

# Processi di burning in stelle compatte

Irene Parenti



Dipartimento di Fisica e INFN di Ferrara

**"Scuola di Fisica Nucleare R. Anni"** Otranto, 1 Giugno 2006

Otranto, 1 Giugno 2006

Irene Parenti

# Cosa vedremo

- perché studiare i processi di combustione
- fluidodinamica:
  - superficie di discontinuità
  - onde di shock
  - teoria della combustione non relativistica
  - teoria della combustione relativistica
- calcoli numerici sulla natura della transizione da materia nucleare a materia di quark in stelle compatte.
- convezione
- c'e' convezione nelle stelle di neutroni?
- calcoli numerici di velocità convettive
- conclusioni

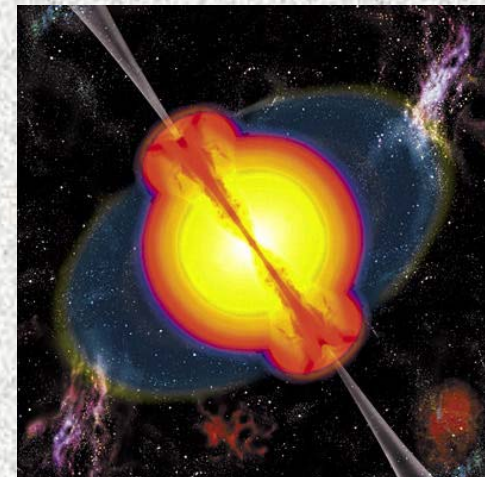
# Perché studiarli?

Processo di conversione di una stella di neutroni in una stella ibrida o in una stella a quark.

## Tempo di conversione?

Importante per:

- Esplosioni di Supernovae
- Gamma Ray Burst
- Kick NS



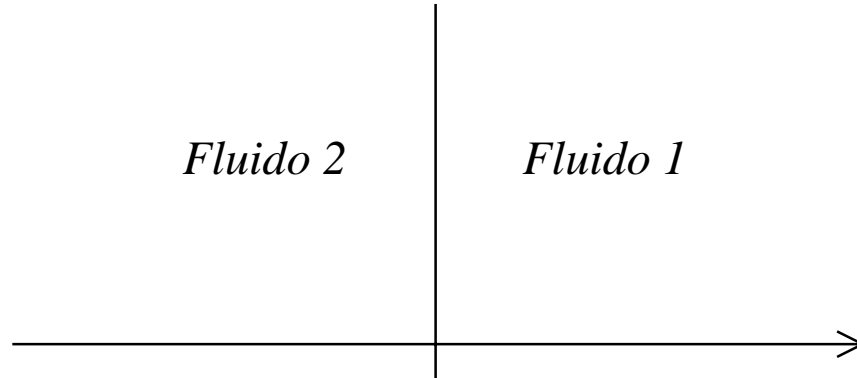
# Superficie di discontinuità

$P_2, e_2, r_2$

*Fluido 2*

*Fluido 1*

$P_1, e_1, r_1$



# Condizioni al contorno

Quantità che si conservano attraverso la superficie:

flusso di massa

$$[\rho v_x] = 0$$

flusso di energia

$$\left[ \rho v_x \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) \right] = 0$$

flusso d'impulso

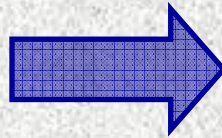
$$\left\{ \begin{array}{l} [p + \rho v_x^2] = 0 \\ [\rho v_x v_y] = 0 \\ [\rho v_x v_z] = 0 \end{array} \right.$$



# Prima soluzione

Non c'è flusso di massa attraverso la superficie:

$$\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0$$



$$v_{1x} = v_{2x} = 0$$

$$p_1 = p_2 = 0$$

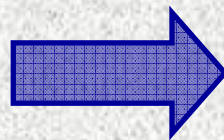
Le quantità  $v_y$ ,  $v_z$  e  $\rho$  possono essere discontinue.  
Questo tipo di soluzione viene detta discontinuità tangenziale.

Questa discontinuità è completamente instabile e rende il fluido turbolento.

# Seconda soluzione

C'è flusso di massa attraverso la superficie:

$$\rho_i \neq 0 \Rightarrow v_{ix} \neq 0$$



$$v_{1y} = v_{2y}$$

$$v_{1z} = v_{2z}$$

Le condizioni al contorno diventano allora:

$$\begin{cases} [\rho v_x] = 0 \\ \left[ \frac{1}{2} v_x^2 + w \right] = 0 \\ [p + \rho v_x^2] = 0 \end{cases}$$

Una discontinuità di questo tipo  
viene detta onda di shock

# Onda di Shock

Introduciamo adesso il volume specifico:  $V = \frac{1}{\rho}$

e il flusso della densità di massa:  $j = \rho v$

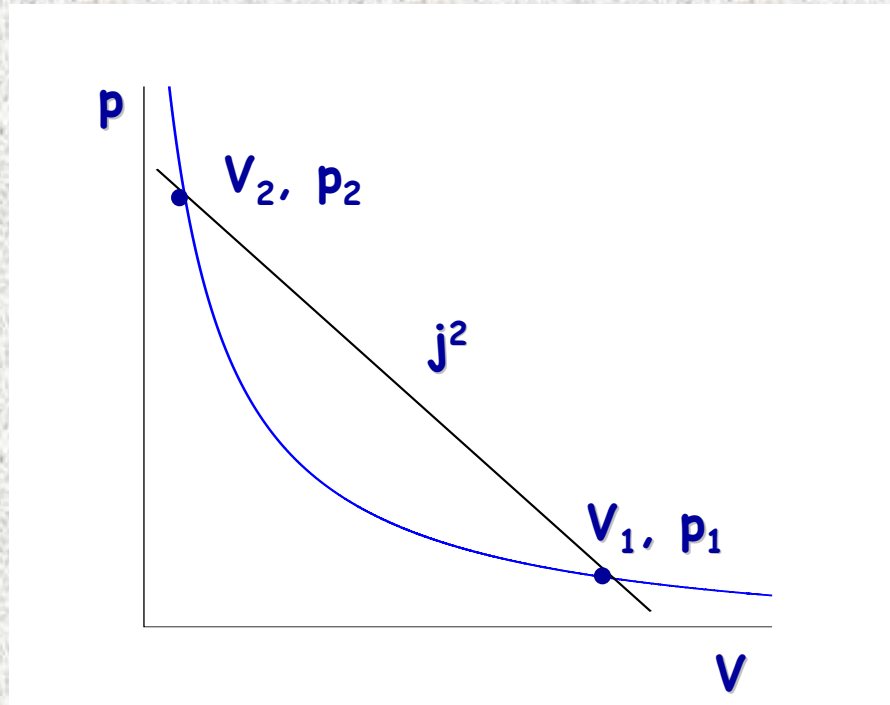
Le condizioni sul fronte, riscritte in termini di queste quantità, diventano:

$$\begin{cases} v_1 = j V_1, & v_2 = j V_2 \\ j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2) \\ w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0 \end{cases}$$



# Adiabatica di shock

(detta anche adiabatica di Hugoniot)



soluzione stabile solo  
per:

$$p_2 > p_1$$

$$V_1 > V_2$$

con

$$v_1 > c_1$$

$$v_2 < c_2$$

**NB:** il passaggio di un'onda di shock è un processo irreversibile. Deve quindi essere soddisfatta anche la relazione:

$$s_2 > s_1$$

# Weak shock

- discontinuità in tutte le quantità è piccola
- sviluppo attorno al punto 1 rispetto a  $s$  e  $p$ .

$$\begin{aligned}w_2 - w_1 &= \left( \frac{\partial w}{\partial s_1} \right)_p (s_2 - s_1) + \left( \frac{\partial w}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1) \\&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3} \right)_s (p_2 - p_1)^3 \\&= T_1 (s_2 - s_1) + V_1 (p_2 - p_1) \\&\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 \\V_2 - V_1 &= \left( \frac{\partial V}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2\end{aligned}$$

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0$$

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(2V_1 + V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = 0$$

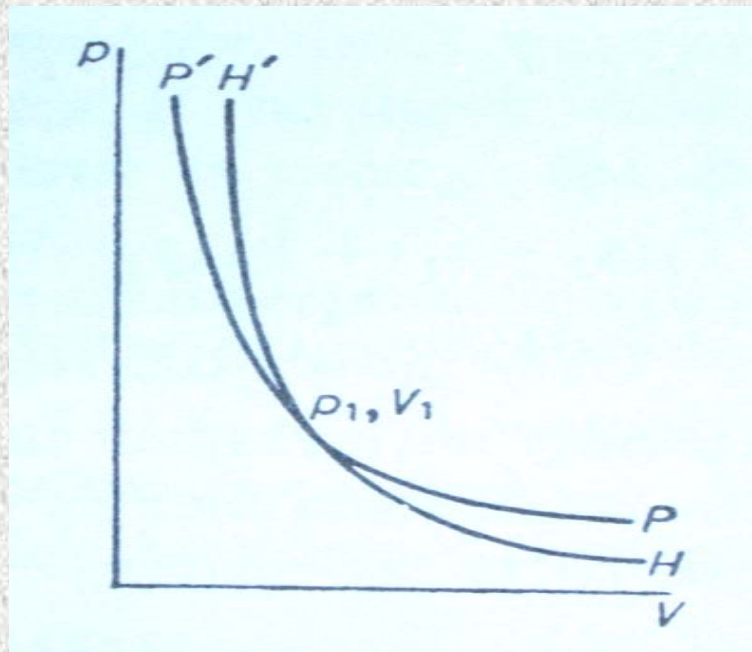
$$V_1(p_2 - p_1) + \frac{1}{2}(V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = w_2 - w_1$$

$$\cancel{V_1(p_2 - p_1)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3$$

$$= T_1(s_2 - s_1) + \cancel{V_1(p_2 - p_1)} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial p_1} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3$$

$$s_2 - s_1 = + \frac{1}{12 T_1} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3$$

- ricordiamoci che  $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0$
  - adiabatica di Poisson: ha la forma  $pV^\gamma = \text{cost}$   
è isoentropica  $s_2 - s_1 = 0$
  - se  $p_2 > p_1$  allora sulle due adiabatiche abbiamo  $s_2 > s_1$  H  
 $s_2 = s_1$  P
- da cui otteniamo che:  $V_{2H} > V_{2P}$  (l'opposto per  $p_2 < p_1$ )





nel **punto 1** le due curve hanno un contatto di secondo grado. Se rimaniamo vicini al punto 1 possiamo scrivere:

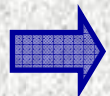
$$j^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right) = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$$

Calcoliamo le velocità:

$$v_1 = v_2 = v = jV = V \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} = \sqrt{-V^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = c_s$$

Importante:

- $s_2 > s_1$



$$p_2 > p_1$$

- dal grafico:

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1} \Rightarrow j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1}\right)_{s_1} = c_1^2 \Rightarrow v_1 > c_1$$

- analogamente:

$$v_2 < c_2$$

$$v_1 > v_2$$



# Combustione lenta

- La velocità delle reazioni chimiche dipende più o meno fortemente dalla temperatura.
- **Reazioni endotermiche**: serve un continuo apporto termico dall'esterno per fare andare avanti la reazione.
- **Reazioni esotermiche**: se l'energia rilasciata è abbastanza grande allora la reazione si autoalimenta (in questo caso si parla di "combustione lenta").
- Processo di combustione è necessariamente accompagnato dal moto della materia stessa.

**PROCESSO CHIMICO + PROCESSO DINAMICO**

- La parte combusta e la parte ancora da bruciare sono separate da uno strato di transizione (flame) dove le reazioni stanno avvenendo.
- La dimensione  $\delta$  di questo strato è strettamente legata alla distanza media su cui il calore rilasciato viene trasferito durante la durata della reazione stessa.
- $\delta$  non dipende quindi dalle dimensioni  $\ell$  del problema ma dalle caratteristiche della reazione.
- Se  $\ell \gg \delta$  allora i due problemi (chimico e dinamico) possono essere trattati separatamente.
- trascuriamo  $\delta$  e consideriamo lo strato di transizione come una superficie di separazione.



superficie di discontinuità

# Esempio

- Prendiamo una reazione chimica autoalimentata dove il trasferimento di calore avviene per conduzione termica.
- $X$  conducibilità termica
- $\tau$  tempo caratteristico della reazione

- Il Landau insegna:  $\delta \approx \sqrt{X \tau}$

- ma anche la velocità del flame dipenderà da  $\tau$  e da  $\delta$ :

$$v_1 \approx \frac{\delta}{\tau} \approx \sqrt{\frac{X}{\tau}}$$

- la conducibilità non e' altro che:  $X \approx \lambda v_T$

- con  $\lambda$  cammino libero medio delle molecole e  $v_t$  velocità termica.

- definendo come "tempo libero medio" otteniamo:

$$\tau_{fr} \approx \frac{\lambda}{v_t}$$

$$X \approx \lambda v_t = \tau_{fr} v_t^2$$

Poiche' la velocità termica è dello stesso ordine di grandezza della velocità del suono:  $v_t \sim c_1$

$$\frac{v_1}{c_1} \approx \sqrt{\frac{X}{\tau c_1^2}} \approx \sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}$$

da  $\tau_{fr} \ll \tau$  otteniamo:

$$v_1 \ll c_1$$



Sulla superficie di discontinuità che sostituiamo alla zona di combustione varranno ancora una volta le equazioni di conservazione del flusso di massa, energia e impulso:

$$\begin{cases} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \\ w_1 = w_2 \\ p_1 = p_2 \end{cases}$$

dove abbiamo trascurato i termini in  $v^2$ .



# Detonazione

Nella combustione lenta il meccanismo che permette l'avanzamento del fronte di combustione è il trasferimento di calore dalla zona combusta a quella ancora da bruciare.

Ma esiste anche un altro meccanismo, completamente diverso, che si basa sull'utilizzo delle onde di shock.

Un'onda di shock quando attraversa la materia le cede anche calore, facendo così aumentare la sua temperatura.

Se quest'onda è abbastanza energetica questo aumento di temperatura può essere sufficiente per dare inizio alla combustione.

L'onda di shock quindi "accenderà" la combustione mano a mano che attraversa la materia e quindi la velocità del fronte di combustione sarà la stessa dell'onda.

Questo meccanismo di propagazione viene chiamato "detonazione".

Una volta passata l'onda di shock le reazioni chimiche innestate continueranno per un tempo  $\tau$  caratteristico delle reazioni stesse. L'onda sarà allora seguita da uno strato di materia, che si muove con essa, dove avvengono le reazioni di combustione.

Se le dimensioni del sistema sono abbastanza grandi possiamo considerare onda di shock e strato di combustione come una singola superficie di discontinuità che separa le due fasi e che viene detta "onda di detonazione".

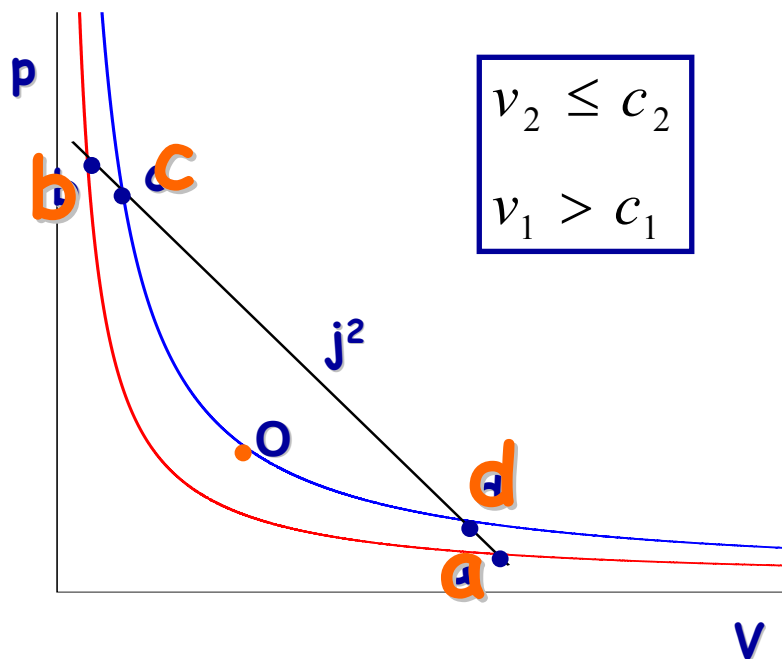
Conservazione dei flussi di massa, energia e impulso portano agli stessi risultati ottenuti per l'onda di shock

$$\begin{cases} v_1 = j V_1, & v_2 = j V_2 \\ j^2 = (p_2 - p_1)(V_1 - V_2) \end{cases}$$

flusso di massa

$$e_1 - e_2 + \frac{1}{\gamma} (V_1 - V_2)(p_2 - p_1) = 0$$

adiabatica di detonazione



— adiabatica di detonazione

— adiabatica di shock

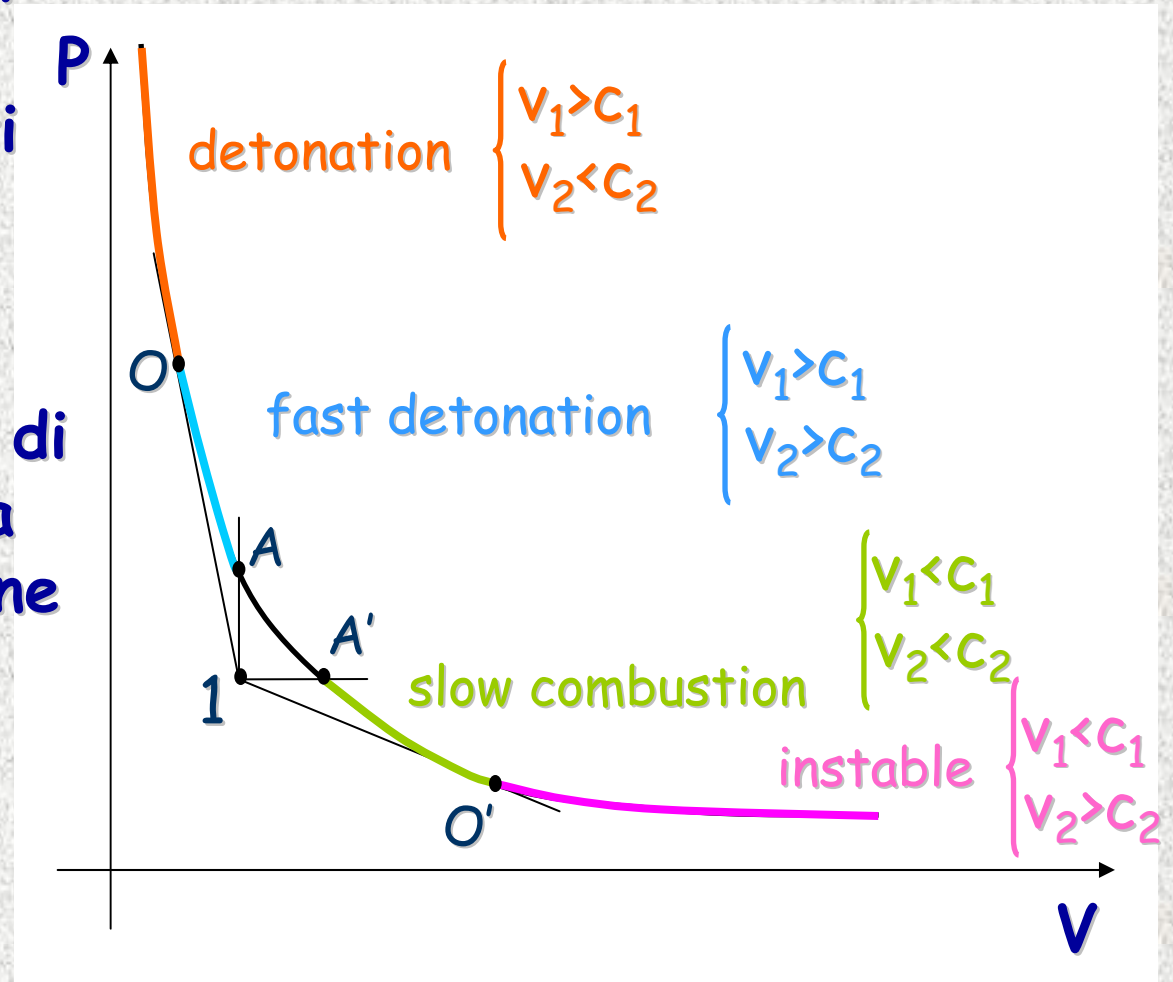
O Punto di Jouguet



# Adiabatica di combustione

Le equazioni della adiabatica di combustione sono la conseguenza delle equazioni di continuità.

Tutti i punti corrispondenti ai prodotti della combustione devono rispettare le stesse equazioni per qualsiasi altro modo di combustione in cui la zona di reazione viene trattata come una superficie di discontinuità.



# Teoria della combustione Relativistica

Tensore Energia-Impulso per una porzione di fluido in movimento.

Nel sistema proprio:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

In generale:

$$T_{\alpha\beta} = wu_{\alpha}u_{\beta} + pg_{\alpha\beta}$$

NB: Per tutte le quantità termodinamiche (entalpia, energia e entropia) viene preso il valore per unità di volume del sistema proprio.



Nel sistema di riferimento solidale al fronte di combustione e nel caso unidimensionale:

$$u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v$$

quadri-velocità

$$\begin{cases} T_{0x} = w\gamma u \\ T_{xx} = wu^2 + p \end{cases}$$

Tensore Energia-Impulso

Equazioni di conservazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \\ \frac{\partial (nu^i)}{\partial x^i} = 0 \end{cases}$$



$$wu^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}$$

Le 3 componenti spaziali di questa equazione non sono altro che la versione relativistica dell'equazione di Eulero

**Nel sistema di riferimento solidale al fronte diventano:**

$$\left\{ \begin{array}{ll} n_1 u_1 = n_2 u_2 \equiv j & \text{Flusso Barionico} \\ p_1 + w_1 u_1^2 = p_2 + w_2 u_2^2 & T_{xx} \\ w_1 \gamma_1 u_1 = w_2 \gamma_2 u_2 & T_{0x} \end{array} \right.$$

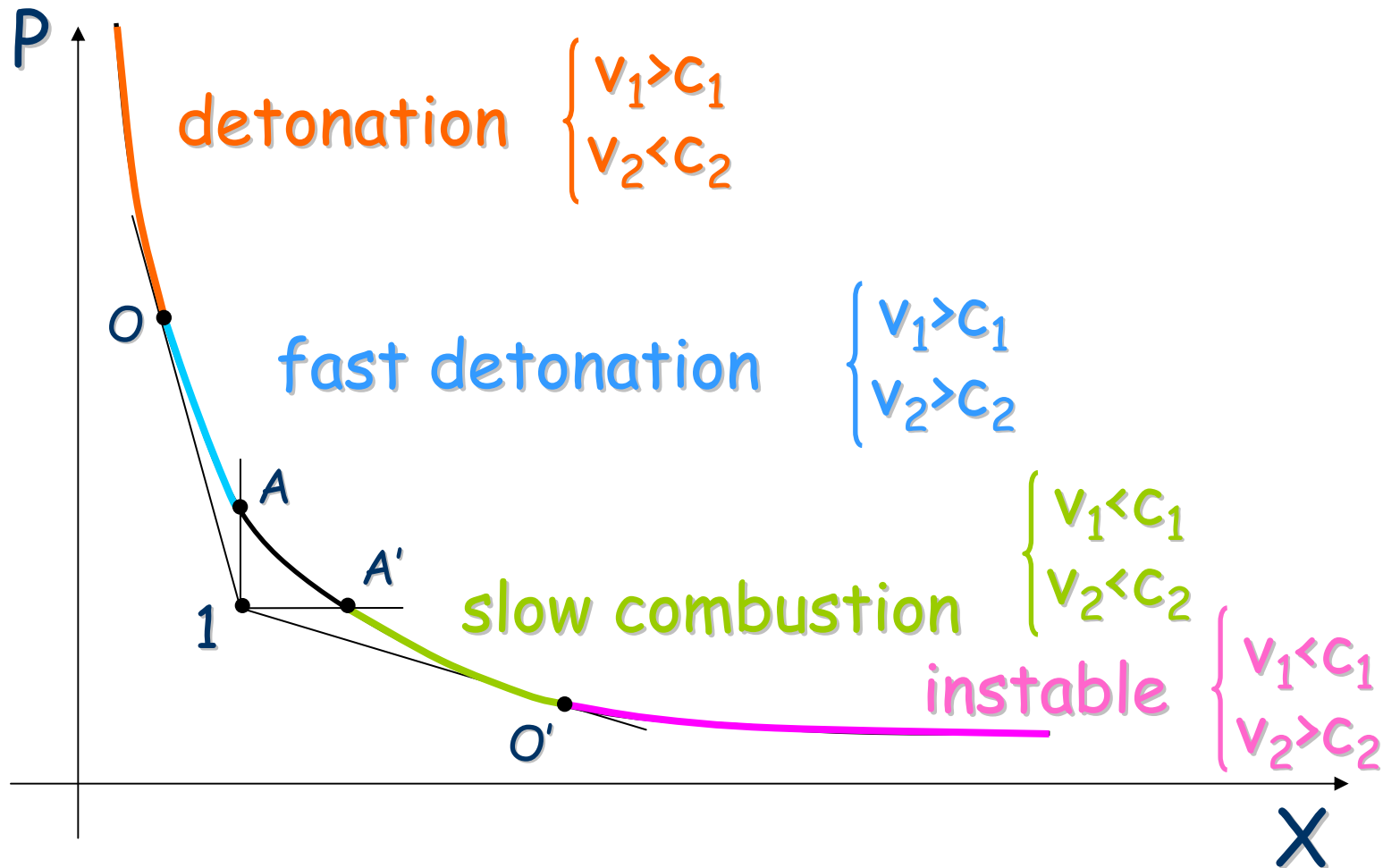
**Definiamo il volume generalizzato:**  $X = \frac{w}{n^2}$

$$j^2 = - \frac{(p_2 - p_1)}{(X_2 - X_1)} \quad \text{flusso barionico}$$

**Adiabatica di detonazione:**

$$X_2 w_2 - X_1 w_1 = (X_1 + X_2)(p_2 - p_1)$$

# Teoria della combustione R



**Le equazioni si possono riscrivere come:**

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^2 = \frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)} \\ v_2^2 = \frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)} \\ n_2^2 = n_1^2 \frac{(e_2 + p_2)(e_2 + p_1)}{(e_1 + p_2)(e_1 + p_1)} \end{array} \right.$$