



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Decadimento β di nuclei medio-pesanti nella teoria di Fermi

Relatore:

Prof. Giampaolo Co'

Laureanda:

Margherita Di Santo

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Indice

Prefazione	v
1 Cinematica del decadimento β	2
1.1 Introduzione	2
1.2 Cinematica del decadimento β	5
1.3 Densità di probabilità	8
1.4 Funzione di Fermi	10
2 Teoria di Fermi	19
2.1 Elemento di matrice di transizione	23
2.2 Classificazione dei decadimenti e regole di selezione	27
2.3 Tempo di dimezzamento e vita media ridotta	29
3 Elementi di matrice di transizione	34
3.1 Approssimazione a campo medio	34
3.2 Elementi di matrice di Fermi e Gamow-Teller	40
3.3 Transizioni di nuclei tra stati a singola particella	42
4 Applicazione al nucleo ^{17}F	44
4.1 Decadimento del nucleo ^{17}F	44

Conclusioni	57
A Densità degli stati finali	59

Prefazione

Nell'autunno del 1933 Fermi propose una teoria per descrivere il decadimento β . La sua idea inglobava l'ipotesi di Pauli sull'esistenza del neutrino elettronico ed un'importante intuizione riguardante un nuovo tipo di interazione fondamentale: l'interazione nucleare debole. Nel corso di questa trattazione, focalizzeremo l'attenzione sugli strumenti forniti da Fermi per un'analisi dettagliata dei processi di decadimento β di nuclei medio-pesanti. Nel primo capitolo analizzeremo il problema da un punto di vista cinematico, ponendo attenzione alla definizione di concetti preliminari mediante i quali Fermi riuscì ad ottenere importanti risultati sulla forma degli spettri β . Nel secondo capitolo esporremo nel dettaglio la teoria di Fermi, fino a giungere alla definizione di tempo di dimezzamento, vita media ridotta e probabilità di transizione. Distingueremo tra transizioni di Fermi e di Gamow-Teller, illustrando le regole di selezione che governano questi tipi di decadimento β . Nel terzo capitolo sfrutteremo l'approssimazione a campo medio per definire gli elementi di matrice di Fermi e Gamow-Teller nel caso di transizioni di singola particella. Concluderemo, infine, la trattazione presentando un esempio riguardante il decadimento β^+ del ^{17}F , per il quale saranno determinati i valori delle grandezze che descrivono al meglio la transizione in esame.

Capitolo 1

Cinematica del decadimento β

1.1 Introduzione

Con il generico nome di *decadimento β* si indica un insieme di reazioni nucleari spontanee che trasformano un nucleo instabile in un nuovo nucleo, senza modificarne il numero di massa A. Distinguiamo tre tipi di decadimento β :

- 1) *decadimento β^-* : ${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$;
- 2) *decadimento β^+* : ${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$;
- 3) *cattura elettronica* : ${}^A_Z X + e^- \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e$;

dove e^- ed e^+ indicano rispettivamente l'elettrone ed il positrone, mentre $\bar{\nu}_e$ e ν_e indicano l'antineutrino ed il neutrino elettronico, particelle neutre dotate di massa di gran lunga inferiore rispetto alla massa dell'elettrone. In questa trattazione considereremo nulle le masse di neutrino ed antineutrino. Affinché queste reazioni possano verificarsi è necessario che il Q-valore di ciascuna di esse sia positivo, cioè:

$$1) \ Q_{\beta^-} = M(A, Z) - M(A, Z + 1) - m_e > 0 ;$$

$$2) \ Q_{\beta^+} = M(A, Z) - M(A, Z - 1) - m_e > 0 ;$$

$$3) \ Q_{EC} = M(A, Z) + m_e - M(A, Z - 1) > 0 ;$$

dove indichiamo con $M(A, Z)$ la massa del nucleo con A nucleoni e Z protoni e con m_e la massa dell'elettrone e del positrone.

Per il principio di conservazione dell'energia, possiamo scrivere (posto $c=1$):

$$1) \ M(A, Z) = M(A, Z + 1) + m_e + T_A + T_e + E_{\bar{\nu}_e} ;$$

$$2) \ M(A, Z) = M(A, Z - 1) + m_e + T_A + T_e + E_{\nu_e} ;$$

$$3) \ M(A, Z) + m_e - B_e \cong M(A, Z) + m_e = M(A, Z - 1) + T_A + E_{\nu_e} ;$$

dove indichiamo con T_A e T_e l'energia cinetica del nucleo figlio e dell'elettrone (positrone nel caso del decadimento β^+), con E l'energia totale del neutrino o dell'antineutrino e con B_e l'energia di legame dell'elettrone nell'atomo (trascurabile rispetto alle altre energie in gioco).

Da queste relazioni possiamo ottenere il Q -valore di ciascuna trasformazione in funzione delle energie in gioco. Quest'ultimo, definito come la differenza tra la massa del nucleo genitore e le masse dei prodotti della reazione, rappresenta l'energia liberata nei decadimenti.

Dunque, possiamo scrivere:

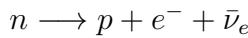
$$1) \ Q_{\beta^-} = M(A, Z) - M(A, Z + 1) - m_e = T_A + T_e + E_{\bar{\nu}_e} ;$$

$$2) \ Q_{\beta^+} = M(A, Z) - M(A, Z - 1) - m_e = T_A + T_e + E_{\nu_e} ;$$

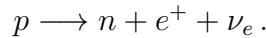
$$3) \ Q_{EC} = M(A, Z) - M(A, Z - 1) + m_e = Q_{\beta^+} + 2m_e = T_A + E_{\nu_e} .$$

Si osservi che, se un nucleo può decadere β^+ , allora può decadere anche per cattura elettronica, in quanto si ha che $Q_{EC} = Q_{\beta^+} + 2m_e > Q_{\beta^+}$. Invece, la condizione $Q_{EC} > 0$ non implica che si abbia $Q_{\beta^+} > 0$. Quindi, può avvenire che un nucleo possa decadere per cattura elettronica ma non per decadimento β^+ .

Il neutrone libero, a differenza del protone libero, non è una particella stabile, in quanto la seguente reazione di decadimento β^- :



ha Q-valore positivo, contrariamente al caso del decadimento β^+ di un protone libero, descritto dal seguente processo:



Se il neutrone libero è instabile, l'esistenza di nuclei stabili, contenenti neutroni, implica che esso raggiunge una certa stabilità quando è all'interno del nucleo, in interazione con gli altri nucleoni, nome generico per indicare sia neutroni che protoni. È possibile descrivere il decadimento β in termini di nucleoni, oppure addirittura di quark u e d che modificano il loro sapore. Dal punto di vista energetico, però, bisogna considerare sempre il sistema fisico globale, cioè il nucleo. Le masse dei nuclei coinvolti nel decadimento β non sono date dalla semplice somma delle masse dei nucleoni isolati, ma sono più piccole rispetto a quest'ultima di una quantità detta *energia di legame*, generata dalla loro interazione.

La condizione di positività del Q-valore di un decadimento è necessaria ma non implica che il decadimento possa verificarsi con una probabilità sufficientemente alta da essere misurabile.

Possiamo concludere che la stabilità o l'instabilità di un nucleo dipendono da diversi fattori:

- 1) il Q-valore della reazione;
- 2) l'interazione debole: trasforma il sapore dei quark e, in questo modo, neutroni e protoni possono trasformarsi gli uni negli altri;
- 3) le interazioni forte ed elettromagnetica tra i nucleoni all'interno del nucleo: queste due interazioni formano strutture, i nuclei, che possono essere energeticamente instabili per decadimento β ;
- 4) il principio di esclusione di Pauli: può proibire un decadimento nonostante quest'ultimo sia permesso dal punto di vista energetico.

1.2 Cinematica del decadimento β

Prima di passare alla descrizione della teoria di Fermi, tratteremo brevemente in questo paragrafo l'analisi cinematica del generico decadimento β . Infatti, un risultato importante del lavoro di Fermi consiste proprio nella determinazione della distribuzione dell'energia tra i prodotti della reazione. Consideriamo il caso di un nucleo che decade β^- ed indichiamo con l'indice 1 il nucleo genitore e con l'indice 2 il nucleo figlio. Nella nostra trattazione utilizzeremo le unità naturali, $\hbar = c = 1$, in cui masse ed energie hanno le stesse unità, che noi esprimeremo in MeV. La conservazione dell'energia nel decadimento β^- può essere espressa come:

$$M_1 = E_2 + E_e + E_{\bar{\nu}_e} = M_2 + T_2 + m_e + T_e + m_{\bar{\nu}_e} + T_{\bar{\nu}_e} , \quad (1.1)$$

mentre, per la conservazione dell'impulso abbiamo:

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} . \quad (1.2)$$

Nelle equazioni (1.1) e (1.2), M_1 , M_2 , m_e e $m_{\bar{\nu}_e}$ indicano le masse a riposo di nucleo genitore, nucleo figlio, elettrone ed antineutrino elettronico; T_2 , T_e , $T_{\bar{\nu}_e}$, \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_e e $\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}$ indicano le energie cinetiche ed i momenti dei prodotti del decadimento. Ovviamente, T_1 e \mathbf{p}_1 sono entrambi nulli perché il nucleo genitore è a riposo.

Osserviamo che l'elettrone può acquisire un valore di energia cinetica compreso tra 0 e T_e^{max} . Quest'ultimo valore massimo corrisponde alla condizione in cui tutta l'energia a disposizione della coppia elettrone-antineutrino sia stata assorbita dall'elettrone, determinando, così, un impulso nullo, nonché energia cinetica nulla per l'antineutrino. Dunque, se l'elettrone ha energia cinetica massima, si ha che $\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} = \mathbf{0}$. Per la condizione (1.2), il nucleo figlio ha impulso di rinculo pari in modulo all'impulso dell'elettrone, ma la sua energia cinetica è di gran lunga inferiore rispetto a T_e^{max} , in quanto si ha che $M_2 \gg m_e$. Ciò significa che quasi tutta l'energia liberata dalla reazione diventa energia cinetica dell'elettrone prodotto.

Dunque, la condizione di energia cinetica massima per l'elettrone prodotto dal decadimento è ottenuta se:

$$T_{\bar{\nu}_e} = 0 ; \quad \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} = \mathbf{0} ; \quad E_{\bar{\nu}_e} = m_{\bar{\nu}_e} + T_{\bar{\nu}_e} = m_{\bar{\nu}_e} ; \quad \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_e , \quad (1.3)$$

da cui:

$$E_2 = \sqrt{p_e^2 + M_2^2} ; \quad (1.4)$$

$$E_e = \sqrt{p_e^2 + m_e^2}. \quad (1.5)$$

Dalle considerazioni fatte, otteniamo:

$$T_e^{max} = \frac{(M_1 - m_{\bar{\nu}_e} - m_e)^2 - M_2^2}{2(M_1 - m_{\bar{\nu}_e})}; \quad (1.6)$$

$$E_e^{max} = \frac{(M_1 - m_{\bar{\nu}_e})^2 - M_2^2 + m_e^2}{2(M_1 - m_{\bar{\nu}_e})}. \quad (1.7)$$

Dato che la massa del neutrino (quindi dell'antineutrino) è molto minore della massa dell'elettrone, possiamo porre per semplicità:

$$m_{\bar{\nu}_e} = 0 \implies v_{\bar{\nu}_e} = c \quad \text{e} \quad p_{\bar{\nu}_e} = T_{\bar{\nu}_e} = E_{\bar{\nu}_e}, \quad (1.8)$$

da cui si ottiene:

$$T_e^{max} = \frac{(M_1 - m_e)^2 - M_2^2}{2M_1}; \quad (1.9)$$

$$E_e^{max} = \frac{M_1^2 - M_2^2 + m_e^2}{2M_1}. \quad (1.10)$$

Il ragionamento fatto per il decadimento β^- vale, con le opportune correzioni, anche per il β^+ . Per la cattura elettronica, le conservazioni di energia ed impulso determinano le seguenti relazioni:

$$M_1 + m_e - B_e = E_2 + E_{\nu_e} = M_2 + T_2 + E_{\nu_e}; \quad (1.11)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_{\nu_e}; \quad (1.12)$$

dove B_e indica l'energia di legame dell'elettrone. Di conseguenza:

$$T_2 = \frac{(M_1 - M_2 + m_e - B_e)^2 - m_{\nu_e}^2}{2(M_1 - M_2 - B_e)} \quad (1.13)$$

è l'energia cinetica di rinculo del nucleo figlio.

1.3 Densità di probabilità

La teoria di Fermi fornisce risultati importanti circa tre principali aspetti del decadimento β :

- 1) forma degli spettri β ;
- 2) vita media e probabilità della transizione;
- 3) classificazione dei decadimenti β e definizione di appropriate regole di selezione.

L'intero ragionamento parte dalla regola d'oro di Fermi, la quale ci dà la probabilità per unità di tempo che un sistema passi da uno certo stato iniziale ad uno finale. Essa è espressa dalla relazione [Ben01] :

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \frac{dN}{dE} , \quad (1.14)$$

dove $|H_{if}|$ è l'**elemento di matrice di transizione** dallo stato iniziale allo stato finale del sistema e dipende dalla reazione in gioco. È proprio questo elemento di matrice ad evidenziare la differenza tra i tipi di decadimento β che analizzeremo in seguito e che sono indotti dall'interazione debole. Inoltre, l'elemento di matrice ha le dimensioni di un'energia e contiene informazioni sugli stati iniziali e finali dei nuclei protagonisti delle reazioni.

Il termine dN/dE è la **densità degli stati finali**, con dimensioni di un'energia $^{-1}$. Esso contiene informazioni solo di carattere cinematico e dipende dall'energia liberata nel decadimento. Infatti, nell'equazione (1.14) E è l'energia a disposizione degli elettroni. La forma degli spettri β , cioè la distribuzione delle energie degli elettroni emessi, dipende proprio dalla densità degli stati finali, in quanto l'elemento di matrice di transizione, per quelli che chiameremo decadimenti *permessi*, è indipendente dall'energia prodotta dalla transizione.

Osserviamo che w , definita nella (1.14), coincide con la costante di decadimento λ . Quest'ultima, pari all'inverso della vita media di un nucleo, è espressa dalla legge del decadimento radioattivo come segue:

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(0)e^{-\lambda t} \implies \lambda = -\frac{1}{\mathcal{N}(t)} \frac{d\mathcal{N}}{dt}, \quad (1.15)$$

dove $\mathcal{N}(t)$ e $\mathcal{N}(0)$ indicano il numero di nuclei radioattivi presenti nel campione di sostanza in esame rispettivamente al tempo generico t e nell'istante iniziale $t=0$, mentre il segno - indica il fatto che il numero di nuclei radioattivi diminuisce con la transizione. Dunque, $w \equiv \lambda$ ha le dimensioni di un tempo^{-1} .

Risulta utile definire anche la **densità di probabilità** che avvenga il processo, cioè la probabilità per unità di tempo per emissione di elettroni con quantità di moto compresa tra p_e e $p_e + dp_e$, data da:

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \frac{d^2N}{dEdp_e}, \quad (1.16)$$

dove p_e è l'impulso degli elettroni prodotti dal processo di decadimento. In particolare, come mostrato nell'Appendice A, abbiamo:

$$\frac{d^2N}{dEdp_e} = \frac{16\pi^2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6c^3}(E - \varepsilon)^2p_e^2, \quad (1.17)$$

dove ε è l'energia acquisita dall'elettrone uscente. Dalla (1.17) e (1.16) si ottiene:

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{|H_{if}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}(E - \varepsilon)^2p_e^2, \quad (1.18)$$

dove abbiamo omesso il termine di volume Ω perchè già contenuto nell'elemento di matrice $|H_{if}|$. Utilizzeremo questa relazione nel prossimo capitolo per determinare la costante di decadimento λ ed altre quantità come il tempo di dimezzamento ed il *logft*.

1.4 Funzione di Fermi

Fino a questo momento, nella trattazione non abbiamo tenuto conto dell'interazione coulombiana tra il leptone prodotto nel decadimento ed il nucleo residuo, ossia dell'attrazione (repulsione) di cui risente l'elettrone (positrone) interagendo con il nucleo prodotto carico positivamente. Questa interazione dipende dal numero atomico Z_f del nucleo figlio e dall'energia ε acquisita dall'elettrone (positrone) uscente.

Introduciamo, quindi, la *funzione di Fermi* $F(\pm Z_f, \varepsilon)$, la quale rappresen-

ta il fattore correttivo all'approssimazione di onda piana che faremo, come vedremo in seguito, nel descrivere lo stato dell'elettrone prodotto.

Questa funzione è un'approssimazione del rapporto tra il modulo quadro della funzione d'onda $|\psi_e(0)|^2$ dell'elettrone valutata tenendo conto della sua interazione coulombiana con il nucleo ed il modulo quadro della funzione d'onda piana $|\psi_e(0)|_{lib}^2$. Il valore dell'impulso utilizzato per descrivere l'onda piana è quello calcolato quando l'elettrone si trova a distanza infinita dal nucleo, cioè a distanza tale da non risentire più degli effetti dell'interazione coulombiana. Un'approssimazione non-relativistica ben consolidata ed ampiamente usata della funzione di Fermi è definita come segue:

$$F_0(\pm Z_f, \varepsilon) = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}, \quad (1.19)$$

con:

$$\eta = \pm \frac{Z_f e^2}{\hbar v_e} = \pm Z_f \alpha \frac{c}{v_e} = \pm \frac{Z_f \alpha \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4}}, \quad (+elettrone, -positrone) \quad (1.20)$$

dove v_e è la velocità asintotica dell'elettrone, cioè la velocità assunta dall'elettrone a grandi distanze dal nucleo, $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4}$ il suo impulso, mentre α è la *costante di struttura fine* definita da (nel sistema c.g.s.):

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (1.21)$$

Osserviamo che per piccoli valori di Z_f la funzione di Fermi risulta pari ad

1. Infatti, se ne calcoliamo il limite per $Z_f \rightarrow 0$, cioè per $\eta \rightarrow 0$, sfruttando il teorema di De L'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} F_0(\pm Z_f, \varepsilon) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} = 1. \quad (1.22)$$

È anche possibile scrivere la funzione di Fermi in approssimazione di *Primakoff-Rosen* [Suh07] come segue:

$$F_0(\pm Z_f, \varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{p} F_0^{(PR)}(\pm Z_f) \quad \text{con} \quad F_0^{(PR)}(\pm Z_f) = \frac{\pm 2\pi\alpha Z_f}{1 - e^{\mp 2\pi\alpha Z_f}}. \quad (1.23)$$

Il rapporto tra il numero dn_e di elettroni emessi nell'intervallo $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ e $d\varepsilon$ è una funzione dell'energia ε dell'elettrone, chiamata *funzione di forma (shape function)* e data da:

$$\frac{dn_e}{d\varepsilon} = \frac{1}{m_e^4 c^8} F_0(\pm Z_f, \varepsilon) p \varepsilon (E - \varepsilon)^2. \quad (1.24)$$

Nelle Figure 1.1, 1.2 e 1.3 abbiamo riportato tre grafici rappresentanti, a meno della costante moltiplicativa $1/m_e^4 c^8$, l'andamento della funzione (1.24) per i decadimenti β^+ e β^- di tre nuclei con valori distinti di Z e per $E = 6 \text{ MeV}$. In particolare, abbiamo scelto come esempio tre numeri magici dei nuclei: $Z=20, 50, 82$. Nei grafici abbiamo inserito anche una terza curva corrispondente al caso in cui non si manifesti distorsione coulombiana degli spettri di energia, cioè il caso in cui $Z = 0$ e $F_0(Z, \varepsilon) = 1$.

Nel caso di decadimento β^- la carica fortemente positiva del nucleo residuo influenza l'energia dell'elettrone emesso decelerandolo in maniera considere-

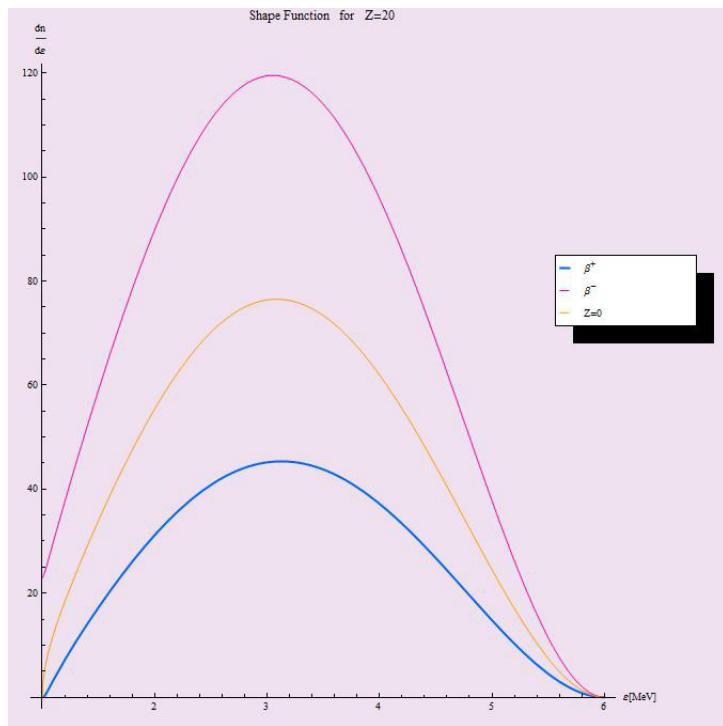


Figura 1.1: Andamento della *Shape function* per i decadimenti β^+ e β^- di un nucleo con $Z=20$.

vole, mentre nel caso β^+ il nucleo respinge fortemente il positrone determinando, così, uno shift della distribuzione di energia della particella emessa verso energie più elevate. Tanto più grande è il numero di nucleoni Z , tanto maggiore sarà la sua influenza sul leptone uscente. Dai grafici si osserva che la correzione coulombiana apportata con l'introduzione della funzione di Fermi incrementa la probabilità di emissione di elettroni e diminuisce la probabilità di emissione di positroni, soprattutto a basse energie.

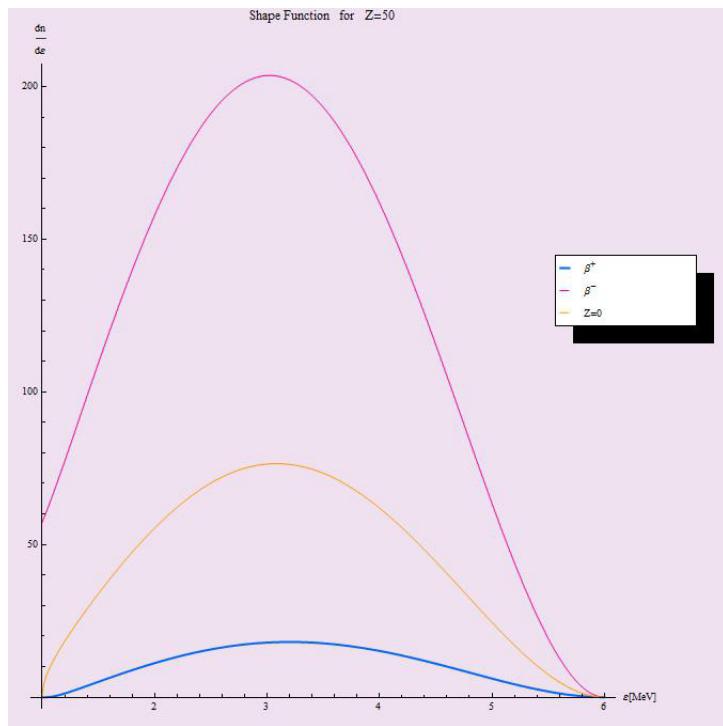


Figura 1.2: Andamento della *Shape function* per i decadimenti β^+ e β^- di un nucleo con $Z=50$.

L'influenza dell'interazione coulombiana e le sue conseguenze sulla probabilità di emissione di elettroni o positroni è resa ben evidente nei grafici. Infatti, osserviamo il progressivo schiacciamento della curva rappresentante il β^+ verso valori sempre più piccoli di $dn/d\varepsilon$ e l'innalzamento della curva rappresentante l'andamento della shape function del β^- per $Z = 82$ rispetto a $Z = 50$ e di entrambe rispetto a $Z = 20$.

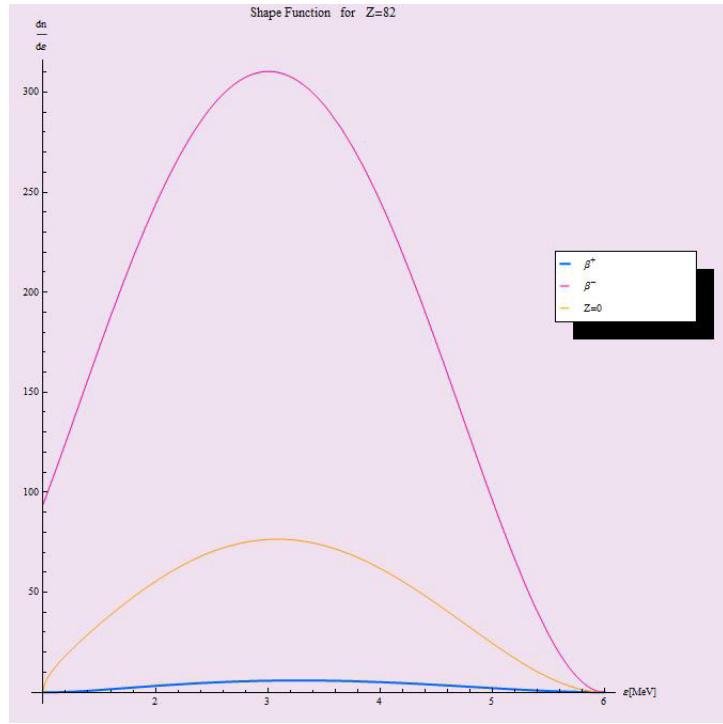


Figura 1.3: Andamento della *Shape function* per i decadimenti β^+ e β^- di un nucleo con $Z=82$.

Mediante la funzione di Fermi (1.19) definiamo, ora, la seguente funzione adimensionale per i decadimenti β^\mp :

$$f_0^{(\mp)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^E F_0(\pm Z_f, \varepsilon) p \varepsilon (E - \varepsilon)^2 d\varepsilon. \quad (1.25)$$

Nelle Figure 1.4 e 1.5 riportiamo i grafici relativi alla (1.25) ottenuti in funzione di Z ponendo $E = 6$ MeV (come per i precedenti grafici). In particolare, abbiamo messo in evidenza i valori assunti dalla (1.25) per $Z=20, 30, 40, 50, 60, 70, 82$. Inoltre, abbiamo presentato un confronto tra i gra-

fici ottenuti utilizzando la (1.19) oppure l'approssimazione di Primakoff-Rosen (1.23), dal quale risulta evidente la coerenza tra i corrispondenti risultati.

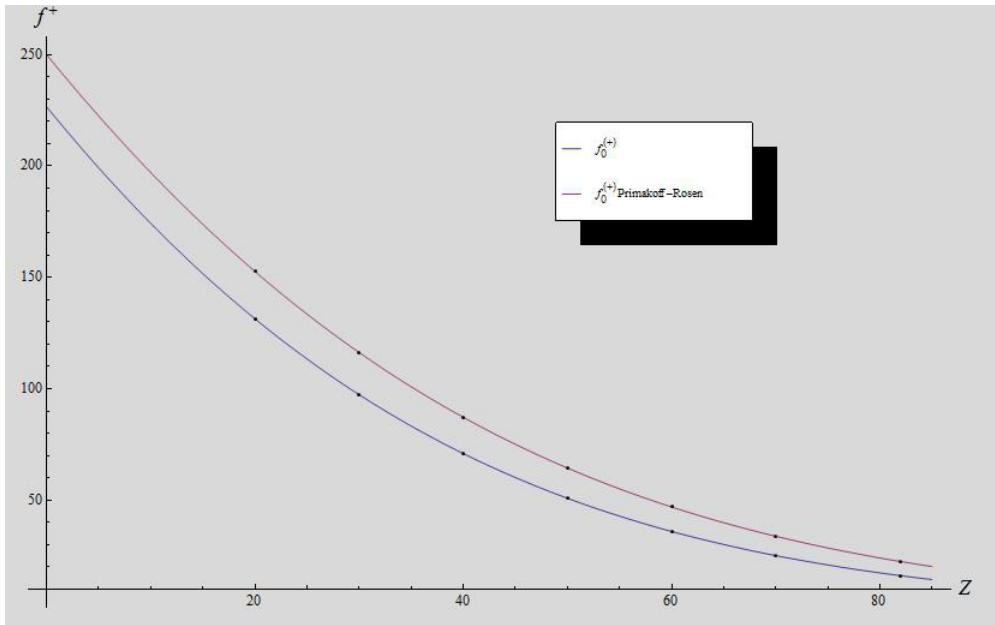


Figura 1.4: Confronto tra gli andamenti della funzione $f_0^{(+)}$ definita nella (1.25), ottenuti in un caso mediante la definizione della funzione di Fermi espressa nella (1.19) e nell'altro con l'approssimazione di Primakoff-Rosen (1.23). Sono messi in evidenza i punti corrispondenti a $Z=20,30,40,50,60,70,82$. È stato considerato il valore $E = 6\text{MeV}$ per l'energia rilasciata nel decadimento.

Introducendo la funzione (1.25) ed il concetto di tempo di dimezzamento (Sec.2.3), definiremo il *logft*, grandezza utile a caratterizzare e distinguere i possibili decadimenti di un nucleo. La dipendenza della funzione $f_0^{(\mp)}$ da E per il decadimento β^\mp risulta molto complicata, in quanto questo tipo di reazione determina uno stato finale a tre corpi in cui è difficile compren-

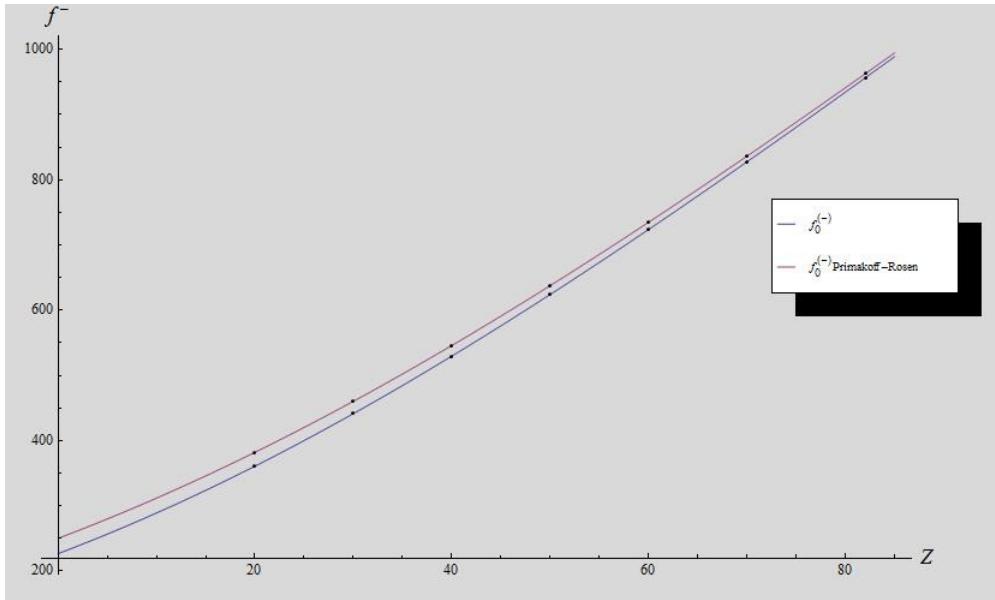


Figura 1.5: Confronto tra gli andamenti della funzione $f_0^{(-)}$. Anche qui sono messi in evidenza i punti corrispondenti a $Z=20,30,40,50,60,70,82$, ed è stato considerato il valore di energia rilasciata $E = 6$ MeV.

dere con precisione come si distribuisce l'energia tra i vari prodotti della trasformazione. Possiamo osservare che tipo di forma abbia la funzione per la cattura elettronica. In questo caso sembrerebbe illogico considerare la funzione f_0 , poichè questa è scritta in termini della funzione di Fermi, quest'ultima dipendente dalla velocità di un eventuale elettrone uscente. Nella EC, dunque, la funzione di Fermi avrà una diversa forma rispetto agli altri due tipi di decadimento β .

Si può comunque dimostrare che [Suh07]:

$$f_0^{(EC)} = \frac{2\pi(\alpha Z_i)^3}{m_e^2 c^4} (\varepsilon_0 + E)^2, \quad (1.26)$$

dove:

$$\varepsilon_0 \equiv m_e c^2 - B \approx m_e c^2 \left[1 - \frac{1}{2} (\alpha Z_i)^2 \right], \quad (1.27)$$

in cui con B abbiamo indicato l'energia di legame di un elettrone nel suo orbitale 1s. In questo caso, la dipendenza della funzione $f_0^{(EC)}$ da E è semplicemente parabolica, poiché la cattura elettronica è un decadimento a due corpi, in cui la conservazione di energia e momento permettono di definire con precisione l'energia del neutrino emesso.

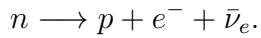
Capitolo 2

Teoria di Fermi

Per spiegare il fenomeno del decadimento β , Fermi postula l'esistenza di una interazione nucleare diversa da quella che tiene legati i nucleoni nel nucleo: l'interazione *debole*.

L'ipotesi dalla quale parte l'idea di Fermi è che elettrone ed antineutrino non sono dei nucleoni, ossia non sono componenti del nucleo, ma vengono prodotti tramite decadimento β^- nel momento stesso in cui un neutrone si trasforma in un protone.

Dunque, al centro della teoria di Fermi c'è il seguente processo:



La moderna trattazione delle interazioni deboli si basa su teorie di campo e descrive i fenomeni indotti da tali interazioni come mediati dallo scambio di bosoni.

In base alle nostre conoscenze attuali, distinguiamo due tipi di interazione debole:

- 1) *interazione di corrente carica*, mediata dai bosoni W^\pm il cui valore della massa è $M_{W^\pm} = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV}$ [PDG] ;
- 2) *interazione di corrente neutra*, mediata dal bosone Z^0 , il cui valore della massa è $M_{Z^0} = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$ [PDG].

Il primo tipo di interazione determina una differenza di carica e sapore della particella prodotta rispetto alla particella iniziale. L'interazione mediata da Z^0 , invece, non modifica né il sapore né la carica delle particelle. Sia leptoni che quark sono sensibili all'interazione debole.

Grazie all'interazione debole, ogni tipo di quark può convertirsi in un altro con carica elettrica e sapore diversi, emettendo, oppure assorbendo, un bosone W^+ o W^- .

Inoltre, tra le interazioni deboli distinguiamo interazioni:

- 1) *puramente leptoniche*, in cui i bosoni W^\pm si accoppiano solo con leptoni;
- 2) *semileptoniche*, in cui i bosoni W^\pm si accoppiano sia con quark che con leptoni;
- 3) *adroniche o non leptoniche*, in cui l'accoppiamento avviene solo con i quark.

Il decadimento del neutrone è, dunque, un processo di interazione semileptonica.

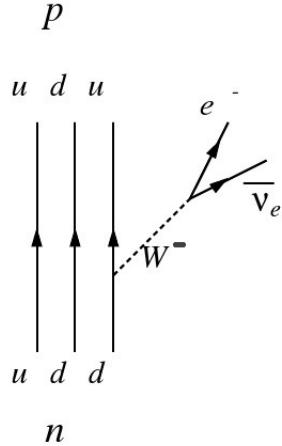


Figura 2.1: Decadimento β^- del neutrone con interazione debole mediata dal bosone W^- .

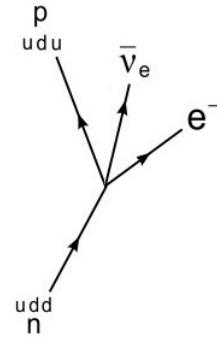


Figura 2.2: Decadimento β^- del neutrone con approssimazione ad interazione puntuale.

Fermi introduce la sua teoria dell'interazione debole presentandola come un'interazione di contatto a quattro fermioni (come mostrato in Figura 2.2 nel caso di decadimento β^- del neutrone). Nel diagramma rappresentato in Figura 2.1, si mette in evidenza lo scambio del bosone pesante W^- . In questo caso, l'elemento di matrice di transizione è proporzionale al quadrato della *carica debole* g ed al termine di propagatore che descrive lo scambio della particella:

$$M_{if} \propto \frac{g^2}{Q^2 + M_W^2}, \quad (2.1)$$

dove Q^2 è il quadrato del *quadri-impulso trasferito* e M_W è la massa del bosone di scambio. Nel caso di decadimento β^- , in cui i valori delle energie e dei momenti trasferiti sono dell'ordine del MeV, si ha che $Q^2 \ll M_W^2$, perciò il termine di propagatore rimane pressoché costante e l'elemento di

matrice di transizione è ben descritto dall'espressione:

$$M_{if} \propto \frac{g^2}{M_W^2}. \quad (2.2)$$

Dunque, per piccoli valori dei quadri-impulsi trasferiti, il processo di interazione debole può essere ben descritto dalla teoria di Fermi con la semplificazione ad una interazione puntuale tra particelle.

Il valore molto elevato della massa del bosone W è, perciò, la causa principale del fatto che l'interazione debole sia a corto raggio. Una stima del suo raggio d'azione può essere ottenuta considerando un valore sperimentale abbastanza accurato della massa del bosone in questione:

$$R_{wi} = \frac{\hbar}{M_W c} \approx 2.5 \cdot 10^{-3} fm. \quad (2.3)$$

L'intensità dell'interazione debole è rappresentata dalla *costante di Fermi* G_F , la quale è proporzionale al quadrato della carica debole g secondo la relazione seguente:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (2.4)$$

ed ha le dimensioni di $[energia]^{-2}$.

Secondo quanto appena detto, è ragionevole rimpiazzare i due vertici del diagramma in Figura 2.1 con un solo vertice con la costante di accoppiamento effettiva G_F , il quale descrive un'interazione di corrente carica puntiforme, così come mostrato in Figura 2.2.

2.1 Elemento di matrice di transizione

L'*elemento di matrice di transizione* da uno stato iniziale ad uno finale di un nucleo che decade è definito come segue:

$$H_{if} = \langle \mathcal{U}_f | H | \mathcal{U}_i \rangle = \int \mathcal{U}_f^* H \mathcal{U}_i d\tau, \quad (2.5)$$

dove $d\tau$ rappresenta l'elemento infinitesimo di volume, che, in coordinate polari sferiche (r, θ, φ) , è dato da $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, e l'integrale è esteso all'intero volume. Nell'espressione precedente sono sottintese le somme su tutti i numeri quantici di spin ed isospin dei nucleoni. Inoltre, \mathcal{U}_i ed \mathcal{U}_f sono le funzioni d'onda che descrivono gli stati iniziali e finali del sistema. Lo stato iniziale è composto solo dal nucleo genitore, per questo motivo la funzione d'onda dello stato iniziale coincide con la funzione d'onda u_i che descrive la struttura interna del nucleo. Lo stato finale è composto dal nucleo figlio, dall'elettrone e dal neutrino. Dato che l'energia totale rilasciata dal decadimento, la quale deve convertirsi in energie cinetiche dei tre corpi finali, è molto più piccola della massa a riposo del nucleo figlio (pochi MeV), facciamo l'ipotesi che l'energia cinetica di rinculo di quest'ultimo sia trascurabile. In questo modo possiamo considerare la funzione d'onda dello stato finale come $\mathcal{U}_f = u_f \psi_e \psi_{\bar{\nu}_e}$, dove u_f descrive la struttura interna del nucleo figlio, a riposo nel sistema di riferimento che abbiamo scelto, mentre ψ_e e $\psi_{\bar{\nu}_e}$ descrivono il moto dell'elettrone e dell'antineutrino rispetto al centro del nucleo.

Nell'espressione (2.5) compare H , l'operatore che agisce sui campi fermionici con assorbimento od emissione di fermioni. Nel caso di decadimento β^- , esso determina la transizione da neutrone in protone con conseguente emissione di una coppia elettrone-antineutrino.

Per quanto detto in precedenza, supporremo in questa trattazione che nucleone, elettrone ed antineutrino elettronico interagiscano solo quando sono a contatto o sovrapposti. Questa ipotesi principale della teoria di Fermi implica che l'operatore H di interazione puntuale possa essere scritto come:

$$H = g\delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_{\bar{\nu}_e} - \mathbf{r}), \quad (2.6)$$

dove δ è la funzione delta di Dirac, \mathbf{r}_e e $\mathbf{r}_{\bar{\nu}_e}$ sono i vettori posizione rispetto al centro del nucleo genitore rispettivamente dell'elettrone e dell'antineutrino e \mathbf{r} è il vettore posizione del nucleone che decade. Per le proprietà della delta di Dirac, si comprende che le due funzioni nell'espressione dell'operatore H rappresentano le densità di probabilità che nucleone ed elettrone e nucleone ed antineutrino si trovino rispettivamente alle distanze $(\mathbf{r}_e - \mathbf{r})$ e $(\mathbf{r}_{\bar{\nu}_e} - \mathbf{r})$. Il valore della costante di accoppiamento g , con dimensioni di [energia x volume], viene determinato sperimentalmente. Sostituendo l'espressione di H nell'integrale che definisce l'elemento di matrice H_{if} , si ottiene:

$$\begin{aligned} H_{if} &= g \int \psi_e^*(\mathbf{r}_e) \psi_{\bar{\nu}_e}^*(\mathbf{r}_{\bar{\nu}_e}) u_f^*(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_{\bar{\nu}_e} - \mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_{\bar{\nu}_e} d\mathbf{r} \\ &= g \int \psi_e^*(\mathbf{r}) \psi_{\bar{\nu}_e}^*(\mathbf{r}) u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Per descrivere le autofunzioni dell'elettrone e dell'antineutrino prodotti dal decadimento β^- , inizialmente trascuriamo l'interazione coulombiana tra l'elettrone ed il nucleo carico positivamente. Gli effetti dell'interazione coulombiana saranno inclusi nel fattore di Fermi che verrà preso in considerazione successivamente. Da questa ipotesi segue che l'elettrone e l'antineutrino, una volta emessi dal nucleo, sono particelle in moto libero. Di conseguenza,

possiamo descrivere il moto di queste due particelle come onde piane:

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}, \quad \psi_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.8)$$

da cui, banalmente, si ha:

$$\psi_e \psi_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{\Omega} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

dove con Ω si è indicato un generico volume di normalizzazione e $\mathbf{k} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}$.

Il prodotto $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ per valori di \mathbf{r} dell'ordine di qualche fermi (raggio nucleare) è di molto inferiore rispetto all'unità, cioè $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$. Ciò ci permette di tener conto dei soli primi termini dello sviluppo in multipoli dell'esponenziale:

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (kr)^l P_l(\cos \theta) = 1 + ikr \cos \theta + \dots, \quad (2.9)$$

dove θ è l'angolo tra la direzione del moto dell'elettrone e quella dell'antineutrino, P_l è il polinomio di Legendre. Perciò, il primo termine corrisponde ad un'onda con momento angolare orbitale $l=0$, il secondo a $l=1$, etc...

Possiamo scrivere l'elemento di matrice di transizione come somma degli elementi di matrice per differenti valori di l come segue:

$$H_{if} = \sum_{l=0} H_{if}^l = \frac{g}{\Omega} \sum_{l=0} M_{if}^l, \quad (2.10)$$

dove, per ogni valore di l , si ha:

$$M_{if}^l = \int i^l \frac{(2l+1)}{(2l+1)!!} (kr)^l P_l(\cos \theta) u_f^*(r) u_i(r) dr. \quad (2.11)$$

In questa descrizione del processo, l rappresenta il momento angolare orbitale del moto relativo della coppia elettrone-antineutrino emessa durante una transizione. Ad ogni valore di l corrisponde una transizione ben precisa, con una particolare forma dello spettro energetico delle particelle emesse. Dato che l'elemento di matrice $|M_{if}|^2$ assume massimo valore quando $l=0$ e decresce all'aumentare di l , la probabilità di transizioni con emissione di coppia $e^- \bar{\nu}_e$ con momento angolare $l=0$ è maggiore rispetto a decadimenti con $l>0$. Per questa ragione, le prime sono dette, in letteratura, transizioni *favorite o permesse*. Questa terminologia può generare confusione perché le transizioni con $l > 0$ non sono proibite, ma sono solo meno probabili.

Come vedremo nel prossimo paragrafo, possiamo distinguere due tipi di transizioni permesse: la transizione di *Fermi* o *Vettoriale* e la transizione di *Gamow-Teller* o *Assiale*. In corrispondenza di queste due transizioni, è stato verificato che la costante di accoppiamento, la quale misura l'intensità dell'interazione, può assumere due valori differenti: g_F (o g_V) relativa all'interazione di Fermi e g_{GT} (o g_A) corrispondente all'interazione di Gamow-Teller. Supporremo che le due costanti assumano i valori $g_F = 1.0$ e $g_{GT} = 1.25$, validi per opportune ipotesi del modello standard. La (2.10) può essere riscritta in maniera più completa distinguendo tra l'elemento di matrice relativo al caso di transizioni di Fermi e quello relativo a transizioni di Gamow-Teller:

$$H_{if} = \frac{1}{\Omega} \sum_{l=0} [g_F M_{if}^{F,l} + g_{GT} M_{if}^{GT,l}]. \quad (2.12)$$

Per le transizioni favorite ($l=0$) si ha:

$$M_{if}^{\alpha,0} = \int u_f^*(\mathbf{r}) O^\alpha(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.13)$$

dove l'indice $\alpha = F, GT$ specifica il tipo di transizione in gioco e, quindi, il tipo di operatore all'interno dell'integrale. In particolare:

$$O^F = \mathbf{1} \ \tau^\pm; \quad (2.14)$$

$$O^{GT} = \boldsymbol{\sigma} \ \tau^\pm; \quad (2.15)$$

dove $\mathbf{1}$ è la matrice identità, τ è la matrice di transizione di isospin che trasforma protoni in neutroni (τ^+) e viceversa (τ^-), $\boldsymbol{\sigma}$ è l'operatore di spin di Pauli. Nella (2.13) osserviamo che l'elemento di matrice di transizione dipende esclusivamente dalle funzioni d'onda del nucleo che decade e del nucleo prodotto dal decadimento.

2.2 Classificazione dei decadimenti e regole di selezione

Abbiamo detto che le transizioni per le quali vengono emessi elettrone ed antineutrino con momento angolare $l=0$ sono le favorite, cioè quelle con maggiore probabilità di verificarsi. Tra queste, sono di particolare importanza le transizioni in cui il nucleo iniziale ed il nucleo finale presentano stesso spin isotopico, stessa parità e stesso spin, nonché un valore massimo pari ad 1 per l'elemento di matrice nucleare $|M_{if}|^2$. Le transizioni per le quali vi è una diversa parità tra nucleo iniziale e finale (cioè tali che

$P_i P_f = -1$) e un diverso spin nucleare sono, invece, transizioni *sfavorite* o *proibite*. Esse corrispondono a valori di $l \geq 1$ e ad un valore dell'elemento di matrice nucleare di transizione molto piccolo. Infatti, il prodotto tra due autofunzioni di parità opposta dà una funzione dispari, il cui integrale tende ad annullarsi.

Tra le possibili transizioni favorite distinguiamo i casi in cui lo spin di elettrone ed antineutrino sono paralleli o antiparalleli. Nell'ultimo caso lo spin totale della coppia è nullo, mentre nel primo caso è 1.

Per **spin 0** si parla di *transizioni di Fermi*, mentre per **spin 1** si parla di *transizioni di Gamow-Teller*. Se si considera la componente di spin della funzione d'onda totale della coppia elettrone-antineutrino prodotta, questa sarà una funzione antisimmetrica nel caso di transizione di tipo Fermi dato che le due particelle si trovano in uno stato di singoletto (spin antiparalleli $\uparrow\downarrow$, $S = 0$), mentre sarà simmetrica nel caso di transizione di tipo Gamow-Teller poichè si ha uno stato di tripletto (spin paralleli $\uparrow\uparrow$ o $\downarrow\downarrow$, $S = 1$). Se indichiamo con P_i e P_f rispettivamente le parità iniziale e finale, considerando la conservazione del momento angolare:

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_f + \mathbf{S} + \mathbf{l} ,$$

possiamo distinguere tra i seguenti due tipi di transizione:

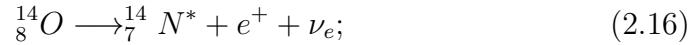
1) **transizione favorita di Fermi** con

$$P_i P_f = 1, \quad J_i = J_f, \quad l = 0, \quad S = 0;$$

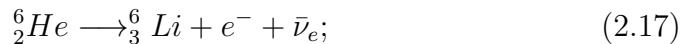
2) **transizione favorita di Gamow-Teller** con

$$P_i P_f = 1, \quad J_i = J_f = \pm 1, \quad l = 0, \quad S = 1.$$

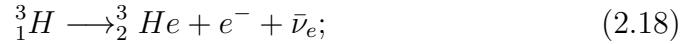
Inoltre, transizioni nucleari con $J_i = J_f = 0$ sono dette *transizioni pure di Fermi*, ad esempio:



transizioni nucleari con $\Delta J = |J_i - J_f| = 1$ sono dette *transizioni pure di Gamow-Teller*, ad esempio:



infine, transizioni nucleari con $J_i = J_f \neq 0$ sono dette *transizioni miste*, ad esempio:



oppure:



2.3 Tempo di dimezzamento e vita media ridotta

In questo paragrafo vogliamo presentare un'espressione del tempo di dimezzamento di un nucleo che decade β , in funzione degli elementi di matrice caratteristici di transizioni di Fermi e di Gamow-Teller. Ciò ci permetterà di definire il *logft*, grandezza tipicamente utilizzata per classificare i vari tipi di decadimento.

Partiamo innanzitutto dalla (1.18), ed inseriamo in questa relazione il ter-

mine di correzione coulombiano, ossia la funzione di Fermi:

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{|M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} F(Z_f, \varepsilon) (E - \varepsilon)^2 p_e^2. \quad (2.20)$$

La vita media τ del decadimento potrà essere ottenuta integrando dw rispetto all'impulso dell'elettrone. Si ottiene:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{|M_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} f_0 m_e^5 c^7. \quad (2.21)$$

Si definisce *tempo di dimezzamento* del nucleo la quantità:

$$t_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (2.22)$$

Posto [Suh07]:

$$\kappa \equiv \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4 G_F^2} = 6147 s, \quad (2.23)$$

scriviamo:

$$t_{1/2} = \frac{\kappa}{f_0 (B_F + B_{GT})}, \quad (2.24)$$

dove B_F e B_G sono le *probabilità di transizione ridotte* di Fermi e Gamow-

Teller definite come segue:

$$B_F \equiv \frac{g_V^2}{2J_i + 1} |M_F|^2, \quad B_{GT} \equiv \frac{g_A^2}{2J_i + 1} |M_{GT}|^2, \quad (2.25)$$

dove J_i è l'ampiezza del momento angolare totale del nucleo iniziale, $|M|$ l'elemento di matrice nucleare e g_A e g_V le costanti di accoppiamento assiale e vettoriale.

Ciò che ci interessa maggiormente è la quantità $f_0 t_{1/2}$ di un decadimento beta permesso, chiamata *valore ft* oppure *vita media ridotta* della transizione. Si tratta di una quantità dipendente solo dalla struttura del nucleo e, quindi, dall'elemento di matrice corrispondente. Come già osservato nella Sez.1.1, il decadimento β^+ e la cattura elettronica sono due transizioni in competizione tra loro, perciò possiamo scrivere:

$$M_{fi}^{(+)} = M_{fi}^{(\beta^+)} + M_{fi}^{(CE)}. \quad (2.26)$$

Dalla (2.26) risulta che la vita media ridotta totale di una transizione data dalla combinazione di decadimento β^+ e cattura elettronica è:

$$f_0 t_{1/2} = [f_0^{(+)} + f_0^{(EC)}] t_{1/2}. \quad (2.27)$$

Bisogna precisare che per valori di $E_0 > 2\text{MeV}$ il decadimento β^+ è dominante, cioè $f_0^{(+)} \gg f_0^{(EC)}$, quindi la vita media ridotta della combinazione delle due transizioni è determinata solo dal decadimento β^+ . Viceversa, per piccoli valori di E_0 , la cattura elettronica diventa la transizione dominante che determina il valore $f_0 t_{1/2}$.

Tenendo conto della (2.27), possiamo scrivere:

$$f_0 = \begin{cases} f_0^{(-)} & \text{per il decadimento } \beta^- , \\ f_0^{(+)} + f_0^{(EC)} & \text{per la combinazione } \beta^+ / EC. \end{cases} \quad (2.28)$$

La vita media ridotta $f_0 t_{1/2}$ assume di solito valori molto grandi, perciò è convenzione considerarne il logaritmo in base 10, definito da:

$$\log ft \equiv \log_{10}(f_0 t_{1/2}[s]). \quad (2.29)$$

In letteratura, i decadimenti β sono classificati a seconda del range di valori in cui varia $\log ft$, come mostrato nella Tabella 2.1 [Suh07].

Tipo di transizione	$\log ft$
superpermessa	2.9-3.7
permessa sfavorita	3.8-6.0
l -vietata permessa	≥ 5.0
1 ^o -vietata unica	8-10
1 ^o -vietata non- unica	6-9
2 ^o -vietata	11-13
3 ^o -vietata	17-19
4 ^o -vietata	>22

Tabella 2.1: Classificazione dei decadimenti β in base ai valori di $\log ft$.

Le transizioni *superpermesse* riguardano esclusivamente nuclei leggeri. Si tratta di transizioni a singola particella, per le quali le funzioni d'onda del nucleone che decade e del nucleone prodotto si sovrappongono perfettamente. In questo caso, la probabilità di decadimento diventa abbastanza grande

e l'elemento di matrice è tale che $|M_{if}|^2 = 1$ ed i valori di ft possono essere utilizzati per determinare direttamente le costanti di accoppiamento debole assiale e vettoriale. Un caso di transizione super-permessa è quello in cui il protone ed il neutrone coinvolti nel processo di decadimento β sono caratterizzati dagli stessi numeri quantici.

Le transizioni di singola particella *l-vietate permesse* violano la regola di selezione $\Delta l = 0$ ma soddisfano alle regole di selezione del momento angolare totale e della parità esposte nella Sez.2.2. Tutte le altre transizioni di singola particella permesse che non appartengono alle prime due categorie sono dette *permesse sfavorite*.

Capitolo 3

Elementi di matrice di transizione

3.1 Approssimazione a campo medio

Il decadimento β di un nucleo consiste nella trasformazione di quest'ultimo in un nuovo nucleo con numero atomico Z differente. Si tratta di sistemi a molticorpi, perciò le funzioni d'onda iniziale e finale in una transizione di questo tipo descrivono lo stato del sistema globale, in cui i nucleoni costituenti perdono la loro individualità. Risolvere l'equazione di Schrödinger per un sistema di A nucleoni interagenti risulta molto complicato.

Un metodo conveniente per semplificare il problema è l'*approssimazione a campo medio*, che utilizziamo in questa trattazione in quanto ci permette di valutare gli elementi di matrice per il decadimento di un nucleo considerando semplicemente trasformazioni di funzioni d'onda di singola particella (il nucleone). L'approssimazione a campo medio per il nucleo atomico descrive il nucleo come un sistema di fermioni non interagenti che obbediscono al

principio di esclusione di Pauli. In particolare, consideriamo nuclei sferici, dove il potenziale in cui si muovono i nucleoni è a simmetria sferica. In questo modello, la funzione d'onda del singolo nucleone è caratterizzata, oltre che dal numero quantico principale n , dai numeri quantici di momento angolare orbitale l , di spin s , di isospin t e dall'energia del nucleone, la quale è autovalore dell'operatore hamiltoniano H della particella.

Un ruolo importante è giocato dal termine di spin-orbita, la cui presenza smorza la degenerazione dei livelli energetici del singolo nucleone e, inoltre, produce i numeri magici 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Questi ultimi corrispondono al numero di nucleoni (o neutroni o protoni oppure entrambi contemporaneamente) di cui sono dotati i nuclei maggiormente stabili. I numeri magici vengono ottenuti dal riempimento di gruppi di livelli energetici vicini, inoltre ogni gruppo è chiamato *strato a shell*.

Vediamo ora come realizzare l'approssimazione a campo medio. L'hamiltoniana di un nucleo con numero di massa A è definita come somma delle energie cinetiche dei singoli nucleoni e delle energie potenziali di interazione coulombiana tra ogni coppia di particelle nel sistema:

$$H = \sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i < j}^A V(i, j). \quad (3.1)$$

Dunque, l'hamiltoniana del sistema è scomposta in due addendi, uno dipendente solo dai contributi di singola particella e l'altro dipendente anche dalle interazioni nucleone-nucleone. A questo punto, sommiamo e sottraiamo gli operatori di energia potenziale totale di singole particelle:

$$H = \left[\sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i=1}^A V(i) \right] + \left[\sum_{i < j}^A V(i, j) - \sum_{i=1}^A V(i) \right] = H_0 + V_{res}, \quad (3.2)$$

dove H_0 è detto termine ad un corpo perché somma di operatori che agiscono su una sola particella:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) = \sum_{i=1}^A [T(i) + V(i)], \quad (3.3)$$

mentre l'altro termine è V_{res} , cioè il potenziale residuo del sistema.

Nell'approssimazione a campo medio considereremo il solo contributo di H_0 , perciò vorremo risolvere un'equazione del tipo:

$$H_0 |\Phi\rangle = \left(\sum_{i=1}^A h(i) \right) |\Phi\rangle = E_0 |\Phi\rangle, \quad (3.4)$$

dove $|\Phi\rangle$ è combinazione lineare di autostati di singola particella e, in particolare, per l'autostato dell'i-esimo nucleone si ha:

$$h_i |\phi_i\rangle = \varepsilon_i |\phi_i\rangle. \quad (3.5)$$

L'autovettore corrispondente all'operatore H_0 è il determinante di Slater delle funzioni di singolo nucleone, il quale approssima l'autofunzione totale Φ del sistema ed è definito da:

$$\Phi \simeq \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_\alpha(\mathbf{r}_1) & \phi_\alpha(\mathbf{r}_2) & \phi_\alpha(\mathbf{r}_3) & \dots & \phi_\alpha(\mathbf{r}_A) \\ \phi_\beta(\mathbf{r}_1) & \phi_\beta(\mathbf{r}_2) & \phi_\beta(\mathbf{r}_3) & \dots & \phi_\beta(\mathbf{r}_A) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_\gamma(\mathbf{r}_1) & \phi_\gamma(\mathbf{r}_2) & \phi_\gamma(\mathbf{r}_3) & \dots & \phi_\gamma(\mathbf{r}_A) \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

dove $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ indicano i numeri quantici spaziali, di spin e di isospin che definiscono il preciso stato quantico in cui si trova il nucleone, mentre \mathbf{r}_i è il vettore posizione dell'i-esimo nucleone. L'uso del determinante di Slater garantisce che l'autofunzione totale del sistema sia antisimmetrica rispetto allo scambio di due particelle (poichè si tratta di un sistema di fermioni), in accordo con il principio di esclusione di Pauli.

Dunque, nell'approssimazione a campo medio possiamo studiare il decadimento β di un nucleo focalizzando l'attenzione sulle transizioni che coinvolgono i singoli nucleoni protagonisti della reazione, in particolare trasformazioni di una funzione d'onda caratteristica di un neutrone (protone) in una funzione d'onda di un protone (neutrone).

Utilizzando potenziali a simmetria sferica, possiamo esprimere la funzione d'onda del singolo nucleone come prodotto di una parte radiale ed una angolare:

$$\phi_\alpha(\mathbf{r}) = R_{nlj}^t(r) \sum_{\mu, m_s} < l \mu \frac{1}{2} m_s | jm > Y_{l\mu}(\theta, \varphi) \chi_{\frac{1}{2}}^{m_s}, \quad (3.7)$$

dove α è l'insieme dei numeri quantici che caratterizzano lo stato del nucleone preso in considerazione, $Y_{l\mu}(\theta, \varphi)$ è l'armonica sferica e $\chi_{\frac{1}{2}}^{m_s}$ è la funzione di spin, dove $m_s = \pm \frac{1}{2}$. L'indice t si riferisce alla terza componente di isospin che specifica se il nucleone rappresentato della funzione d'onda scritta

sia un protone ($t = +\frac{1}{2}$) oppure un neutrone ($t = -\frac{1}{2}$).

L'operatore che induce la transizione nucleare (2.13) può essere decomposto separando il termine che agisce sulla parte radiale della funzione dal termine agente sulle altre coordinate:

$$O^\alpha(\mathbf{r}) = f^\alpha(\mathbf{r}) T_{\lambda\mu}^\alpha(\theta, \varphi, \boldsymbol{\sigma}, \tau). \quad (3.8)$$

Il termine $T_{\lambda\mu}^\alpha(\theta, \varphi, \boldsymbol{\sigma}, \tau)$ è un operatore tensore sferico irriducibile di rango λ , cioè un insieme di $2\lambda + 1$ operatori e dipende dal particolare tipo di transizione in esame. L'indice μ , inoltre, assume i valori compresi tra $-\lambda$ e $+\lambda$. Dunque, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} M_{if}^\alpha &= \int d^3r \phi_b^*(\mathbf{r}) O^\alpha(\mathbf{r}) \phi_a(\mathbf{r}) = \int d^3r \phi_b^*(\mathbf{r}) f^\alpha(\mathbf{r}) T_{\lambda\mu}^\alpha(\theta, \varphi, \boldsymbol{\sigma}, \tau) \phi_a(\mathbf{r}) = \\ &= \int dr r^2 R_{n_b l_b j_b}^{*t_b}(\mathbf{r}) f^\alpha(\mathbf{r}) R_{n_a l_a j_a}^{t_a}(\mathbf{r}) \langle l_b \frac{1}{2} j_b m_b | T_{\lambda\mu}^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a m_a \rangle, \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove, come si è detto, l'azione dell'operatore tensore sferico coinvolge solo la parte angolare delle funzioni d'onda ϕ_a e ϕ_b dei nucleoni iniziale e finale. La parte angolare della (3.9) può essere calcolata sfruttando il Teorema di Wigner-Eckart, dal quale si ottiene:

$$\begin{aligned} &\langle l_b \frac{1}{2} j_b m_b | T_{\lambda\mu}^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a m_a \rangle = \\ &= (-1)^{j_b - m_b} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_a \\ -m_b & \mu & m_a \end{pmatrix} \langle l_b \frac{1}{2} j_b \| T_{\lambda\mu}^\alpha \| l_a \frac{1}{2} j_a \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Abbiamo utilizzato il simbolo $3j$ di Wigner ed indicato con:

$$\langle l_b \frac{1}{2} j_b | T_\lambda^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a \rangle$$

l'elemento di matrice ridotto. Gli indici a e b distinguono i numeri quantici caratteristici del nucleone iniziale da quelli del finale.

Una volta noto l'operatore caratteristico della transizione in esame, il calcolo dell'elemento di matrice di transizione sarà suddiviso nel calcolo della (3.10) ed in quello relativo alla parte radiale della (3.9).

Come vedremo nel prossimo capitolo, ciò che ci interessa è calcolare la quantità $|M_{if}^\alpha|^2$ per poi ottenere un'espressione delle probabilità di transizione ridotte e, di conseguenza, calcolare il valore ft ed il tempo di dimezzamento di una transizione.

Sommiamo su m_a e m_b i moduli quadri della (3.10) per ciascun valore da essi assunto:

$$\begin{aligned} \sum_{m_a m_b} \langle l_b \frac{1}{2} j_b m_b | T_{\lambda\mu}^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a m_a \rangle^2 &= \\ &= \sum_{m_a m_b} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_a \\ -m_b & \mu & m_a \end{pmatrix}^2 \langle l_b \frac{1}{2} j_b | T_\lambda^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a \rangle^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Per le proprietà di simmetria e di ortogonalità del $3j$, si ha:

$$\sum_{m_a m_b} \begin{pmatrix} j_b & \lambda & j_a \\ -m_b & \mu & m_a \end{pmatrix}^2 = \sum_{m_a m_b} \begin{pmatrix} j_a & j_b & \lambda \\ m_a & -m_b & \mu \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2\lambda + 1}, \quad (3.12)$$

e, sostituendo nella (3.11), otteniamo:

$$\sum_{m_a m_b} \left| \langle l_b \frac{1}{2} j_b m_b | T_{\lambda\mu}^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a m_a \rangle \right|^2 = \frac{1}{2\lambda + 1} \left| \langle l_b \frac{1}{2} j_b | T_\lambda^\alpha | l_a \frac{1}{2} j_a \rangle \right|^2. \quad (3.13)$$

Nel caso di transizioni di Fermi, si ha che l'operatore tensore sferico ha rango $\lambda = 0$, mentre per Gamow-Teller si ha che $\lambda = 1$.

Vedremo, a questo punto, che tipo di operatori entrano in gioco nelle transizioni di Fermi e Gamow-Teller e come possiamo esprimere la loro azione tra gli stati iniziale e finale del nucleone; in particolare vedremo che espressione hanno gli elementi di matrice ridotti nei due casi.

3.2 Elementi di matrice di Fermi e Gamow-Teller

È possibile scrivere gli elementi di matrice nucleare di Fermi e Gamow-Teller introducendo dapprima gli operatori corrispondenti, i quali agiscono sulle funzioni d'onda del sistema nello stato iniziale e finale del processo di decadimento. Gli operatori di Fermi e di Gamow-Teller sono definiti nella (2.14) e nella (2.15).

Sia a l'indice del nucleone che si trasforma per decadimento β del nucleo in esame e b il nucleone prodotto (dunque b indicherà il protone nel caso β^- ed il neutrone nel caso β^+ , viceversa per a). La parte radiale degli elementi di matrice è espressa da:

$$\int dr r^2 R_{n_b l_b j_b}^{*t_b}(\mathbf{r}) f^\alpha(\mathbf{r}) R_{n_a l_a j_a}^{t_a}(\mathbf{r}), \quad (3.14)$$

dove $t_b = -t_a$. Assumeremo d'ora in avanti che la (3.14) sia pari a 1, in quanto in realtà essa assume solitamente valori molto vicini ad 1. In particolare, nel caso di transizioni di Fermi e Gamow-Teller, supponiamo $f^\alpha(\mathbf{r}) = 1$.

Sfruttando le proprietà degli operatori $\mathbf{1}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, possiamo definire gli **elementi di matrice ridotti di singola particella** di Fermi e Gamow-Teller come segue:

$$M^F(ba) = (b\|\mathbf{1}\|a) = (n_b l_b j_b \|\mathbf{1}\| n_a l_a j_a) = \delta_{n_b n_a} \delta_{l_b l_a} \delta_{j_b j_a} \hat{j}_b; \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} M^{GT}(ba) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(b\|\boldsymbol{\sigma}\|a) = \frac{1}{\sqrt{3}}(n_b l_b j_b \|\boldsymbol{\sigma}\| n_a l_a j_a) = \\ &= \sqrt{2} \delta_{n_b n_a} \delta_{l_b l_a} \hat{j}_b \hat{j}_a (-1)^{l_b + j_b + \frac{3}{2}} \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ j_b & j_a & l_b \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove $n_a l_a j_a$ e $n_b l_b j_b$ specificano lo stato quantistico ed il momento angolare dei nucleoni iniziale e finale ed abbiamo utilizzato il simbolo $6j$ di Wigner [Edm57]. Si noti che il fattore $1/\sqrt{3}$ è inserito nella (3.16) per convenzione. Questi elementi di matrice godono delle seguenti proprietà:

$$M^F(ba) = M^F(ab); \quad (3.17)$$

$$M^{GT}(ba) = (-1)^{j_a + j_b + 1} M^{GT}(ab). \quad (3.18)$$

3.3 Transizioni di nuclei tra stati a singola particella

Nel modello a particella singola per i nuclei con numero di massa A dispari, si fa l'ipotesi che tutti i nucleoni ad eccezione di uno formino un CORE inerte a simmetria sferica e tutte le proprietà del nucleo sono determinate dal nucleone spaiato. Infatti, il contributo al momento angolare orbitale e di spin totali del nucleo da parte del CORE è nullo, perciò questi dipendono semplicemente dall'ultimo nucleone. Inoltre, il potenziale netto generato dal CORE è a simmetria sferica ed il problema può essere ragionevolmente studiato mediante l'approssimazione a campo medio vista in precedenza.

Si parla, in genere, anche di nuclei a buca singola nel caso in cui vi sia una lacuna lasciata da una particella mancante nello spazio di valenza.

Consideriamo il caso di una transizione di un nucleo tra due stati a particella singola. Possiamo scrivere le funzioni d'onda dello stato iniziale e finale del nucleo come segue:

$$|\Psi_a\rangle = |n_a l_a j_a m_a\rangle ; \quad (3.19)$$

$$|\Psi_b\rangle = |n_b l_b j_b m_b\rangle , \quad (3.20)$$

dove $n_a l_a j_a m_a$ e $n_b l_b j_b m_b$ specificano lo stato quantico del nucleone iniziale e del nucleone prodotto. Le matrici di Fermi e Gamow-Teller per transizioni di nuclei tra stati a singola particella sono date da:

$$M_F(\Psi_a \longrightarrow \Psi_b) = \delta_{ab} \hat{j}_a ; \quad (3.21)$$

$$M_{GT}(\Psi_a \longrightarrow \Psi_b) = \sqrt{3} M^{GT}(ba) , \quad (3.22)$$

dove $M^{GT}(ba)$ è l'elemento di matrice ridotto di singola particella della (3.16). Il fattore $\sqrt{3}$ è puramente convenzionale ed è corretto dal fattore $1/\sqrt{3}$ nella definizione di $M^{GT}(ba)$.

Da queste relazioni, otteniamo l'espressione delle probabilità di transizione per decadimento β ridotte (2.25), valide nel caso di transizioni tra stati a singola particella (ed a singola buca):

$$B_F = g_V^2 \delta_{ab} \quad e \quad B_{GT} = g_A^2 \frac{3}{2j_a + 1} |M^{GT}(ba)|^2. \quad (3.23)$$

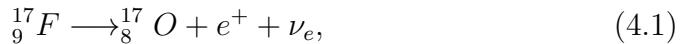
Capitolo 4

Applicazione al nucleo ^{17}F

Nel seguente capitolo ci proponiamo di presentare un esempio riguardante il decadimento β^+ del nucleo di ^{17}F , nucleo dispari-pari con un protone in più rispetto alla chiusura dell'ultima shell nel modello da noi utilizzato fino ad ora. Descriveremo questa reazione mediante la teoria di Fermi e gli strumenti da essa forniti per un'analisi dettagliata delle caratteristiche del decadimento. Sfrutteremo sia risultati teorici, ottenuti dalla risoluzione di un calcolo Hartree-Fock, sia dati sperimentali.

4.1 Decadimento del nucleo ^{17}F

Consideriamo il seguente decadimento β^+ :



in cui avviene la trasformazione del nono protone del ^{17}F nel nono neutrone dell' ^{17}O . Nella Tabella 4.1 sono riportati alcuni risultati riguardanti le ener-

gie di singola particella del protone e del neutrone, valori ottenuti sfruttando il metodo di Hartree-Fock [CoG98] [Bau99] e considerando le interazioni di Gogny con le parametrizzazioni D1M [Gor09] e D1S [Dec80] [Ber91].

$^{17}_9\text{F} \rightarrow ^{17}_8\text{O}$ $\varepsilon_p \rightarrow \varepsilon_n$	
D1M	$-2.33542 \text{ MeV} \rightarrow -5.76954 \text{ MeV}$
D1S	$-2.25194 \text{ MeV} \rightarrow -5.61427 \text{ MeV}$

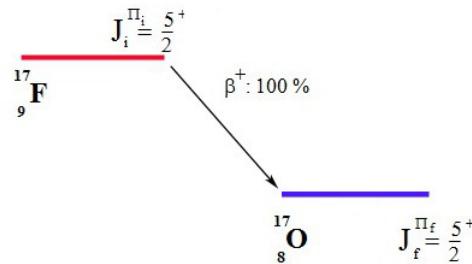
Tabella 4.1: Energie, in MeV, di singola particella dei nucleoni coinvolti nel decadimento del ^{17}F , ottenute in calcoli Hartree-Fock utilizzando le due parametrizzazioni D1M e D1S.

Calcoliamo gli elementi di matrice ridotti di singola particella di Fermi e di Gamow-Teller per il decadimento considerato. Il protone del ^{17}F si trova nello stato $1d_{5/2}$, così come il neutrone dell' ^{17}O . Se indichiamo con a il nucleone appartenente al nucleo che decade (il protone) e con b quello del nucleo prodotto (il neutrone), questi hanno i seguenti numeri quantici:

$$n_a = n_b = 1, \quad l_a = l_b = 2, \quad j_a = j_b = \frac{5}{2}. \quad (4.2)$$

Per quanto riguarda il nucleo iniziale ed il nucleo finale, osserviamo che:

$$J_i^{\Pi_i} = J_f^{\Pi_f} = \frac{5}{2}^+, \quad (4.3)$$

Figura 4.1: Decadimento del ^{17}F .

quindi non si hanno variazioni del loro momento angolare totale o della parità : $\Delta J = 0$ e $\Pi_i = \Pi_f$. Si tratta, perciò, di una transizione permessa.

Sostituendo nella (3.15) e nella (3.16) i numeri quantici caratteristici dei due nucleoni protagonisti del decadimento, si ottengono i seguenti valori per gli elementi di matrice ridotti di Fermi e di Gamow-Teller:

$$M^F(ba) = \delta_{11}\delta_{22}\delta_{\frac{5}{2}\frac{5}{2}}\sqrt{2\frac{5}{2} + 1} = \sqrt{6}, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} M^{GT}(ba) &= \sqrt{2}\delta_{11}\delta_{22}(2\frac{5}{2} + 1)(-1)^{2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{Bmatrix} = \\ &= 6\sqrt{2}\sqrt{\frac{7}{180}} = \sqrt{\frac{14}{5}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

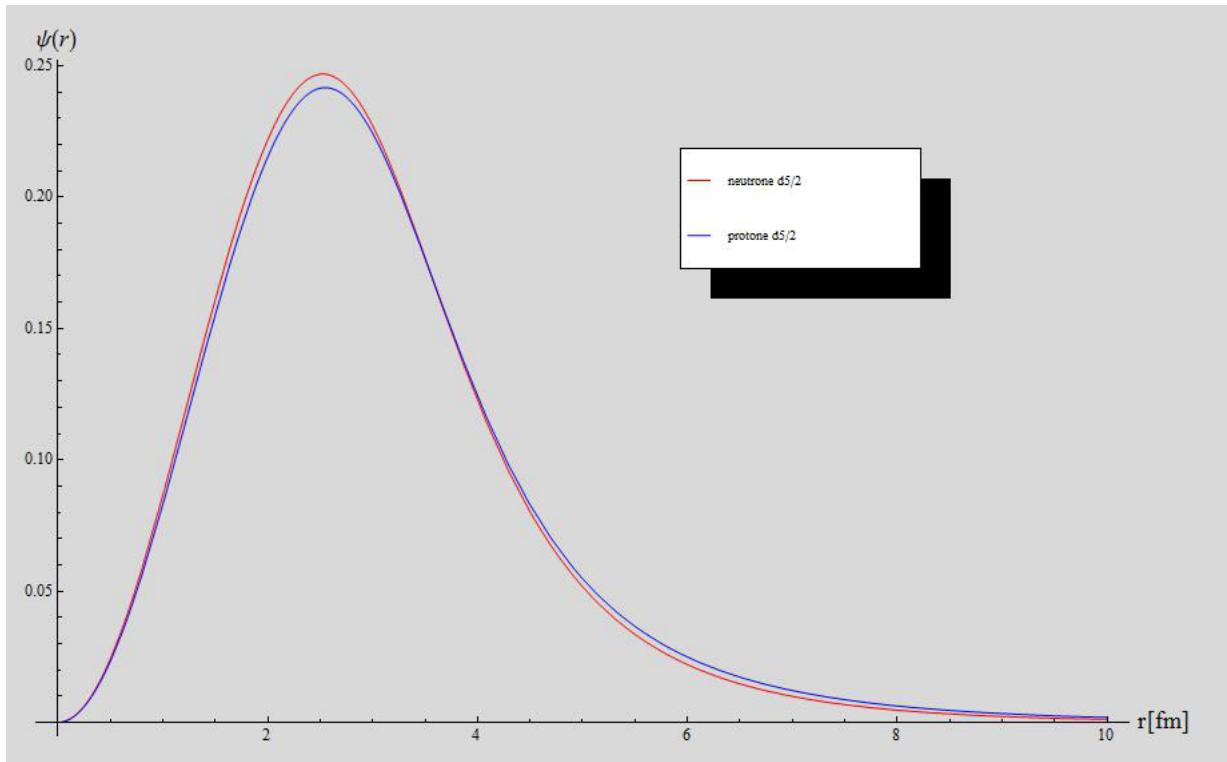


Figura 4.2: Funzioni d'onda del protone di ^{17}F , e del neutrone di ^{17}O , entrambi nello stato $1d_{5/2}$.

Come accennato precedentemente, consideriamo pari a 1 la parte radiale dell'elemento di matrice, espressa nella (3.14). Un risultato numerico ottenuto considerando le funzioni d'onda di protone e neutrone con l'interazione di Gogny D1M, mostrate in Figura 4.2, è il seguente:

$$\int dr r^2 R_{1,2,\frac{5}{2}}^{*(-\frac{1}{2})} R_{1,2,\frac{5}{2}}^{(\frac{1}{2})}(\mathbf{r}) = 0.99927. \quad (4.6)$$

Sfruttando le relazioni (3.23), possiamo scrivere i valori ottenuti per le probabilità di transizione ridotte di Fermi e Gamow-Teller per il decadimento in esame:

$$B_F = g_V^2 \delta_{ab} = g_V^2; \quad (4.7)$$

$$B_{GT} = g_A^2 \frac{3}{2j_a + 1} |M^{GT}(ba)|^2 = 1.4 g_A^2. \quad (4.8)$$

Sostituendo nelle (4.7) e (4.8) alle costanti di accoppiamento vettoriale ed assiale i valori $g_V = 1.0$ e $g_A = 1.25$, otteniamo:

$$B_F = 1.0; \quad (4.9)$$

$$B_{GT} = 1.4(1.25)^2 = 2.1875. \quad (4.10)$$

Inserendo i due risultati ottenuti per B_F e per B_{GT} nella (2.24), possiamo calcolare la vita media ridotta del decadimento del ^{17}F :

$$f_0 t_{1/2} = \frac{\kappa}{B_F + B_{GT}} = \frac{6147}{1.0 + 2.1875} s \cong 1928.5 s. \quad (4.11)$$

Dal valore calcolato per $f_0 t_{1/2}$ e dalla (2.29) si ottiene:

$$\log f t \equiv \log_{10}(f_0 t_{1/2} [s]) \cong 3.285, \quad (4.12)$$

dal quale si deduce (osservando la Tabella 2.1) che il decadimento del ^{17}F è classificato come una transizione superpermessa.

Per il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ del nucleo che decade, utilizziamo la relazione:

$$t_{1/2} = 10^{(\log f_t - \log_{10} f_0)}, \quad (4.13)$$

per la quale è necessario calcolare dapprima il valore di f_0 . Ricordiamo che il decadimento β^+ è una reazione in competizione con la cattura elettronica. Di conseguenza, il valore di f_0 è dato dalla somma dei contributi delle due reazioni:

$$f_0 = f_0^{(+)} + f_0^{(EC)},$$

dove l'espressione di $f_0^{(+)}$ è data dalla (1.25), mentre $f_0^{(EC)}$ è definito nella (1.26). Nel decadimento del ^{17}F si ha:

$$Z_i = 9, \quad Z_f = 8, \quad E = Q_{\beta^+} + m_e c^2 = Q_{EC} - m_e c^2, \quad (4.14)$$

dove Z_i e Z_f indicano il numero di protoni nel nucleo che decade e nel nucleo prodotto, mentre E è l'energia totale rilasciata nel decadimento, la quale dipende dal Q-valore della reazione in esame. Quest'ultimo, a sua volta, dipende dalla differenza tra le energie di legame dei nuclei, quantità che nel modello a shell da noi considerato risulta essere pari alla differenza tra le energie di singola particella dei nucleoni spaiati. Infatti, chiamate $B(A+1)_p$ e $B(A+1)_n$ le energie di legame di due nuclei rispettivamente con un protone e con un neutrone spaiati, possiamo scrivere:

$$\varepsilon_p = B(A+1)_p - B(A); \quad \varepsilon_n = B(A+1)_n - B(A),$$

dove ε_p e ε_n sono le energie di singola particella del protone e del neutrone spaiati. Di conseguenza, abbiamo:

$$B(A+1)_p - B(A+1)_n = \varepsilon_p + B(A) - \varepsilon_n - B(A) = \varepsilon_p - \varepsilon_n.$$

Poniamo, perciò:

$$Q_{\beta^+} = \varepsilon_p - \varepsilon_n + m_p c^2 - m_n c^2 - m_e c^2, \quad (4.15)$$

da cui si ottiene:

$$E = \varepsilon_p - \varepsilon_n + m_p c^2 - m_n c^2, \quad (4.16)$$

dove m_p e m_n indicano le masse di protone e neutrone.

A questo punto, sostituiamo nella (4.16) i valori delle energie del protone e del neutrone ottenuti mediante l'uso del metodo di Hartree-Fock nel caso di parametrizzazione D1M e D1S.

Per la D1M si ha:

$$\begin{aligned} E &= [-2.33542 + 5.76954 + 938.27203 - 939.56535] MeV = \\ &= 2.1408 MeV. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dunque, calcoliamo la $f_0^{(+)}$:

$$f_0^{(+)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{2.1408} \frac{-16\pi\varepsilon^2(2.1408 - \varepsilon)^2}{137 \left[1 - e^{\frac{16\pi\varepsilon}{137\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4}}} \right]} d\varepsilon \cong 26.1232. \quad (4.18)$$

Per la $f_0^{(EC)}$, abbiamo:

$$\varepsilon_0 \approx 0.51 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{137} \right)^2 \right] \text{MeV} \cong 0.51 \text{MeV}, \quad (4.19)$$

da cui:

$$f_0^{(EC)} = \frac{2\pi 9^3}{137^3 0.51^2} (0.51 + 2.14)^2 = 0.0481. \quad (4.20)$$

Dunque, otteniamo:

$$f_0 = f_0^{(+)} + f_0^{(EC)} = 26.1232 + 0.0481 = 26.1713, \quad (4.21)$$

da cui si ha:

$$\log_{10} f_0 \cong 1.418. \quad (4.22)$$

Da questo risultato, otteniamo:

$$t_{1/2} = 10^{(\log f_0 - \log_{10} f_0)} = 10^{1.867} \cong 72.6 \text{ s}. \quad (4.23)$$

Possiamo calcolare $f_0^{(+)}$ anche sfruttando l'approssimazione di Primakoff-Rosen della funzione di Fermi all'interno dell'integrale, ottenendo come risultato:

$$f_0^{(PR)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{2.1408} \frac{-16\pi \varepsilon^2 (2.1408 - \varepsilon)^2}{137 \left[1 - e^{\frac{16\pi}{137}} \right]} d\varepsilon \cong 32.3339. \quad (4.24)$$

Dunque, in questo caso:

$$f_0 = f_0^{(PR)} + f_0^{(EC)} = 32.3339 + 0.0481 = 32.382, \quad (4.25)$$

da cui:

$$t_{1/2}^{(PR)} = 10^{(\log ft - \log_{10} f_0)} = 10^{1.775} \cong 59.6 \text{ s}. \quad (4.26)$$

Con la parametrizzazione D1S, invece, si ha:

$$\begin{aligned} E &= [-2.25194 + 5.61427 + 938.27203 - 939.56535] \text{ MeV} = \\ &= 2.06901 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

In questo caso, il valore di $f_0^{(+)}$ è:

$$f_0^{(+)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{2.06901} \frac{-16\pi\varepsilon^2(2.06901 - \varepsilon)^2}{137 \left[1 - e^{\frac{16\pi\varepsilon}{137\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4}}} \right]} d\varepsilon \cong 21.5642, \quad (4.28)$$

mentre:

$$f_0^{(EC)} = \frac{2\pi 9^3}{137^3 0.51^2} (0.51 + 2.07)^2 = 0.0456. \quad (4.29)$$

Dunque, otteniamo:

$$f_0 = f_0^{(+)} + f_0^{(EC)} = 21.5642 + 0.0456 = 21.6098, \quad (4.30)$$

da cui si ha:

$$\log_{10} f_0 \cong 1.335. \quad (4.31)$$

Infine:

$$t_{1/2} = 10^{(\log ft - \log_{10} f_0)} = 10^{1.950} \cong 89.1 \text{ s}. \quad (4.32)$$

Con l'approssimazione di Primakoff-Rosen, invece, si ha:

$$f_0^{(PR)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{2.06901} \frac{-16\pi\varepsilon^2(2.06901 - \varepsilon)^2}{137 \left[1 - e^{\frac{16\pi}{137}}\right]} d\varepsilon \cong 27.0118, \quad (4.33)$$

da cui:

$$f_0 = f_0^{(+)} + f_0^{(EC)} = 27.0118 + 0.0456 = 27.0574, \quad (4.34)$$

di conseguenza:

$$t_{1/2}^{(PR)} = 10^{(\log f t - \log_{10} f_0^{(PR)})} = 10^{1.853} \cong 71.3 \text{ s}. \quad (4.35)$$

È possibile effettuare un ulteriore calcolo del tempo di dimezzamento considerando i valori sperimentali delle energie di legame del ^{17}F e dell' ^{17}O [LBNL02]:

$$B(17, 9) = 128.220 \text{ MeV}, \quad B(17, 8) = 131.762 \text{ MeV}, \quad (4.36)$$

dove $B(17, 9)$ indica l'energia di legame di ^{17}F , mentre $B(17, 8)$ si riferisce all' ^{17}O . L'energia rilasciata dal decadimento è:

$$\begin{aligned} E &= B(17, 8) - B(17, 9) + m_p c^2 - m_n c^2 = \\ &= [131.762 - 128.220 + 938.272 - 939.565] \text{ MeV} = \\ &= 2.249 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Calcoliamo, quindi, il valore di $f_0^{(+)}$ mediante la seguente espressione:

$$f_0^{(+)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{2.249} \frac{-16\pi\varepsilon^2(2.249 - \varepsilon)^2}{137 \left[1 - e^{\frac{16\pi\varepsilon}{137\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4}}} \right]} d\varepsilon \cong 34.3861. \quad (4.38)$$

Per il contributo della cattura elettronica otteniamo il seguente risultato:

$$f_0^{(EC)} = \frac{2\pi 9^3}{137^3 0.51^2} (0.51 + 2.25)^2 = 0.0522, \quad (4.39)$$

da cui si ha:

$$f_0 = f_0^{(+)} + f_0^{(EC)} = 34.3861 + 0.0522 = 34.4383. \quad (4.40)$$

Infine:

$$\log_{10} f_0 \cong 1.537. \quad (4.41)$$

Ricordando il valore di $\log f t$ espresso nella (4.12), otteniamo:

$$t_{1/2} = 10^{(\log f t - \log_{10} f_0)} = 10^{1.748} \cong 56.0 \text{ s}. \quad (4.42)$$

Se calcoliamo f_0 con l'approssimazione di Primakoff-Rosen, abbiamo:

$$f_0^{(PR)} = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_{m_e c^2}^{2.249} \frac{-16\pi\varepsilon^2(2.249 - \varepsilon)^2}{137 \left[1 - e^{\frac{16\pi\varepsilon}{137}} \right]} d\varepsilon \cong 41.8749. \quad (4.43)$$

Il valore complessivo di f_0 è:

$$f_0 = f_0^{(PR)} + f_0^{(EC)} = 41.8749 + 0.0522 = 41.9271, \quad (4.44)$$

da cui:

$$\log_{10} f_0 \cong 1.622, \quad (4.45)$$

e, infine:

$$t_{1/2}^{(PR)} = 10^{(\log f t - \log_{10} f_0)} = 10^{1.663} \cong 46.0 \text{ s.} \quad (4.46)$$

I risultati ottenuti sono puramente teorici e possono essere messi a confronto con dei dati sperimentali, ad esempio [Kel93]:

$$\log f t^{(exp)} = 3.357; \quad t_{1/2}^{(exp)} = 64.49 \text{ s.} \quad (4.47)$$

È interessante, infine, osservare che l' ^{17}O presenta uno stato eccitato $2s_{1/2}$ in cui il ^{17}F può decadere. Il metodo di Hartree-Fock non prevede questo tipo di reazione, infatti basta osservare le energie di singola particella del protone e del neutrone ottenute nel caso di parametrizzazione D1M e nel caso D1S:

$^{17}\text{F} \longrightarrow {}_8^{17}\text{O}^*$ $\varepsilon_p \longrightarrow \varepsilon_n$	
D1M	$-2.33542 \text{ MeV} \longrightarrow -2.28066 \text{ MeV}$
D1S	$-2.25194 \text{ MeV} \longrightarrow -1.96383 \text{ MeV}$

Tabella 4.2: Energie in MeV di singola particella del protone spaiato del ^{17}F e del neutrone nello stato eccitato dell' ^{17}O , ottenute con le due parametrizzazioni D1M e D1S.

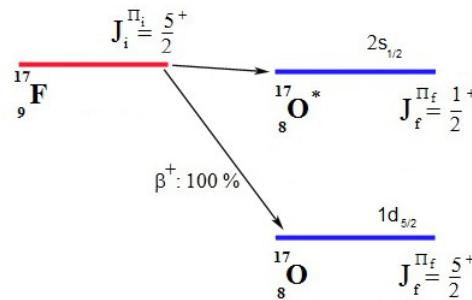


Figura 4.3: Decadimento del Fluoro-17.

Osserviamo dalla Tabella 4.2 che le parametrizzazioni D1M e D1S non permettono questo tipo di decadimento, poiché lo stato $2s_{1/2}$ si trova ad un valore di energia maggiore rispetto allo stato $1d_{5/2}$ del protone nel nucleo di Fluoro. Al contrario, invece, sperimentalmente si è verificata la possibilità che la reazione avvenga. In questo caso, si avrebbe:

$$\Delta J = |J_i - J_f| = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2, \quad (4.48)$$

quindi vi sarebbe una variazione pari a 2 del momento angolare totale del nucleo genitore e la conservazione della parità. Si tratterebbe, dunque, di un decadimento primo-vietato. Sperimentalmente si è ottenuto che il decadimento β^+ di ^{17}F nello stato eccitato $2s_{1/2}$ dell' ^{17}O può verificarsi nello 0.017% dei casi e si ha [Kel93]:

$$\log ft^{(exp)} > 5.6. \quad (4.49)$$

Conclusioni

Abbiamo concluso la trattazione analizzando il decadimento β^+ del ^{17}F mediante l'uso degli strumenti forniti dalla teoria di Fermi. Inserendo nei calcoli le energie di singola particella determinate mediante risoluzione Hartree-Fock, abbiamo ottenuto dei risultati ben diversi tra loro in corrispondenza delle due distinte parametrizzazioni di Gogny. Abbiamo rilevato un'ulteriore discrepanza nel calcolo della funzione $f_0^{(+)}$ confrontato con il valore ottenuto in approssimazione di Primakoff-Rosen. Risultano discordanti anche i valori determinati mediante l'uso delle energie di singola particella e quelli ottenuti con le energie di legame sperimentali. Sebbene tutti questi risultati siano in disaccordo tra loro, possiamo ritenerli comunque tutti accettabili poiché, confrontandoli con i valori sperimentali, risultano coerenti dal punto di vista dell'ordine di grandezza.

Questo esempio ha messo in evidenza i limiti di un'analisi prettamente teorica, quale quella proposta da Fermi, che, tuttavia, fornisce dei risultati confrontabili con quelli sperimentali e permette una descrizione completa, seppur non impeccabile, del decadimento di un nucleo.

Appendice A

Densità degli stati finali

In questa appendice otteniamo l'espressione (1.17), la quale esprime la densità degli stati finali in cui l'elettrone prodotto dal decadimento β di un nucleo ha impulso compreso nell'intervallo $[p_e, p_e + dp_e]$.

Consideriamo una particella che si muove liberamente nello spazio. Ogni terna di valori $\{p_x, p_y, p_z\}$ per le componenti dell'impulso \mathbf{p} della particella individua un punto nello spazio degli impulsi rappresentato in Figura A.1. In particolare, ogni punto di questo spazio rappresenta un ben preciso *stato* ammissibile per la particella.

Se utilizziamo la rappresentazione in coordinate polari, possiamo scrivere le componenti dell'impulso come:

$$p_x = p \sin\theta \cos\phi; \quad (\text{A.1})$$

$$p_y = p \sin\theta \sin\phi; \quad (\text{A.2})$$

$$p_z = p \cos\theta. \quad (\text{A.3})$$

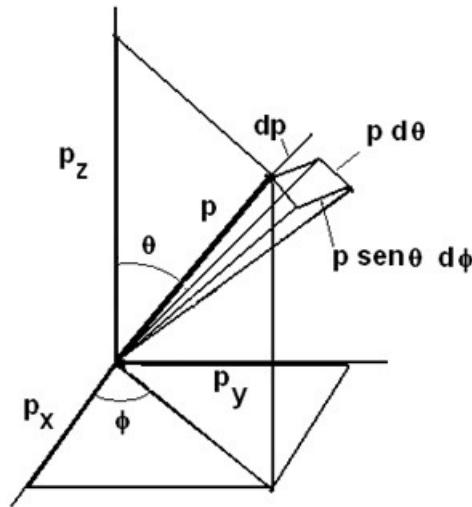


Figura A.1: Spazio degli impulsi.

Quando l'impulso della particella può variare in modulo e direzione nell'intervallo infinitesimo $[\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p}]$, gli *stati* permessi alla particella sono individuati da tutti i punti all'interno dell'elemento infinitesimo di volume $dp_x dp_y dp_z$ (in coordinate cartesiane) nello spazio degli impulsi, espresso in coordinate polari da:

$$p^2 \sin\theta \, dp \, d\theta \, d\phi. \quad (\text{A.4})$$

Se integriamo la (A.4) in θ e ϕ , otteniamo il volume compreso tra le due superfici sferiche di raggi p e $p+dp$:

$$p^2 dp \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = 4\pi p^2 \, dp. \quad (\text{A.5})$$

Questo volumetto comprende tutti gli stati (punti dello spazio degli impulsi) disponibili alla particella e corrispondenti allo stesso modulo ma a differenti orientazioni dell'impulso.

In Meccanica ondulatoria, una particella in moto libero lungo un segmento di lunghezza L è equivalente ad un'onda con lunghezza d'onda e momento dati da:

$$\lambda = \frac{L}{n} \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (\text{A.6})$$

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = n \frac{2\pi\hbar}{L} \implies n = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) p. \quad (\text{A.7})$$

Ogni valore di n individua un valore dell'impulso della particella, quindi un suo stato. Nel caso unidimensionale, il numero di possibili stati compresi nell'intervallo $[p, p + \Delta p]$ è uguale al numero di stati compresi nell'intervallo $[n, n + \Delta n]$, quest'ultimo dato da:

$$\Delta n = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) \Delta p. \quad (\text{A.8})$$

Passando al caso tridimensionale e supponendo che la particella si stia muovendo liberamente in un cubo di lato L , allora uno stato della particella è dato dalla terna di valori n_x, n_y, n_z . Applicando la relazione (A.8) a n_x, n_y e n_z , si ottiene:

$$\Delta n_x = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) \Delta p_x; \quad (\text{A.9})$$

$$\Delta n_y = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) \Delta p_y; \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) \Delta p_z. \quad (\text{A.11})$$

Il numero dei possibili stati per la particella per variazioni di n nell'intervallo $[n, n + \Delta n]$, nonchè il numero di possibili stati della particella per variazioni del suo impulso nell'intervallo $[p, p + \Delta p]$, è dato dal seguente prodotto:

$$\Delta n = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z. \quad (\text{A.12})$$

Se supponiamo che questo numero sia molto elevato, in modo tale che il rapporto $\Delta n / \Delta p$ sia pressoché costante quando Δp tende a zero, allora possiamo considerare direttamente le quantità infinitesime $dn = dn_x dn_y dn_z$ e $dp = dp_x dp_y dp_z$ (in coordinate cartesiane) e scrivere:

$$d^3N = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 dp_x dp_y dp_z, \quad (\text{A.13})$$

da cui, passando in coordinate polari, si ottiene:

$$d^3N = dn_x dn_y dn_z = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p^2 \sin\theta dp d\theta d\phi, \quad (\text{A.14})$$

dove Ω è un volume sferico. Integrando la (A.15) in θ e ϕ si ottiene il nume-

ro di stati con modulo dell'impulso compreso tra p e $p+dp$ ed orientazione arbitraria:

$$dN = \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp. \quad (\text{A.15})$$

Da tutte queste considerazioni, in particolare dalla relazione (A.15), possiamo facilmente ottenere la relazione (1.17). Partiamo dal considerare il numero totale di stati in cui l'elettrone emesso dal decadimento β di un nucleo abbia quantità di moto compresa nell'intervallo $[p_e, p_e + dp_e]$, mentre il neutrino ha impulso compreso nell'intervallo $[p_{\nu_e}, p_{\nu_e} + dp_{\nu_e}]$. Questo numero è dato da:

$$d^2N = dn_e dn_{\nu_e} = \left[\frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 dp_e \right] \left[\frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p_{\nu_e}^2 dp_{\nu_e} \right] = \frac{16\pi^2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 p_{\nu_e}^2 dp_e dp_{\nu_e}. \quad (\text{A.16})$$

A questo punto, vogliamo esprimere il numero totale degli stati in funzione dell'energia totale E rilasciata nel decadimento eliminando la dipendenza dall'impulso del neutrino uscente. Per farlo sfruttiamo le seguenti relazioni:

$$E = \varepsilon + E_{\nu_e} = \varepsilon + \sqrt{p_{\nu_e}^2 c^2 + m_{\nu_e}^2 c^4}, \quad (\text{A.17})$$

in cui ε rappresenta l'energia totale acquisita dall'elettrone in uscita. Nell'ipotesi che il neutrino abbia massa nulla $m_{\nu_e} = 0$, dalla precedente relazione si ha:

$$p_{\nu_e}^2 = \frac{(E - \varepsilon)^2}{c^2} \implies p_{\nu_e} = \frac{(E - \varepsilon)}{c} \implies dp_{\nu_e} = \frac{1}{c} dE. \quad (\text{A.18})$$

Sostituendo queste ultime nella (A.16), otteniamo:

$$\frac{d^2N}{dEdp_e} = \frac{16\pi^2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6c^3}(E - \varepsilon)^2p_e^2, \quad (\text{A.19})$$

densità degli stati finali.

Bibliografia

- [Ben01] G. Bendiscioli, *Fenomeni radioattivi e dintorni*, La goliadica pavese, Pavia (2001).
- [Suh07] J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York (2007).
- [Ber12] J. Beringer et al., *Particle Data Group*, Phys. Rev. D86, 010001 (2012)
- [Dec80] J. Dechargè, D. Gogny, Phys. Rev. C 21 (1980) 1568.
- [Ber91] J.F.Berger, M.Girod, D.Gogny, Comp. Phys. Comm. 63 (1991) 365.
- [Gor09] S. Goriely, S. Hilaire, M. Girod, S. Péru, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 242501.
- [CoG98] G. Co', A. M. Lallena, Nuovo Cimento A 111 (1998) 527.
- [Bau99] A. R. Bautista, G. Co', A. M. Lallena, Nuovo Cimento A 112 (1999) 1117.
- [Kel93] J.H. Kelley, D.R. Tilley, H.R. Weller, C.M. Cheves, Nuclear Physics 564 1 (1993).

[LBNL02] LBNL Isotopes Project Nuclear Data Dissemination Home Page,
Retrieved March 11, 2002, from <http://ie.lbl.gov/toi.html>.

[Edm57] A.R.Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*,
Princeton University Press, Princeton (1957).