phi_N = -\eta(r) \quad \eta(r) = g \delta(r)$$

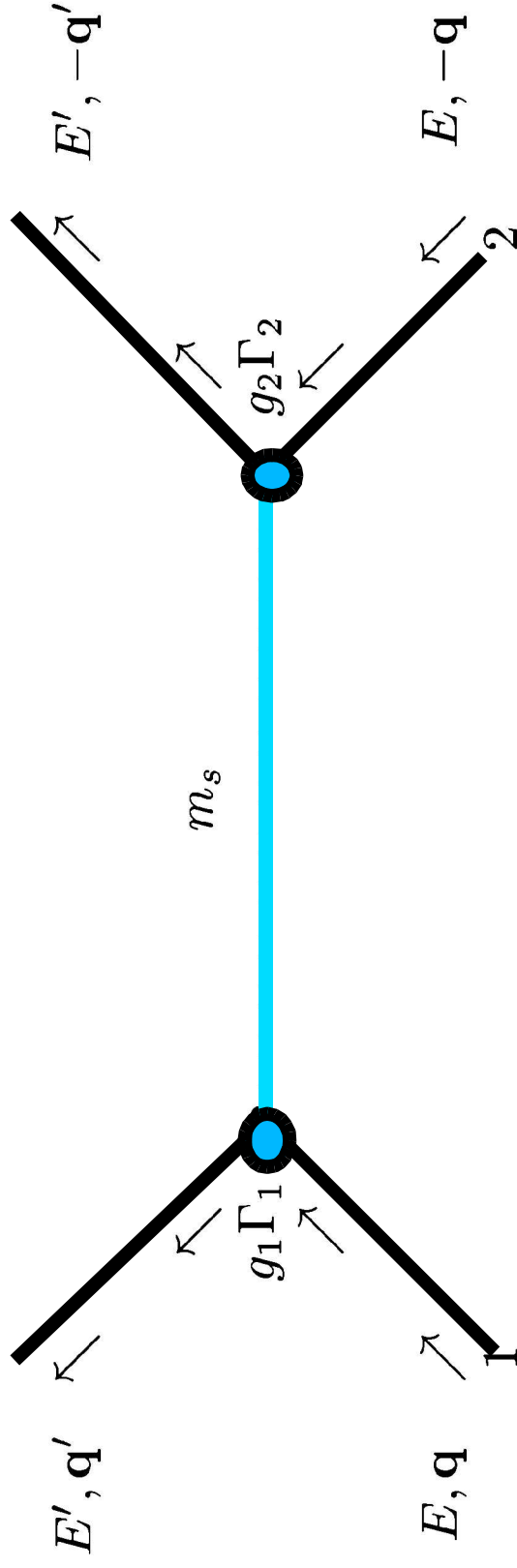
POT STATICO NUCLEARE

$$V_N = g \Phi_N = \frac{-g^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$$



Il calcolo di Yukawa con Feynman

Lo scambio del mesone di massa m_s fra i nucleoni “1” e “2” può essere rappresentato secondo il diagramma



(1)

Con $\Gamma_{1,2}$ si sono indicati i due vertici d'interazione, con $g_{1,2}$ le costanti d'accoppiamento, mentre E, \mathbf{q} (E', \mathbf{q}') è il quadrimpulso del nucleone “1” entrante (uscite) nel C.M. del sistema. Ovviamente il momento trasferito dal mesone è $(E - E'), (\mathbf{q} - \mathbf{q}')$.

Trascurando dei fattori cinematici che in riduzione nonrelativistica



convergono comunque a 1, l'espressione dettagliata dello spinore di Dirac relativo al nucleone entrante "1" diventa

$$u_1(\mathbf{q}) \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}}{2M} \end{pmatrix} |\chi_s \rangle \quad (2)$$

dove χ_s è l'usuale spinore di Pauli a due componenti per cui si capisce che l'intera espressione rappresenta un vettore colonna a 4 componenti come deve essere. Analogamente, lo spinore aggiunto di Dirac relativo al nucleone "1" uscente diventa un vettore riga a 4 componenti

$$\bar{u}_1(\mathbf{q}') \longrightarrow \langle \chi_s | \left(\mathbf{1} \quad \frac{-\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q}}{2M} \right). \quad (3)$$

Infine, la propagazione del bosone intermedio diventa

$$\frac{P_s}{(q - q')^2 - m_s^2} \longrightarrow \frac{1}{-(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 - m_s^2} \quad (4)$$

in approssimazione statica, in cui viene assunto trascurabile l'effetto di rinculo dei nucleoni, che perciò non modificano la propria energia ($E = E'$).



Sotto queste ipotesi, il processo di scambio espresso sopra secondo le regole di Feynman si riduce a

$$\frac{g^2}{-(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 - m_s^2} \left[1 - \frac{(\sigma_1 \cdot \mathbf{q}')(\sigma_1 \cdot \mathbf{q})}{4M^2} \right] \left[1 - \frac{(\sigma_2 \cdot \mathbf{q}')(\sigma_2 \cdot \mathbf{q})}{4M^2} \right]. \quad (5)$$

Si può a questo punto sfruttare l'identità che vale per le matrici di Pauli

$$(\sigma_1 \cdot \mathbf{q}')(\sigma_1 \cdot \mathbf{q}) = (\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}) + i\sigma_1 \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{q}') \quad (6)$$

e introdotta la trasformazione di variabili

$$\mathbf{K} = \mathbf{q}' - \mathbf{q} \quad ; \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{q}' + \mathbf{q}}{2}, \quad (7)$$

si ottiene

$$(\sigma_1 \cdot \mathbf{q}')(\sigma_1 \cdot \mathbf{q}) = P^2 - \frac{K^2}{4} + i\sigma_1 \cdot (\mathbf{K} \times \mathbf{P}) \quad (8)$$

e analogamente per σ_2 .

Nell' Eq. 5 si può sviluppare il prodotto dei due fattori fra parentesi quadre e trascurando i termini quadratici e superiori nelle variabili di momento si ottiene l'espressione del potenziale di scambio nello spazio dei momenti

$$V_s(\mathbf{K}, \mathbf{P}) = -\frac{g^2}{K^2 + m_s^2} \left[1 + \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} (-i) \mathbf{K} \times \mathbf{P}}{2M^2} \right] \quad (9)$$

Nel primo termine riconosciamo il tradizionale contributo del potenziale di Yukawa, una volta trasformato nello spazio delle coordinate

$$V_s^I(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} g^2 \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}}{K^2 + m_s^2} d\mathbf{K} = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{r}. \quad (10)$$

Per il secondo contributo osserviamo che $S = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ e che possiamo sostituire a \mathbf{K} l'operatore $-i\nabla_{\mathbf{r}}$ (dove \mathbf{r} è la coordinata relativa).



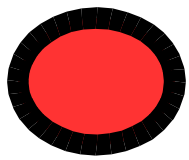
Possiamo quindi scrivere

$$V_s^{II}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{g^2}{2M^2} \mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{P}) \int \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}}{K^2 + m_s^2} d\mathbf{K} = \frac{g^2}{4\pi 2M^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{-m_s r}}{r}. \quad (11)$$

Nel calcolo si è sfruttato il fatto che l'operatore gradiente è stato applicato su di una funzione a simmetria sferica. Una volta osservato che $(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \mathbf{L}$, calcolando esplicitamente la derivata e sommando i due contributi otteniamo il potenziale di scambio del mesone scalare come

$$V_s(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \left[1 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \frac{m_s^2}{2M^2} \left(\frac{1}{m_s r} + \frac{1}{(m_s r)^2} \right) \right] \frac{e^{-m_s r}}{r}, \quad (12)$$

dove oltre al contributo Yukawiano attrattivo viene evidenziato anche il contributo di spin-orbita. Analogamente, si dimostra che per i mesoni vettoriali si ottiene un contributo di spin-orbita dello stesso segno, e un termine centrale di tipo repulsivo.



OPE: Calcolo Hamiltoniano Time-Ordered

Le caratteristiche di un approccio mesonico completo (tipo BONN): Si parte da un Hamiltoniano relativistico in teoria di campo, del tipo

$$H = H_o + W \quad (1)$$

dove l'Hamiltoniano libero H_o è dato dalla somma dell'operatore relativistico-cinetico dei barioni H_o^B e dei mesoni H_o^m ,

$$H_o = H_o^B + H_o^m = \sum_{\beta} E_{\beta} b_{\beta}^{\dagger} b_{\beta} + \sum_{\beta} \omega_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}. \quad (2)$$

I termine W rappresenta invece l'interazione (vertice) mesone-barione, con la seguente struttura

$$W = \sum_{\beta', \beta, \alpha} W_{\beta', \beta, \alpha} b_{\beta'}^{\dagger} b_{\beta} a_{\alpha} + h.c. \quad (3)$$



Uno utilizza la rappresentazione standard per gli operatori di campo dei barioni (N , Δ) e dei mesoni (scalari, pseudoscalari, vettoriali), e dalle densità Lagrangiane d'interazione ottiene gli elementi di matrice dell'interazione:

$$\begin{aligned}
W_{\beta',\beta,\alpha}^{(NNps)} &= -\frac{g_{ps}}{[2\omega_k^{ps}]^{1/2}} \delta^3(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\beta - \mathbf{k}) \bar{u}(\mathbf{q}'_\beta, \dots) i\gamma^5 u(\mathbf{q}_\beta, \dots) F_{ps}(\mathbf{k}^2) \\
W_{\beta',\beta,\alpha}^{(NNs)} &= -\frac{g_s}{[2\omega_k^s]^{1/2}} \delta^3(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\beta - \mathbf{k}) \bar{u}(\mathbf{q}'_\beta, \dots) u(\mathbf{q}_\beta, \dots) F_{ps}(\mathbf{k}^2) \\
W_{\beta',\beta,\alpha}^{(NNv)} &= -\frac{\epsilon^\mu(\mathbf{k}, \mathbf{s})}{[2\omega_k^v]^{1/2}} \delta^3(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\beta - \mathbf{k}) [(g_v + f_v) \bar{u}(\mathbf{q}'_\beta, \dots) \gamma_\mu u(\mathbf{q}_\beta, \dots) \\
&\quad - \frac{f_v}{2m} \bar{u}(\mathbf{q}'_\beta, \dots) (q'_\beta + q_\beta)_\mu u(\mathbf{q}_\beta, \dots)] F_v(\mathbf{k}^2) \quad (4)
\end{aligned}$$

con forme analoghe per le interazioni costituite dai vertici di transizione $\Delta - N$:

$$W_{\beta',\beta,\alpha}^{(\Delta N\pi)} = +\frac{i f_{N\Delta\pi}}{m\pi[2\omega_k^{ps}]^{1/2}} \delta^3(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\beta - \mathbf{k}) k^i \bar{u}_i(\mathbf{q}'_\beta, \dots) u(\mathbf{q}_\beta, \dots) F_{N\Delta\pi}(\mathbf{k}^2)$$

Dettagli: Machleidt et al. su Phys. Rep. **149** (1987), 1.



Il termine OPE viene così calcolato in maniera nonstatica (energy dependent) come contributo al secondo ordine (connesso) nella costante di accoppiamento:

$$\langle \beta'_1 \beta'_2 | W \frac{1}{E - H_o^B + H_o^m} W | \beta_1 \beta_2 \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q}_{\beta'_1} + \mathbf{q}_{\beta'_2} - \mathbf{q}_{\beta_1} - \mathbf{q}_{\beta_2}) \langle \beta'_1 \beta'_2 | V^{(2)}(E) | \beta_1 \beta_2 \rangle \quad (5)$$

La forma generale del termine OPE (nel riferimento del c.m.) è

$$\langle \mathbf{q}' \beta'_1 \beta'_2 | V^{(2)}(E) | \beta_1 \beta_2 \mathbf{q} \rangle = \quad (6)$$

$$\frac{2 \times g_\pi^2 (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)}{2\omega_k^\pi} \frac{\bar{u}(\mathbf{q}', \beta'_1) i\gamma^5 u(\mathbf{q}, \beta_1) \bar{u}(-\mathbf{q}', \beta'_2) i\gamma^5 u(-\mathbf{q}, \beta_2)}{E - E_{q'} - E_q - \omega_\pi} F_\pi^2(\mathbf{k}^2). \quad (7)$$

L'approssimazione statica si ottiene ponendo $E = E'_q + E_q$, il che porta (trascurando il fattore di forma, ovvero ponendo $F_\pi^2(\mathbf{k}^2) = 1$)



all'usuale forma OPE locale

$$V^{ps}(k) = -\frac{g_{ps}^2}{4m^2} \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k})}{k^2 + m_{ps}^2} (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (8)$$

Ciò porta alla ben nota espressione locale del potenziale OPE nello spazio delle coordinate (trascurando un termine di contatto a zero range, che comunque diventa irrilevante una volta introdotti i fattori di cut-off)

$$V^{ps}(\mathbf{r}) = \frac{g_{ps}^2}{4\pi} \frac{m_{ps}^2}{12m^2} \left[(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + S_{12}(\hat{r}) \left(1 + \frac{3}{m_{ps}r} + \frac{3}{m_{ps}r^2} \right) \right] \frac{e^{-m_{ps}r}}{r} (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (9)$$

dove è stato introdotto l'operatore tensore

$$S_{12}(\hat{r}) = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (10)$$



Bisogna ricordare che ad ogni vertice è applicato un fattore di cut-off

$$F_{\alpha}^2[(\mathbf{q}' - \mathbf{q})^2] = \left(\frac{\Lambda_{\alpha}^2 - m_{\alpha}^2}{\Lambda_{\alpha}^2 - (\mathbf{q}' - \mathbf{q})^2} \right)^{n_{\alpha}} \quad (11)$$

per tenere conto in maniera efficace che l'accoppiamento mesone-barione non è puntiforme ma distribuito nello spazio.

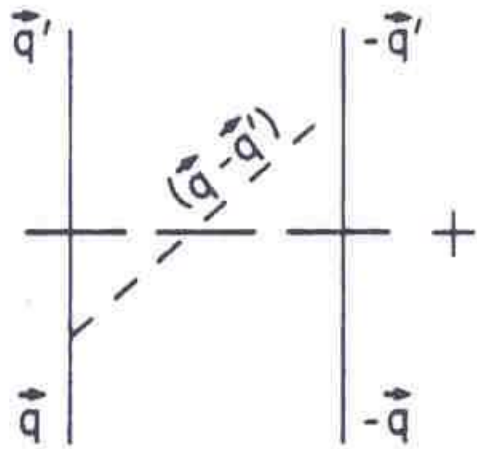


FIG. 5.1. A one-boson-exchange in time-ordered perturbation theory. The long dashed line indicates the states involved in the propagator.

Il deuterio e l'equazione di Rarita-Schwinger

Il deuterio é il piú semplice sistema nucleare legato, e le sue proprietà dipendono in larghissima misura dalla componente OPE del potenziale nucleare. Ciò si può ben capire considerando le dimensioni del deuterio: la distanza quadratica media fra i due nucleoni é di poco inferiore ai quattro fermi, e quindi ci si trova ampiamente nella regione di coda dove la componente OPE fornisce una descrizione accurata.

Consideriamo il fattore $(\tau_1 \cdot \tau_2)(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ che moltiplica il primo termine del potenziale OPE. Possiamo introdurre l'isospin totale T del sistema a due nucleoni come $T = (\tau_1 + \tau_2)/2$, in analogia con lo spin ordinario che é $S = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ e riscrivere tale fattore in funzione di T e S

$$(\tau_1 \cdot \tau_2)(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = 4 \left(S(S+1) - \frac{3}{2} \right) \left(T(T+1) - \frac{3}{2} \right)$$

per classificare l'azione del potenziale in base ai possibili valori di S e T che si possono assumere. Ciò é stato fatto nella Tabella 1, che riassume come varia il potenziale OPE al variare degli stati nucleari.

[Tab. 1: Dipendenza del potenziale dagli stati NN.]

S	T	(L)	OPE
0	0	$DISP$	$+3\frac{f^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\pi r}}{r}$
0	1	$PARI$	$-\frac{f^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\pi r}}{r}$
1	1	$DISP$	$\frac{1}{3}\frac{f^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\pi r}}{r}\left[1+\mathbf{S}_{12}(\hat{r})\left(\frac{3}{(m_\pi r)^2}+\frac{3}{m_\pi r}+1\right)\right]$
1	0	$PARI$	$-\frac{f^2}{4\pi}\frac{e^{-m_\pi r}}{r}\left[1+\mathbf{S}_{12}(\hat{r})\left(\frac{3}{(m_\pi r)^2}+\frac{3}{m_\pi r}+1\right)\right]$

La parità dello stato, data dal momento angolare (L), é nota una volta fissati S e T , in quanto é ricavabile ricorrendo al principio di Pauli generalizzato.



Gli operatori di spin e isospin rendono il potenziale OPE attrattivo nelle onde pari, repulsivo nelle dispari.

Soltanto quando $S = 0$ e $T = 1$, oppure $S = 1$ e $T = 0$, il potenziale é attrattivo.

Quando $S = 1$ c'è il termine tensore, quando $S = 0$ no.

E' dunque la combinazione dei due effetti: onde pari + $S = 1$ (tensore) che fornisce al deuterio sufficiente potenziale legante.

Determiniamo adesso l'equazione a cui deve soddisfare la funzione d'onda del deuterio, tenendo conto dell'importante contributo dato dalla componente tensore del potenziale

$$V^{tot} = V(r) + V_T(r)\mathbf{S}_{12}(\hat{r})$$

(Per la componente OPE la forma esplicita é data dall'ultima riga in Tabella 1).

In presenza di tale potenziale l'equazione di Schrödinger diventa

$$\left[\frac{1}{M} \left(-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{L^2}{r^2} \right) + V(r) + V_T(r)\mathbf{S}_{12}(\hat{r}) \right] \Psi = E\Psi.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione ad energia negativa, in corrispondenza ai numeri quantici del deuterio.

Espandiamo Ψ nelle componenti multipolari s e d

$$\Psi = \frac{v(r)}{r} \mathcal{Y}_{101}^1 + \frac{w(r)}{r} \mathcal{Y}_{121}^1;$$

le funzioni radiali $v(r)$ e $w(r)$ si riferiscono rispettivamente all'onda s e d , e \mathcal{Y}_{JLS}^M denota la parte spin-angolare della funzione d'onda, ovvero le armoniche sferiche accoppiate allo spin, dove J e M indicano, rispettivamente il momento angolare totale e la sua terza componente. Attraverso procedure puramente geometriche, possiamo ottenere un'equazione differenziale accoppiata per le componenti radiali della funzione d'onda

$$\left[\frac{1}{M} \left(-\frac{d^2}{dr^2} \right) + V(r) - E \right] v(r) = -\sqrt{8} V_T(r) w(r)$$

$$\left[\frac{1}{M} \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{6}{r^2} \right) + V(r) - 2V_T(r) - E \right] w(r) = -\sqrt{8} V_T(r) v(r).$$

Tale equazione é nota come equazione di Rarita–Schwinger e dalla sua soluzione (ad energia E negativa), che può essere ottenuta numericamente una volta resi espliciti i potenziali $V(r)$ e $V_T(r)$, si possono calcolare direttamente le osservabili del deuterio.

Proprietà del deuterio

Dalla soluzione dell’equazione di Rarita–Schwinger si possono calcolare le osservabili relative al deuterio. L’energia di legame é l’autovalore negativo $E = -B$ in corrispondenza del quale l’equazione differenziale accoppiata ammette una soluzione esponenzialmente decrescente alle grandi distanze. La normalizzazione della funzione d’onda del deuterio comporta che

$$\int_0^\infty (v(r)^2 + w(r)^2) dr = 1.$$

Il momento di quadrupolo del deuterio si può calcolare come

$$Q = \frac{1}{20} \int_0^\infty r^2 w(r) \left(\sqrt{8} v(r) - w(r) \right) dr.$$

Se il potenziale fosse a simmetria sferica il momento di quadrupolo varrebbe zero in quanto si annulla la componente $w(r)$. Infatti, senza il termine tensore le onde s e d non sarebbero più accoppiate.

Un'altra quantità caratterizzante la struttura del deuterio e in particolare la componente tensoriale del potenziale OPE é il rapporto asintotico d su s , che é un'osservabile che dipende dal comportamento della funzione d'onda alle grandi distanze. Alle distanze molto grandi, oltre il campo d'azione del potenziale, le componenti d e s della funzione d'onda acquistano il comportamento asintotico

$$v(r) \rightarrow A_S e^{-hr} \qquad w(r) \rightarrow A_S \eta e^{-hr} \left(1 + \frac{3}{hr} + \frac{3}{(hr)^2} \right),$$

con $h = \sqrt{MB}$. I coefficienti A_S e η rappresentano l'ampiezza asintot-

ica di onda s e il rapporto asintotico d su s . Sono entrambe quantità misurabili sperimentalmente (valori affidabili per queste quantità furono resi disponibili verso la metà degli anni '80). Al pari del momento di quadrupolo Q , anche per η é fondamentale la presenza di un'interazione tensoriale.

Entro un errore di pochi punti percentuali, A_S , η e Q , sono riproducibili teoricamente tenendo conto della sola componente OPE dell'interazione nucleare.

	CD-B	Nijm-I	Nijm-II	Reid93	AV18	natura
Q	0.270	0.272	0.271	0.270	0.270	0.276(2)
D/S	0.0256	0.0252	0.0252	0.0251	0.0250	0.0256(4)
D-pr	4.85%	5.66%	5.64%	5.70%	5.76%	-
3NB	8.00	7.72	7.62	7.63	7.62	8.48 (MeV)

Meccanismi TPE: Anni 70-80

- Modelli Teorici Insoddisfacenti! (TPE????)

Due Approcci:

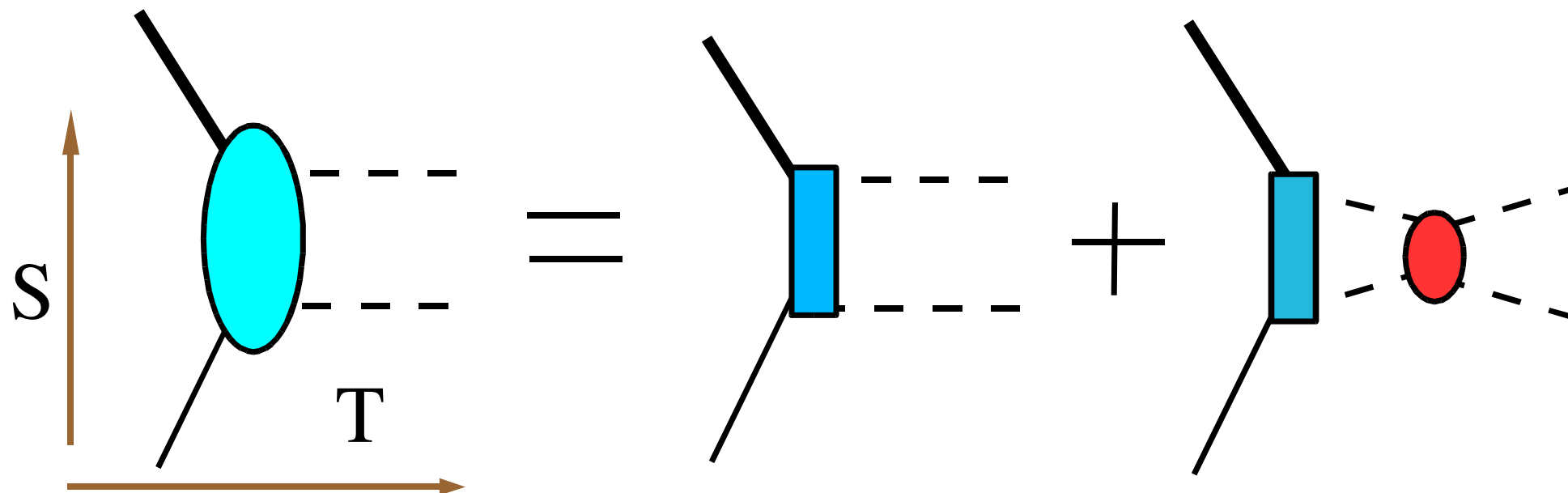
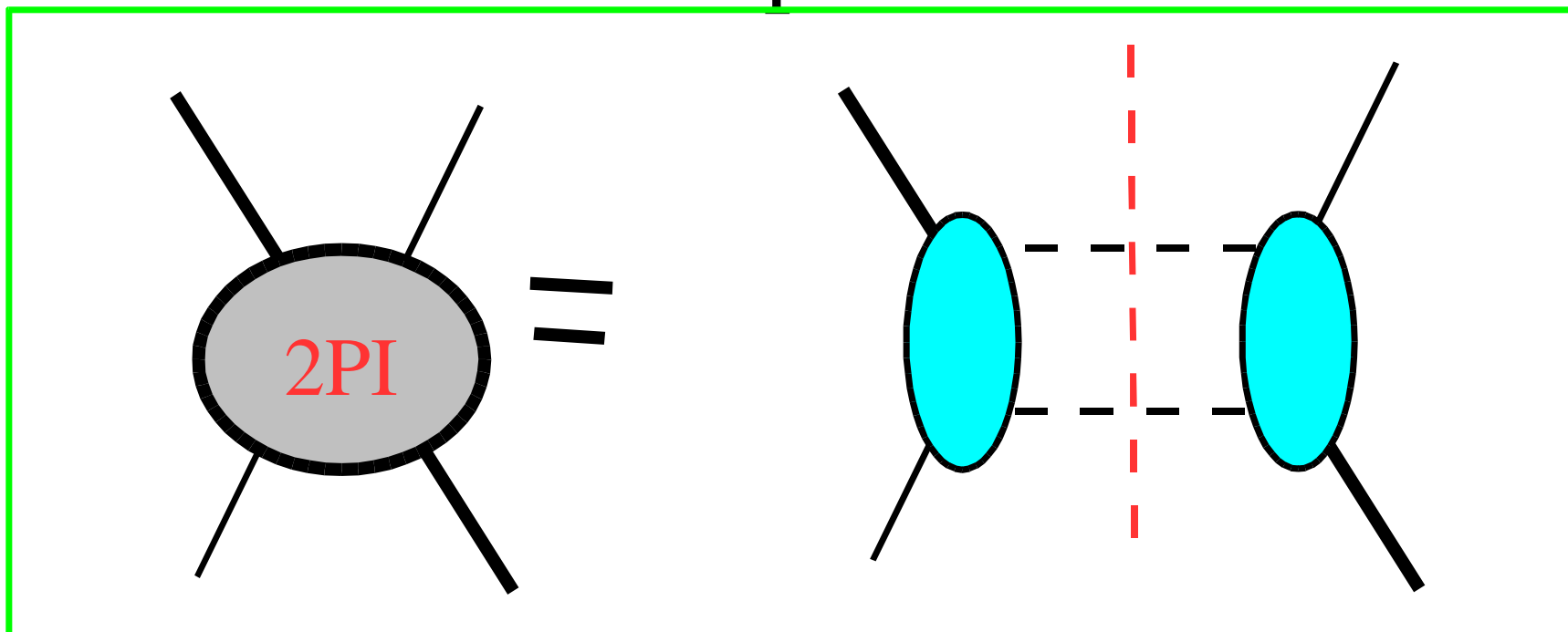
1) Applicazioni basate sulle regole di dispersione
(Proprieta' fondamentali delle ampiezze di reazione)

PARIS Potential

2) Ritorno alla teoria di campo pero' in un
framework ben definito! Approccio Hamiltoniano in
teoria di campo (time-ordered)

BONN Potential

Paris potential



Bonn Potential : OBE + qualche TPE + pi-rho

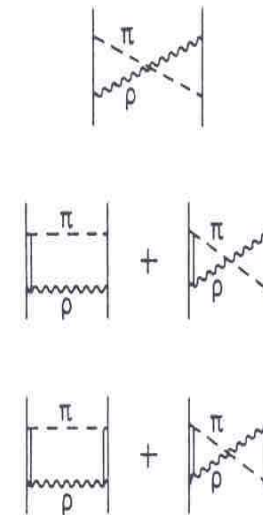
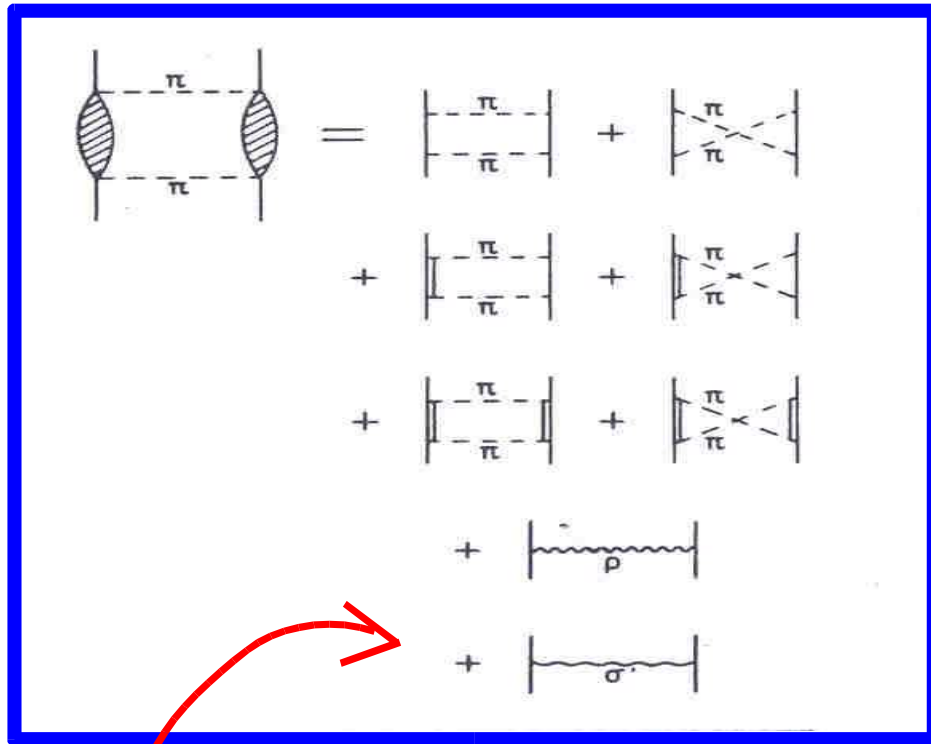


FIG. 4.5. πp -contributions to the NN-interaction considered in this work.

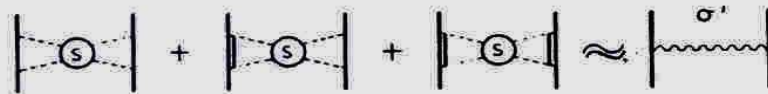
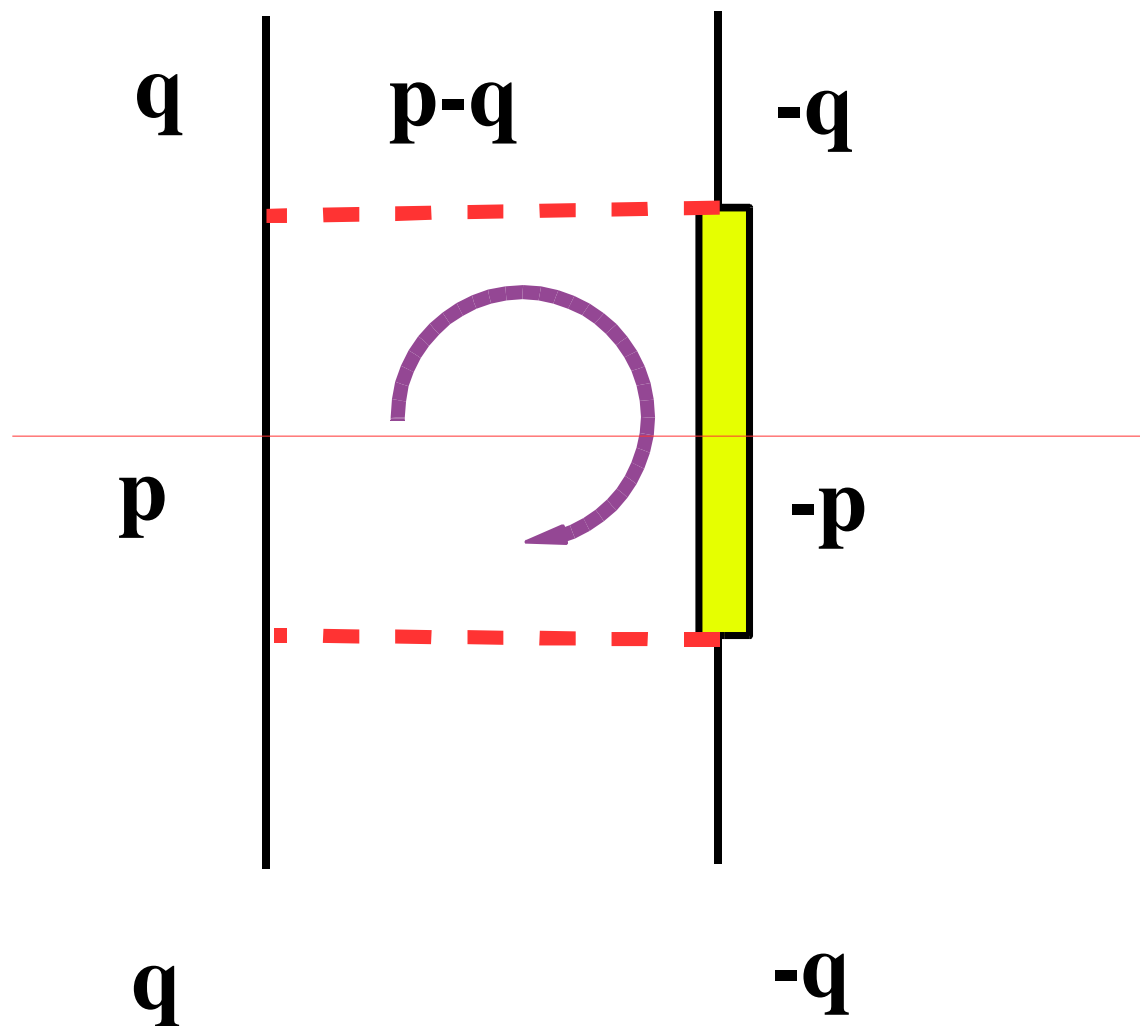
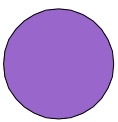


FIG. 4.2. Correlated 2π -exchange contributions considered in the work of Durso et al.¹⁵³ The circled S symbolizes the $\pi\pi$ -S-wave interaction adjusted to empirical $\pi\pi$ -S-wave scattering. Further notation as in Fig. 4.1.

Il diagramma TPE a box con Delta





Il potenziale tipo 2π -exch

Ci sono molti diagrammi che contribuiscono, prendiamo uno dei più importanti: il diagramma a box $N\Delta$. Tralasciamo i fattori di isospin e facciamo approssimazioni drastiche. Otterremo:

$$V_{2\pi} = -\frac{g_\pi^4}{16M^4} \frac{72}{25} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\pi^3} \frac{[(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{k})(\vec{S} \cdot \mathbf{k})]^2}{(m_\pi^2 + \mathbf{k}^2)^2 (E_p + E_p^\Delta - 2E_q)} \\ \times F_{\pi NN}^2(\Lambda_{\pi NN}, |\mathbf{k}|) F_{\pi N\Delta}^2(\Lambda_{\pi N\Delta}, |\mathbf{k}|)$$

Si ha nel cm (assumendo che il momento iniziale dei nucleoni sia uguale a quello finale: $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$)

$$E_p = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$$

$$E_p^\Delta = \sqrt{M_\Delta^2 + \mathbf{p}^2}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$$



Bonn Potential : risultati

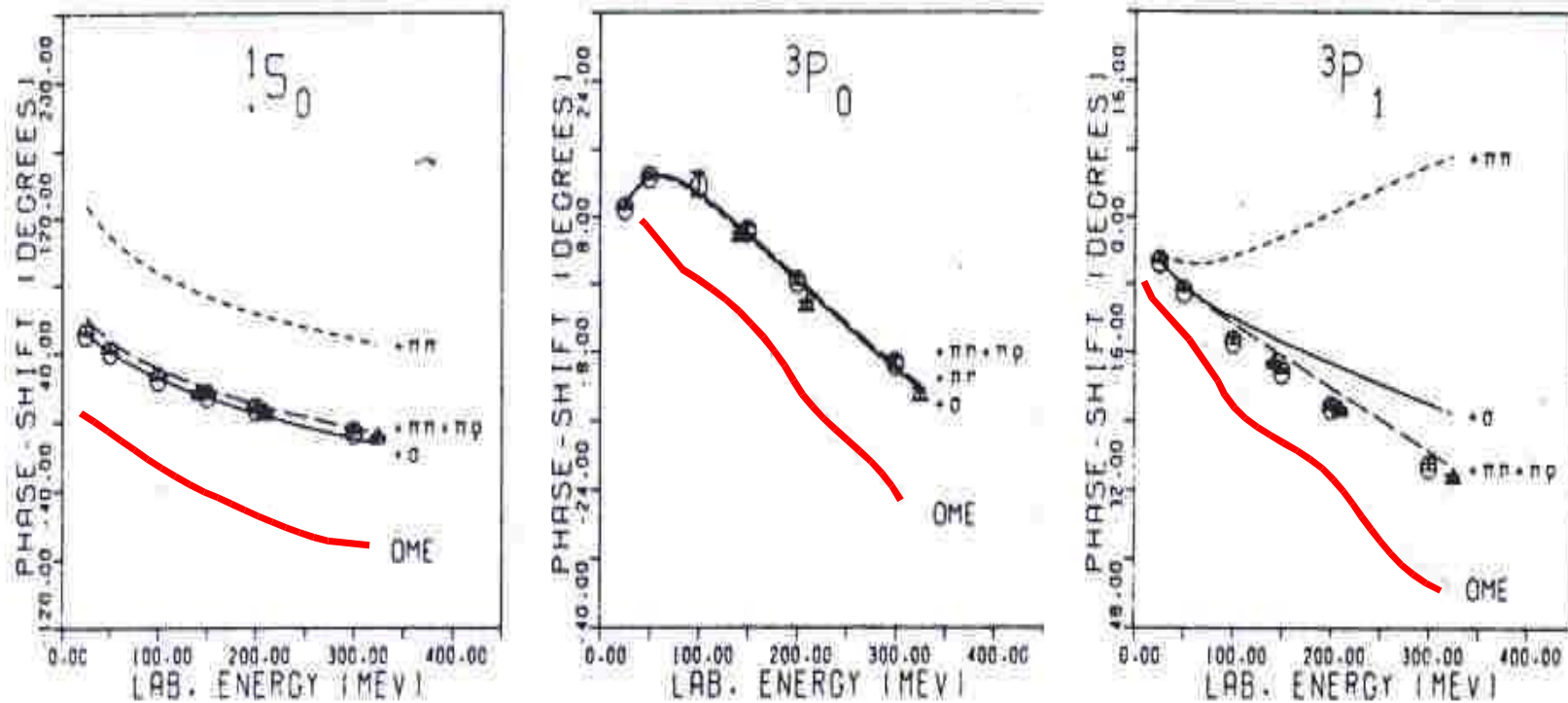


FIG. 4.6. The approximation of the 2π -exchange plus $\pi\rho$ -exchange by a σ -boson. The dotted curve contains all iterated one-meson-exchange (OME) contributions (i.e. $\pi, \rho, \omega, \delta$). The other contributions are always added on top of OME. " $\pi\pi$ " denotes the full 2π -exchange from our model. The other notation is obvious.

Capire i nuclei a livello di interazioni elementari fra i nucleoni.

- Potenziale 2N: Fit **ACCURATI** sui dati di scattering **pp** e **pn** (e "d")- richiede charge dependence. Fit scattering length **nn** (CSB).
- Bisogna includere raffinati effetti EM (per isolare le componenti CD e CSB)
- Necessita' di un potenziale 3N (\Rightarrow scambi mesonici complessi, pero' consistenti con 2N!)
 - per descrivere energie di legame nuclei leggeri,
 - per descrivere i processi di scattering 3N, 4N;**!!!!: vi sono discrepanze, anomalie, puzzle.**

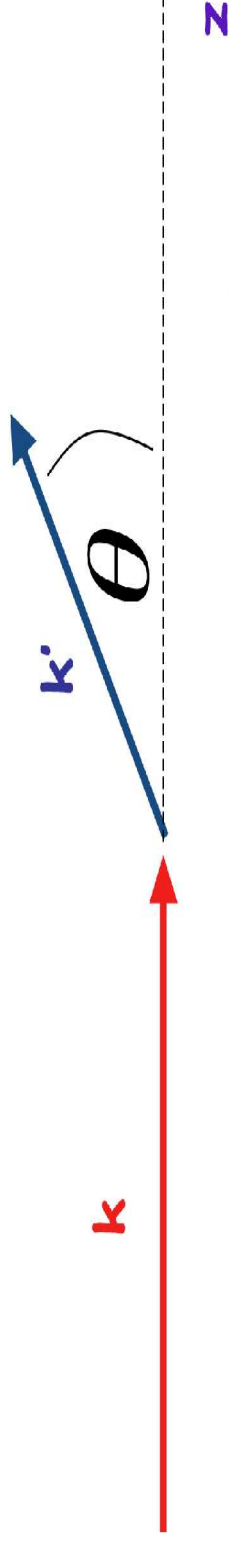
Nucleon-Nucleon interaction

Scattering Analysis

pp, np, nn scattering in T=0, 1 channels

- pp scattering easy
 - neutron beams (np,nn) and neutron targets (pn,nn) difficult
- ${}^7\text{Li}(\text{p,n}), \text{ reactors}$
- short neutron lifetime ($\sim 10\text{min}$)
 deuteron - a substitute (pp and 3N effects have to be subtracted);

Scattering Cross Section



$$\psi(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

elastic scattering; the same value of k !
 valid for short-ranged potentials ($V=0$ at large r)
 Coulomb contribution is removed

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad k = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\vec{p}|}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$$

Nucleon-Nucleon interaction

Partial-wave decomposition

For scattering off a short-ranged potential, it is useful to carry out a partial-wave decomposition.

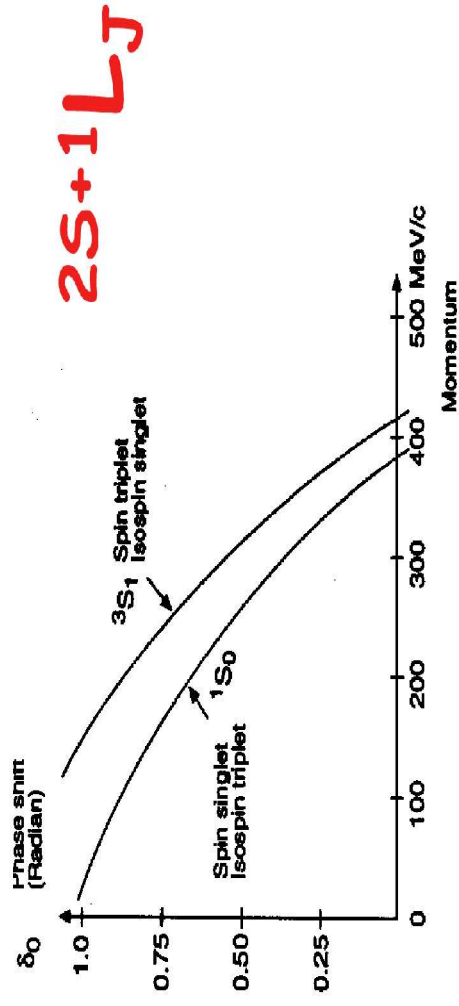
$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_{\ell}} \sin \delta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$R_{\ell}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{1}{2} \ell \pi + \delta_{\ell} \right) \quad \text{phase shift}$$

The probability current density in each partial wave is conserved - unitarity (valid only for elastic scattering!). The partial wave decomposition is very convenient at low energies since only a few terms enter the expansion.

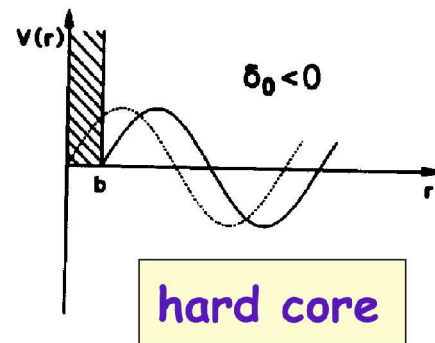
$$\ell \leq \frac{|p|a}{\hbar} \quad \text{potential range}$$

For pn scattering (potential range 2fm) and low momenta (<400 MeV/c), the s-waves dominate. The phase shift δ_0 is decisive for nuclear binding.

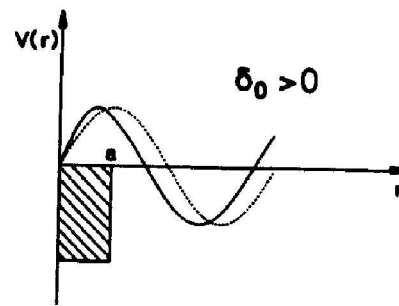


For momenta > 400 MeV/c the phase shift is negative. This indicates that the nuclear force is repulsive at short distances!

NN scattering: phase shifts

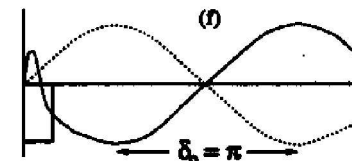
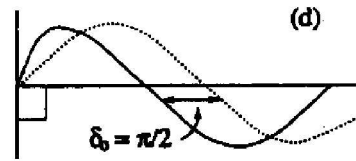
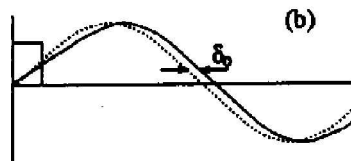
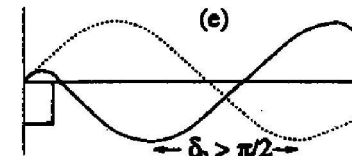
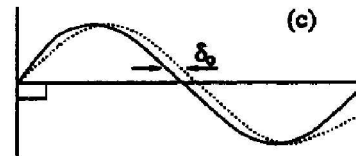
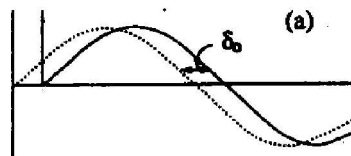


$$\delta_0 = -kb < 0$$



attractive square well

$$\delta_0 = \arctan \left(\sqrt{\frac{E}{E + |V|}} \tan \frac{\sqrt{2mc^2(E + |V|)}a}{\hbar c} \right) - \frac{\sqrt{2mc^2 E} a}{\hbar c}$$



Phase-Shift Analysis (PSA)

partial-wave decomposition

$$S_J = e^{2i\delta_J} ; \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

include known physics

$L > L_{\max}$: OPE

Coulomb

inelasticities for $T > 300$ MeV

→ δ_J complex

- **VPI/GWU (SAID)**

pp : 0-3.0 GeV : 24 000 data points

np : 0-1.3 GeV : 13 000 data points

- **Saclay-Geneva**

pp : mainly fixed energy

- **Hiroshima**

pp/np : fixed energies 0-11 / 0.5-1.1 GeV

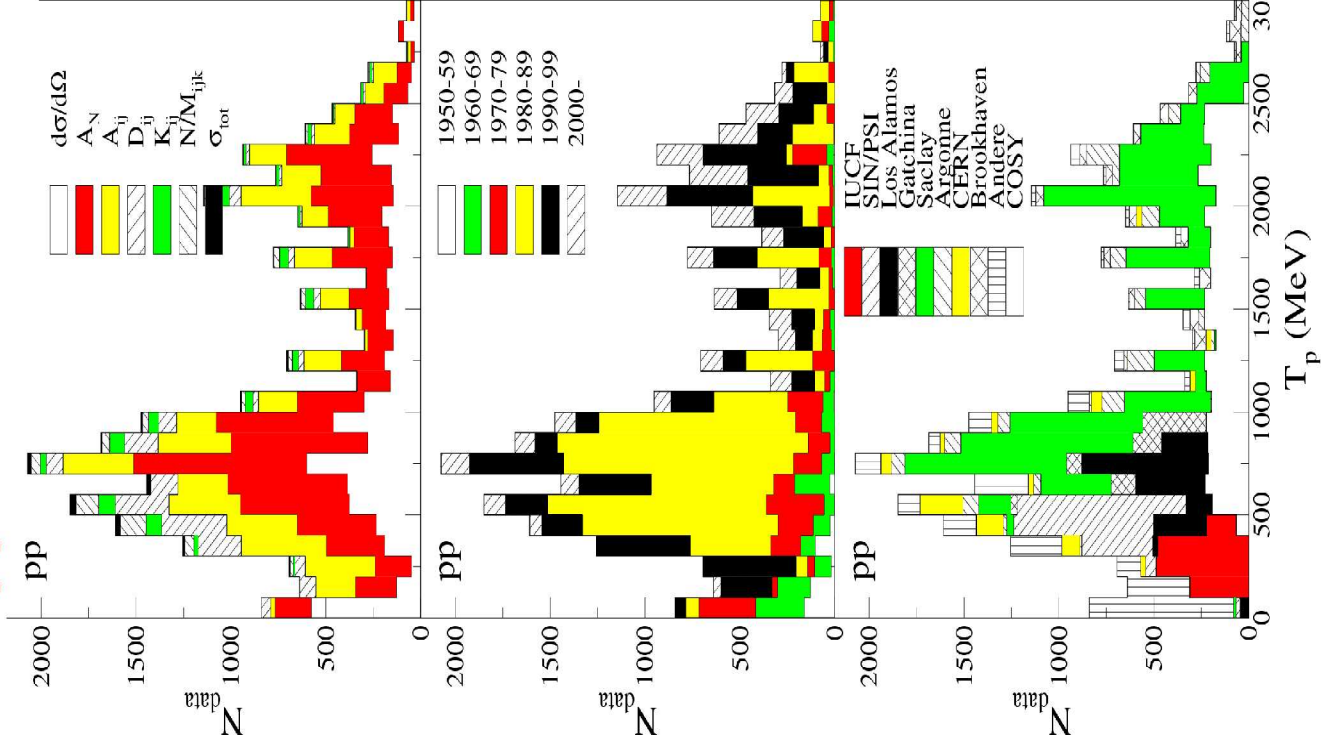
- **Nijmegen**

pp/np : 0-350 / 0-500 MeV

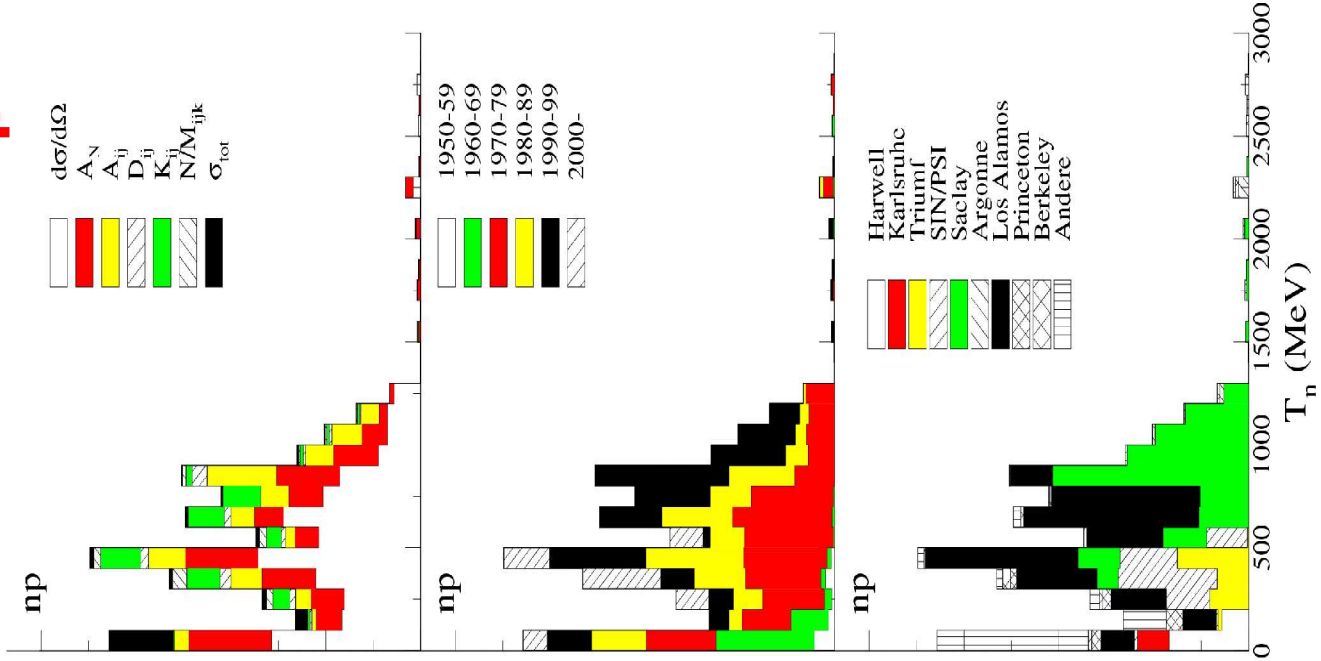
Link fra Teoria ed esperimento !!!

NN-Database

pp

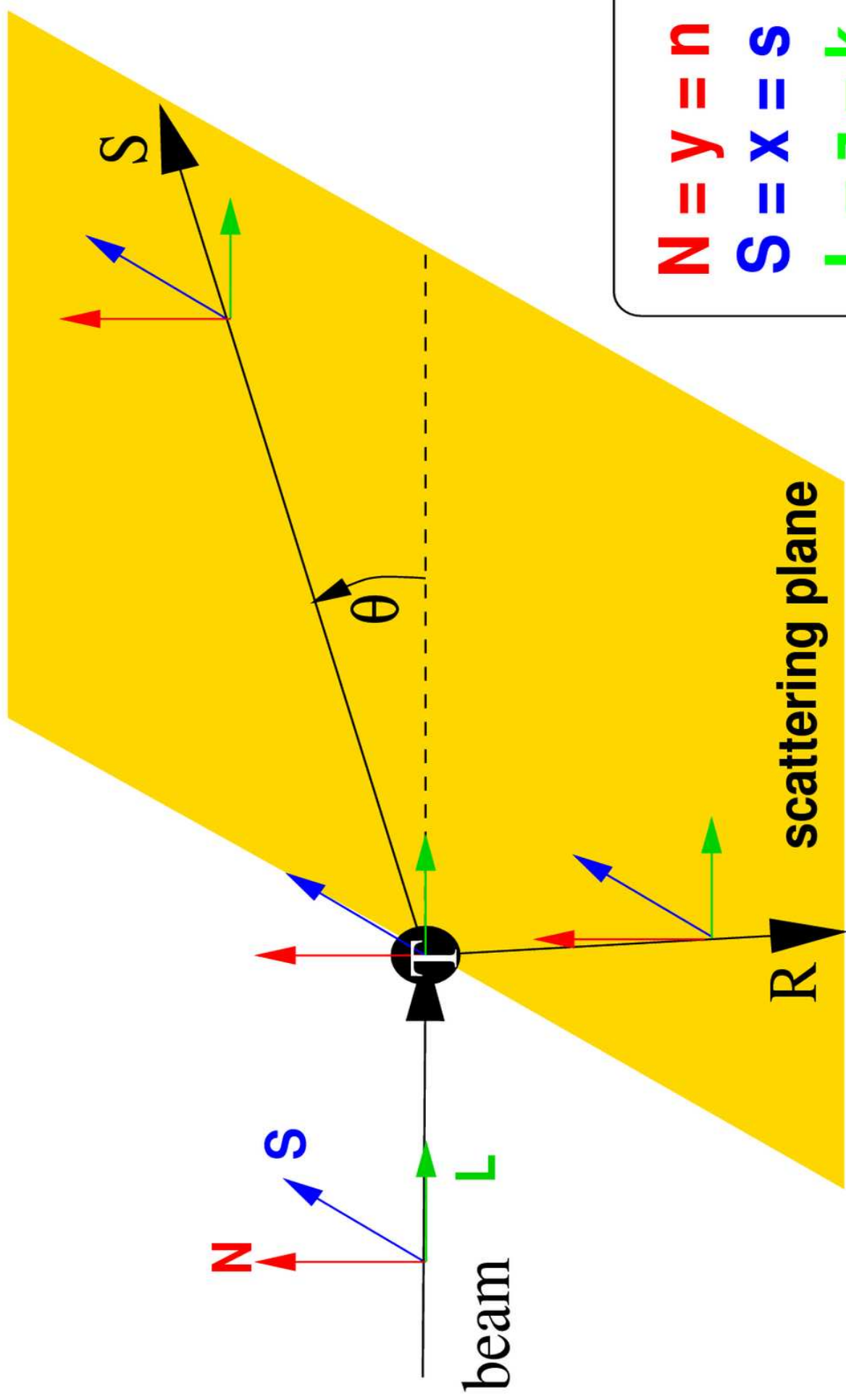


np



Harwell
Karlsruhe
Triumpf
SIN/PSI
Saclay
Argonne
Los Alamos
Princeton
Berkeley
Andere

IUCF
SIN/PSI
Los Alamos
Gatchina
Saclay
Argonne
CERN
Brookhaven
Andere
COSY



$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{y} = \mathbf{n} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{x} = \mathbf{s} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{z} = \mathbf{k} \end{aligned}$$

Ampiezze NN complesse: 16 \rightarrow 5 indipendenti,
9 funzioni reali per ogni energia ed angolo!

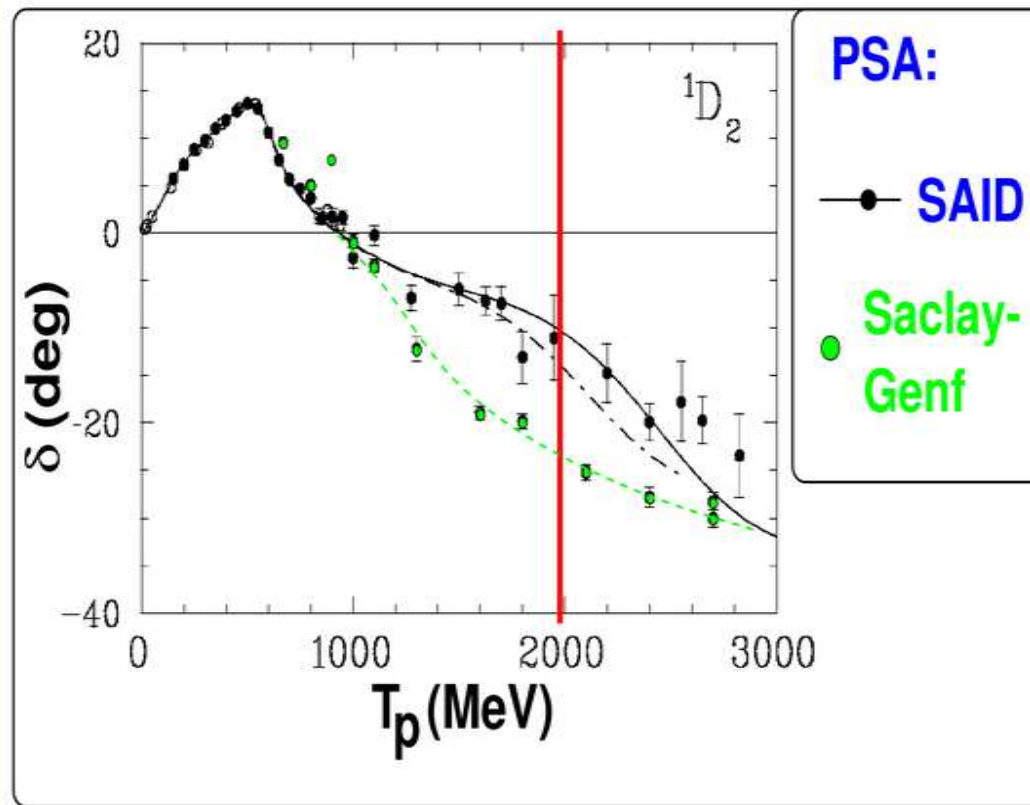
$$\phi_1 = \langle ++ | T | ++ \rangle \quad \phi_2 = \langle ++ | T | -- \rangle$$

$$\phi_3 = \langle +- | T | +- \rangle \quad \phi_4 = \langle +- | T | -+ \rangle$$

$$\phi_5 = \langle ++ | T | +- \rangle$$

**SOFISTICATE MISURE DI POLARIZZAZIONE PER
RICOSTRUIRE LE FASI NUCLEONE-NUCLEONE**

AMBIGUITA' NELLA RICOSTRUZIONE DEGLI SFASAMENTI ASINTOTICI NN



Bystricky, Lechanoine-Leluc, Lehar Eur. Phys. J. C4, 607 (1998)

Arndt, Strakovsky, Workman, Phys. Rev. C62, 034005 (2000)

Potenziali fenomenologici

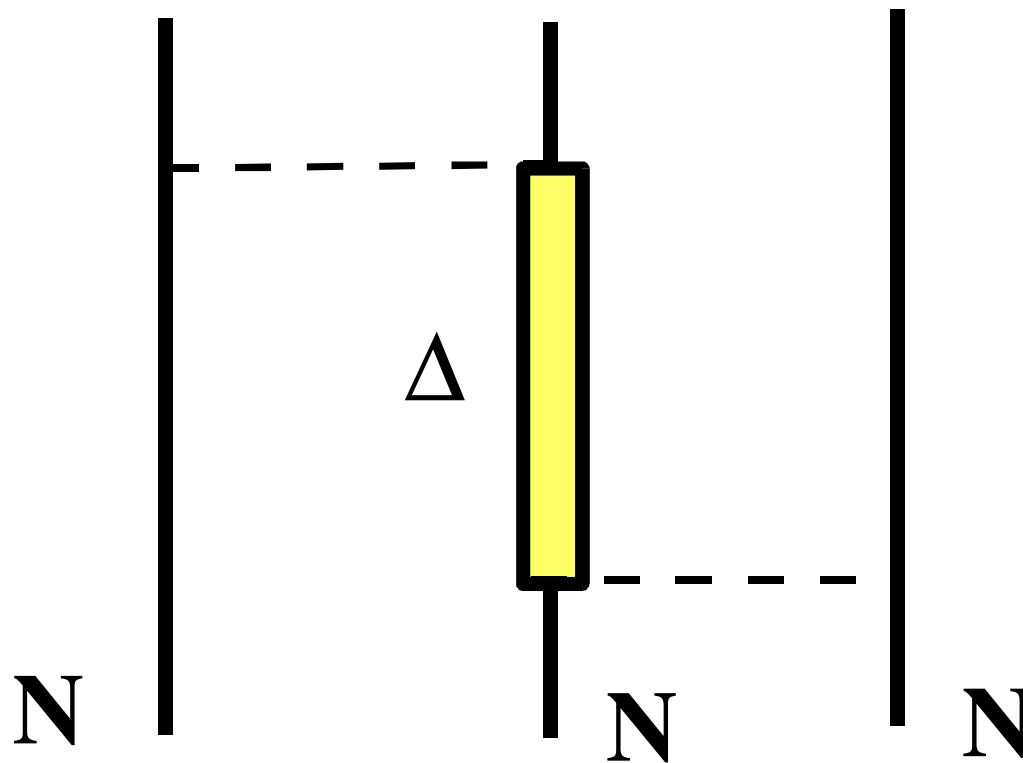
Nijmegen data 1787pp + 2514np
Elab < 350

POTENZIALE	pp	np	Commento
CD – BONN	1.03	1.08	OBE + non-local
ARGONNE V18	1.10	1.03	Operator expansion
Nijmegen I	1.00	1.04	Partial W nonlocal
Nijmegen II	1.00	1.04	Partial W local
Reid 93	1.00	1.04	Partial wave (J .le.6)

CHI**2/DATUM

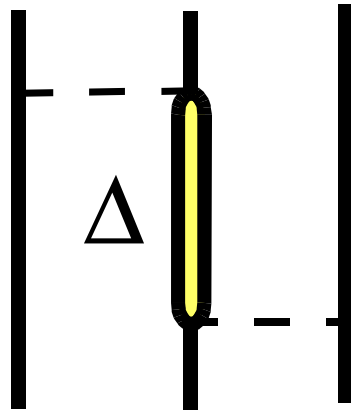
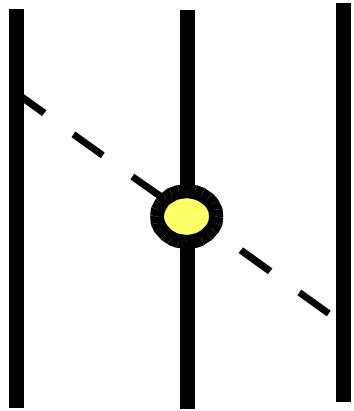
Potenziali a 3 Nucleoni: l'archetipo

Il potenziale di Fujita Miyazawa : 2-PION exchange

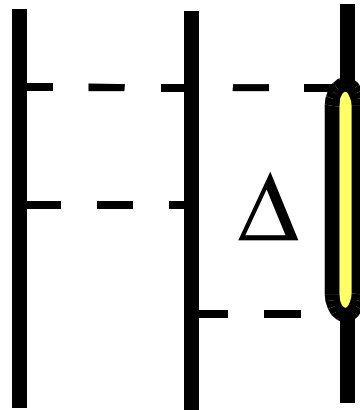
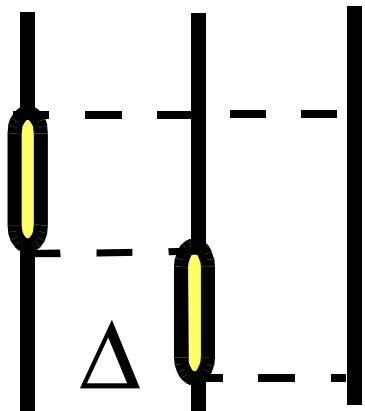
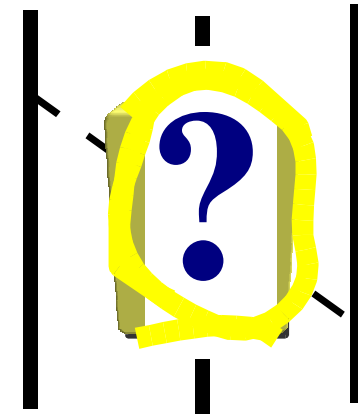


1957 – Pion-Nucleus rescattering in P waves

Potenziali two pion exchange



Urbana IX



Tucson-Melb
Brasil
RuhrPot
Texas+ChPT

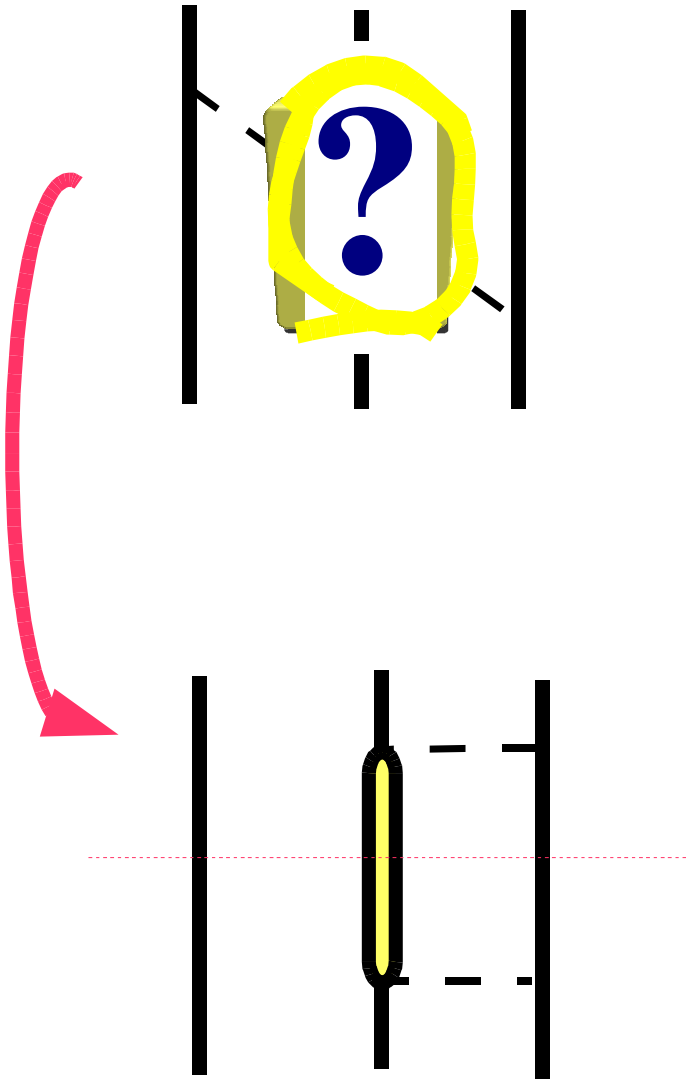
Illinois RINGS

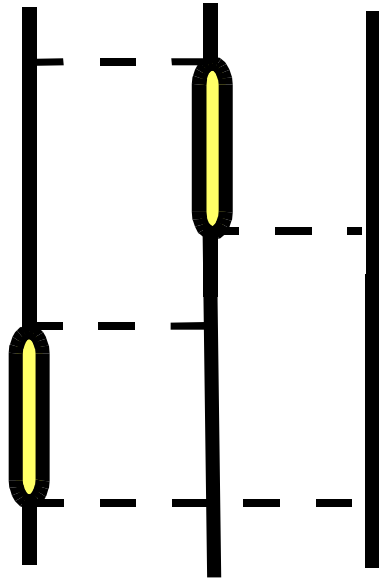
EFFETTO DELLA Δ

Contributo dispersivo.

E' un termine che compare quando si tratta il grado di liberta' della risonanza Δ nel problema dei tre corpi. L'effetto si perde se si congela la Δ in un potenziale 3N.

Trattazione NNN-NN Δ

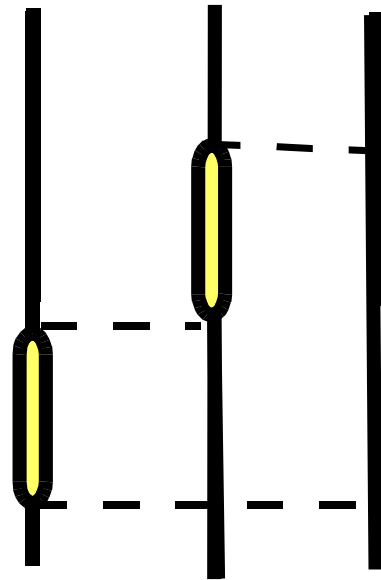




EFFETTO DELLA Δ
PRIMA Iterazione del
Fuzjita-Miazawa!

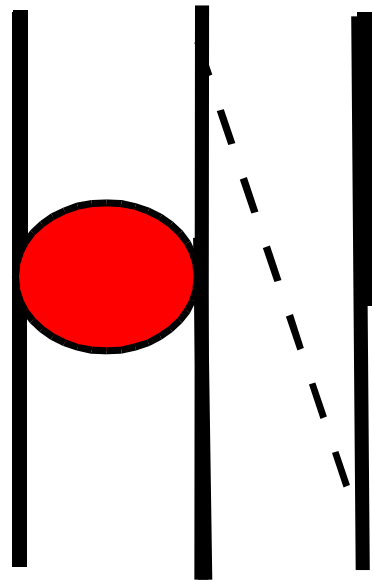
E' un termine a 4 Pioni.

**MANCA IL TERMINE
CON 3 PIONI**



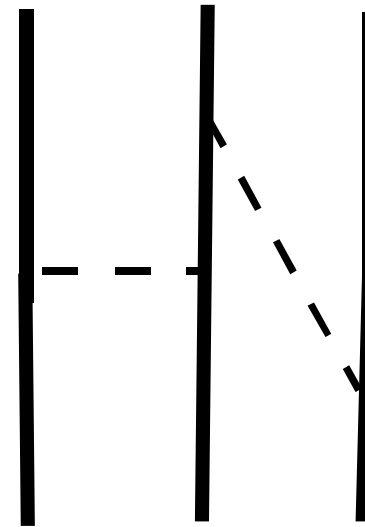
C'e' differenza fra la
trattazione esplicita della Δ :
NNN-NN Δ -... e sviluppare
i POTENZIALI 3N

C'e' differenza fra
la trattazione esplicita della PIONE:
NNN-NNN -... e sviluppare
i POTENZIALI 3N ?



NON SI CANCELLA CON
I RITARDI MESONICI 2N

SI



SI CANCELLA CON I
RITARDI MESONICI 2N

Argomenti correnti da trattare

- Le simmetrie approssimate di QCD e le Forze Nucleari.
- Masse dei quarks (u, d) e Lagrangiana di QCD.
- Meccanismo di rottura spontanea delle simmetria chirale => Nuova costruzione TPE attraverso condizioni basate sulla simmetria chirale => Unificazione di OPE—TPE (2N) 3NF-TPE (3N) e processi di scattering $N-N$.
- Are we seeing the end of the tunnel?
- Simmetria di isospin: $m(u) \neq m(d)$. => CD in Nuclear interactions.

Nucleon-Nucleon interaction

(Scattering length and effective range)

At low energies, the total cross section remains finite for NN scattering.

$$\lim_{E \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2$$

scattering length

$$a = \lim_{k \rightarrow 0} \Re \left\{ -\frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \right\}$$

is positive if there is a bound state

$$k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a} + -\frac{1}{2} r_e k^2$$

effective range

		$S = 0, T = 1$ (fm)	$S = 1, T = 0$ (fm)
pp	a	-17.(3)	—
	r_e	2.8(5)	—
nn	a	-16.(3) ?? -18.(5)	—
	r_e	2.7(5)	—
np	a	-23.7(5)	5.423 ± 0.005
	r_e	2.7(3)	1.73 ± 0.02

ULTERIORI argomenti da trattate

- Le diverse metodologie di costruzione delle interazioni nucleari: Il rapporto tra le teorie di campo mesonico e i potenziali quantomeccanici.
- Approccio da matrice S (diagrammi di Feynman)
- Approccio con gli operatori di proiezione (Feshbach; sviluppi time-ordered).
- Approccio basato sulle trasformazioni unitarie (sviluppi energy independent). Può portare alla costruzioni di potenziali efficaci (**Okubo**), ma può anche essere utilizzato per evitare i potenziali efficaci (**Greenberger-Schweber-van Hove-Shirokov**).

Conclusione: Descrivere i nuclei attraverso le interazioni elementari fra nucleoni.

- Costruzione dell'interazione elementare 2N attraverso le teorie mesoniche (pioni, etc): processo che dura da oltre 70 anni.
- OPE su basi solide. Middle range (TPE-OBE-Feno) livello descrittivo molto accurato ($\chi^2/\text{datum} \sim 1$). Nuova speranza su TPE basata su sviluppi chirali. Confronto teoria-esperimento
Banche dati nucleari: 2N phase shifts analysis.
- Evidente necessita' di introdurre e studiare la (CD: CSB e CIB) e trattazione alle basse energie dei termini EM.
- Evidente necessita' di introdurre le forze a tre corpi. Queste forze a 2N e 3N vanno investigate e testate sui sistemi nucleari leggeri (few-body systems) e vanno costruite consistentemente.

Esistono potenziali di altissima accuratezza per calcoli few-body! **PERO'**

- SCATTERING LENGTH NEUTRONE-NEUTRONE: CONTRADDIZIONE FRA ESPERIMENTI
- PROBLEMI SULLA DETERMINAZIONE PRECISA DELLA COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO π NN.
- IL DATABASE PROTONE-NEUTRONE E' ANCORA INCONSISTENTE.
- ANCORA NON SI CAPISCE COMPLETAMENTE L'ORIGINE DELLA CHARGE-DEPENDENCE DELL'INTERAZIONE NUCLEONE-NUCLEONE.