



Università del Salento

Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Approccio Stocastico e Misurazione del Rischio di Tasso nelle banche

RELATORI:

Dott. Aldo Letizia
Prof. Giampaolo Co'

LAUREANDA:

Donatella Accogli

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1 Il rischio di tasso d'interesse	7
1.1 Tasso d'interesse e curva dei rendimenti per scadenze	7
1.2 Discounted Cash Flow Analysis	11
1.3 Forward Rate Agreement	12
1.4 Interest Rate Swap	14
1.5 Overnight index swap	18
1.6 Tasso interno di rendimento e duration	18
1.7 Tassi negativi	21
2 I sistemi di Asset Liability Management (ALM)	23
2.1 Tecniche di ALM	23
2.1.1 Cash Flow Mapping	26
2.1.2 Ipotesi di Shift della curva	27
2.2 Limiti dell'approccio deterministico	29
3 Approccio di simulazione stocastica	31
3.1 Processo stocastico	32
3.1.1 Processo stocastico di Markov	34
3.1.2 Random Walk	36
3.2 Moto Browniano (Wiener process)	38
3.2.1 Processo di Wiener “generalizzato”	40
3.2.2 Itô process	40
3.3 Geometric Brownian motion	41
3.3.1 Parametri	42
3.3.2 Processi correlati	43
3.3.3 Lemma di Itô	44
3.3.4 Esempio di applicazione del lemma di Itô in un contratto Forward .	45
3.3.5 Proprietà log-normale del prezzo delle azioni	45
3.4 Modello di Black-Scholes-Merton	47
3.5 Modello di Black	52
3.6 Approccio di simulazione stocastica	55

INDICE	1
3.6.1 Simulazione Monte Carlo	56
4 Applicazione	59
4.1 Approccio stocastico alla misurazione del rischio di tasso	60
4.2 Modello di simulazione Monte Carlo	61
4.2.1 Generazione scenari di tasso	64
4.2.2 Calcolo del Delta Valore	71
4.2.3 Distribuzione del Delta Valore	73
5 Conclusioni	77
A Richiami di probabilità	79
A.1 Distribuzione Normale	83
A.2 Distribuzione LogNormale	84
B Tabelle	85
B.1 Tabella n.1	86
C Glossario	89
Bibliografia	95

Introduzione

Negli ultimi anni, i modelli fisici si stanno rilevando sempre più utili per affrontare la complessità di alcuni problemi che sono propri di ambiti di ricerca, diversi dall'ambito fisico. Per esempio sono molto utilizzati per affrontare la complessità dei mercati finanziari. Infatti è sempre maggiore l'interesse da parte degli economisti nei confronti dell'apparato concettuale e degli strumenti utilizzati dalla Fisica, e nello stesso tempo continua ad essere in crescita la comunità dei fisici che lavora in ambito finanziario. Come insegnava la letteratura molti fisici famosi già nel corso degli anni si sono occupati di problemi in tale ambito.

Gran parte dei dati relativi agli eventi economici, che avvengono sui mercati finanziari, sono ora registri e resi disponibili in forma elettronica. In questo modo si hanno a disposizione delle vere e proprie banche dati. Questa crescente memorizzazione richiede però delle analisi sempre più efficienti e approfondite. Proprio dall'analisi di questi dati emerge come questi possano essere considerati dei sistemi complessi disordinati. In fisica, adottando alcuni principi fisici fondamentali è possibile elaborare precisi modelli in grado di descrivere alcune caratteristiche generali di un sistema disordinato. Sulla base di ciò, i fisici hanno iniziato ad estendere l'applicazione di tali modelli ad altri sistemi complessi disordinati come possono essere gli ecosistemi, le reti neurali o come in questo caso i mercati finanziari. È da qui che è iniziata una collaborazione più intensa tra fisici ed economisti. I fisici hanno iniziato a studiare la fenomenologia dei mercati adottando un atteggiamento distaccato rispetto alla pura ricerca della distribuzione di probabilità più idonea per descrivere la natura stocastica, concentrandosi invece sui meccanismi che generano queste distribuzioni e che sono diverse da quelle gaussiane. Ovviamente alla base di ciò è fondamentale la conoscenza delle regole dei processi stocastici che da sempre sono state utilizzate nello studio delle fluttuazioni dei prezzi nei mercati finanziari. Un grosso contributo allo studio della dinamica dei mercati finanziari è fornito dalla Meccanica Statistica e dalla teoria dei cammini aleatori a tempo continuo. Infatti con la Meccanica Statistica è stato dimostrato come concetti probabilistici permettono di spiegare proprietà generali e nello stesso tempo indipendenti dalla particolare natura dei sistemi complessi. Tramite modelli puramente stocastici è possibile simulare proprietà statistiche in maniera efficace.

Gran parte dei modelli matematici usati effettivamente dagli analisti finanziari si collegano ai risultati ottenuti nel 1973 dal fisico Fisher Black, dal matematico Myron Sholes e dai

contributi offerti dall'ingegnere elettronico Merton. Nel loro lavoro originale, considerano solo particolari opzioni senza rischi. Negli anni tale modello è stato rivisto utilizzando avanzati metodi di calcolo probabilistico usati solitamente nella trattazione dei problemi stocastici. In realtà, già molti anni prima erano stati condotti vari studi dei processi stocastici in ambito finanziario. Infatti nel 1900 Louis Bachelier, con la sua tesi di dottorato in matematica, dal titolo *Theorie de la Speculation*, fu il primo ad avanzare l'ipotesi di applicare la teoria della probabilità allo studio della variazione del prezzo dei titoli di stato emessi dal governo francese. In tal modo Bachelier aveva introdotto il metodo probabilistico in ambito finanziario e più in generale aveva introdotto il concetto di processo stocastico. Inoltre tale approccio anticipava di circa cinque anni i punti fondamentali della teoria introdotta da Einstein per descrivere i cammini casuali del moto dei granelli di polvere in sospensione in un liquido, osservati già dal 1827 dal botanico inglese Robert Brown. Nel 1905, Einstein studiò il fenomeno Browniano sia a livello microscopico che a livello macroscopico proponendo in quest'ultimo caso una formulazione statistica per il moto del polline. La teoria di Einstein dei processi legati al moto Browniano non era fondata però su una solida base matematica. Il modello matematico del moto caotico basato su processi elementari fu introdotto anni dopo, precisamente tra il 1918 e il 1923 dal matematico Nobert Wiener. Questo modello ha portato alla formulazione di un modello macroscopico del mercato finanziario secondo cui i prezzi delle azioni sono aleatori e la loro distribuzione di probabilità è la curva di Gauss. Ben presto però si evidenziarono i limiti di tale approccio gaussiano che non permetteva di ottenere una riproduzione fedele dell'andamento dei prezzi. Il modello introdotto da Black, Scholes e Merton, è oggi considerato come il modello standard della dinamica dei prezzi nei mercati finanziari. Studi successivi hanno aperto la strada a simulazioni numeriche tramite simulazioni con metodi Monte Carlo. Dal modello di Black, Scholes, Merton risulta che il logaritmo del prezzo di un'azione si comporta come la posizione di una particella in moto Browniano e quindi segue che i prezzi sono caratterizzati da una distribuzione di probabilità logNormale. Dal punto di vista empirico è stato osservato che, in una situazione ordinaria di mercato, i singoli nodi della curva dei tassi d'interesse seguono un processo logNormale simile a quello osservato per i prezzi azionari. In un'operazione di credito, l'interesse può essere definito come il costo che il debitore sostiene per ottenere la disponibilità di un capitale per un tempo definito. Nello stesso tempo l'interesse identifica il ricavo che il creditore riceve per la rinuncia temporanea alla disponibilità del capitale prestato. Il tasso di interesse unitario definisce l'interesse prodotto da un'unità di capitale in un'unità convenzionale di tempo. Nel mercato finanziario i tassi di interesse vengono determinati in base alle correnti di domanda e di offerta dei fondi per le diverse durate. È da un po' di anni che si registra una forte variabilità dei tassi di interesse e ciò si ripercuote sul valore degli strumenti finanziari. Il fatto che il tasso di interesse che deve essere applicato ad una attività finanziaria dipenda fortemente dalla sua scadenza comporta la necessità di definire una struttura dei tassi di interesse funzione del tempo che permetta di attualizzare un flusso di cassa a uno specifico tasso in base al tempo in cui si presenta. A causa della variabilità

dei tassi di interesse, le istituzioni finanziarie hanno iniziato a ricercare adeguate modalità di stima del rischio di tasso di interesse, ovvero il rischio attuale o prospettico a cui è soggetto il capitale e i guadagni della banca a causa di movimenti avversi dei tassi di interesse.

Scopo di questa tesi è stato lo studio dell'approccio stocastico e lo sviluppo di un modello di simulazione Monte Carlo. In particolare è stato evidenziato come l'utilizzo di questo approccio risulti essere molto utile per affrontare la complessità dei mercati finanziari perché oltre a considerare l'incertezza che caratterizza i mercati permette anche di trovare nuove soluzioni che non sarebbe possibile ottenere con i tradizionali modelli deterministici. Precisamente è stato affrontato il problema della gestione del rischio di tasso di interesse nelle banche. Ovviamente questo problema è stato introdotto prima dal punto di vista teorico e poi è stato affrontato dal punto di vista applicativo tramite lo sviluppo di un modello di simulazione Monte Carlo, che ha permesso di ottenere delle misurazioni di rischio di tasso di interesse più affidabili rispetto a quelle ottenute con i modelli tradizionali. Questo lavoro è stato svolto collaborando con il Dott. Aldo Letizia, responsabile di Risk Management, presso Banca Popolare Pugliese e con il suo team che mi hanno fornito tutti gli strumenti necessari per affrontare e conoscere il complesso sistema dei mercati finanziari. Il lavoro di tesi è strutturato come segue:

- Nel capitolo 1 sono state introdotte tutte le nozioni teoriche fondamentali per comprendere il fenomeno che è stato poi descritto con il modello di simulazione Monte Carlo.
- Nel Capitolo 2 è stato introdotto e definito il sistema di Asset and Liabilities Management di una banca definendo i principali strumenti per la misurazione e la gestione del Rischio di Tasso di interesse. Alla fine del capitolo sono stati evidenziati i limiti dell'approccio deterministico.
- Nel capitolo 3 è stato trattato teoricamente l'approccio stocastico partendo dalla definizione di processo stocastico. È stato definito un processo stocastico di Markov e brevemente il concetto di Random Walk.
- Nel capitolo 4 è stato applicato il modello di simulazione Monte Carlo utilizzato per la Misurazione del Rischio di Tasso di Interesse.

Capitolo 1

Il rischio di tasso d'interesse

Negli anni Ottanta del secolo scorso, il mercato aumento della variabilità dei tassi d'interesse ha prodotto effetti significativi sul valore degli strumenti finanziari e sulla redditività delle banche. Questo ha indotto le istituzioni finanziarie a ricercare adeguate modalità di stima del rischio di tasso, vale dire delle perdite potenziali conseguenti ad una variazione avversa dei tassi di interesse. Per valutare il rischio di tasso di interesse di una banca, è necessario identificare preventivamente i contratti di credito (assets) e di debito (liabilities) il cui valore risulta sensibile alla dinamica dei tassi di mercato e, per ogni contratto, calcolare l'intensità della relazione valore - tasso. Sulla base di questi elementi risulta quindi possibile stimare la reazione di valore di ogni contratto a specifiche variazioni del tasso di riferimento. In questa logica, assume rilievo la capacità della banca di formulare stime attendibili dell'evoluzione attesa dei tassi di interesse al fine di orientare opportunamente la struttura dei propri rischi.

1.1 Tasso d'interesse e curva dei rendimenti per scadenze

In un'operazione di credito, l'interesse esprime il costo che colui che richiede il prestito (debitore) sostiene per ottenere la disponibilità di un dato ammontare di mezzi monetari (capitale) per un tempo definito. Ribaltando l'ottica, l'interesse identifica il ricavo che il datore di fondi (credитore) riceve per la rinuncia temporanea alla disponibilità del capitale prestato. Il tasso (o "saggio") di interesse *unitario* definisce l'interesse prodotto da un' unità di capitale in un' unità convenzionale di tempo (base di riferimento del tasso di interesse). Nella pratica creditizia, i tassi di interesse sono riferiti all'anno, perciò, il calcolo degli interessi che maturano sui prestiti di qualsiasi durata impone la definizione preventiva di una regola di composizione dell'interesse. Al riguardo, si possono identificare due distinti "regimi" di crescita del capitale: semplice e composto. Nel *Regime dell'interesse "semplice"*, il tasso di crescita del capitale è ottenuto riproporzionando il

tasso di interesse sulla durata effettiva del prestito. Il fattore di crescita del capitale è quindi ottenuto come:

$$FC = 1 + rt \quad (1.1)$$

dove:

- FC è il fattore di crescita del capitale;
- r è il tasso di interesse annuo;
- t è la durata del prestito espressa in anni.

Il *Regime dell'interesse “composto”* prevede invece l'accumulo degli interessi sul capitale (capitalizzazione) alla fine di ogni periodo di maturazione. Considerando un periodo di tempo t , dove t indica il numero di anni, il fattore di crescita del capitale è quindi ottenuto come:

$$FC = (1 + r)^t \quad (1.2)$$

Attraverso operazioni di credito e debito a breve termine svolte direttamente con le banche, le Banche Centrali condizionano la dinamica dei tassi di interesse sulle scadenze brevi con il fine dichiarato di sostenere la crescita economica in una condizione di prezzi relativamente stabili¹.

La *struttura dei tassi di interesse* per le operazioni di credito esenti da rischio di insolvenza [Bor19] identifica i livelli medi dei tassi applicati alle operazioni di debito/credito tra banche (tassi interbancari) per le diverse durate. Tale struttura varia continuamente nel tempo in relazione alla dinamica della domanda e dell'offerta di fondi sulle varie durate. In forma grafica, la struttura dei tassi per scadenze definisce una serie di “nodi” (pallini blu sulla curva in Figura 1.1) tra cui è possibile interpolare una curva chiamata curva dei rendimenti o *yield curve* [Ful93]. L'asse delle ascisse del grafico è relativo alla durata dei singoli nodi, mentre l'asse delle ordinate è relativo ai rendimenti, espressi in forma percentuale. In figura è riportato, come esempio, l'andamento del tasso Euribor ricavato dalla piattaforma Bloomberg [Ban19] riferito al giorno 20/11/2018. Il periodo, riportato sull'asse delle ascisse, è compreso tra 6 mesi e 50 anni.

¹Nel 1998 il Consiglio direttivo della BCE ha definito la stabilità dei prezzi come un tasso di inflazione a medio termine inferiore al 2% e nel 2003 ha ulteriormente chiarito l'intenzione di mantenere tale tasso su livelli inferiori ma prossimi al 2% [Ban16].

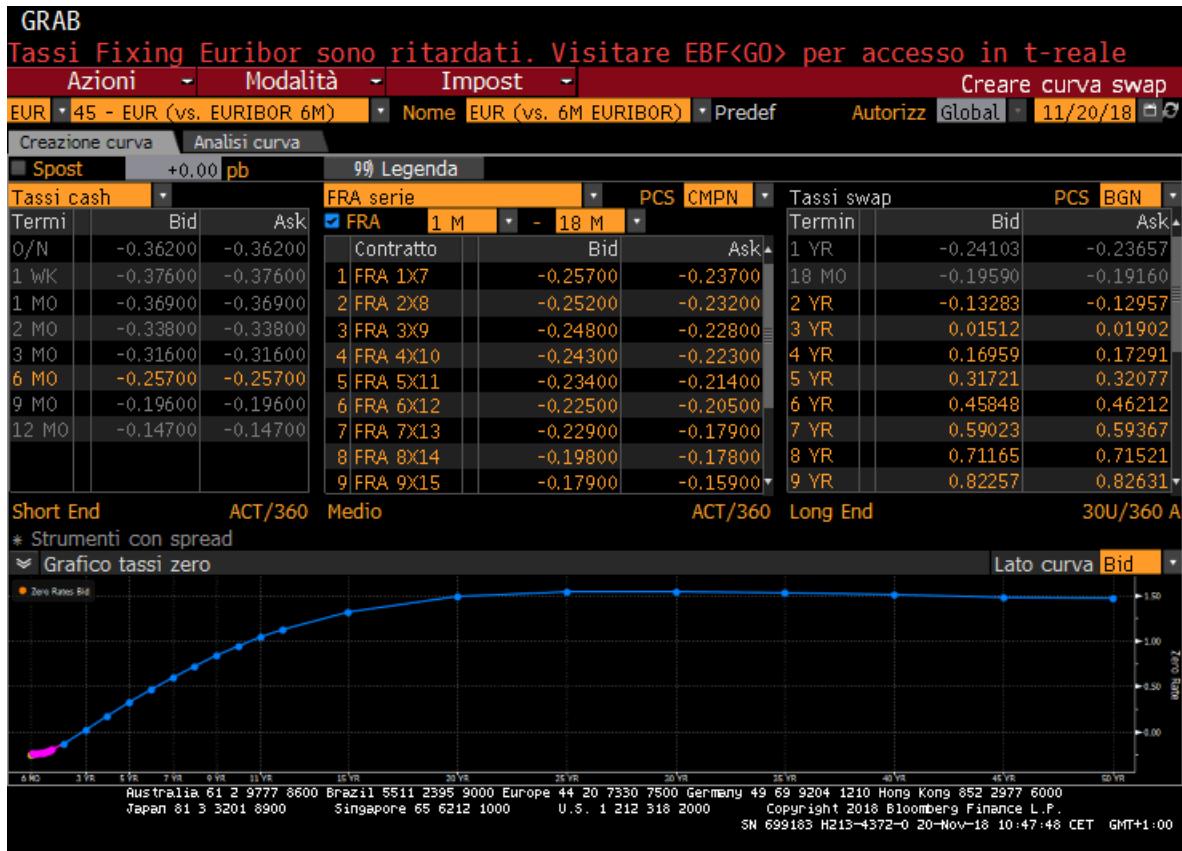


Figura 1.1: Curva dei tassi interbancari estratti dalla piattaforma Bloomberg. È stata ottenuta riportando sull'asse delle ascisse la durata dei singoli nodi mentre sull'asse delle ordinate il rendimento espresso in forma percentuale. Il periodo preso in considerazione va da 6 mesi a circa 50 anni.

In generale, si possono osservare 3 possibili “configurazioni tipo” della curva dei tassi: crescente, decrescente e piatta. Solitamente una curva dei rendimenti crescente, detta anche “normal”, tende a presentarsi nelle fasi iniziali di una ripresa economica e sta ad indicare che i tassi di interesse a lungo termine sono superiori a quelli a breve termine. Mentre una curva dei rendimenti decrescente, o anche detta “inverted”, quindi inclinata verso il basso si presenta durante periodi di espansione economica e sta ad indicare che i tassi di interesse a lungo termine sono inferiori ai tassi di interesse a breve [Ful93]. Infine si ha una curva piatta (flat) quando i tassi a breve termine e a lungo termine coincidono [Res08]. In figura 1.2 sono schematizzati i possibili andamenti della curva.

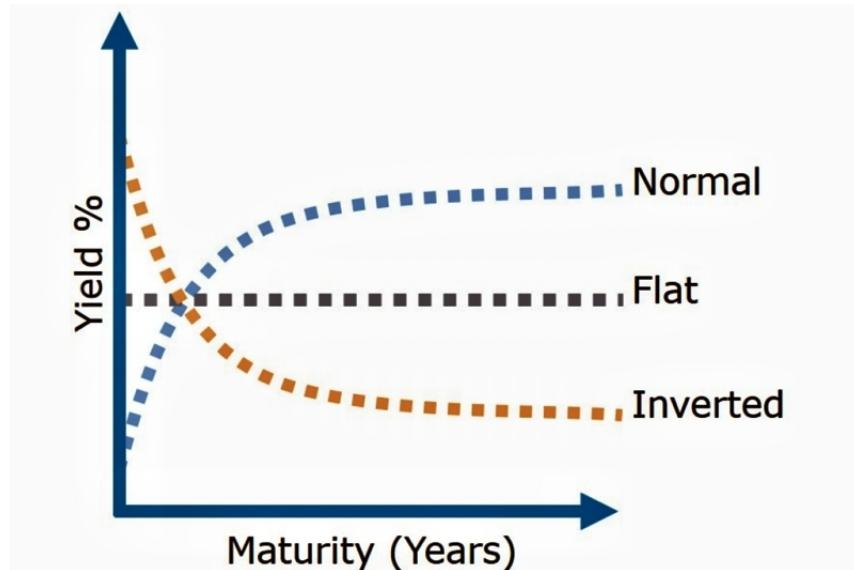


Figura 1.2: Esempi di tre possibili “configurazioni tipo” della curva dei rendimenti: crescente, decrescente e piatta. Le curve sono state ottenute riportando sulle delle ascisse i periodi di tempo espressi in anni mentre sull’asse delle ordinate il rendimento espresso in forma percentuale.

Ci possono essere casi particolari e molto più complessi in cui la struttura non assume nessuno degli andamenti precedentemente descritti perché avrà tratti con pendenze diverse [Tra14].

Per spiegare la configurazione della curva dei rendimenti è possibile utilizzare tre teorie che sono: la teoria delle aspettative, la teoria della segmentazione del mercato e la teoria del premio per la liquidità. La teoria delle aspettative e la teoria della segmentazione del mercato non forniscono, però, una spiegazione dettagliata e pertanto generalmente si ricorre alla teoria del premio per la liquidità che fornisce un quadro più completo in quanto mette insieme le caratteristiche delle due precedenti teorie. Seppur la teoria delle aspettative, per certi versi è incompleta, è considerata comunque un’ importante teoria ed è utile trattarla brevemente. È stata elaborata da Fisher [Fis30] nel 1930 e secondo questa teoria la forma della curva dei rendimenti è determinata unicamente dalle aspettative del mercato relative all’evoluzione futura dei tassi d’interesse a breve termine. Quindi i tassi relativi alle scadenze più lunghe sono calcolati in base ai tassi a breve correnti ed ai tassi a breve attesi per il futuro. In termini analitici, la teoria delle aspettative è definita così:

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + r_{0,1})(1 + r_{1,2}) + \cdots + (1 + r_{n-1,n}) \quad (1.3)$$

- n è il numero di anni;
- $r_{0,n}$ è il rendimento effettivo, su base annua, di un investimento avviato al tempo corrente e con durata n anni;

- $r_{0,1}$ è il rendimento effettivo, su base annua, di un investimento avviato nel tempo corrente e con durata un anno;
- $r_{1,2}$ è il rendimento atteso, su base annua, di un investimento avviato fra un anno e con durata un anno;
- $r_{n-1,n}$ è il rendimento atteso, su base annua, di un investimento avviato fra $(n - 1)$ anni e con durata un anno.

In base a questa teoria, una curva crescente indica aspettative di aumento dei tassi di interesse a breve termine. Così come una curva decrescente prospetta aspettative di riduzione dei tassi di interesse a breve termine. Infine una curva piatta indica che gli investitori hanno aspettative di tassi stabili.

La teoria del premio per la liquidità [Hic46] sostiene che gli investitori tendano a preferire investimenti con scadenze più brevi. Sono disposti a investire per scadenze più lunghe solo nel caso in cui siano ricompensati con un premio e quindi da rendimenti maggiori poiché loro bloccano il loro denaro per un arco di tempo più lungo con un tasso d'interesse che non è più possibile modificare. Ritengono pertanto che gli investimenti a breve termine siano meno rischiosi in termini di liquidità di quelli a lungo termine [Ful93]. Questa teoria permette di estrapolare le aspettative del mercato sui tassi di interesse futuri dal semplice esame dell'inclinazione della curva dei rendimenti (spot curve). Infatti un'inclinazione positiva forte è indice del fatto che è previsto un aumento dei tassi a breve termine. Da un'inclinazione moderatamente positiva si prevede che i tassi rimarranno invariati, da un'inclinazione nulla si prevede una diminuzione moderata e infine da un'inclinazione negativa si prevede un brusco calo dei tassi [Mis12].

1.2 Discounted Cash Flow Analysis

Nel calcolo finanziario, il flusso di cassa atteso definisce l'ammontare di moneta che un operatore prevede di incassare/pagare ad una data futura. Facendo riferimento al regime di crescita dell'interesse composto, il flusso di cassa f_t atteso, dopo t periodi, su un capitale pari a f_0 , investito al tasso r , è ottenuto come:

$$f_t = f_0(1 + r)^t \quad (1.4)$$

da cui è possibile ricavare il capitale iniziale f_0 investito:

$$f_0 = \frac{f_t}{(1 + r)^t} \quad (1.5)$$

Il procedimento di calcolo del valore corrente (attuale) di un flusso di cassa atteso è definito “attualizzazione” o “sconto”.

La *Discounted Cash Flow Analysis* definisce il quadro teorico a cui fare riferimento per il calcolo del valore corrente di un credito. Sulla base di quanto esposto in precedenza, il valore attuale di un contratto di credito è ottenuto attualizzando i flussi contrattuali mediante tassi tratti dalla struttura corrente dei rendimenti risk-free.

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{f_t}{(1+r)^t} \quad (1.6)$$

dove:

- f_T sono i flussi di cassa dopo T anni;
- r è il tasso annuo risk-free;
- T è il numero di anni.

La definizione di valore attuale è molto utile perchè permette, sommando i valori attuali di tutti i flussi futuri ricevuti, di calcolare il valore corrente di un ammontare di denaro, disponibile tra T periodi. L'equazione evidenzia come il valore attuale cambi in direzione opposta al cambiamento di tasso di interesse usato per attualizzare il flusso di cassa. Questa relazione inversa si trova alla base della definizione di *Rischio di tasso d'interesse* che rappresenta la possibilità che il valore di un investimento diminuisca a causa di un rialzo dei tassi d'interesse [Fab03]. Il procedimento di calcolo del valore attuale, visto nell'equazione (1.6), anche se è molto comune, non risulta essere completamente corretto in quanto presenta delle inesattezze che potrebbero presentare importanti ripercussioni per la misura del rischio [Let10].

1.3 Forward Rate Agreement

Sul mercato finanziario è possibile stipulare accordi di tasso “a termine” attraverso cui due parti decideranno, ex-ante, il tasso di interesse da applicare ad un credito/debito figurativo nozionale, di durata predefinita, che sorgerà in una stabilità data futura (forward, lett. “in avanti”). Questo tipo di accordo prende il nome di Forward Rate Agreement. Seguendo tale approccio è possibile sostituire, in qualsiasi momento i flussi di interesse incerti (a tasso variabile) con una serie di interessi certi calcolati a tassi Forward. I tassi Forward, per come sono stati definiti, permettono di determinare una condizione di “assenza di arbitraggio” dato che non è permesso agli operatori di ottenere guadagni immediati combinando operazioni di debito/credito “a pronti” con operazioni di segno opposto a termine. Dal punto di vista matematico la serie di tassi Forward è ricavata dalla *struttura dei rendimenti per scadenze*² osservata sul mercato alla data corrente applicando un preciso procedimento matematico. Nello specifico viene utilizzata la seguente

²La struttura dei rendimenti per scadenze è costruita in relazione ai tassi interbancari per varie scadenze che possono variare da un giorno a 50 anni. Viene anche detta “curva dei rendimenti risk-free”.

formula:

$$fw_{t,n} = \left[\frac{(1 + r_{n+t})^{n+t}}{(1 + r_n)^n} - 1 \right] \quad (1.7)$$

dove:

- $fw_{t,n}$ sono i tassi Forward di n periodi in futuro;
- n è il numero di periodi considerati (anni);
- r_n è il tasso ricavato dalla struttura dei rendimenti relativa al periodo n ;
- t indica la durata del periodo (anno);
- r_{n+t} è il tasso ricavato dalla struttura dei rendimenti relativa al periodo n più la durata di tale periodo.

Il tasso Forward è utilizzato per stipulare i contratti derivati su Tassi di Interesse tra cui gli *Interest Rate Swap* di cui si parlerà più avanti [Mis12].

1.4 Interest Rate Swap

In finanza, il contratto swap è un contratto finanziario che impegna due parti a scambiarsi (to swap) flussi di cassa calcolati secondo regole definite. Un contratto *swap su tassi d'interesse* o anche detto *Interest Rate Swap* (o IRS) obbliga due parti a scambiare, a precise date future, i flussi di interesse calcolati su un medesimo capitale figurativo (nozionale) secondo diverse condizioni di tasso. Questo tipo di contratto è uno strumento importante per il controllo del rischio di tasso. Nacque nel 1982 negli Stati Uniti quando ci fu una crescente richiesta di strumenti finanziari utilizzabili per ridurre il rischio di tasso d'interesse. Il più comune degli swap è il contratto *plain vanilla swap* che prevede lo scambio di interessi calcolati a tasso fisso (tasso swap) contro interessi calcolati a tasso variabile su un capitale costante. Il contratto stabilisce il nozionale di riferimento cioè l'importo su cui viene calcolato l'interesse, la durata dell'operazione, il tasso swap che è il parametro di riferimento per la revisione periodica del tasso variabile [Mis12]. Il contratto prevede quindi che a determinate date future una parte paghi un flusso d'interessi calcolati a tasso fisso (la sequenza di interessi a tasso fisso viene detta *fixed leg* dello swap ovvero gamba fissa) e l'altra parte invece paghi un flusso d'interesse calcolato ad un tasso variabile definito periodicamente in base all'andamento dei mercati (la sequenza di interessi a tasso variabile viene detta *floating leg* dello swap ovvero gamba variabile). Chiamando le due parti rispettivamente Parte A e Parte B, quanto detto può essere rappresentato schematicamente come in figura 1.3:

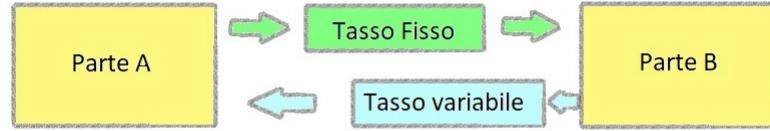


Figura 1.3: Struttura tipica di un Interest Rate Swap.

Considerando il punto di vista del singolo contraente lo swap produce gli effetti finanziari di un debito e di un credito definiti allo stesso tempo, per uno stesso importo e con pari scadenza. Essendo le due operazioni di segno opposto si ha che i flussi di cassa relativi ai movimenti di capitale si annullano a vicenda e lo swap è definito solo come lo scambio periodico delle differenze tra gli interessi a debito e quelli a credito maturati alle varie

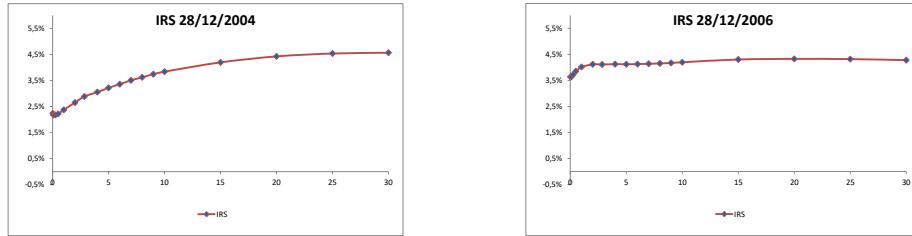
scadenze [Bri06]. In formule, il valore dello swap può essere definito come segue:

$$V = \sum_{i=1}^N \frac{C(fw_i - fx)d_i}{(1 + r_i)^{t_i}} \quad (1.8)$$

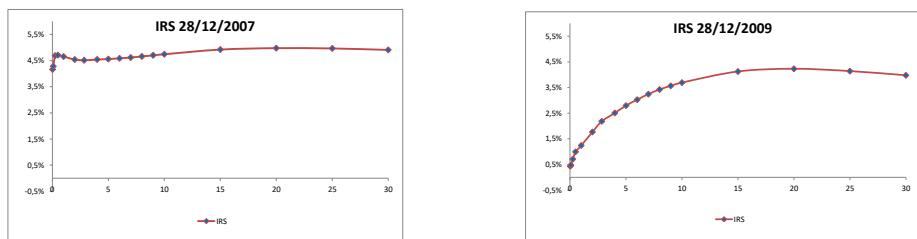
dove:

- i indica il periodo i -esimo in cui matureranno gli interessi;
- C è il capitale (nozionale) figurativo;
- fx è il tasso fisso;
- fw_i è il tasso variabile del periodo i -esimo;
- N è il numero dei periodi di maturazione degli interessi vale a dire tutti i periodi dalla data di valutazione dello swap fino alla data di scadenza;
- r_i è il vettore dei tassi tratto dalla struttura dei rendimenti per scadenze;
- t_i è l'intervallo di tempo compreso tra la data di valutazione dello swap (data corrente) e la data di regolamento degli interessi che matureranno nel periodo i -esimo;
- d_i è la durata del periodo i -esimo calcolata secondo la convezione del conteggio dei giorni stabilito nel contratto.

La serie storica del tasso IRS, riportata in figura 1.4 e 1.5, mostra l'evolvere nel corso degli anni dell'andamento dei tassi interbancari. Come si può vedere dalle figure l'andamento del tasso IRS è cambiato molto negli anni registrando anche valori di tasso negativi.



(a) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2004* (b) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2006*



(c) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2007* (d) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2009*

Figura 1.4: Andamento tasso IRS nel corso degli anni. Il grafico è stato ottenuto riportando sull'asse delle ascisse la durata dei singoli nodi e sull'asse delle ordinate il rendimento espresso in forma percentuale.

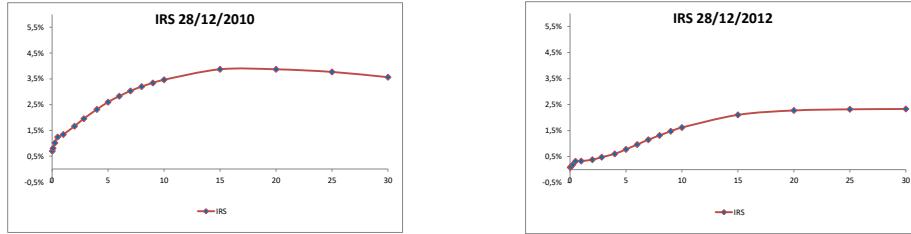
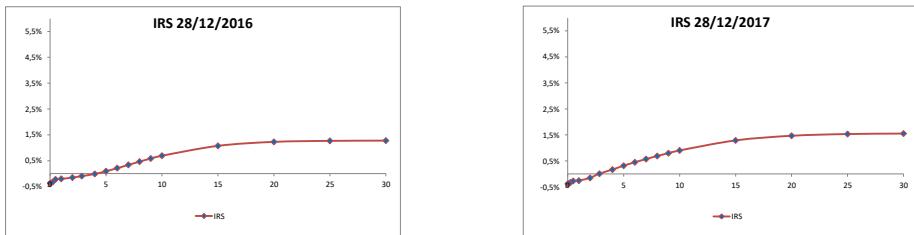
(a) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2010*(b) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2012*(c) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2016*(d) *Andamento del tasso IRS riferito al 28/12/2017*

Figura 1.5: Andamento tasso IRS nel corso degli anni. Il grafico è stato ottenuto riportando sull'asse delle ascisse la durata dei singoli nodi e sull'asse delle ordinate il rendimento espresso in forma percentuale.

1.5 Overnight index swap

Fino a quando il mercato interbancario funzionava in modo regolare, o meglio fino a quando le banche erano considerate esenti dal rischio di insolvenza, la struttura dei tassi interbancari era considerata una buona proxy dei rendimenti risk-free cioè privi di rischio. Nel momento in cui gli istituti di credito hanno iniziato a considerare come rischiose le rispettive controparti bancarie, a seguito della crisi finanziaria avvenuta tra il 2007-2008 e il conseguente clima di sfiducia che ne è conseguito, è cambiato il concetto di tasso interbancario. Infatti da quel momento in poi i tassi interbancari hanno incorporato un *credit spread* col fine di compensare le banche finanziarie per il rischio di insolvenza assegnato alle banche richiedenti il prestito. Pertanto i tassi interbancari non sono stati più utilizzabili per la costruzione di fattori di sconto risk-free.

Per evitare di pagare, sul mercato interbancario, un credit spread sui finanziamenti a lunga scadenza le banche hanno iniziato a finanziarsi per periodi molto brevi, tipicamente un giorno (*overnight*), rinnovando puntualmente tali operazioni fino a quando non abbiano raggiunto la somma desiderata. Sono in questo modo esposte al rischio di oscillazione del tasso *overnight*. I contratti che vengono stipulati con questo tipo di tasso si chiamano *Overnight Index Swap* o *OIS*. Questo tipologia di contratto impegna due parti a scambiarsi un tasso fisso contro un tasso variabile calcolato per composizione dei tassi *overnight* osservati durante il periodo di maturazione degli interessi. Ad esempio una banca che vuole finanziarsi per n giorni sul mercato interbancario può decidere o di concludere un finanziamento a scadenza unica oppure può decidere di rinnovare n volte il finanziamento *overnight* e stipulare appunto un contratto OIS, in modo da eliminare il rischio di oscillazione giornaliera del tasso. Nel caso in cui la banca è ritenuta pienamente solvibile allora il tasso sull'operazione a scadenza coincide con quello OIS di pari durata. Mentre nel caso in cui la banca non è ritenuta tale allora ci sarà un grosso divario tra i due tassi che segnalerà la presenza di un rischio di credito da parte dei finanziatori.

Attualmente i tassi OIS, dato che non incorporano una misura significativa del rischio di credito, vengono considerati dagli operatori una buona approssimazione dei tassi risk-free. Vengono infatti utilizzati per la determinazione dei fattori di sconto nelle formule di calcolo del valore attuale [Hul12].

1.6 Tasso interno di rendimento e duration

Il tasso interno di rendimento (Internal Rate of Return) di un investimento è una misura sintetica di redditività e corrisponde al tasso di attualizzazione per il quale il valore netto attuale dell'investimento è uguale a zero. Infatti il valore attuale ed il tasso interno di rendimento sono i due criteri su cui si basano “le regole di valutazione dei progetti di investimento” [DeF91]. Pertanto il tasso interno di rendimento, anche detto IRR (per

comodità di notazione nelle formule IRR è stato posto uguale a \bar{r}), si può ricavare da:

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{f_t}{(1 + \bar{r})^t} = 0 \quad (1.9)$$

Riprendendo ora la definizione di valore attuale:

$$V = \sum_{t=1}^T \frac{f_t}{(1 + \bar{r})^t} \quad (1.10)$$

e derivando l'equazione (1.10) rispetto a \bar{r} otteniamo:

$$\frac{dV}{d\bar{r}} = \sum_{t=1}^T \frac{-tf_t}{(1 + \bar{r})^{t+1}} = \frac{-f_1}{(1 + \bar{r})^2} + \frac{-2f_2}{(1 + \bar{r})^3} + \frac{-3f_3}{(1 + \bar{r})^4} + \cdots + \frac{-Tf_T}{(1 + \bar{r})^{T+1}} \quad (1.11)$$

Ora dividendo entrambi i membri per V :

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{d\bar{r}} = -\frac{1}{1 + \bar{r}} \sum_{t=1}^T \frac{t}{V} \frac{f_t}{(1 + \bar{r})^t} \quad (1.12)$$

è possibile ricavare la durata media dell'investimento (*Duration*) che è rappresentata dal termine definito dalla sommatoria. In particolare la *Duration* definisce il tempo medio in cui il valore corrente di un debito/credito matura interessa ad un tasso pari al suo tasso interno. È definita come la media aritmetica delle scadenze dei flussi di cassa a esso associati, dove ogni scadenza viene ponderata per il rapporto fra il valore attuale del flusso relativo a quella scadenza e il valore del titolo. La Duration così definita, detta di Macaulay, può essere scritta:

$$D = \sum_{t=1}^T \frac{t}{V} \frac{f_t}{(1 + \bar{r})^t} \quad (1.13)$$

dove:

- D è la Duration;
- V è il valore dello strumento;
- t è la scadenza, espressa in anni del singolo flusso di cassa;
- \bar{r} è il tasso interno di rendimento;
- f_t è il flusso di cassa t -esimo;
- T è la scadenza dell'ultimo flusso di cassa

Quindi la Duration consente di misurare la sensibilità del valore di uno strumento finanziario al variare del tasso di rendimento di mercato. Rappresenta pertanto un vero e proprio indicatore del grado di rischio dello strumento. Utilizzando la definizione di Duration, la relazione (1.12) può quindi essere scritta:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{D}{1+\bar{r}}d\bar{r} \quad (1.14)$$

- $\frac{D}{1+\bar{r}}$ è la *Modified Duration*;

La *Modified Duration* di uno strumento finanziario è utilizzata solitamente come misura della sensitivity del valore alla variazione dei tassi di mercato in quanto permette di approssimare la variazione percentuale di valore corrispondente a una variazione (infinitesima) del tasso interno di rendimento. Considerando variazioni finite del tasso interno di rendimento $\Delta\bar{r}$ si ottiene una stima approssimata della conseguente variazione percentuale del valore:

$$\Delta V = -\frac{D}{1+\bar{r}}\Delta\bar{r} \quad (1.15)$$

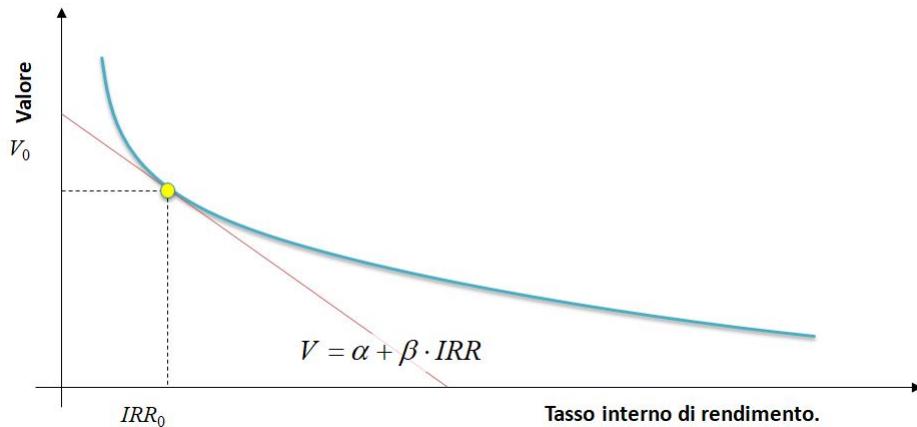


Figura 1.6: Rappresentazione grafica della curva ottenuta riportando sull'asse delle ascisse il tasso interno di rendimento mentre sull'asse delle ordinate il valore dello strumento. Dalla figura emerge una chiara interpretazione del significato di Modified Duration che è rappresentato dal coefficiente angolare della retta di regressione lineare.

Come si può vedere dal grafico in figura 1.6, la relazione tra i tassi di mercato e il valore dello strumento è descritta dalla retta di regressione lineare il cui coefficiente angolare, il *Beta*, è proprio la *Modified Duration*, che ha validità esclusivamente “locale”. Trattandosi di una relazione lineare, quanto maggiore sarà la durata dei titoli, tanto maggiore sarà la

variazione percentuale del loro valore di mercato in risposta a una variazione determinata dei tassi d'interesse. Quindi maggiore sarà la duration dei titoli e maggiore sarà il relativo rischio di tasso di interesse [Mis12]. È fondamentale sottolineare che la definizione di Duration non coincide con la definizione di vita residua di un titolo. Infatti la vita residua di un titolo è definita come la differenza espressa in anni tra la data di scadenza e la data corrente e non considera gli eventuali flussi di cassa (o cedole) intermedi compresi nel corso di vita del titolo [Got16]. Solo nel caso di titoli senza cedola si ha una coincidenza significativa tra la vita residua e la Duration [Mis12]. La Duration è espressa in unità temporali, in genere in anni. Nel caso di un portafoglio, contenente più titoli, la Duration non è altro che la media delle Duration dei singoli titoli che lo compongono ognuno ponderato per il proprio valore di mercato. Pertanto, conoscendo la Duration e il valore di mercato dei singoli asset di una banca è possibile calcolare la Duration del suo attivo. Allo stesso modo si può calcolare la Duration delle sue passività [Res08].

1.7 Tassi negativi

Storicamente i mercati finanziari hanno sempre registrato tassi d'interesse nominali con segno positivo. Anche le stesse scienze finanziarie sono state costruite sul *postulato di rendimento del danaro*, formulato originariamente da Bruno de Finetti, che sosteneva che “*Il costo dell'operazione consistente nel differire la scadenza di un debito è positivo*” [DeF35]. Invece è da qualche anno, che diverse banche centrali hanno applicato tassi d'interesse negativi. L'attuale situazione dei mercati finanziari pertanto richiede di superare la “*restrizione*” dei tassi nominali positivi modificando gli approcci adottati fino ad ora nelle scienze finanziarie. L'applicazione di tassi negativi comporta il fatto che il debitore possa ricevere un interesse sul denaro ricevuto in prestito e dal punto di vista economico ciò è inammissibile. Ciò vorrebbe dire che la posizione di tasso assunta dal debitore o dal creditore non è più univocamente determinata dalla tipologia del segno del contratto, ovvero se si ha a che fare con un contratto di finanziamento o di investimento ma è definita anche dal segno dei tassi di mercato. Tassi negativi sono stati osservati in Giappone nel secolo scorso, e a partire dall'agosto 2014, una condizione di negatività dei tassi di interesse è osservata anche nel mercato interbancario dell'euro [Alv17]. Per gestire, quindi, i tassi negativi è necessario adottare delle metodologie di calcolo diverse da quelle adottate nel caso di tassi positivi. Tra le soluzioni adottate dagli operatori si accenno due tipi di approcci, che però non verranno approfonditi in questo lavoro di tesi:

- approccio “shifted-lognormal”
- approccio “normal”

Capitolo 2

I sistemi di Asset Liability Management (ALM)

Una variazione dei tassi d'interesse produce variazioni di segno opposto sul valore degli strumenti finanziari. Pertanto, un aumento dei tassi comporta una riduzione del valore dei crediti di una banca e una contestuale riduzione del valore dei suoi debiti. Nel momento in cui le due variazioni si compensano, il patrimonio netto (o capitale economico), essendo calcolato come differenza tra attivo e passivo resta invariato. Invece nel momento in cui tali operazioni non si compensano, si verificano variazioni di segno diverso sul valore del patrimonio. In questo si sostanzia il rischio di tasso a cui sono esposte le banche. Sono stati definiti specifici strumenti per la gestione integrata dei crediti (assets) e dei debiti (liabilities) volti a consentire alle banche stime affidabili degli effetti che le oscillazioni della curva dei tassi potrebbero avere sul patrimonio netto. Tali strumenti definiscono il sistema di *Asset and Liability Management* o ALM di una banca. Va detto che la misurazione del rischio di tasso non punta esclusivamente al contenimento del rischio ma apre anche opportunità di incremento dei margini nel momento in cui un incremento del rischio è voluto da management della banca per trarre vantaggio dall'evoluzione attesa della curva dei rendimenti per scadenze. Nel processo decisionale, ALM non ha il compito di fissare tassi e condizioni o di assumere determinate posizioni sul mercato ma bensì di garantire che le unità operative si muovano nella giusta direzione [Ben91].

2.1 Tecniche di ALM

In particolare con ALM si intende l'insieme di regole, strumenti e procedure organizzative che hanno l'obiettivo di ottimizzare il profilo di rischio - rendimento di una banca, per quanto riguarda il rischio di tasso d'interesse. Rappresenta quindi un modello che permette di misurare per tutta l'operatività finanziaria delle banche il livello del rischio di tasso e di definire il potenziale di perdita o di profitti che deriva da oscillazioni dei tassi di mercato [Bor11]. È possibile applicare le politiche di Asset and Liability Management

sia in fase di pianificazione, definito come ALM strategico o ALMS, sia come supporto alla gestione operativa di rischio, definito come ALM operativo o ALMO [Ben91]. Nei sistemi di *Asset and Liability Management*, come efficace strumento per la misurazione e la gestione del rischio di tasso d'interesse, inteso come il potenziale di perdita dovuto a variazioni avverse dei soli tassi risk-free, si utilizzano le tecniche di gap management. In questa categoria rientrano la repricing - gap analysis e la duration - gap analysis.

Il *repricing gap* esprime la differenza (mismatching) tra i crediti e i debiti che subiscono una ridefinizione del tasso di interesse ad una specifica scadenza. Questa misura è indicativa della variazione del *margine di interesse*, vale a dire della differenza tra interessi incassati (interessi attivi) e interessi pagati (interessi passivi) in un dato arco di tempo. In formula il *gap* può essere espresso come:

$$G = AS - PS \quad (2.1)$$

- G è il Gap;
- AS sono le attività sensibili all'evoluzione dei tassi di interesse;
- PS sono le passività sensibili all'evoluzione dei tassi di interesse.

Nella repricing-gap analysis la variabile-oggettivo su cui viene calcolato l'effetto di possibili cambiamenti istantanei dei tassi di mercato è il margine di interesse un anno. In questo modello il gap, in particolare, lega le variazioni dei tassi di mercato alle variazioni del margine di interesse. In formula il *margine di interesse* è definito come:

$$\Delta MI = \Delta r(AS - PS) = \Delta rG \quad (2.2)$$

- ΔMI è la variazione del margine d'interesse;
- Δr è la variazione dei tassi;
- G è il Gap.

Questa tecnica, seppur ancora molto diffusa, tuttavia non risulta essere completamente corretta in quanto presenta svariati problemi e in particolare non considera gli effetti che le variazioni dei tassi di mercato producono sui valori di mercato di attività e passività di una banca.

La *duration gap analysis* punta invece a stimare l'effetto che una variazione dei tassi di interesse ha sul valore di mercato dei crediti e dei debiti del capitale economico [Res08]. Partendo dall'equazione di bilancio:

$$\text{Attivo totale} = \text{Passivo totale} + \text{Patrimonio Netto} \quad (2.3)$$

si ricava che le oscillazioni di valore del patrimonio netto sono determinate dallo squilibrio tra le variazioni di valore dell'attivo e del passivo. Pertanto l'immunizzazione verso le

oscillazioni dei tassi si ottiene calibrando la duration degli attivi e dei passivi, in modo tale che la variazione del valore dei crediti sia pari della variazione del valore dei debiti. Per stimare la variazione di valore del capitale economico questa tecnica utilizza il *DurationGap* considerato come la differenza tra le modified duration medie dell'attivo e quella del passivo, opportunamente calibrate in modo da tener conto delle differenze dei valori correnti. Per comodità di notazione il *DurationGap* è stato indicato con il simbolo *DG*:

$$DG = d_A - d_L \frac{V_L}{V_A} \quad (2.4)$$

- d_A è la duration media modificata di attività;
- d_L è la duration media modificata di passività;
- V_L è il valore attuale di passività finanziarie;
- V_A è il valore attuale di attività finanziarie.

Dall'analisi di questa relazione emerge che un *DurationGap* positivo indica la prevalenza della durata media dell'attivo rispetto al passivo e mette in luce la presenza di una relazione inversa tra la variazione del valore economico della banca ed i movimenti dei tassi di mercato. Infatti quando aumentano i tassi, il valore del capitale economico diminuisce. Si verifica il contrario nel caso in cui la duration del passivo prevale su quella dell'attivo. Nel momento in cui il *Duration Gap* fosse uguale a zero allora ciò porterebbe ad ottenere un uguaglianza tra le variazioni di valore delle due sezioni di bilancio rendendo il capitale economico immune dalle oscillazioni dei tassi di mercato. Uno dei principali limiti di questo approccio risiede nel fatto che il modello stima solo le variazioni di valore dovute a un movimento parallelo della struttura dei rendimenti, nell'ipotesi in cui tutti i nodi della curva risk-free subiscano uno shift identico in intensità e verso. Un esempio, dal punto di vista grafico, di curva che subisce uno spostamento parallelo rispetto alla posizione iniziale è riportato in figura 2.1.

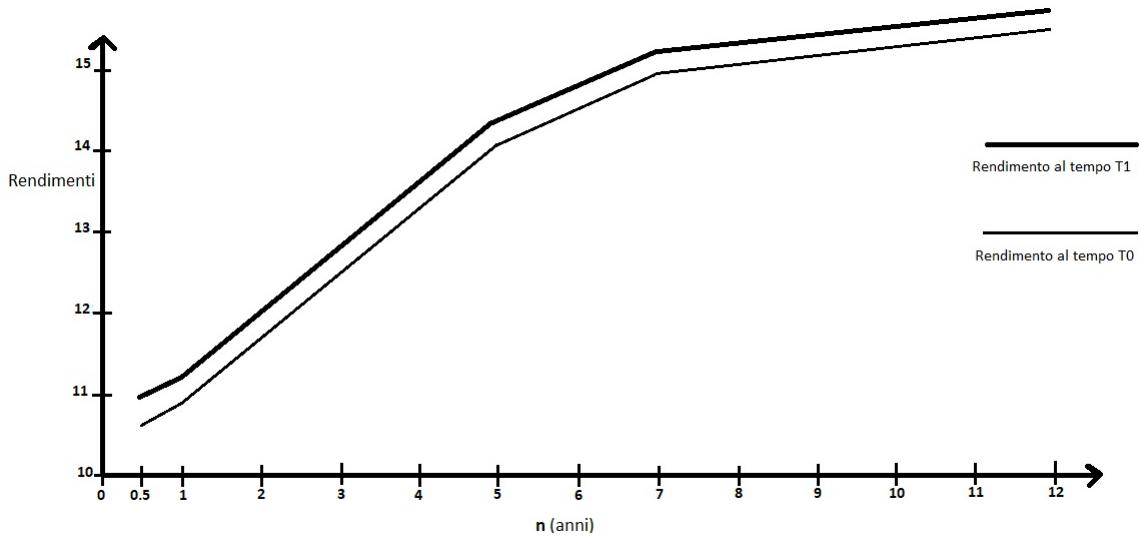


Figura 2.1: Esempio di due curve parallele

Una simile eventualità, per quanto non si possa escludere in teoria, nella pratica va considerata altamente improbabile mentre è molto più frequente che una variazione dei tassi sia associata a una variazione della pendenza della curva. In tal caso la capacità predittiva del modello si abbassa di molto. La tecnica del duration-gap se viene utilizzata in modo corretto rimane comunque uno strumento efficace per la misurazione e la gestione del rischio di tasso d'interesse [Let17]. Occorre, però, capire come utilizzarla in modo corretto e per ciò conviene dividere e analizzare il processo di stima del rischio di tasso in due macro-fasi:

- Cash flow mapping dei contratti di raccolta (debiti) e d'impiego (crediti) della banca;
- Ipotesi di shift della curva dei rendimenti per scadenza.

Questi due ambiti verranno trattati di seguito nei dettagli.

2.1.1 Cash Flow Mapping

Nel Cash Flow Mapping, per analizzare i flussi di cassa attesi dai rapporti di impiego e di raccolta è necessario definire preventivamente un certo numero di fasce temporali (time-buckets) molto ristrette per le scadenze brevi, fino ai 3 mesi, e via via più ampie per quelle di durata maggiore. In questo modo è possibile associare ogni flusso di cassa a una specifica scadenza e quindi a uno specifico tasso [Res08]. Si suppone che tutti i flussi di cassa compresi in una medesima fascia abbiano tempo di repricing (quindi duration) pari al valore centrale della fascia.

Prima di suddividere i flussi nelle varie fasce occorre verificare la tipologia di flusso facendo

una prima distinzione tra forme tecniche “a scadenza” e forme “a vista”. Le forme tecniche “a scadenza” possono essere trattate con un approccio di tipo contrattuale. In questo caso occorrerà fare l’ulteriore distinzione tra forme tecniche a tasso fisso e forme a tasso variabile. Per quelle a tasso fisso i tempi di repricing coincideranno con quelli di rimborso del capitale mentre per quelle a tasso variabile i tempi di repricing coincideranno con la prima data di ridefinizione del tasso di interesse. Per le forme “a vista” si può adottare sia l’approccio contrattuale, che però presenta dei limiti, sia quello comportamentale. Dal punto di vista contrattuale, le forme tecniche “a vista” avrebbero scadenza immediata, e quindi queste poste dovrebbero ri-prezzare istantaneamente assorbendo per intero le variazioni dei tassi di mercato, ma nella realtà costituiscono poste relativamente stabili dell’attivo e del passivo della banca. Ciò è dovuto essenzialmente a due motivi:

- L’adeguamento dei tassi contrattuali può avvenire con un certo ritardo (shift di tempo) rispetto alla data di variazione del parametro di mercato;
- È possibile osservare un certo grado di vischiosità nei tassi delle forme a vista dovuto alle politiche di pricing della banca o a ragioni strettamente tecniche (vincolo di non negatività sui tassi di raccolta).

I limiti dell’approccio contrattuale potrebbero essere superati adottando l’approccio comportamentale. In particolare si può fare ciò tramite:

1. il riconoscimento dei ritardi temporali (shift) nell’adeguamento dei tassi praticati alla clientela;
2. la misurazione del grado di reattività dei tassi contrattuali rispetto alle variazioni del relativo parametro di mercato (la relazione tra i tassi di mercato e tassi contrattuali è descritta dalla relativa retta di regressione il cui coefficiente angolare, il Beta, fornisce la misura in cui una variazione del parametro di mercato si traduce in variazioni dei tassi utilizzati. Ciò è riportato in Figura 1.6 del capitolo 1).

Se si considera solo il primo punto si va a calcolare un *Duration gap “shifted”* quindi sensibile ai soli ritardi nel repricing delle forme a vista (shifted gap). Considerando anche il secondo, includendo anche gli effetti del Beta, si otterrà il calcolo di uno “shifted-beta” gap. Il calcolo del *Duration gap*, nella forma shifted-beta, rappresenta la descrizione più realistica del mismatching di duration tra attivo e passivo. Ciò è dovuto al fatto che l’allocazione dei flussi di cassa sui vari buckets avviene sulla base di elementi oggettivi che possono essere ricavati dai contratti o osservati nelle serie storiche.

2.1.2 Ipotesi di Shift della curva

Solitamente, ipotizzando un dato spostamento istantaneo della curva dei rendimenti è possibile formulare la stima degli effetti economici del mismatching di duration tra attivo

e passivo. Ciò si fonda sulla logica della “what-if” analysis usata per effettuare varie forme di stress test. I vari tipi di shift possono essere:

- *Shift parallelo al rialzo;*
- *Shift parallelo al ribasso;*
- *Shift torsionale.*

Nel caso di *shift parallelo al rialzo*, la curva corrente dei tassi risk-free è immaginata scorrere verso l’alto, rispetto a una posizione di partenza. Ciò avviene solo nel caso in cui vengono considerati piccoli e identici shift di tutti i nodi della curva dei rendimenti. L’equazione che descrive la variazione di valore del capitale economico a uno specifico shift parallelo della curva dei rendimenti è la seguente:

$$\Delta VM_B = -DG\Delta r V_A \quad (2.5)$$

- ΔVM_B è la variazione di valore del capitale economico della banca;
- Δr è il piccolo shift a cui sono soggetti tutti i nodi della curva;
- DG è il Duration Gap tra le attività e le passività finanziarie della banca;
- V_A è il valore attuale di attività finanziarie.

Questo rappresenta il caso più semplice ma nello stesso tempo viene considerato come un’ipotesi irrealistica. Pertanto il risultato non viene utilizzato per i fini previsionali ma solo come puro esercizio teorico. In genere si considera lo shift parallelo al rialzo in quanto l’ipotesi di *shift parallelo al ribasso* troverebbe un limite nell’inammissibilità di tassi negativi.

Negli anni per ottenere un’approssimazione quanto più possibile realistica della dinamica dei tassi d’interesse si è pensato di abbandonare l’idea di shift paralleli della curva dei rendimenti ed esplorare la possibilità di modellare per ogni nodo della curva uno specifico shift caratterizzato da una certa intensità e segno. In questo modo si apre la possibilità di esplorare una grande varietà di scenari inclusa l’ipotesi di shift torsionali della curva. La relazione precedente, usata nel caso di shift paralleli, quindi non è più valida ed è necessario utilizzare la seguente relazione:

$$\Delta VM_B = - \sum_{i=1}^n RG\Delta r_i MD_i \quad (2.6)$$

dove:

- n è il numero di time bucket;

- RG_i è lo squilibrio tra i volumi di attività e passività (per comodità di notazione *Il Repricing-Gap* è stato indicato con RG);
- Δr_i è lo shift del nodo di tasso di interesse riferito all’i-esimo time bucket;
- MD_i è la duration modificata relativa all’i-esimo time bucket.

L’ipotesi di shift torsionali è spesso dettata dalle scelte dell’analista che prova a stimare scenari estremi su cui effettuare lo stress test [Let17]. Gli scenari possono essere estratti dal passato (backward) o essere invece costruiti sulla base dei tassi prospettici impliciti nella curva corrente (forward).

In ogni caso, l’ipotesi di shift della curva viene per lo più considerato come esercizio teorico, pur in presenza di un duration - gap invariato, in quanto conduce a stime di variazione del capitale economico altalenanti nel tempo e non facilmente definibili. Pertanto la ricerca è volta ad identificare nuove soluzioni ancora più efficaci per la misurazione e la gestione del rischio di tasso d’interesse.

2.2 Limiti dell’approccio deterministico

Molto spesso dietro all’apparente semplicità di alcune formule, come per esempio può essere la formula di *attualizzazione di un flusso di cassa*, si nascondono numerosi problemi legati alla scelta dei giusti valori dei parametri che possono essere utilizzati. Ad esempio l’applicazione delle tecniche di *discounted cash flow analysis*, secondo uno schema prettamente deterministico, comporta che lo scenario ipotizzato inizialmente al momento della formulazione si sviluppi nel corso del tempo in maniera identica a quanto era stato previsto inizialmente, trascurando tutti gli eventi che potrebbero verificarsi nel corso del tempo. Un modello deterministico permette di effettuare una previsione fornendo come output un valore numerico senza fornire nessuna misura della distribuzione di probabilità di quel risultato. I limiti dell’approccio deterministico si possono riscontrare proprio nel fatto che l’output del modello rappresenta un unico valore puntuale. Questo per certi versi può rappresentare un pregio in quanto in questo modo si ottiene un unico valore piuttosto che una serie di valori tra i quali non si saprebbe quale scegliere ma per altri versi rappresenta un limite. Infatti fare delle previsioni basandosi su una specifica ipotesi di scenario molto spesso diventa poco utile e attendibile. Spesso, nella prassi operativa questo è avvertito e a volte le valutazioni effettuate con un modello deterministico vengono sottoposte ad analisi di sensitivity in cui vengono rilevati puntualmente i diversi risultati del modello al variare di una delle variabili più importanti e incerte, oppure vengono sottoposte ad analisi di scenario in cui vengono fatte variare più variabili contemporaneamente. Queste tecniche però non permettono di ottenere un quadro completo su alcuni problemi complessi. Ad esempio le analisi di sensitivity permettono di valutare solo gli effetti sul risultato finale di variazioni nel valore associate a una sola variabile non considerando quindi gli effetti che si potrebbero ottenere dalle variazioni congiunte di più variabili contemporaneamente. Le

analisi di scenario permettono di superare questo problema ma sono limitate dal numero di possibili variazioni congiunte che si possono considerare. Inoltre questo tipo di analisi non rappresentano una soluzione adeguata per alcune tipologie di problematiche. In questo tipo di approccio non si tiene conto dell'incertezza associata alle variabili di input e proprio l'incertezza determina l'esigenza di ricorrere a modellizzazioni di tipo stocastico. Pertanto un approccio deterministico fornisce un quadro molto ristretto di informazioni che dovranno poi essere utilizzate per prendere le decisioni finali e inoltre, in molti casi, non fornisce una soluzione coerente e adeguata. A causa dei limiti di questo approccio, in molti contesti si ricorre all'utilizzo dell'approccio stocastico che permette di affrontare in maniera più adeguata la complessità di alcune situazioni [Mon08].

Capitolo 3

Approccio di simulazione stocastica

Già agli inizi del XVIII secolo, a seguito della situazione economica presente, iniziò ad essere evidente l'importanza dell'utilizzo dell' approccio stocastico nei processi economici e in particolare nella gestione del rischio nei mercati finanziari, in quanto l'applicazione delle vecchie regole non andava più bene. Per le istituzioni finanziarie, comprendere la dinamica dei tassi di interesse e dei prezzi delle azioni diventava di notevole importanza. Un'impronta fondamentale fu lasciata, nel 1900, da *Louis Bachelier* con la sua tesi di dottorato dal titolo *Théorie de la Spéculation* [Bac00]. Il suo tutor fu il famoso matematico e fisico *Henri Poincaré* [Ver12]. Inizialmente questo lavoro di tesi fu totalmente ignorato, anche dallo stesso Poincaré che dimenticò, nel momento in cui iniziò a studiare il *moto Browniano*, che in tale lavoro erano già presenti le basi per la formulazione matematica di tale moto. La tesi, comunque, fu, e lo è tutt'ora, molto importante perchè contiene molti risultati della teoria dei processi stocastici, che in seguito furono formalizzati dal punto di vista matematico. Il *moto Browniano*, che può essere applicato come modello in vari campi, è il risultato di molti eventi imprevedibili e molto spesso non osservabili singolarmente ma che se presi insieme danno luogo ad un evento osservabile. I singoli eventi, anche se non possono essere trattati singolarmente nel dettaglio, possiedono delle proprietà statistiche che è possibile conoscere e che alla fine sono quelle che determinano il comportamento macroscopico osservato. Un altro problema strettamente correlato al *moto Browniano* è il *Random Walk* [Wol13].

Nel 1973, Fischer Black e Myron Scholes, applicarono un modello da *moto Browniano* alla fluttuazione dei prezzi dei titoli azionari, creando un modello di dinamica dei prezzi delle azioni. Nello stesso anno anche Robert Merton in maniera indipendente stava lavorando in tale campo. Questo modello detto **modello di Black-Merton-Scholes** ottenne diffusione immediata negli ambienti della finanza [Min18].

In ambito scientifico, nel corso degli anni, per comprendere meglio alcune tipologie di problemi complessi si è fatto ricorso all'utilizzo della simulazione. La *simulazione* permette di comprendere il comportamento di un sistema attraverso la sua riproduzione in un contesto controllabile [Bol19]. Un utilizzo particolare della simulazione si ha nella tecnica

Monte Carlo. Oggi la tecnica di simulazione Monte Carlo è molto utilizzata come tecnica di analisi del rischio nel mercato finanziario.

3.1 Processo stocastico

Molti fenomeni naturali e sociali sono caratterizzati nella loro struttura da elementi di aleatorietà e pertanto possono essere trattati come dei processi stocastici ovvero come fenomeni casuali che evolvono nel tempo secondo una particolare legge probabilistica. In generale qualsiasi variabile che evolve nel tempo in maniera casuale si dice che segua un processo stocastico [Mon08].

Matematicamente la famiglia di variabili aleatorie, dipendenti dal tempo, che costituiscono un processo stocastico sono definite su uno *spazio campione* e assumono valori in un insieme detto *spazio di probabilità*. Un processo stocastico è definito come una famiglia di variabili aleatorie $(X_t)_{t \in T}$. Le variabili possono essere distinte in *variabili continue* o *variabili discrete*. In un processo con variabili continue, la variabile può assumere qualsiasi valore definito entro un certo range, mentre in un processo a variabili discrete, la variabile può assumere solo determinati valori. Un processo stocastico può essere classificato *in processo stocastico discreto nel tempo* o *in processo stocastico continuo nel tempo*. Un processo stocastico discreto nel tempo si ha quando la variabile cambia solo in determinati intervalli fissati nel tempo, ciò significa che l'insieme T degli indici è un insieme discreto come ad esempio l'insieme dei numeri naturali N . Mentre un processo stocastico a tempo continuo si ha quando la variabile può cambiare in qualsiasi momento e quindi l'insieme T degli indici è un intervallo continuo [Hul15].

I processi stocastici, vengono inoltre distinti in processi *markoviani* e *non markoviani* a seconda che i futuri stati del processo dipendano unicamente dallo stato di partenza (markoviano) o dipendano anche dagli stati precedenti (non markoviano) [Mon08].

Per descrivere un processo stocastico, in modo completo, è necessario definire la *funzione di ripartizione di una distribuzione congiunta*. Fissati n istanti di tempo arbitrari, ovvero t_1, \dots, t_n , di n variabili aleatorie X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , la *funzione di ripartizione di una distribuzione congiunta*, indicata con F_n , è definita come:

$$F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = P\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n\} \quad (3.1)$$

che è la funzione che fa corrispondere, date n variabili aleatorie X_{t_1}, \dots, X_{t_n} , ai valori di $(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ le probabilità cumulate $P\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n\}$ che a volte sono riportate come densità congiunte $p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$.

La densità congiunta $p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ deve rispettare alcuni vincoli [Pet04]:

- *positività*: $p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \geq 0$
- *simmetria*: $p_n(\dots; x_j, t_j; \dots; x_k, t_k; \dots) = p_n(\dots; x_k, t_k; \dots; x_j, t_j; \dots)$

- *completezza*: $\int_{\mathfrak{R}} p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_n = p_n(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1})$
A causa della proprietà di simmetria l'integrazione può essere fatta per qualsiasi x_k con $k = 1, \dots, n$.
- *normalizzazione*: $\int_{\mathfrak{R}} p_1(x_1, t_1) dx_1 = 1$

Molto spesso diventa difficile definire tutte le possibili densità congiunte di un processo stocastico e per descriverlo in maniera sufficiente basta definire tre funzioni che sono il valore atteso, la varianza e la matrice delle covarianze. I momenti del processo ad n istanti di tempo arbitrari sono definiti come:

$$\langle X(t_1) \cdot X(t_n) \rangle = \int_{\mathfrak{R}_n} x_1 \dots x_n p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.2)$$

La matrice delle covarianze, dipendenti dal tempo, per due processi stocastici è definita come:

$$Cov[X_j(t_1), X_k(t_2)] = \sigma_{jk}^2(t_1, t_2) = \langle X_j(t_1) X_k(t_2) \rangle - \langle X_j(t_1) \rangle \langle X_k(t_2) \rangle \quad (3.3)$$

Gli elementi diagonali di questa matrice sono chiamati funzioni di autocorrelazione e quelli fuori dalla diagonale sono le funzioni di cross-correlazione [Wol13].

Molto importanti sono i *processi stazionari* che sono una particolare categoria dei processi stocastici. Sono definiti stazionari nel momento in cui media e varianza sono costanti nel tempo, cioè quando sono indipendenti dall'indice t . Nella realtà però molti processi non possono essere considerati stazionari in quanto sono dei processi di tipo evolutivo che presentano dei trend in media, in varianza o in entrambi [Mon08]. Dal punto di vista matematico un processo stazionario è definito come:

$$p_n(x_1, t_1 + \Delta t; \dots; x_n, t_n + \Delta t) = p_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) \quad (3.4)$$

dove Δt è un arbitrario ma fissato intervallo di tempo [Pet04].

La *probabilità condizionata*, considerando ad esempio due processi stocastici, è definita come:

$$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1) \quad (3.5)$$

dove le $p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1)$ sono dette *funzioni di transizione*.

A causa della proprietà di completezza di p_2 :

$$\int_{\mathfrak{R}} p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 = 1 \quad (3.6)$$

Ciò significa che la transizione da x_1 a x_2 si verifica con certezza.

3.1.1 Processo stocastico di Markov

Il concetto alla base dei *processi di Markov* fu introdotto per la prima volta dal matematico russo **A.A. Markov** in una serie di articoli, di cui il primo pubblicato nel 1906, che si occupavano dello studio di sequenze di variabili aleatorie debolmente indipendenti.

Un processo di Markov è un tipo di processo stocastico in cui è sufficiente conoscere solo il valore corrente di una variabile per poter fare delle previsioni per il futuro. Pertanto gli stati precedenti della variabile e il modo in cui il presente è emerso dal passato sono irrilevanti.

Solitamente si ritiene che i prezzi delle azioni seguano un processo markoviano. Dato che le previsioni per il futuro sono incerte devono essere espresse in termini di distribuzione di probabilità e in questo caso, in base a quanto è stato detto, la distribuzione di probabilità del prezzo nel futuro non dipenderà dal tipo di percorso seguito dal prezzo nel passato.

Si definisce $X(t)$ un processo di Markov quando scelti n istanti di tempo $t_1 \dots t_n$ si ha che:

$$p_{1|n-1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = p_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (3.7)$$

Per conoscere il futuro è sufficiente conoscere il presente che riassume tutte le informazioni del passato. Pertanto è un processo senza memoria. Per descrivere completamente un processo è sufficiente ricavare la densità congiunta:

$$\begin{aligned} p_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) &= p_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \dots p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p_1(x_1, t_1) \\ &= \prod_{l=2}^n p_{1|1}(x_l, t_l | x_{l-1}, t_{l-1}) p_1(x_1, t_1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Un processo stocastico $X(t)$ è detto ad incrementi indipendenti nel momento in cui tutti gli incrementi, del tipo $X(t_4) - X(t_3)$ e $X(t_2) - X(t_1)$, sono indipendenti se presi su intervalli temporali non sovrapposti ovvero $t_4 > t_3 \geq t_2 > t_1$. Si può dimostrare che ogni processo ad incrementi indipendenti è un processo di Markov.

Considerando tre istanti di tempo, la densità congiunta è definita come:

$$p_3(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) = p_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1) \quad (3.9)$$

Integrando su x_2 e usando la proprietà di completezza valida per p_n si ha che:

$$p_2(x_1, t_1; x_3, t_3) = p_1(x_1, t_1) \int p_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \quad (3.10)$$

In base alla proprietà espressa nell'equazione (3.5) si ottiene l'equazione di *Chapman-Kolmogorov*:

$$p_{1|1}(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int p_{1|1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_{1|1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \quad (3.11)$$

Questa è un'importante equazione e costituisce il punto di partenza per ottenere le equazioni di moto di un processo di Markov.

Due funzioni positive e normalizzate $p_1(x_1, t_1)$ e $p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)$ che soddisfano l'equazione di Chapman-Kolmogorov e la relazione $p_1(x_2, t_2) = \int p_{1|1}(x_2, t_2|x_1, t_1)p_1(x_1, t_1)dx_1$ definiscono in maniera completa e univoca un processo di Markov [Wol13].

3.1.2 Random Walk

Il *Random Walk* o anche detto *cammino casuale*, può essere considerato come la formalizzazione matematica del concetto di traiettoria definita come l'insieme di passi casuali. Rappresenta l'esempio più semplice nello studio dei processi stocastici. Il problema del *Random Walk* fu posto per la prima volta da *Karl Pearson*, nel 1905, in una lettera a *Nature*. La soluzione a tale problema fu fornita nello stesso volume di *Nature* da *Lord Rayleigh*, il quale aveva affrontato 25 anni prima il problema studiando la sovrapposizione di onde sonore di uguale frequenza e ampiezza ma con fasi casuali [Pea05].

Il *Random Walk* essendo un percorso dove ogni passo ha una direzione casuale e possibilmente anche una dimensione casuale, viene utilizzato come modello per studiare fenomeni variabili quali ad esempio il fenomeno della diffusione, l'andamento dei mercati finanziari, ecc.. [Fel68].

I Random Walk (o RW) possono essere classificati in RW a tempo continuo o RW a tempo discreto e possono essere studiati su una linea, su un piano o in più dimensioni. Il moto Browniano rappresenta un esempio di cammino casuale continuo nel tempo e nello spazio mentre il numero di teste osservate in una serie di lanci di moneta indipendenti rappresenta un esempio di cammino casuale discreto. Nel caso in cui il RW è definito su una linea, il cammino può essere definito come una serie di passi rivolti a destra o a sinistra in modo casuale.

Mentre se RW è definito in due dimensioni, allora il cammino avviene in un piano e le componenti Δx e Δy del passo (oppure $\Delta\theta$ e Δr , ovvero angolo e lunghezza del passo) sono casuali e possono essere estratte da opportune distribuzioni statistiche [Ber12]. Un esempio di RW in due dimensioni è riportato in figura 3.1.

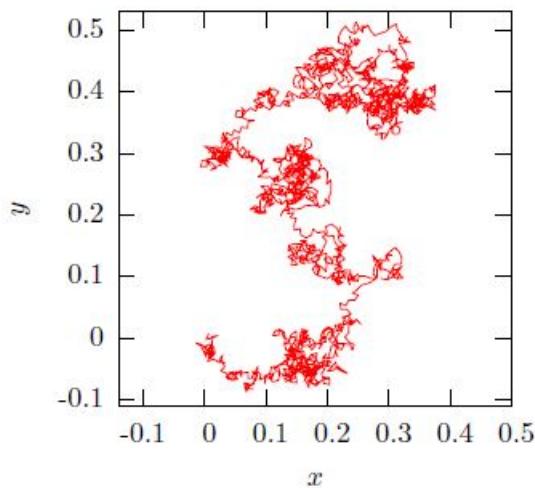


Figura 3.1: Esempio di Random Walk in due dimensioni.

Dal punto di vista matematico un semplice Random Walk può essere definito come:

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.12)$$

cioè può essere definito come un processo dove il valore al tempo t di una variabile sarà uguale al valore definito al tempo $t - 1$ più un termine definito come rumore bianco (che significa che ϵ_t è identicamente distribuito con media pari a zero e varianza finita).

Il RW può essere definito un processo non stazionario. I RW vengono classificati in base alle caratteristiche che possiedono e ne esistono vari tipi.

Molto importante è il **RW with drift** (o **RW con deriva**), che presenta una direzione di movimento preferenziale. Un esempio di RW with drift è riportato in figura 3.2 dove è rappresentato un possibile percorso, costituito da 500 step, compiuto da un solo camminatore. Si può notare che il camminatore tende ad andare verso il basso (verso sinistra) sull'asse delle ordinate in quanto è stata fissata una probabilità di andare a sinistra pari a $p = 0.52$, quindi maggiore della probabilità di andare a destra. Il **RW with drift** non ha memoria dei passi precedenti.

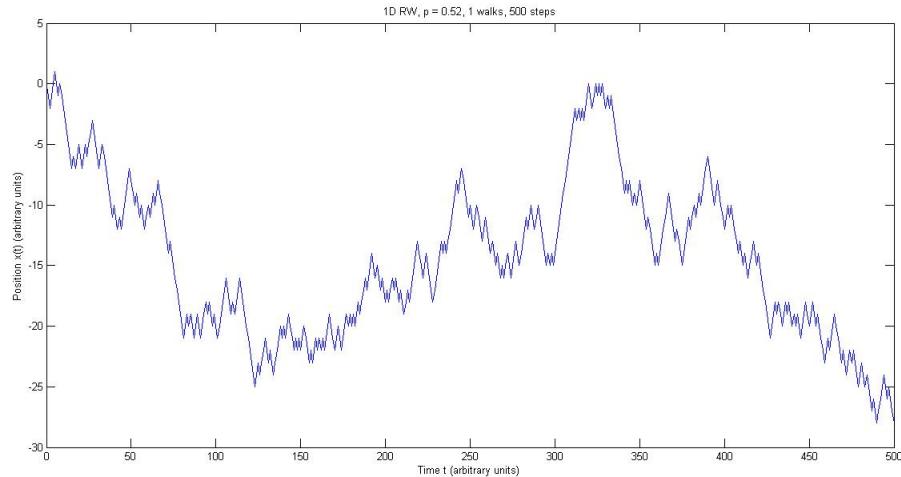


Figura 3.2: Esempio di Random Walk with Drift. Sull'asse delle ascisse è riportato il tempo mentre sull'asse delle ordinate è riportata la posizione del camminatore.

In questo caso il RW è formato da una parte deterministica e da una parte casuale e può essere definito come segue:

$$y_t = y_{t-1} + a + \epsilon_t \quad (3.13)$$

dove a viene definito come termine di *drift*.

I *RW with drift* vengono anche utilizzati per studiare la dinamica della variabile prezzi come ad esempio il prezzo delle azioni. In figura è riportato un esempio dell'andamento dell'indice azionario Dow Jones nel periodo compreso tra il 1789 e il 2016.

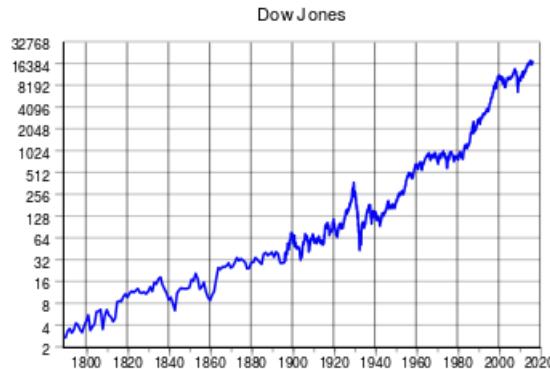


Figura 3.3: Esempio di Random Walk with Drift. Sull’asse delle ascisse sono riportati gli anni mentre sull’asse delle ordinate sono riportati i valori dell’indice azionario.

Dal punto di vista matematico, per descrivere quindi la variazione di un prezzo, si definisce il seguente processo:

$$S_t = S_{t-1} + \mu + \epsilon_t \quad (3.14)$$

dove μ indica il termine di *drift* che esprime la variazione di prezzo attesa. Questo elemento implica che la media degli incrementi sia diversa da zero ed è legato al concetto di non stazionarietà. Il termine ϵ_t implica che gli incrementi siano indipendenti e distribuiti con media zero e varianza pari a 1. Ciò significa che gli incrementi sono non correlati.

3.2 Moto Browniano (Wiener process)

Il **moto Browniano** rappresenta l’esempio per eccellenza di un fenomeno assolutamente casuale. Nel 1827 il botanico scozzese *Robert Brown* notò, mentre studiava al microscopio le particelle di polline immerse in acqua, il moto continuo e irregolare di tali particelle [Bof12]. Dopo circa 80 anni *Einstein* [Ein05] e *Smoluchowski* fornirono una spiegazione fisica di tale fenomeno. I lavori di Einstein e Smoluchowski rappresentano la nascita della teoria dei processi stocastici [Bof12]. Il moto Browniano è dovuto al moto incessante delle molecole di fluido che colpiscono continuamente le particelle osservate facendo si che queste si muovano in modo irregolare. *Smoluchowski*, nel 1906, formulò un approccio di tipo probabilistico per trattare il problema della diffusione basato su quello che ora si chiama Random Walk. Si deve al matematico *Norbert Wiener* [Wie64], nel 1923, una prima formulazione matematica del moto browniano, noto anche come **processo di Wiener**. E’ interessante notare come anche la finanza possa essere considerata come un vorticoso moto browniano. Infatti la teoria di Wiener fu applicata anche in finanza in quanto si notò una certa somiglianza tra il moto di una particella e l’andamento dei titoli di borsa [Mon08]. Utilizzando il modello del moto Browniano per interpretare la dinamica

dei prezzi delle azioni, si paragonò il mercato al fluido, i singoli agenti che comprano e vendono alle molecole del fluido e il prezzo dell'azione alla particella browniana. Infatti si partì dall'idea che l'andamento del prezzo di un'azione è dovuto alle attività degli agenti che comprano e vendono e questo fa sì che il prezzo del titolo si muova in modo irregolare a causa della mancata compensazione tra la domanda e l'offerta. Il processo di Wiener è un particolare tipo di processo stocastico Markoviano che descrive l'evoluzione di una variabile normalmente distribuita con media nulla e varianza pari ad 1. In un processo stocastico la variazione di media per unità di tempo è definita come *drift rate* mentre la varianza per unità di tempo è definita come *variance rate*. Considerare un *drift rate* pari a zero vuol dire che il valore atteso della variabile in un qualsiasi istante di tempo futuro è uguale al suo valore corrente. Mentre considerare un *variance rate* pari ad 1 vuol dire che la varianza della variabile, in un intervallo di tempo T è uguale a T . Il cambiamento subito dalla variabile è assolutamente casuale. Una variabile z che segue un processo di Wiener, deve soddisfare queste due proprietà:

1. La variazione Δz in un piccolo intervallo di tempo Δt è:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.15)$$

dove $\varepsilon \sim \phi(0, 1)$.

2. I valori di Δz per due qualsiasi intervalli di tempo, Δt , differenti sono indipendenti. Per comodità di notazione la *media* verrà indicata con μ , la *deviazione standard* con σ e la *varianza* con σ^2 .

Quest'ultima proprietà si ricava dal momento che Δz segue una distribuzione normale con $\mu(\Delta z) = 0$, $\sigma(\Delta z) = \sqrt{\Delta t}$ e $\sigma^2(\Delta z) = \Delta t$.

Quest'ultima proprietà implica che z segua un processo di Markov.

Si supponga che z cambi di valore durante un periodo di tempo, chiamato T , abbastanza lungo. Pertanto $\Delta z = z(T) - z(0)$. La variazione Δz può essere scritta come la somma dei cambiamenti in z negli N piccoli intervalli di tempo di lunghezza Δt , ovvero:

$$N = \frac{T}{\Delta t} \quad (3.16)$$

$$\Delta z = z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (3.17)$$

dove ε_i con $(i = 1, 2, \dots, N) \sim \phi(0, 1)$. Secondo la seconda proprietà del processo di Wiener si ha che gli ε_i sono indipendenti l'uno con l'altro. Segue che $([z(T) - z(0)])$ è distribuita normalmente con $\mu([z(T) - z(0)]) = 0$, $\sigma([z(T) - z(0)]) = \sqrt{T}$ e $\sigma^2([z(T) - z(0)]) = N\Delta t = T$. Generalmente nel caso in cui i piccoli cambiamenti tendano verso lo zero si utilizza la seguente notazione $dx = adt$ che sta ad indicare appunto che $\Delta x = a\Delta t$ nel limite in cui $\Delta t \rightarrow 0$. Indicando, quindi, con dz un processo di Wiener si intende che questo ha le stesse proprietà definite sopra per Δz nel limite $\Delta t \rightarrow 0$ [Hul15].

3.2.1 Processo di Wiener “generalizzato”

I processi di Wiener “generalizzati” sono quei processi che comprendono un fattore di deriva (drift) anche diverso da zero e un fattore di varianza (volatility) anche diverso da uno. In genere per descrivere la dinamica dei prezzi si utilizza un processo di Wiener “generalizzato”.

Un processo di questo tipo per una qualsiasi variabile x espresso in termini di dz può essere definito con la seguente relazione:

$$dx = adt + bdz \quad (3.18)$$

dove a e b sono delle costanti. Per comprendere l’equazione (3.18) è utile spiegare i vari termini che la compongono separatamente. Il termine adt vuol dire che x ha un valore atteso di *drift rate* pari ad a per unità di tempo. Se non si dovesse considerare il termine bdz l’equazione (3.18) diventerebbe: $\frac{dx}{dt} = a$. Integrando rispetto al tempo si ha che:

$$x = x_0 + at \quad (3.19)$$

dove x_0 è il valore di x al tempo 0. Se il periodo di tempo è pari a T , la variabile x aumenterà della quantità aT . Ritornando ad analizzare l’equazione (3.18), si può considerare il termine bdz come un rumore o variabilità al percorso seguito da x . La quantità di rumore è b volte un processo di Wiener. Quindi x avrà un *variance rate* per unità di tempo pari a b^2 . Considerando, invece, un piccolo intervallo di tempo Δt , la variazione Δx del valore di x è dato dalla seguente relazione dove si è tenuto conto dell’equazione (3.15) e dell’equazione (3.18):

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.20)$$

dove ε segue una distribuzione standard normale $\phi(0, 1)$. Allora anche Δx segue una distribuzione normale con $\mu(\Delta x) = a\Delta t$, $\sigma(\Delta x) = b\sqrt{\Delta t}$ e $\sigma^2(\Delta x) = b^2\Delta t$.

Valgono le stesse considerazioni nel momento in cui si considera per x un qualsiasi intervallo di tempo T . Si avrà quindi che $\mu(x) = aT$, $\sigma(x) = b\sqrt{T}$ e infine $\sigma^2(x) = b^2T$.

Si può concludere che un processo di Wiener generalizzato espresso nell’equazione (3.18) ha un valore aspettato di *drift rate* pari ad a e un *variance rate* pari ad b^2 .

3.2.2 Itô process

Itô process è definito come un processo stocastico. Precisamente è un un processo di Wiener generalizzato nel quale i parametri a e b sono funzioni della variabile x e del tempo t . Un processo di Itô può essere definito come:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (3.21)$$

In un Itô process sia il *drift rate* e sia il *variance rate* sono soggetti a variazioni nel tempo. Nel momento in cui si considerano piccoli intervalli di tempo tra t e $t + \Delta t$, la variabile

cambia da x a $x + \Delta x$. Quindi:

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.22)$$

In questa equazione si include una piccola approssimazione, ovvero si assume che *drift* e *variance rates* di x rimangano costanti, uguali al loro valore al tempo t nell'intervallo di tempo tra t e $t + \Delta t$. Itô process, definito nell'equazione (3.21), può essere considerato come un processo di Markov in quanto la variazione in x al tempo t non dipende dalla sua storia. La variazione di x in un breve intervallo di tempo può essere considerata, in buona approssimazione, avere una distribuzione normale. Questo non è detto che avvenga nel caso in cui il periodo di tempo sia più lungo [Hul15].

3.3 Geometric Brownian motion

La teoria di Wiener, come già detto, è stata applicata in vari campi d'indagine compreso il campo economico e finanziario, dove in particolare è stata applicata nella descrizione dell'andamento dei prezzi degli investimenti scambiati nei mercati finanziari. In particolare per descrivere l'andamento dei prezzi, si assume un atteso e costante *drift rate* e un costante valore di *variance rate*. Per correttezza dire un atteso e costante *drift rate* è inappropriato e pertanto ciò deve essere sostituito dall'affermazione di un rendimento atteso costante. Infatti indicando con S il prezzo al tempo t allora il valore atteso di *drift rate* in S deve essere μS per qualche parametro costante μ . Questo significa che in un piccolo intervallo di tempo, Δt , la variazione attesa in S è $\mu S \Delta t$. Il parametro μ è definito come il tasso di rendimento atteso sul prezzo.

Se il coefficiente di dz fosse pari a 0, allora non ci sarebbe incertezza e pertanto si avrebbe:

$$\Delta S = \mu S \Delta t \quad (3.23)$$

Nel caso in cui si considera $\Delta t \rightarrow 0$, allora:

$$dS = \mu S dt \quad (3.24)$$

Integrando tra il tempo 0 e il tempo T si ha:

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \quad (3.25)$$

dove con S_0 e S_T si è indicato rispettivamente il prezzo al tempo 0 e al tempo T . L'equazione (3.25) dimostra come il prezzo, in assenza di incertezza, aumenti continuamente ad un tasso dato da μ per unità di tempo.

Nella realtà, occorre considerare l'incertezza. Si assume che la variazione del rendimento in un piccolo intervallo di tempo, Δt , sia la stessa indipendentemente dal prezzo dell'investimento nel mercato finanziario. Questo porta a considerare che la deviazione standard

della variazione in un piccolo intervallo di tempo debba essere proporzionale al prezzo dell'investimento. Si giunge, pertanto, alla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.26)$$

che può anche essere scritta:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (3.27)$$

L'equazione (3.27) rappresenta il modello più utilizzato, nella realtà, per descrivere il comportamento del prezzo di un bene ed è la formulazione sintetica del *moto Browniano geometrico*. Il parametro moltiplicativo μ (drift) rappresenta l'atteso tasso di rendimento del prezzo di un investimento. La variabile σ esprime la volatilità del prezzo dell'investimento. La variabile σ^2 è definita come la *variance rate*. In un mondo neutrale dal rischio, μ è uguale al tasso risk-free.

Fino ad ora si è assunto che i prezzi degli investimenti seguano un processo continuo nel tempo e a variabili continue. In realtà ciò non è completamente corretto in quanto i prezzi sono limitati a valori discreti e i cambiamenti si possono osservare solo quando è aperto il mercato per la negoziazione. Pertanto è possibile definire la versione del modello discreto nel tempo come:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.28)$$

oppure

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \varepsilon S \sqrt{\Delta t} \quad (3.29)$$

La variazione ΔS rappresenta il cambiamento del prezzo S in un piccolo intervallo di tempo Δt ed ε segue una distribuzione normale standard. Il parametro μ rappresenta il tasso di rendimento atteso per unità di tempo. Analizzando l'equazione (3.28) che rappresenta l'approssimazione discreta del rendimento di un prezzo in un piccolo intervallo di tempo, Δt , si può vedere che il lato destro dell'equazione è composto da due termini di cui primo, ovvero $\mu \Delta t$, è il termine deterministico che rappresenta il valore atteso del rendimento mentre il secondo, $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, è il termine stocastico del rendimento. L'inserimento di un termine stocastico definito da un processo di Wiener permette la costruzione di un processo stocastico con valore atteso $\mu \Delta t$ e varianza $\sigma^2 \Delta t$. L'equazione (3.28) dimostra che $\frac{\Delta S}{S}$ segue approssimativamente una distribuzione normale con media $\mu \Delta t$ e deviazione standard $\sigma \sqrt{\Delta t}$. Pertanto si può scrivere:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (3.30)$$

3.3.1 Parametri

In termini descrittivi il moto Browniano geometrico è un processo che può essere definito come la somma di due termini di cui uno di aspettativa o trend, che ha la proprietà di

far si che il valore atteso del prezzo sia identico a quello che si avrebbe in assenza di elementi aleatori e l'altro termine di incertezza ovvero di deviazione dal trend [Mon08]. Il parametro μ è il rendimento atteso (annualizzato) guadagnato da un investitore in un piccolo intervallo di tempo. Molti investitori puntano ad ottenere guadagni più elevati e nello stesso tempo ciò li porta a correre rischi più elevati. Pertanto il valore di μ dovrebbe dipendere dal rischio di rendimento del prezzo. Inoltre dovrebbe anche dipendere dal livello dei tassi d'interesse nei mercati. Infatti maggiore è il livello dei tassi di interesse e maggiore sarà il rendimento richiesto su un determinato titolo [Hul15].

3.3.2 Processi correlati

Fino ad ora sono stati analizzati processi stocastici considerando una sola variabile. È possibile trovarsi nella situazione in cui ci siano due o più variabili che danno luogo a processi stocastici correlati. Supponiamo che i due processi siano:

$$dx_1 = a_1 dt + b_1 dz_1 \quad \text{e} \quad dx_2 = a_2 dt + b_2 dz_2 \quad (3.31)$$

dove x_1 e x_2 sono le variabili, mentre dz_1 e dz_2 sono i processi di Wiener. Come già detto, processi discreti nel tempo possono essere scritti:

$$\Delta x_1 = a_1 \Delta t + b_1 \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t} \quad \text{e} \quad \Delta x_2 = a_2 \Delta t + b_2 \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t} \quad (3.32)$$

dove ε_1 e ε_2 sono i campioni provenienti da una distribuzione normale standard. Nel caso in cui le variabili x_1 e x_2 non sono correlate l'una con l'altra, i campioni casuali ε_1 e ε_2 sono usati per ottenere andamenti, in un particolare periodo di tempo, tali da essere indipendenti l'uno con l'altro. Mentre nel caso in cui x_1 e x_2 presentassero una correlazione ρ diversa da zero, allora ε_1 e ε_2 che sono usati in un particolare periodo di tempo dovrebbero essere ricavati da una distribuzione normale bivariata. Ogni tipo di variabile in una distribuzione normale bivariata presenta una distribuzione normale standard e la correlazione tra le variabili è ρ . In questo caso si avranno due processi di Wiener (dz_1 e dz_2) aventi una correlazione pari a ρ . Ovviamente nei processi x_1 e x_2 , che sono ora analizzati, i parametri a_1 , a_2 , b_1 e b_2 possono essere funzioni di x_1 e x_2 e di t . Ad esempio a_1 e b_1 possono essere funzioni di x_1 così come di x_2 e t ; e a_2 , b_2 possono essere funzioni di x_1 così come di x_2 e t .

Le considerazioni fatte fino ad ora possono essere estese al caso in cui ci fossero tre o più variabili. Nel momento in cui i siano tre variabili differenti che seguono processi stocastici correlati allora bisogna campionare tre differenti ε e questi avranno una distribuzione normale trivariata. Mentre se si dovesse avere a che fare con n variabili correlate allora si avranno $n\varepsilon$ differenti che devono essere campionati da un'appropriata distribuzione normale multivariata [Hul15].

3.3.3 Lemma di Itô

Molto interessante è capire il comportamento di uno strumento finanziario derivato che può essere definito come un titolo che dipende da un insieme di parametri sottostanti la cui evoluzione è puramente stocastica. Questo tipo di strumento segue una dinamica di tipo Browniano [DiN08]. Solitamente il prezzo di qualsiasi strumento derivato è funzione delle variabili stocastiche, che permettono di determinare i derivati stessi, e il tempo. Per capire ciò occorre comprendere il funzionamento delle funzioni delle variabili stocastiche. La combinazione di diversi processi stocastici avviene seguendo le regole di differenziazione stocastica definite nel *Lemma di Itô* scoperto dal matematico K. Itô nel 1951 [Mon08]. Si supponga che il valore di una variabile x segua il processo di Itô:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (3.33)$$

dove a e b sono funzioni di x e di t ed dz indica un processo di Wiener. La variabile x ha un *drift rate* pari ad a e un *variance rate* pari a b^2 . Il *Lemma di Itô* dimostra che una funzione G di x e di t può essere definita come:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (3.34)$$

dove dz è lo stesso processo di Wiener definito nell'equazione (3.33).

Allora G segue un *processo di Itô* con *drift rate*:

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \quad (3.35)$$

e *variance rate*:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) b^2 \quad (3.36)$$

In precedenza, il modello dell'evoluzione dei prezzi è stato definito come:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.37)$$

con μ e σ costanti. Dal *Lemma di Itô* segue che il processo definito da G , S e t è:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.38)$$

Sia S che G sono affette dalla stessa fonte di incertezza, dz [Hul15]. Quest'ultimo risultato risulta essere molto importante nel modello di Black-Scholes-Merton.

3.3.4 Esempio di applicazione del lemma di Itô in un contratto Forward

Per comprendere meglio il Lemma di Itô si consideri un contratto forward e si assuma che il tasso d'interesse privo di rischio sia costante e uguale ad r per tutte le scadenze. Partendo dall'equazione:

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (3.39)$$

dove F_0 è il tasso forward al tempo zero, S_0 è il tasso spot al tempo zero e T indica il tempo alla scadenza del contratto forward. Per vedere cosa succede ad un tasso forward con il passare del tempo si indichi con F il tasso forward in un generico tempo t , ed S è il prezzo del bene al tempo t , con $t < T$. La relazione tra F e S è data da:

$$F = S e^{r(T-t)} \quad (3.40)$$

Supponendo che il processo per S è definito utilizzando l'equazione (3.37) allora si può utilizzare il Lemma di Itô per determinare il processo per F . Utilizzando l'equazione (3.40) si ha che:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rS e^{r(T-t)} \quad (3.41)$$

In base all'equazione (3.38), il processo per F è dato da:

$$dF = [e^{r(T-t)}\mu S - rS e^{r(T-t)}]dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz \quad (3.42)$$

Sostituendo F ad $S e^{r(T-t)}$ si ha:

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dz \quad (3.43)$$

Così come S , anche il tasso forward F segue un moto geometrico Browniano. Presenta un tasso di crescita atteso di $(\mu - r)$ piuttosto che μ . Il tasso di crescita in F è il rendimento in eccesso di S sul tasso privo di rischio [Hul15].

3.3.5 Proprietà log-normale del prezzo delle azioni

Nella teoria finanziaria, il prezzo delle azioni per un qualsiasi tempo futuro, il cui prezzo è stato stabilito oggi, si dice che segua una **distribuzione lognormale**. Per dimostrare ciò, si utilizza il Lemma di Itô e si parte dal processo definito così:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.44)$$

Si definisce:

$$G = \ln S \quad (3.45)$$

e in base al Lemma di Itô si ha che:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (3.46)$$

pertanto il processo seguito da G può essere definito come:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \quad (3.47)$$

$G = \ln S$ segue un processo di Wiener Generalizzato, in quanto μ e σ sono costanti. Inoltre presenta un *drift rate* costante pari a $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ e un *variance rate* costante pari a σ^2 . La variazione del $\ln S$ tra il tempo 0 e qualche tempo futuro T è normalmente distribuita con media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}T$ e varianza $\sigma^2 T$ e ciò implica che:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (3.48)$$

dove con S_T è stato indicato il prezzo dell'azione al tempo T , con S_0 il prezzo dell'azione al tempo 0. Inoltre ϕ indica una distribuzione normale e l'equazione (3.48) dimostra che $\ln S_T$ è normalmente distribuito e quindi S_T segue una distribuzione lognormale. Ciò deriva dal fatto che se il logaritmo naturale della variabile è normalmente distribuito, allora la variabile segue una distribuzione lognormale. Quindi è stato dimostrato che il prezzo delle azioni in un qualsiasi tempo T , il cui prezzo è stato stabilito oggi, segue una distribuzione lognormale. Il prezzo S_T può anche essere scritto come:

$$S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma \Delta z} \quad (3.49)$$

3.4 Modello di Black-Scholes-Merton

Il *modello di Black-Scholes-Merton*, spesso detto semplicemente *modello di Black-Scholes*, è un modello che viene utilizzato per studiare l'andamento nel tempo di strumenti finanziari in particolare le opzioni [Bla73] [Mer73].

Per determinare l'equazione differenziale del prezzo di qualsiasi derivato, il cui prezzo sia basato sul valore di mercato di un altro strumento finanziario, detto sottostante, come ad esempio un'azione, si può creare un portafoglio privo di rischi composto dai derivati e dall'azione. Questo può essere fatto in quanto sia il prezzo del derivato che quello delle azioni dipendono dalla stessa fonte di incertezza. Il portafoglio così creato rimane privo di rischio solo per un periodo di tempo molto breve. Comunque, il rendimento su un portafoglio privo di rischio deve essere sempre il tasso di interesse privo di rischio in assenza di opportunità di arbitraggio. Questo porta all'equazione differenziale di Black-Scholes-Merton [Hul15]. In particolare il modello di Black-Scholes è utile per il calcolo del valore corrente di opzioni **CALL** e **PUT** di tipo europeo. Un'opzione **CALL** di tipo “Europeo” è uno strumento derivato in base al quale l'acquirente dell'opzione vanta il diritto di acquistare, o meno, un determinato asset, ad una data futura e ad un prezzo predefinito. Si consideri un'opzione **CALL** con scadenza al tempo T , il cui prezzo d'esercizio è K . Lo schema di un'opzione **CALL** è riportata in figura 3.4.

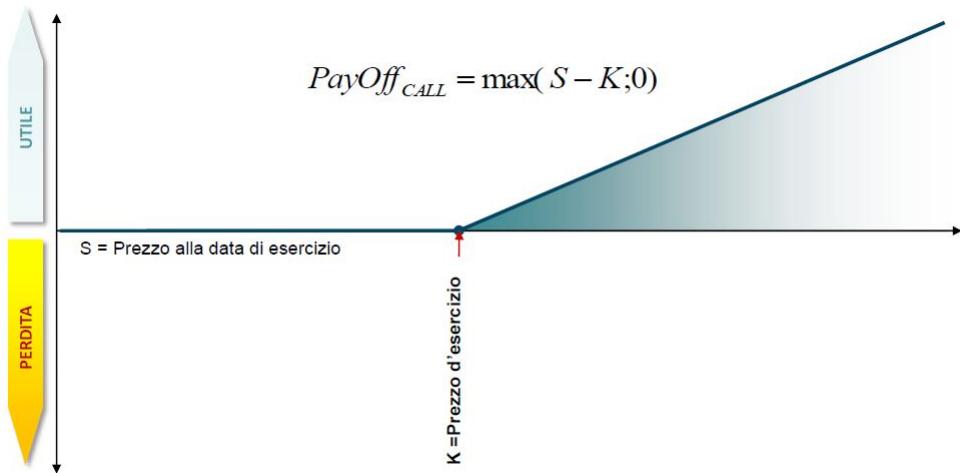


Figura 3.4: Opzione call.

Un'opzione **PUT** di tipo “Europeo” è uno strumento derivato in base al quale l'acquirente dell'opzione vanta il diritto di vendere, o meno, un determinato asset, ad una data futura e ad un prezzo predefinito [Let18]. Si consideri un'opzione **PUT** con scadenza al tempo T , il cui prezzo d'esercizio è K . Lo schema di un'opzione **PUT** è riportata in figura 3.5.

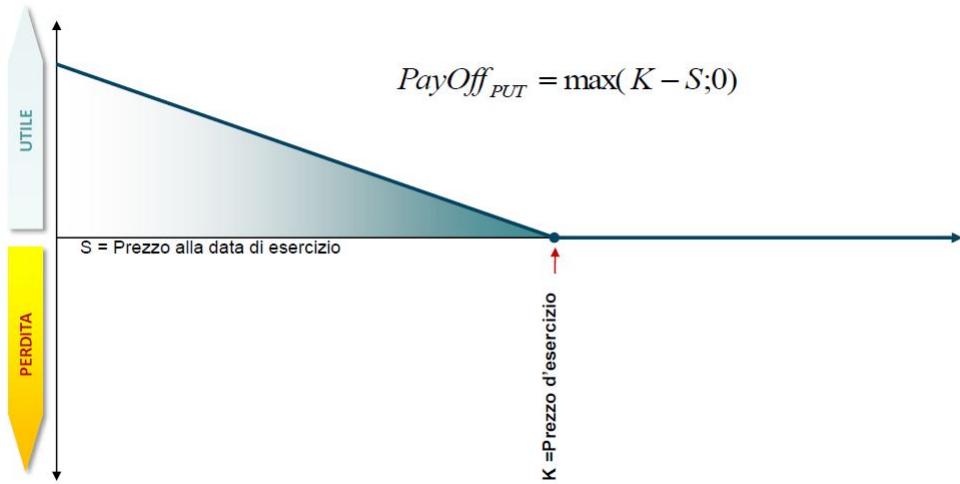


Figura 3.5: Opzione put.

Si parte dall'ipotesi che il prezzo, indicato con S , dell'asset (quindi del sottostante) segua un moto Browniano geometrico e quindi può essere descritto con la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (3.50)$$

L'ipotesi che il prezzo del sottostante segua un moto Browniano geometrico è fondamentale in quanto impedisce che il prezzo diventi negativo.

Indicando con f il prezzo dell'opzione **CALL** o di qualsiasi altro derivato dipendente da S , in base al processo di Itô, si ha che la variabile f deve essere funzione di S e di t come nell'equazione che segue:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (3.51)$$

Quindi anche f segue un moto Browniano geometrico. Il sottostante e l'opzione sono scambiati sul mercato in tempo continuo. Si costruisce il portafoglio inserendo un breve derivato e un ammontare $\frac{\partial f}{\partial S}$ lungo di azioni e lo si indica con Π tramite la seguente relazione:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (3.52)$$

La variazione del valore del portafoglio considerando un intervallo di tempo infinitesimo è espressa come:

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (3.53)$$

Applicando il lemma di Itô si trova l'equazione differenziale stocastica che Π deve soddisfare:

$$d\Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz + \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dz) \quad (3.54)$$

ottenendo quindi:

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt \quad (3.55)$$

Dato che in quest'ultima equazione non è presente più il termine dz allora occorre che il portafoglio sia assunto privo di rischio nel periodo di tempo dt . Ciò implica che il portafoglio debba guadagnare istantaneamente lo stesso tasso di rendimento pari a quello di altri titoli privi di rischio a breve termine. Si impone che:

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (3.56)$$

dove r è il tasso d'interesse privo di rischio costante fino alla scadenza T . Utilizzando l'equazione (3.52) e l'equazione (3.55) si ottiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)dt \quad (3.57)$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = rf \quad (3.58)$$

L'equazione (3.58) rappresenta l'**equazione di differenziale di Black-Scholes-Merton**. Presenta numerose soluzioni che corrispondono a tutte le derivate che possono essere ottenute con S utilizzata come variabile sottostante. La particolare derivata che si ottiene dipende dalle condizioni al contorno che vengono usate. La condizione al contorno utilizzata nel caso di un'opzione **CALL** di tipo "Europeo" è :

$$f = \max(S - K, 0) \quad \text{quando } t = T \quad (3.59)$$

Mentre nel caso di un'opzione **PUT** di tipo "Europeo" la condizione al contorno è:

$$f = \max(K - S, 0) \quad \text{quando } t = T \quad (3.60)$$

Le formule di Black-Scholes-Merton per il prezzo delle opzioni **CALL** e **PUT** di tipo "Europeo" rappresentano le soluzioni più famose dell'equazione differenziale (3.58). Queste formule sono [Hua13]:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{(-rT)} N(d_2) \quad (3.61)$$

e

$$p = K e^{(-rT)} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (3.62)$$

dove:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.63)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (3.64)$$

dove:

- le variabili c e p indicano rispettivamente i prezzi delle opzioni **CALL** e **PUT** di tipo "Europeo";
- S_0 indica il prezzo del sottostante al tempo zero;
- K indica il prezzo d'esercizio;
- r indica il tasso risk-free (drift);
- σ indica la deviazione standard delle variazioni logaritmiche del prezzo;
- T indica il tempo alla scadenza;
- $N(d_1)$ è la funzione di distribuzione di probabilità cumulativa.

In genere una funzione $N(x)$ è una funzione di distribuzione di probabilità cumulativa per una variabile con distribuzione normale standard cioè indica la probabilità che una variabile con distribuzione normale standard sia minore di x così come è rappresentato in figura (3.6) [Hul15].

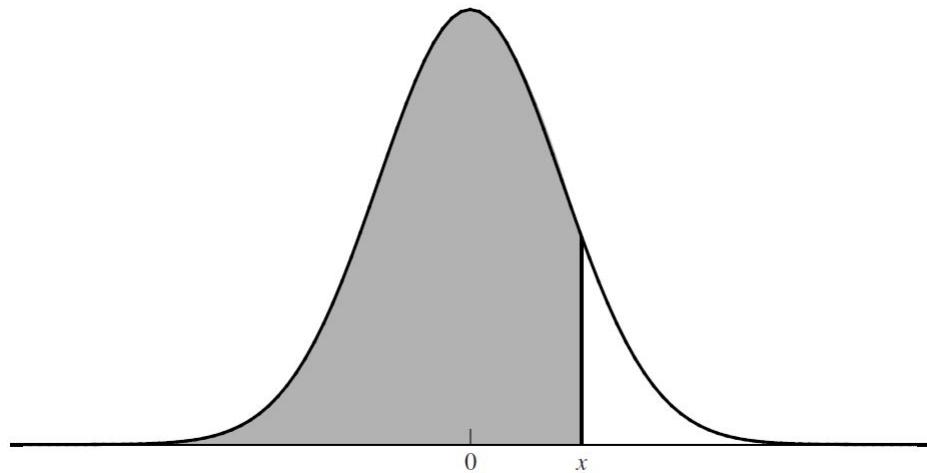


Figura 3.6: Grafico della funzione di distribuzione cumulativa $N(x)$.

Quest'ultima considerazione può essere utilizzata per spiegare i termini $N(d_1)$ e $N(d_2)$ che rappresentano rispettivamente le probabilità d'esercizio dell'opzione **CALL** e dell'opzione **PUT**. In figura (3.7) è riportato graficamente la probabilità delle due opzioni.

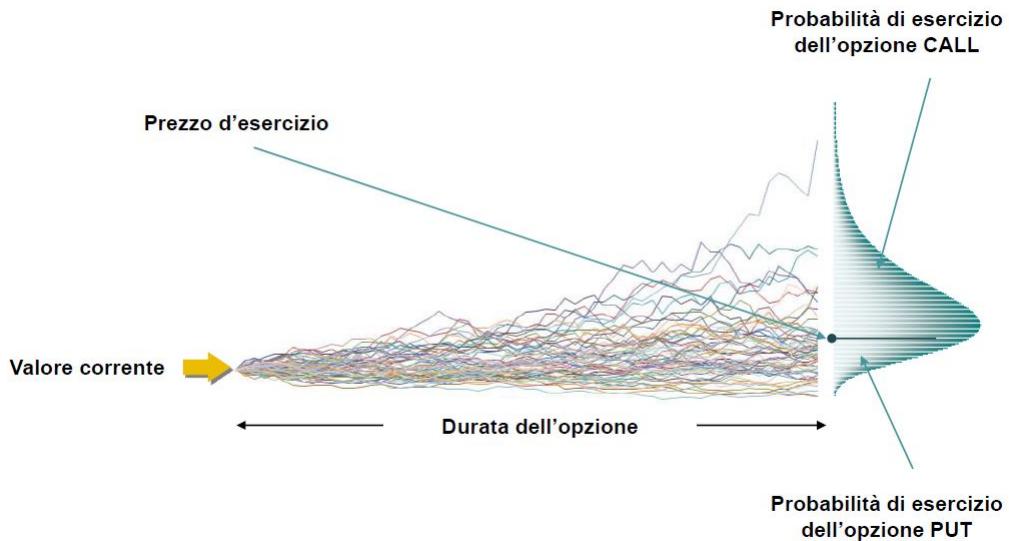


Figura 3.7: Opzioni CALL e PUT: probabilità di esercizio.

Quando la formula di Black-Scholes-Merton viene utilizzata nella pratica si pone il tasso di interesse r uguale al tasso di interesse di uno zero-coupon risk-free con una scadenza pari a T . Quanto detto è teoricamente corretto nel momento in cui r è posto come funzione del tempo e il suo valore deve essere casuale, ovviamente, a patto che il prezzo dell'asset al tempo T segua una distribuzione lognormale e il parametro di volatilità sia scelto in modo appropriato.

3.5 Modello di Black

Il *modello di Black* è un modello che deriva dal modello di Black-Scholes-Merton e che è stato formulato da Black nel 1976 [Bla76]. Questo modello, molto utilizzato in ambito finanziario, permette di valutare il prezzo di strumenti derivati utilizzando non più il prezzo a pronti, come nel precedente modello, ma bensì il tasso forward [Hua13]. Precisamente il modello permette di calcolare il valore corrente di derivati su tassi d'interesse. I derivati su tassi di interesse sono dei particolari strumenti finanziari il cui valore dipende in qualche modo dai tassi di interesse. Una popolare opzione sui tassi di interesse è l'*interest rate cap* o anche detto *opzione cap sui tassi di interesse*. In inglese il verbo “to cap” significa fissare un tetto e in finanza questo termine viene utilizzato per identificare una categoria di contratti a premio attraverso cui il titolare di un debito, su cui viene applicato un tasso variabile, fissa un limite massimo alle oscillazioni del tasso di interesse di cui risulta debitore. L’acquisto di un’opzione cap su tassi d’interesse permette al debitore di interessi a tasso variabile di proteggersi dall’eventualità che uno specifico tasso di mercato detto *parametro di riferimento* si porti al di sopra di una determinata soglia detta *tasso cap*. In questo modo il compratore di un’opzione cap viene protetto da un eccessivo aumento del parametro e i suoi benefici sono legati alla probabilità che, alle date di rilevazione, il tasso di riferimento risulti maggiore del tasso cap.

Il venditore di un’opzione cap si impegna quindi a corrispondere periodicamente, nel caso in cui il parametro di riferimento risulti superiore al tasso cap, un interesse calcolato su un capitale figurativo nozionale fissato nel contratto, ad un tasso pari alla differenza tra il tasso di mercato (parametro di riferimento) e il tasso cap esplicitato nel contratto.

$$\text{Max}(\text{Parametro-CapRate};0) \quad (3.65)$$

Dato che la relazione tra il parametro di riferimento e il tasso cap viene analizzata su una serie di date predefinite, l’opzione cap risulta essere composta da una serie di singole scommesse (caplets) che vengono sottoposte a una valutazione specifica tramite un approccio probabilistico. In figura 3.8 sono riportati i vari caplets ordinati in base alle date.

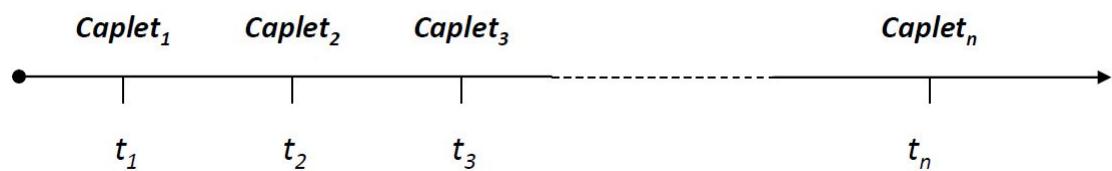


Figura 3.8: Asse temporale dei vari caplets.

Si utilizza la formula di Black per ricavare il valore di ogni singolo caplet:

$$\text{caplet} = \delta_K [F_0 N(d_1) - R_K N(d_2)] e^{-rt} \quad (3.66)$$

dove:

- F_0 è il tasso forward alla data di esercizio;
- R_K è il tasso cap (strike rate);
- δ_K è il tenor del tasso d'esercizio;
- r è il tasso, per scadenza t , ricavato dalla struttura dei rendimenti per scadenza rilevata alla data di valutazione dell'opzione (drift);
- t è la durata dell'opzione;

I termini d_1 e d_2 sono definiti così:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{R_K}\right) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} \quad (3.67)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{R_K}\right) - \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (3.68)$$

dove con σ è stata indicata la volatilità del parametro di riferimento [Bri06].

Un simile ragionamento può essere fatto con un'opzione floor. In questo caso il contratto prevede che l'acquirente di un'opzione floor paghi un premio al venditore dell'opzione come protezione nel caso di diminuzione dei tassi di interesse (interest rate floor). Il venditore dell'opzione dovrà versare periodicamente all'acquirente gli interessi calcolati, su un dato capitale nozionale, ad un tasso pari alla differenza, se positiva, tra un determinato tasso floor, esplicitato nel contratto, e un tasso di mercato assunto come parametro di riferimento.

$$\text{Max}(\text{FloorRate} - \text{Parametro}; 0) \quad (3.69)$$

Dato che la relazione tra il parametro di riferimento e il tasso floor viene analizzata su una serie di date predefinite, l'opzione floor risulta essere composta da una serie di singole scommesse (floorlets) che vengono sottoposte a una valutazione specifica tramite un approccio probabilistico [Let18]. In figura 3.9 sono riportati i vari Floorlet ordinati in base alle date.

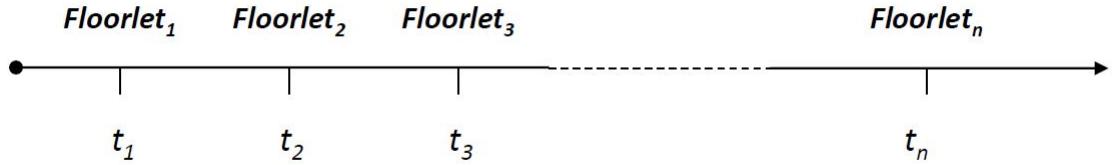


Figura 3.9: Asse temporale dei vari floorlet.

Con la formula di Black si ricava il valore di ogni singolo floorlet:

$$floorlet = \delta_K [R_K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] e^{-rt} \quad (3.70)$$

3.6 Approccio di simulazione stocastica

Molto spesso l'approccio deterministico se viene utilizzato per affrontare delle situazioni complesse presenta dei limiti e pertanto per affrontare tali situazioni si ricorre all'utilizzo dell'approccio stocastico. Un modello stocastico contiene delle procedure che tengono conto delle distribuzioni di probabilità oltre ad elementi che aggiungono una componente casuale nel caratterizzare lo stato di alcune o tutte le variabili. L'adozione di questo approccio risulta molto utile per affrontare la complessità dei mercati finanziari perché oltre a considerare l'incertezza che caratterizza i mercati permette anche di trovare nuove soluzioni che non sarebbe possibile ottenere con i tradizionali modelli deterministicci.

In ambito scientifico, spesso per comprendere meglio la realtà si fa ricorso all'utilizzo del metodo della simulazione. Rappresenta un vero e proprio strumento di indagine scientifica e presenta numerosi vantaggi tanto da essere ormai utilizzato in quasi tutte le discipline. L'utilità dell'utilizzo della simulazione, come metodo di soluzione dei modelli stocastici, deriva dalla difficoltà che presentano questi modelli nell'essere trattati o risolti in modo analitico. Un requisito fondamentale che un modello deve avere per essere adottato come modello di simulazione stocastica è quello di garantire un grado di coerenza nelle varie tipologie di analisi nelle quali viene utilizzato. La "bontà" di un modello di simulazione viene misurata in relazione alla capacità di quest'ultimo di ricostruire in modo corretto le relazioni tra le variabili e nello stesso tempo includere tutte le variabili rilevanti escludendo quelle meno rilevanti. La simulazione permette di scoprire anche possibili effetti finali che non erano previsti. Inoltre il fatto di definire il modello stocastico in termini simulativi anzichè in termini di qualche formulazione analitica permette di assumere una certa libertà nella scelta delle variabili, oltre che sul tipo di distribuzione che viene associata a ognuna di esse. Il primo passo da compiere per la formulazione della simulazione di un processo stocastico consiste nella scelta delle variabili. Infatti tra le variabili di input occorre individuare quelle che sono caratterizzate da maggiore incertezza e quelle che risultano fondamentali per determinare il risultato finale. Non tutte le variabili devono essere trattate in termini stocastici. Una volta individuate le variabili occorre modellizzare la variabilità dei loro possibili valori futuri. Quindi occorre definire un intervallo di variabilità delle previsioni e la probabilità con cui queste potrebbero verificarsi. I possibili valori vengono specificati tramite distribuzioni di probabilità che occorre definire stabilendo il tipo di funzione di probabilità e il valore dei parametri che la caratterizzano tra cui media, varianza, parametri di forma, ecc. Una volta fatto ciò è possibile osservare le varie possibili relazioni di interdipendenza, sia temporale che incrociata tra le diverse variabili stocastiche. Questo viene fatto tramite dei coefficienti di correlazione o di autocorrelazione, ovvero di correlazione nel tempo di una variabile con se stessa, che vengono assegnati alle variabili. Questi coefficienti serviranno nello sviluppo della simulazione per generare delle previsioni che rispecchino l'andamento desiderato tra le varie variabili. Dopo aver definito il modello, le funzioni di distribuzione delle variabili e le varie relazioni tra di queste è possibile generare un gran numero di differenti scenari previsionali, pari

ad un numero di prove della simulazione che viene deciso preliminarmente dall'operatore (10.000, 20.000, ...). In ogni prova, le variabili stocastiche varieranno contemporaneamente in modo casuale secondo un'opportuna distribuzione di probabilità. In ogni scenario il modello provvederà a fornire le variabili di output di interesse. Si otterranno valori differenti della variabile di output che verranno divisi in classi di valore. Per ogni classe di valore è possibile calcolare la frequenza relativa che indica il numero di volte in cui nella simulazione un dato valore si è verificato. Infine il risultato finale della simulazione viene rappresentato tramite una funzione di distribuzione e può essere analizzato con le classiche tecniche di analisi statistica.

Ovviamente anche le simulazioni presentano i loro problemi e i loro limiti che dovrebbero essere valutati in base all'ambito in cui vengono applicati [Mon08].

Di notevole importanza sono le simulazioni basate sul *Metodo Monte Carlo* che verrà illustrato con maggiori dettagli nel prossimo paragrafo.

3.6.1 Simulazione Monte Carlo

Il forte sviluppo tecnologico che si è verificato negli ultimi anni ha permesso il diffondersi delle tecniche di calcolo *Monte Carlo*. Il *metodo Monte Carlo* è una tecnica matematica che permette di risolvere problemi complessi attraverso l'uso della simulazione ed è una tecnica che si basa sulla produzione di sequenze di numeri casuali. Le sue origini risalgono alla metà degli anni 40 nell'ambito del progetto Manhattan, sul trasporto di neutroni. Queste ricerche erano legate principalmente ai nomi **Enrico Fermi, John von Neumann e Stanisław Marcin Ulam** [Met49]. Il nome **Monte Carlo** fu inventato in seguito da **Nicholas Constantine Metropolis** in riferimento al noto casinò situato a Monte Carlo, nel Principato di Monaco [DeF14]. In realtà, è stato scoperto, che l'applicazione di questa tecnica ha origini molto antiche e risale alla risoluzione del problema dell'ago di Buffon nel 1777. L'uso del *metodo Monte Carlo* è cresciuto di pari passo con l'uso e lo sviluppo dei calcolatori [Bol19]. A questo sviluppo contribuirono anche i notevoli progressi ottenuti nel campo della teoria delle probabilità e dei processi stocastici.

Oggi il *metodo Monte Carlo* viene applicato in vari ambiti scientifici. Viene molto utilizzato nella valutazione degli investimenti come tecnica di analisi del rischio. Gli elementi principali della tecnica *Monte Carlo* sono:

- *i parametri* che vengono inseriti dall'analista come input e pertanto sono controllabili;
- *le variabili di input esogene* sono quelle variabili di input che però non sono controllabili dall'analista e il cui andamento può essere descritto in termini probabilistici;
- *le variabili di output* sono i risultati finali della simulazione;

- *il modello* che è costituito da tutte le equazioni matematiche (che sono funzione dei parametri e delle variabili di input) che descrivono le relazioni tra i parametri, le variabili di input e le variabili di output.

La tecnica consiste nel risolvere il problema numericamente tramite la generazione di un numero N molto elevato di possibili combinazioni di valori che possono essere assunti dalle variabili di input. Sulla base di questi valori e sulle equazioni proprie del modello viene calcolato l'output. Per formare ciascuna delle N combinazioni viene generato in modo casuale un valore per ciascuna delle variabili di input tenendo ovviamente conto delle correlazioni tra variabili e del tipo di distribuzione di probabilità indicata. Questo procedimento viene ripetuto N volte in modo da ottenere N valori indipendenti delle variabili di output che rappresentano il *campione* dei possibili valori che possono essere assunti dall'output. Questo campione verrà poi analizzato tramite tecniche statistiche. Una delle caratteristiche principali del metodo è che possibile inserire un numero molto grande di parametri e di variabili in modo da poter descrivere la complessità del problema che si sta trattando. La "bontà" del metodo dipende dalle assunzioni iniziali assunte nella prima fase e dalle equazioni del modello.

Per effettuare N esperimenti di simulazione, occorre generare casualmente N variabili di input che tengano conto delle funzioni di probabilità e delle eventuali correlazioni e questo viene eseguito dal calcolatore tramite opportuni algoritmi che permettono di generare tre categorie di numeri:

- *numeri veramente casuali* che derivano da misure di fenomeni fisici puramente casuali;
- *numeri pseudocasuali* che vengono generati secondo un determinato algoritmo. Solitamente i calcolatori utilizzano una funzione predefinita di generazione di numeri pseudocasuali che riproduce una distribuzione uniforme;
- *numeri quasi casuali* che vengono generati anch'essi secondo un determinato algoritmo ma non sotto forma di una vera e propria sequenza casuale ma sotto forma di una serie di numeri disposti in modo uniforme.

La simulazione Monte Carlo presenta numerosi vantaggi. Permette di ottenere in contemporanea il calcolo di più variabili di output con la possibilità di poterle rappresentare ottendendo una rappresentazione statistica completa. Inoltre permette di affrontare problemi complessi e di grandi dimensioni. Il limite principale può essere riscontrato nella difficoltà di costruzione del modello [Bol19].

Capitolo 4

Applicazione

Fin dalla prima formulazione, i sistemi di ALM e, più in generale i più comuni modelli per la stima del rischio di tasso, assumono come scenario avverso l'ipotesi di shift parallelo di tutti i nodi della curva dei tassi di interesse. Adottando questa ipotesi, la relazione utilizzata per calcolare la variazione di valore del capitale economico a uno specifico shift parallelo della curva dei rendimenti è l'equazione (2.5) vista nel Capitolo 2. È proprio questa la relazione che è stata posta alla base dei sistemi di misurazione del rischio di tasso per molto tempo, nonostante l'ipotesi di shift paralleli di tutti i nodi della curva sia generalmente considerata un'ipotesi del tutto irrealistica. Per superare tali limitazioni, negli anni recenti, invece, sono state sviluppate ipotesi di spostamenti non paralleli della curva dei tassi di interesse al fine di rendere le misure di rischio più aderenti alle reali dinamiche dei mercati finanziari. L'adozione di questa ipotesi obbliga ad abbandonare la possibilità di calcolare la variazione del valore economico sulla base del Duration Gap tra attivo e passivo ed impone un'analisi degli effetti prodotti dallo spostamento di ogni singolo nodo della curva sulla base della relazione (2.6) esposta nel Capitolo 2. Tuttavia la tendenza a formulare l'ipotesi di spostamenti della struttura dei tassi seguendo approcci deterministicici porta inevitabilmente a soluzioni influenzate da visioni soggettive dei supervisori o delle singole banche. Questo porta a mettere in discussione le misure di rischio di tasso ottenute mediante l'utilizzo delle più comuni tecniche di ALM. Queste considerazioni inducono ad esplorare la possibilità di applicare un approccio stocastico per modellare i possibili spostamenti della curva e pervenire a misure di rischio non influenzate dalle scelte dell'analista. Applicando una tecnica di simulazione Monte Carlo è stato possibile simulare tutti i possibili livelli di tasso, statisticamente ammessi, mappondo l'effetto che le oscillazioni dei singoli nodi di curva avrebbero sul valore economico complessivo della banca. Combinando quindi le più comuni tecniche di ALM con l'ampio range di scenari dei tassi di interesse prodotti dalla simulazione Monte Carlo è possibile effettuare misurazioni del rischio di tasso di interesse più affidabili.

4.1 Approccio stocastico alla misurazione del rischio di tasso

Il fatto di modellare l’evoluzione dei tassi d’interesse secondo il modello del moto Browiano presuppone che le decisioni degli investitori debbano essere considerate indipendenti così come il moto delle singole molecole di un fluido. Quindi risulta imprevedibile la direzione e il verso di uno spostamento della variabile in un futuro anche molto prossimo. Va tuttavia ricordato che l’ipotesi di indipendenza delle decisioni degli investitori, utilizzata per modellare la dinamica delle variabili finanziarie non trova riscontro nei mercati reali se si considera che la maggior parte degli investitori [Let18]:

- raccoglie informazioni dalle stesse fonti;
- utilizza gli stessi strumenti di analisi per analizzare gli stessi grafici di prezzo da cui poi trae gli stessi segnali di trading;
- in base alle tendenze fa operazioni di acquisto e vendita e questo contribuisce a potenziare le scelte nate dalle decisioni di massa.

D’altra parte, va notato che le condizioni per lo scambio di un qualsiasi strumento finanziario si realizzano nel momento in cui almeno due agenti abbiano un giudizio diverso sul valore di tale strumento.

Fischer Black fu il primo ad evidenziare la necessità di differenziazione dei giudizi di valore. Nella presenza di “operatori non informati”, ha individuato la principale causa del grado di liquidità del mercato. Black identifica l’assenza o la scarsità d’informazione come “rumore”. Il mercato risulta quindi governato dall’azione congiunta di due classi di agenti: gli operatori informati e quelli definiti noise-sensitive (o semplicemente noise) traders [Hua13].

L’imprevedibilità del movimento della struttura dei rendimenti per scadenze non implica causalità della dinamica dei tassi d’interesse. Si nota, invece, che la dinamica di ogni nodo della curva è governata da due ordini di forze, ovvero:

- una forza di attrazione verso i rispettivi livelli forward del tasso;
- l’azione di elementi caotici che comportano un certo grado di “rumore”, diverso per ogni nodo e variabile nel tempo.

Si genera quindi un meccanismo di “causalità intricata” ovvero un meccanismo in cui l’incapacità di identificare la gran parte dei fattori interconnessi che agiscono sul fenomeno in esame comporta l’apparente causalità delle dinamiche osservate. Seguendo le logiche del modello di Black-Scholes-Merton (esposto nel paragrafo (3.4) del Capitolo 3) le oscillazioni dei singoli nodi della curva possono essere modellate secondo un processo lognormale e l’intera struttura dei rendimenti per scadenza segue un processo stocastico multivariato

modellabile mediante procedure di simulazione Monte Carlo. In questo modo, è possibile mappare l'effetto che le oscillazioni dei singoli nodi di curva avrebbero sul valore economico dei crediti e dei debiti di una banca.

4.2 Modello di simulazione Monte Carlo

In questo paragrafo viene esaminato e descritto il modello di simulazione Monte Carlo realizzato per misurare il rischio di tasso di interesse. Il modello consiste nel simulare, attraverso una serie di iterazioni, un gran numero di possibili spostamenti dei nodi della curva dei tassi di interesse tramite una procedura stocastica multivariata. In questo modo è possibile registrare un insieme molto ampio di possibili aumenti o riduzioni del patrimonio complessivo il cui andamento può essere descritto da una distribuzione delle variazioni del valore economico di una banca (delta-valore). Il fatto che il modello intercetti scenari di perdita potenzialmente molto gravi consente alla banca di valutare l'opportunità di modificare la struttura degli investimenti o di correggere i rischi mediante appropriate tecniche di copertura.

Il codice alla base del modello in questione è stato fornito da Banca Popolare Pugliese [Let01] ed è stato realizzato in ambiente VBA che è l'acronimo di *Visual Basic for Application*. Quest'ultimo è un'implementazione di *Visual Basic* inserito all'interno di applicazioni Microsoft. Precisamente, il linguaggio di programmazione VBA è stato utilizzato nell'applicazione *Excel*.

I valori dei tassi di interesse, utilizzati nel modello, sono stati estratti dalla piattaforma *Bloomberg* [Bloo19]. In particolare è stata analizzata la serie storica compresa tra l'anno 2005 e l'anno 2012. Questi valori sono chiamati tassi Swap e per comodità di notazione verranno indicati successivamente con il simbolo $s_{i,\alpha}$ dove con l'indice latino i verrà indicato il giorno preso come riferimento (ovviamente un giorno compreso tra l'anno 2005 e l'anno 2012), mentre con l'indice greco α verrà indicato il nodo tempo ovvero la scadenza in cui il valore di tasso viene ridefinito. Dato che questi valori di tassi che compongono la serie storica sono molti non sono stati riportati in Appedice. L'analisi è stata fatta in un contesto di tassi positivi¹. I valori dei tassi Swap essendo stati ricavati dalla piattaforma *Bloomberg* sono effettivamente quelli offerti dal mercato e lo stesso modello è stato costruito rispettando l'attuale struttura normativa per il rischio di tasso di interesse [Ban13] [Com04] [Com16].

Come esempio, il modello è stato applicato ad una situazione ben precisa riguardante i tassi swap della data 02/01/2012. Per questa data l'indice $i = D$ rappresenta questo giorno. La rispettiva curva swap è riportata in Figura (4.1).

¹I tassi negativi dal punto di vista economico sono inammissibili per le ragioni esposte nel paragrafo (1.7) del Capitolo 1

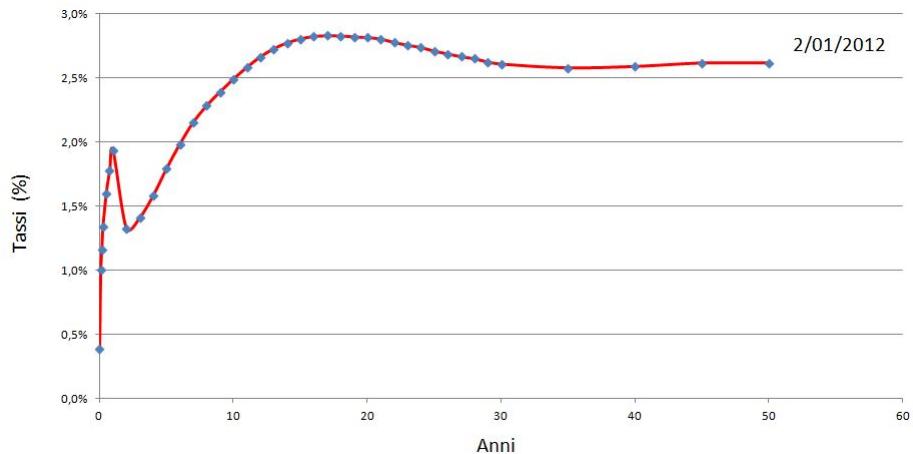


Figura 4.1: Curva dei tassi Swap relativa al giorno 2/01/2012, $i = D$. Sull'asse delle ascisse sono riportati i periodi di tempo espressi in anni che identificano i nodi α . Il periodo totale è compreso tra un giorno e 60 anni. Sull'asse delle ordinate sono riportati i tassi swap il cui valore è stato ottenuto con il metodo Bootstrap. I rombi blu rappresentano i 40 nodi. La curva è stata disegnata per guidare l'occhio.

I tassi riportati sull'asse delle ordinate sono detti tassi zero-coupon (ZC) in quanto sono tassi d'interesse relativi a contratti senza cedola (ZC) cioè privi di flussi di cassa intermedi, prima della scadenza. Questi tassi sono stati calcolati utilizzando una procedura basata sul metodo Bootstrap a partire dai tassi swap e sono stati forniti da Banca Popolare Pugliese. Precisamente questa curva è stata costruita considerando 40 nodi tempo. I valori dei tassi Swap e dei tassi ottenuti con il metodo bootstrap (riferiti al giorno 2/01/2012 considerando 40 nodi) sono riportati in tabella (B.1).

Secondo le linee guida fornite da Banca d'Italia [Ban13] e le indicazioni fornite dal Comitato di Basilea [Com04] [Com16] per calcolare l'esposizione al rischio di tasso occorre fare riferimento alle attività e passività comprese nel portafoglio bancario che sono classificate in 14 fasce temporali in base alla loro vita residua. Le 14 fasce temporali sono le seguenti:

- **Fascia a vista:** Indica la fascia che ha durata un giorno e la scadenza di questa fascia è stata posta a zero;
- **1 Mese (1M):** Indica la fascia temporale compresa tra la fascia a vista con scadenza pari a zero e un mese;
- **3 Mesi (3M):** Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 1 Mese e 3 Mesi;
- **6 Mesi (6M):** Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 3 Mesi e 6 Mesi;
- **1 Anno (1Y):** Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 6 Mesi e 1 Anno;

- 2 Anni (2Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 1 Anno e 2 Anni;
- 3 Anni (3Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 2 Anni e 3 Anni;
- 4 Anni (4Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 3 Anni e 4 Anni;
- 5 Anni (5Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 4 Anni e 5 Anni;
- 7 Anni (7Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 5 Anni e 7 Anni;
- 10 Anni (10Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 7 Anni e 10 Anni;
- 15 Anni (15Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 10 Anni e 15 Anni;
- 20 Anni (20Y): Indica la fascia temporale compresa tra il periodo 15 Anni e 20 Anni;
- Oltre 20 anni: Il periodo Oltre 20 Anni. La scadenza di questa fascia è stata fissata ad 22.5 Anni;

Pertanto per costruire il modello sono stati considerati 14 nodi corrispondenti ai valori centrali di queste 14 fasce. I valori centrali t di queste fasce sono stati ricavati tramite la seguente procedura:

$$\langle t \rangle_\alpha = t_{\alpha-1} + \frac{1}{2}(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \quad (4.1)$$

dove con l'indice α è stata indicata la fascia temporale. I valori centrali di queste fasce, calcolati tramite questa procedura, sono riportati nel paragrafo successivo dove vengono trattate nei dettagli le modalità utilizzate per costruire il modello. Per ora occorre solo puntualizzare che il modello è stato costruito in riferimento alla data 2/01/2012 e pertanto i 14 nodi considerati sono quelli estratti partendo dalla curva riportata in figura (4.1). Per non appesantire troppo il calcolo numerico, la simulazione Monte Carlo è stata applicata solo a 5 nodi scelti in maniera opportuna tra i 14 nodi. Poi i risultati ottenuti con la simulazione Monte Carlo relativi ai 5 nodi sono stati estesi ai 14 nodi tramite un processo di regressione polinomiale.

Con la simulazione Monte Carlo, una volta definita la legge che governa il processo della variabile nel tempo, è possibile simulare gli effetti del suo comportamento attraverso una serie di iterazioni. In questo caso con il metodo di simulazione Monte Carlo sono stati simulati i vari scenari dei possibili andamenti della curva dei tassi. I vari scenari sono stati simulati secondo il modello del moto browniano geometrico ed il valore di tasso r_T simulato, relativo ad uno specifico nodo, è governato dalla seguente legge:

$$r_T = r_t e^{(\rho - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (4.2)$$

Il valore r_T rappresenta il tasso simulato a partire dal tasso spot r_t . Questo termine e tutti gli altri termini a destra dell'equazione (4.2) sono le varie variabili di input che verranno definite nel prossimo paragrafo. Pertanto il primo passo fatto per applicare il Monte Carlo è stato proprio quello di definire le variabili di input presenti in quest'ultima equazione.

4.2.1 Generazione scenari di tasso

Il modello in esame, basato su una procedura stocastica multivariata, permette di generare un numero molto elevato di spostamenti della curva dei rendimenti in base alla volatilità storica di ciascun nodo e correlazioni tra coppie di nodi. L'indice di volatilità (σ nell'equazione (4.2)) di ogni nodo è costituito dalla deviazione standard delle variazioni logaritmiche osservate su base storica. Infine la correlazione tra le rispettive serie di variazioni logaritmiche, sempre osservate su base storica, permette di descrivere l'interdipendenza tra coppie di nodi. Le variazioni logaritmiche su base storica sono state ricavate prendendo i valori dei tassi Swap ($s_{i,\alpha}$) della serie storica, quindi i valori riferiti ai giorni compresi tra l'anno 2005 e l'anno 2012 e su ogni data è stata eseguita la seguente operazione:

$$l_{i,\alpha} = \ln\left(\frac{s_{i,\alpha}}{s_{i-1,\alpha}}\right) \quad (4.3)$$

dove qui l'indice i varia sugli N tempi (giorni) compresi tra il 2005 e il 2012, mentre l'indice α varia in base al nodo considerato. Questo calcolo è stato effettuato per tutti i giorni della serie storica in corrispondenza di tutti i nodi considerati. I valori ottenuti non sono riportati in Appendice in quanto sono molti.

Il calcolo delle volatilità storiche è stato eseguito sui cinque nodi tempo che per comodità verranno chiamati nodi chiave, in modo tale da poter definire una struttura a termine ridotta molto simile a quella ottenuta considerando tutti i 40 nodi tempo così come è stato fatto in precedenza. I nodi scelti con i relativi valori di volatilità sono riportati in Tabella (4.1).

Volatilità (σ)				
0,5Y	2Y	7Y	15Y	30Y
8,091%	27,143%	21,457%	19,224%	22,015%

Tabella 4.1: Nella prima riga sono riportati i nodi chiave mentre nella seconda riga sono riportati i corrispondenti valori di volatilità.

La volatilità σ si ricava dalla deviazione standard della serie di variazioni logaritmiche osservate su base storica relativa ad uno specifico nodo, utilizzando la seguente relazione:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (l_{i,\alpha} - \mu_\alpha)^2} \quad (4.4)$$

dove

$$\mu_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_{i,\alpha} \quad (4.5)$$

è la media aritmetica.

I tassi a termine utilizzati sono riferiti a un orizzonte temporale di breve periodo pari ad un anno. Quindi i valori di volatilità riportati in tabella (4.1) sono valori annualizzati e per questo motivo il valore ottenuto dalla relazione (4.4) è stato moltiplicato per la radice quadrata di 250, ovvero per il numero di giorni lavorativi bancari in un anno. Questa operazione è stata ripetuta per tutti e 5 i nodi ottenendo rispettivamente i 5 valori di volatilità riportati in tabella (4.1).

Considerando le varie coppie di nodi, per ogni coppia è stato ricavato il coefficiente di correlazione (che per comodità di notazione verrà indicato con C) ottenendo infine una matrice di correlazione dei nodi chiave. Considerando le serie di variazioni logaritmiche osservate su base storica relative a due nodi, ad esempio P_α e P_β è possibile ricavare i vari coefficienti di correlazione tramite la seguente relazione:

$$C(P_\alpha, P_\beta) = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N (l_{\alpha,i} - \mu_\alpha)(l_{\beta,i} - \mu_\beta)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (4.6)$$

Eseguendo questo calcolo tra tutte le varie coppie di nodi, alla fine, è stato possibile ottenere la seguente matrice di correlazione:

Correlazioni					
Nodi	0,5Y	2Y	7Y	15Y	30Y
0,5Y	1,000	0,192	0,092	0,038	-0,003
2Y	0,192	1,000	0,798	0,657	0,572
7Y	0,092	0,799	1,000	0,942	0,862
15Y	0,038	0,657	0,942	1,000	0,957
30Y	-0,003	0,572	0,862	0,957	1,000

Tabella 4.2: Matrice di correlazione costituita dai coefficienti di correlazione calcolati tra le varie coppie di nodi.

In questo modo è stato possibile descrivere le relazioni tra le varie coppie di nodi.

Il fattore r_t nell'equazione (4.2) rappresenta il tasso Spot, alla data 02/01/2012. I tassi spot vengono ricavati tramite un semplice processo di interpolazione lineare tra i tassi swap quando non è presente una data scadenza di interesse. I valori dei tassi Forward sono stati ricavati utilizzando la relazione 1.7 presente nel Capitolo 1. I valori dei tassi Spot r_t e dei tassi Forward r_{fwd} per i cinque nodi di curva nel giorno 2/01/2012 sono riportati in tabella 4.3:

Nodi chiave	r_t	r_{fwd}
0,5Y	1,606%	1,029%
2Y	1,330%	1,149%
7Y	2,157%	2,337%
15Y	2,808%	2,887%
30Y	2,612%	2,629%

Tabella 4.3: Nella prima colonna sono riportati i nodi chiave, nella seconda colonna sono riportati i tassi Spot e nella terza sono riportati i tassi Forward corrispondenti ai vari nodi chiave.

La procedura di simulazione ha avuto origine con l'estrazione di 5 numeri casuali indipendenti, uno per ogni nodo, distribuiti secondo una distribuzione normale standardizzata. Per ogni nodo è stato quindi estratto un numero casuale indipendente. Poichè i nodi sono correlati è necessario correlare tra loro anche i numeri casuali. Per far ciò è stata utilizzata una procedura numerica detta decomposizione di Cholesky [Pre86] in cui la matrice di correlazione (4.2), che verrà indicata con C , può essere scritta come il prodotto di due matrici triangolari. Quindi si può scrivere $C = BB^T$ dove con B è stato indicata la matrice triangolare inferiore. Gli elementi della matrice di Cholesky b_{ij} (definiti $\forall i \in \{1 \dots 5\}$ e $\forall j \in \{1 \dots 5\}$) sono legati agli elementi della matrice c_{ij} ($\forall i \in \{1 \dots 5\}$ e $\forall j \in \{1 \dots 5\}$) tramite le seguenti relazioni:

$$b_{ii} = \sqrt{c_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (b_{ik})^2} \quad (4.7)$$

e

$$b_{ji} = \frac{1}{b_{ii}} \left(c_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk} \right) \quad (4.8)$$

La matrice ottenuta è la seguente:

Decomposizione di Cholesky					
Nodi chiave	0,5Y	2Y	7Y	15Y	30Y
0,5Y	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2Y	0,192	0,981	0,000	0,000	0,000
7Y	0,092	0,795	0,600	0,000	0,000
15Y	0,038	0,662	0,688	0,295	0,000
30Y	-0,003	0,584	0,663	0,386	0,265

Tabella 4.4: Decomposizione di Cholesky ottenuta dalla matrice di correlazione.

A questo punto per ottenere i numeri casuali correlati, che rappresentano il fattore ε nell'equazione (4.2), è stato eseguito il prodotto matriciale tra le righe della tabella (4.4) con il vettore colonna contenente i numeri casuali indipendenti.

Infine la variabile ρ è stata ottenuta utilizzando la seguente relazione:

$$\rho = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{r_{fwd}}{r_t} \right) \quad (4.9)$$

dove Δt è l'orizzonte temporale pari ad un anno.

Avendo ora a disposizione, per i 5 nodi, le variabili di input (ε) , (σ) , (r_t) , (ρ) e (Δt) con il metodo Monte Carlo, tramite una serie di iterazioni, è stato possibile simulare i vari possibili spostamenti casuali per i diversi nodi della curva ridotta, ottenendo quindi come risultato la variabile di output ovvero r_T . In ogni scenario lo spostamento di un nodo è causato dal contributo deterministico dato dallo spostamento verso il suo livello Forward e dal contributo stocastico dato invece dalle volatilità storiche (σ) e dalle correlazioni (ϵ) con altri nodi. In figura (4.2) è riportato uno scenario ottenuto da un possibile spostamento casuale dei diversi nodi della curva ridotta:

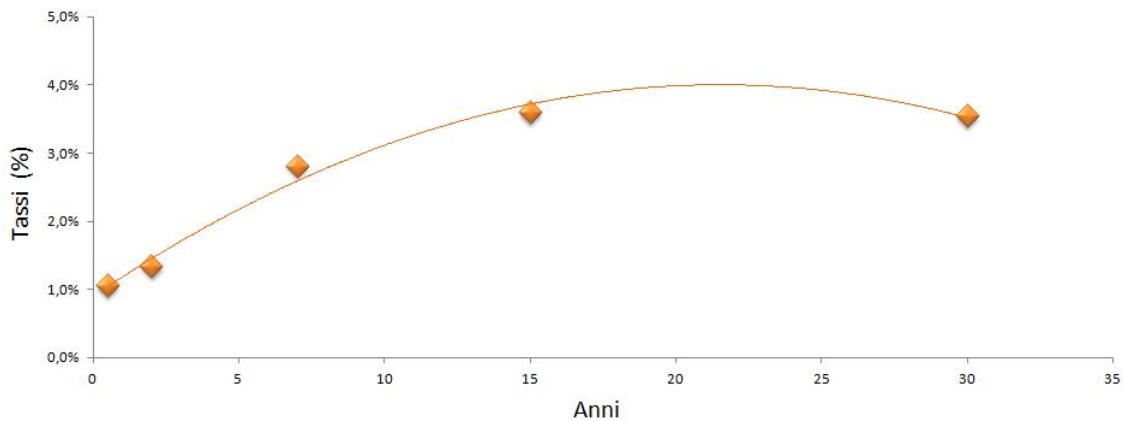


Figura 4.2: Curva ridotta. Sull'asse dell'ascisse sono riportati i periodi di tempo in anni mentre sull'asse delle ordinate sono riportati i valori di r_T ottenuti da uno scenario di simulazione Monte Carlo. I rombi arancioni rappresentano il risultato ottenuto per ognuno dei nodi considerati. La curva arancione è stata disegnata per guidare l'occhio.

I valori presentati in figura (4.2) sono riportati nella tabella (4.5):

Nodi chiave	r_T
0,5Y	1,048%
2Y	1,331%
7Y	2,805%
15Y	3,592%
30Y	3,538%

Tabella 4.5: Nella prima colonna sono riportati i nodi tempo (nodi chiave) mentre nella seconda colonna sono riportati i corrispondenti valori r_T per uno specifico scenario Monte Carlo.

Sono dei valori che variano di volta in volta in cui viene avviata la simulazione Monte Carlo in quanto dipendono dai numeri casuali generati. Il modello di simulazione Monte Carlo permette di calcolare un ampio range di scenari di tassi di interesse.

Per poter calcolare l'esposizione al rischio di tasso è stato necessario estendere il lavoro fatto fino ad ora per i cinque nodi ad un caso di 14 nodi utilizzando la funzione di regressione polinomiale. È stato possibile fare ciò in quanto è stato visto che l'andamento dei tassi in figura (4.2) è ben descritto da un polinomio di secondo grado. Per questo motivo i valori dei tassi Spot, Forward e Montecarlo sono stati estesi a 14 nodi utilizzando un polinomio del tipo:

$$r = at^2 + bt + c \quad (4.10)$$

dove r rappresenta la variabile dipendente mentre t la variabile indipendente. Precisamente al posto delle t sono stati inseriti i valori dei 5 nodi chiave. I valori dei parametri a , b , c sono stati ottenuti con un processo di fit che utilizza il metodo dei minimi quadrati. Inserendo al posto della variabile dipendente prima i valori dei tassi Forward (r_{fwd}) relativi ai cinque nodi, poi i valori dei tassi Spot (r_t) ed infine i valori dei tassi r_T è stato possibile calcolare i coefficienti a , b e c dell'equazione (4.10) ottenendo rispettivamente i valori della tabella (4.6):

r	a	b	c
r_{fwd}	-0,000055	0,002231	0,008701
r_t	-0,000035	0,001482	0,013058
r_T	-0,000067	0,002886	0,008981

Tabella 4.6: Coefficienti a , b , c ottenuti utilizzando come variabile dipendente nella prima riga i valori dei tassi Forward, nella seconda i valori dei tassi Spot e infine nella terza i valori r_T .

Anche qui i valori dei coefficienti ottenuti per r_T sono indicativi. Sono stati inseriti per maggiore chiarezza del lettore. È fondamentale ricordare che il loro valore varia ad ogni iterazione della simulazione Monte Carlo in quanto dipendono dai valori dello scenario

che a loro volta dipendono dai numeri casuali generati.

I nodi utilizzati sono quelli riportati in Tabella (4.7). In realtà, in tabella non è stato riportato il nodo riferito alle poste a vista, in quanto ha durata un giorno e secondo la normativa imposta da Banca d'Italia la scadenza della fascia è posta pari a zero [Ban13]. Per tutte le altre fasce è stato ipotizzato che tutte le scadenze e le revisioni di tasso all'interno di una precisa fascia temporale avvengano nel punto medio della stessa così come è stato anticipato nel precedente paragrafo quando sono state definite le fasce temporali. Nella tabella (4.7) sono stati riportati i nodi e i valori centrali delle fasce di tempo ($\langle t \rangle$):

<i>Nodi</i>	$\langle t \rangle$
1M	0,042
3M	0,167
6M	0,375
1Y	0,750
2Y	1,500
3Y	2,500
4Y	3,500
5Y	4,500
7Y	6,000
10Y	8,500
15Y	12,500
20Y	17,500
Oltre	22,500

Tabella 4.7: Nella prima colonna sono riportati i nodi chiave che corrispondono ai valori centrali delle diverse fasce di tempo espresse in anni .

Per maggiore chiarezza, si può notare dalla tabella (4.7) che i primi 3 valori dei nodi sono definiti in mesi (1M, 3M e 6M) mentre tutti gli altri sono riportati in anni. In realtà, anche per questi nodi è come se si stesse considerando la frazione di anno e infatti il calcolo del valore centrale della fascia è stato eseguito in anni applicando la relazione 4.1. Ad esempio la fascia 1M è stata convertita prima in anni e poi è stata utilizzata la relazione 4.1 per calcolare il valore centrale della fascia. Avendo applicato il processo di regressione polinomiale è stato esteso il lavoro fatto per i 5 nodi ad una situazione di 13, escludendo il nodo A vista per le ragioni elencate in precedenza. In questo modo è stato possibile ricavare i valori dei tassi Forward (r_{fwd}), Spot Interpolata (r_t) e i valori r_T per i 13 nodi. Tutti questi valori sono stati riportati in Tabella (4.8):

<i>Nodi</i>	r_{fwd}	r_t	r_T	<i>Media</i>
1M	0,879%	1,312%	0,910%	0,883%
3M	0,907%	1,330%	0,946%	0,911%
6M	0,953%	1,361%	1,005%	0,957%
1Y	1,034%	1,415%	1,111%	1,038%
2Y	1,192%	1,520%	1,316%	1,197%
3Y	1,393%	1,655%	1,578%	1,398%
4Y	1,584%	1,782%	1,826%	1,589%
5Y	1,763%	1,902%	2,061%	1,768%
7Y	2,011%	2,070%	2,388%	2,017%
10Y	2,369%	2,315%	2,866%	2,376%
15Y	2,800%	2,616%	3,457%	2,808%
20Y	3,091%	2,836%	3,894%	3,100%
Oltre	3,106%	2,882%	3,995%	3,117%

Tabella 4.8: Valori dei tassi Forward, valori della Spot Interpolata, valori dello scenario e i valori di media riferiti ai 13 nodi.

Il valore media rappresenta la media di tutti i valori r_T simulati relativi a uno specifico nodo. Anche qui è doveroso ricordare che i valori di scenario e media riportati in Tabella (4.8) sono solo un esempio. Questi valori variano ogni volta in cui viene avviata la simulazione Monte Carlo. I valori riportati in tabella (4.8) sono stati graficati ottenendo le quattro curve riportate in figura:

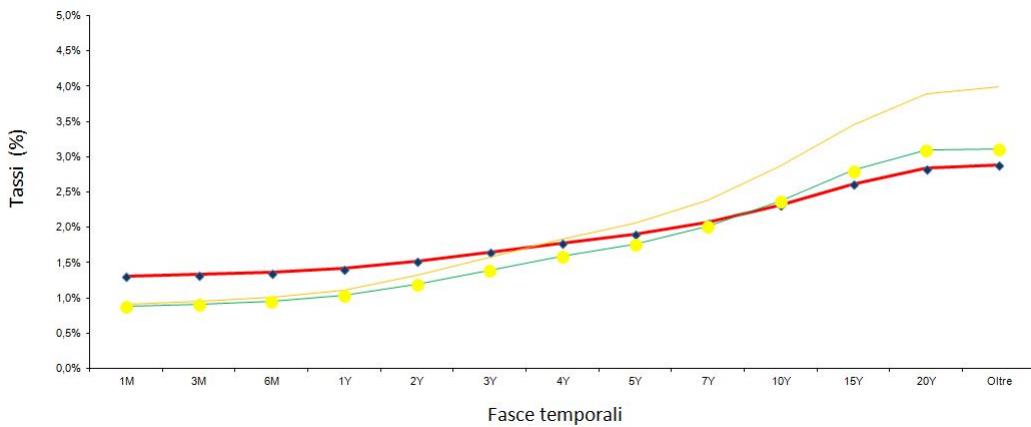


Figura 4.3: La curva di colore arancione è riferita allo scenario generato dalla routine di simulazione, la curva di colore rosso con i rombi blu è la curva Spot interpolata, la curva di colore verde è riferita alla media e i pallini gialli rappresentano la curva dei tassi Forward. I rombi blu rappresentano i nodi che come si può vedere dal grafico corrispondono ai valori centrali delle 13 fasce.

In figura sono state rappresentate quattro curve con quattro colori differenti. La curva di colore rosso con i rombi blu è la curva Spot interpolata, la curva di colore arancione è riferita allo scenario generato dalla routine di simulazione, la curva di colore verde è riferita alla media e i pallini gialli rappresentano la curva dei tassi Forward. Tramite un primo test visivo è possibile verificare che i valori medi dei singoli nodi tendono verso i tassi Forward. Questo è in linea con quanto è stato detto teoricamente nel precedente paragrafo e pertanto è un indice della correttezza della simulazione.

4.2.2 Calcolo del Delta Valore

Il modello di simulazione Monte Carlo permette di generare un numero molto elevato di scenari dei singoli nodi di tasso coprendo l'area degli scenari favorevoli e avversi della struttura dei rendimenti che sono ammissibili dal punto di vista statistico al tempo corrente. L'esposizione al rischio di tasso di interesse è misurato in relazione alle attività e passività comprese nel portafoglio bancario. All'interno di ogni singola fascia le attività vengono compensate dalle passività fornendo in questo modo una posizione netta (il Gap) (2.1 nel Capitolo 2). Per comprendere meglio quanto è stato detto si supponga che una banca abbia un milione di attivo e un milione di passivo. Considerando le 14 fasce temporali (inclusa quindi la fascia delle poste a vista), si supponga che l'attivo e il passivo siano suddivisi nelle varie fasce così come è riportato in tabella:

Fasce	Vista	1M	3M	6M	1Y	2Y	3Y
Attivo	70000	200000	100000	120000	70000	80000	80000
Passivo	130000	40000	80000	90000	120000	80000	50000
Gap	-60000	160000	20000	30000	-50000	0	30000

Fasce	4Y	5Y	7Y	10Y	15Y	20Y	Oltre
Attivo	90000	60000	30000	30000	30000	20000	20000
Passivo	50000	360000	0	0	0	0	0
Gap	40000	-300000	30000	30000	30000	20000	20000

Tabella 4.9: Nella prima riga delle due tabelle sono riportate le varie fasce incluse le poste a vista. Nelle seconda riga sono riportati i valori di attivo relativi ai vari periodi, nella terza i valori di passivo e infine nella quarta riga sono riportati i valori di Gap.

Nella prima riga delle due tabelle sono riportate le varie fasce di tempo. Nella seconda riga sono riportati i valori di attivo mentre nella terza i valori di passivo. Infine nella quarta riga sono riportati i valori di Gap ottenuti dalla differenza tra i valori di attivo e passivo secondo i vari periodi. Il modello, inoltre, permette di calcolare il *Delta valore* (che d'ora in poi verrà definito con Δ) ovvero la variazione del patrimonio economico complessivo della banca per ogni scenario simulato. Per capire com'è possibile calcolare Δ si faccia riferimento ai valori di scenario riportati nella quarta colonna della tabella (4.8). Un Δ è definito come la somma dei gap ponderati per le diverse fasce. Quindi per calcolare il Δ riferito ai valori r_T riportati in tabella (4.8), occorre calcolare i gap ponderati per le diverse fasce. Per far ciò si considerano, come esempio, i valori di attivo, passivo e di gap riportati nelle tabelle (4.9).

I gap ponderati (che nella formula verranno indicati con A) sono definiti come il prodotto del gap (G) per il fattore di ponderazione (F), ovvero:

$$A_\alpha = G_\alpha \cdot F_\alpha \quad (4.11)$$

I fattori di ponderazione per le varie fasce (che nella formula sono indicati con F), invece, sono stati calcolati utilizzando la seguente relazione:

$$F_\alpha = (r_T - r_t)MD \quad (4.12)$$

dove con r_T sono stati indicati i valori dello scenario riportati nella quarta colonna della tabella (4.8) e infine con r_t i valori dei tassi Spot riportati nella terza colonna della tabella (4.8). I valori di *Modified Duration* (MD) sono quelli riportati nella Circolare 250 da Banca D'Italia [Ban13]. Questo calcolo è stato eseguito per tutte le fasce ottenendo i

vari fattori di ponderazione. Ora ci sono tutti gli elementi per poter definire e calcolare il Δ . Come già è stato detto prima, il Δ è definito come la somma di tutti i gap ponderati definiti per le varie scadenze:

$$\Delta = \sum_{t=0}^{\alpha} A_{\alpha} \quad (4.13)$$

dove α è pari a 14 in quanto 14 sono le fasce considerate ed A_{α} sono i vari gap ponderati relativi alle varie fasce. Come si può vedere dalla tabella (4.10) il valore di (MD) relativo alle poste a Vista è stato posto da Banca d'Italia pari a zero (la scadenza relativa a questa fascia è pari a zero). Quindi il corrispondente fattore di ponderazione è pari a zero e anche il Gap Ponderato. Nelle tabelle seguenti (4.10) sono riportati i valori di *Modified Duration* per le varie fasce, i fattori di ponderazione e i corrispondenti valori di Gap ponderato ottenuti dalle precedenti relazioni:

Fasce	Vista	1M	3M	6M	1Y	2Y	3Y
Modified Duration	0,00	0,04	0,16	0,36	0,71	1,38	2,25
Fattori di ponderazione	0,00%	-0,02%	-0,06%	-0,13%	-0,22%	-0,28%	-0,17%
Gap ponderato	0	-26	-12	-38	109	0	-52

Fasce	4Y	5Y	7Y	10Y	15Y	20Y	Oltre
Modified Duration	3,07	3,85	5,08	6,63	8,92	11,21	13,01
Fattori di ponderazione	0,13%	0,61%	1,61%	3,66%	7,51%	11,87%	14,49%
Gap ponderato	54	-1832	484	1097	2252	2373	2897

Tabella 4.10: Nella prima riga delle due tabelle sono riportate le fasce temporali. Nelle seconda riga sono riportati i valori di *Modified Duration*, nella terza i fattori di ponderazione e infine nella quarta riga sono riportati i valori di Gap ponderato.

Per ogni scenario viene calcolato il Δ . Ad esempio per lo scenario definito nel precedente paragrafo il Δ risulta essere questo:

$$\Delta_{1000} = -7306,35 \quad (4.14)$$

4.2.3 Distribuzione del Delta Valore

Simulando un numero molto elevato di scenari dei vari nodi della curva e calcolando il Δ per tutti gli scenari simulati si ottiene una distribuzione Δ . Ad esempio con i 1000 scenari, simulati in precedenza, è stato possibile ottenere la seguente distribuzione dei Δ :

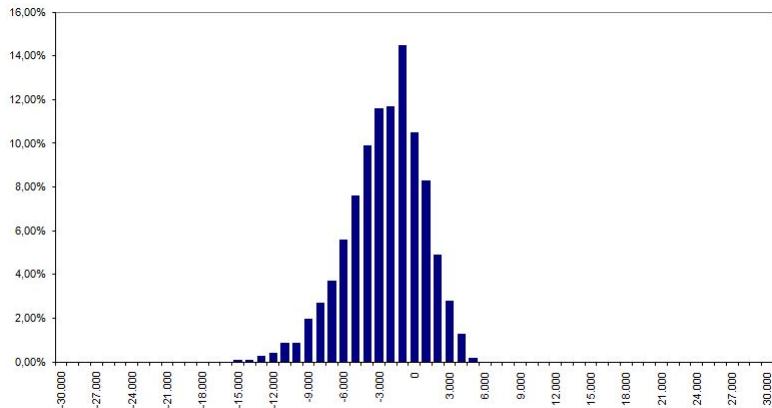


Figura 4.4: Esempio di distribuzione Δ ottenuta simulando 1000 scenari. Sull'asse delle ascisse sono riportati i Δ simulati con le 1000 simulazioni mentre sull'asse delle y le frequenze relative.

Il grafico è stato ottenuto riportando sull'asse delle ascisse i Δ che sono stati suddivisi in classi di frequenze. Queste classi sono quelle riportate sull'asse delle ascisse e variano tra il valore -30000 e $+30000$. Mentre sull'asse delle ordinate la frequenza relativa. La frequenza relativa è definita come il rapporto tra il numero di volte in cui si verifica un evento (in questo caso l'evento è rappresentato dal numero di volte in cui si presenta un dato Δ) e il numero totale di eventi (in questo caso gli eventi sono pari a 1000 in quanto sono state eseguite 1000 simulazioni).

Dal grafico emerge che le simulazioni generate in questo esempio producono dei Δ in gran parte negativi. Secondo questo esempio la banca nella gran parte dei casi dovrebbe subire variazioni sul patrimonio economico negative. I valori negativi sono indice appunto di scenari sfavorevoli. È possibile stimare la variazione di valore economico di una banca a specifiche variazioni del tasso di riferimento. In questo modo è possibile misurare il rischio di tasso ovvero le perdite potenziali conseguenti ad una variazione avversa dei tassi di interesse. La misura di rischio di tasso può essere effettuata considerando un preciso percentile della curva. Come esempio, sono stati scelti vari percentili ed in corrispondenza di ognuno è stata calcolata la massima perdita osservabile. Nelle tabelle seguenti sono stati riportati i percentili scelti e i corrispondenti Δ .

Percentili	1%	5%	10%	15%	25%
Δ	-11741,565	-8724,712	-7199,905	-6228,140	-4921,561

Percentili	50%	60%	75%	85%	95%	99%
Δ	-2627,916	-1855,151	-677,906	309,762	1798,539	3245,288

Tabella 4.11: Nella prima riga delle tabelle sono riportati i vari percentili e nella seconda riga i corrispondenti Δ .

Ad esempio nel momento in cui si prende il 25% percentile si hanno dei Δ minori o uguali al valore $-4921,561$. Per concludere utilizzando un modello di questo tipo è possibile modellare i possibili spostamenti della curva e pervenire a misure di rischio non influenzate dalle scelte dell'analista.

Capitolo 5

Conclusioni

In questa tesi si è studiato l'approccio stocastico e un modello di simulazione Monte Carlo che è stato applicato per la misurazione del Rischio di Tasso di Interesse nelle banche. Applicando una procedura stocastica multivariata è stato possibile simulare tutti i livelli possibili di tasso, statisticamente ammessi. In questo modo è stato possibile registrare un insieme molto ampio di possibili aumenti o riduzioni del patrimonio complessivo il cui andamento può essere descritto da una distribuzione delle variazioni del valore economico di una banca (delta-valore). Sono emersi i vantaggi dell'utilizzo di un approccio stocastico rispetto all'utilizzo dell'approccio deterministico in quanto è possibile ottenere delle misure di rischio di tasso più affidabili e meno sensibili alle scelte dell'analista. Il modello intercetta gli scenari di perdita potenzialmente molto gravi e questo può essere un vantaggio per la banca in quanto ha l'opportunità di correggere in tempo i rischi attraverso delle appropriate tecniche di copertura o di modificare la struttura degli investimenti. Questo modello funziona bene in un contesto di tassi positivi, infatti la serie storica considerata presenta tutti tassi positivi. Il modello però deve rivisto nel caso in cui venga applicato in un contesto di tassi negativi. Anche se dal punto di vista economico la condizione di tassi negativi viene considerata anomala però è una situazione che attualmente caratterizza alcuni nodi della curva dei rendimenti dell'area Euro.

Da questo lavoro emerge come sia utile l'utilizzo dei modelli fisici per gestire la complessità dei mercati finanziari.

Appendice A

Richiami di probabilità

Assegnato uno *spazio di probabilità* (Ω, F, μ) , dove Ω indica un insieme non vuoto detto spazio dei campioni, F una σ – *algebra* di parti di Ω (dette eventi) ed μ una misura di probabilità su F , si definisce:

- *Variabile Aleatoria*: X è definita aleatoria (o stocastica o casuale) quando può assumere un insieme di possibili valori a cui è possibile associare una ben definita probabilità di verificarsi. Precisamente è definita come una funzione μ – *integrabile* sullo spazio di probabilità (Ω, F, μ) . Un esempio tipico di spazio dei campioni è \mathbb{R} e la σ – *algebra* associata di solito è quella dei boreiani B , generata da un intervallo aperto. Quindi si avrà uno spazio di probabilità del tipo (\mathbb{R}, B, μ_L) . Infine μ_L è la misura di Lebesgue ed è definita come $\mu_L(A) = b - a$ per $A = (a, b)$. Quando l'evento A si verifica, la funzione X è definita come [Wol13]:

$$X(A) = \int_A X(w) d\mu(w) \quad (\text{A.1})$$

Il valore atteso di una variabile random è definito come:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(w) d\mu(w) \quad (\text{A.2})$$

Ciò significa che X è definito nello spazio di probabilità $L^1(\Omega, F, \mu)$. Se X è definito nello spazio di probabilità $L^n(\Omega, F, \mu)$ si possono definire i momenti di ordine n come:

$$E[X^n] = \int_{\Omega} X^n(w) d\mu(w) \quad (\text{A.3})$$

- *Processo stocastico*: può essere definito come una collezione di variabili aleatorie $(X_t)_{t \geq 0}$ su (Ω, F, P) . Il processo viene detto a *tempo discreto* se t ad esempio assume valori nell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Viene detto a *tempo continuo* se t assume valori nell'insieme \mathbb{R}^+ [Gia07].

Una misura μ è definita assolutamente continua rispetto ad un'altra misura ν ($\mu \ll \nu$) se per tutti gli $A \in \mathcal{F}$ si ha che $\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0$. Se poi $\mu \ll \nu$ e $\nu \ll \mu$ si dice che le due misure sono equivalenti. Quest'ultima considerazione è molto importante per definire il teorema di Radon-Nikodym. Il teorema sostiene che se $\mu \ll \nu$ allora esiste una funzione misurabile p tale che per ogni $A \in \mathcal{F}$:

$$\mu(A) = \int_A p d\nu \quad (\text{A.4})$$

dove la funzione $p = \frac{d\mu}{d\nu}$ è chiamata densità o derivata di Radon-Nikodym. Nel caso in cui μ e ν siano equivalenti si ha che:

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \left(\frac{d\nu}{d\mu} \right)^{-1} \quad (\text{A.5})$$

La funzione di distribuzione cumulativa di una variabile aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ è definita come:

$$F(x) = \text{Prob}[X(w) \leq x] = \mu(w \in \Omega : X(w) \leq x) \quad (\text{A.6})$$

Questa funzione gode delle seguenti proprietà caratteristiche:

- $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$;
- $F(x)$ è la probabilità per un intervallo aperto $(-\infty, x]$. È continua da destra e ammette limite da sinistra;
- $F(x)$ è monotona non decrescente.

La conoscenza di F implica che :

$$F(b) - F(a) = P[a \leq X(w) \leq b] = \mu(w \in \Omega : a \leq X(w) \leq b) \quad (\text{A.7})$$

A questo punto è possibile scrivere $dF(x) = p(x)dx$ ed è possibile lavorare nello spazio di probabilità:

$$(\mathfrak{R}, \mathcal{B}, p(x)dx) \quad (\text{A.8})$$

Il valore atteso di una variabile random sarà pertanto definito come:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(w) d\mu(w) = \int_{\mathfrak{R}} x p(x) dx \quad (\text{A.9})$$

Spesso il valore atteso si indica con μ .

La varianza, indicata con σ^2 è definita come:

$$\sigma^2 = \int_{\mathfrak{R}} (x - E[X])^2 p(x) dx \quad (\text{A.10})$$

Le stesse considerazioni fatte per una variabile random con valori in \mathfrak{R} , possono essere estese a una distribuzione di d variabili random con valori reali, X_1, \dots, X_d , dal momento che \mathfrak{R}^d è uguale ad $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R}$, nel caso di d variabili random come componenti di un vettore d -dimensionale. Tramite la relazione:

$$p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d = \mu(w \in \Omega : x_1 \leq X_1(w) \leq x_1 + dx_1, \dots, x_d \leq X_d(w) \leq x_d + dx_d) \quad (\text{A.11})$$

è possibile passare da Ω a \mathfrak{R}^d . La $p(x_1, \dots, x_d)$ si chiama anche densità congiunta delle d componenti.

Per un vettore random, $X \in \mathfrak{R}^d$, si introduce il concetto di **funzione caratteristica**:

$$G_X(\mathbf{K}) = G_X(K_1, \dots, K_d) = \int_{\mathfrak{R}^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} p(x) d^d(x) \quad (\text{A.12})$$

che coincide con la trasformata di Fourier della densità nel momento in cui questa esiste. Le funzioni caratteristiche sono uno strumento molto importante in quanto la conoscenza della funzione caratteristica di un vettore random equivale alla conoscenza della sua distribuzione. È possibile generare tutti i momenti di X tramite lo sviluppo in serie di potenze della funzione caratteristica di X :

$$G_X(\mathbf{K}) = \sum_{|m|=0}^{\infty} \frac{(iK_1)^{m_1} \dots (iK_d)^{m_d}}{m_1! \dots m_d!} \langle x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} \rangle \quad (\text{A.13})$$

dove $\langle x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} \rangle = E(x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d})$, mentre $|m| = m_1 + \dots + m_d$.

È possibile sviluppare in serie di potenze anche il logaritmo della funzione caratteristica:

$$\ln G_X(\mathbf{K}) = \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{(iK_1)^{m_1} \dots (iK_d)^{m_d}}{m_1! \dots m_d!} \langle \langle x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} \rangle \rangle \quad (\text{A.14})$$

dove i coefficienti $\langle \langle x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d} \rangle \rangle$ prendono il nome di **cumulanti**. Quest'ultimi non sono attese di potenze delle componenti x_j , ma invece costituiscono delle particolari combinazioni di momenti di ordini diversi. Sono molto importanti e utili i cumulanti del secondo ordine in quanto costituiscono gli elementi della **matrice delle covarianze**:

$$\langle \langle x_i x_j \rangle \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \sigma_{ij}^2 = \mathbf{Cov}(x_i, x_j) \quad (\text{A.15})$$

Si chiamano **varianze** delle componenti gli elementi diagonali di tale matrice:

$$\langle \langle x_j^2 \rangle \rangle = \langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2 = \sigma_j^2 = \mathbf{Cov}(x_j, x_j) \quad (\text{A.16})$$

Due variabili random X_1 e X_2 si dicono **non correlate** se $\mathbf{Cov}(x_1, x_2) = 0$.

Due variabili random X_1 e X_2 si dicono **indipendenti** se si verifica una delle seguenti quattro condizioni equivalenti:

- $p(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$;
- $G(k_1, k_2) = G_1(k_1)G_2(k_2)$;
- $\langle x_1^{m_1}x_2^{m_2} \rangle = \langle x_1^{m_1} \rangle \langle x_2^{m_2} \rangle, \forall m_1, m_2$;
- $\langle \langle x_1^{m_1}x_2^{m_2} \rangle \rangle = 0, \forall m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$.

Nel momento in cui due variabili aleatorie sono indipendenti esse risultano essere automaticamente non correlate, però il contrario non è sempre vero.

Conoscendo la distribuzione comune di due variabili random $p(x_1, x_2)$ è possibile conoscere le loro distribuzioni marginali:

$$p_1(x_1) = \int_{\mathfrak{R}} p(x_1, x_2) dx_2 \quad (\text{A.17})$$

$$p_2(x_2) = \int_{\mathfrak{R}} p(x_1, x_2) dx_1 \quad (\text{A.18})$$

La probabilità condizionata per x_1 e x_2 è definita come:

$$p(x_1|x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p_2(x_2)} \quad (\text{A.19})$$

con $p_2x_2 \neq 0$. Essendo $p(x_1|x_2)$ una densità di probabilità, è possibile calcolare $\forall x_2$ il valore atteso di x_1 che è chiamata **attesa condizionata**:

$$E[x_1|x_2] = \int_{\mathfrak{R}} x_1 p(x_1|x_2) dx_1 \quad (\text{A.20})$$

L'attesa condizionata di x_1 rispetto a x_2 è ancora una variabile random a causa della dipendenza dalla variabile x_2 e pertanto è possibile calcolare il valore atteso [Wol13]:

$$E[E[x_1|x_2]] = E[x_1] = \int_{\mathfrak{R}} \int_{\mathfrak{R}} x_1 p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{A.21})$$

Ci sono anche altri indicatori molto importanti per descrivere le distribuzioni di probabilità come la moda, la mediana e i quantili.

La moda è definita come il valore che si presenta con maggiore frequenza.

La mediana è il valore centrale tra i dati numerici.

I quantili, invece, hanno la proprietà di ripartire la funzione di ripartizione in n parti ugualmente numerose.

A.1 Distribuzione Normale

La distribuzione normale o di Gauss (prende il nome dal matematico tedesco Carl Friederich Gauss) è una distribuzione di probabilità continua utilizzata spesso come prima approssimazione per descrivere variabili casuali a valori reali. Il grafico della funzione di densità di probabilità ha una forma campanulare e simmetrica ed è nota come campana di Gauss.

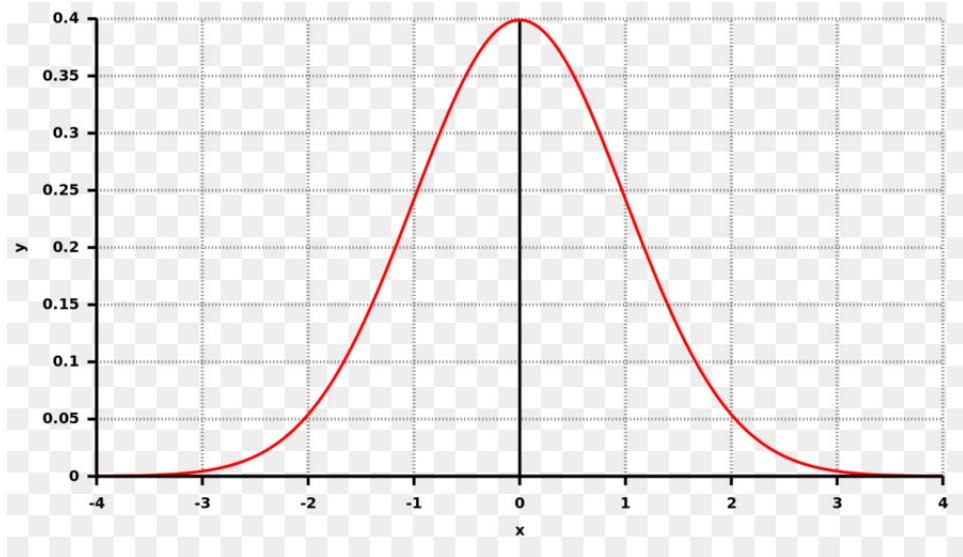


Figura A.1: Distribuzione Normale

Nel caso della distribuzione normale la funzione di densità di probabilità, indicata con $f(x)$, è espressa come:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right) \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A.22})$$

In tal caso si ha che $\alpha = \mu$ e $\beta = \sigma$ dove α è un parametro di locazione e coincide con μ che rappresenta la media, mentre β che è un parametro di scala coincide con la deviazione standard indicata con σ .

A.2 Distribuzione LogNormale

La distribuzione LogNormale è la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X il cui logaritmo $\log X$ segue una distribuzione normale. È una distribuzione continua, fortemente asimmetrica, nella quale moda, media e mediana non coincidono.

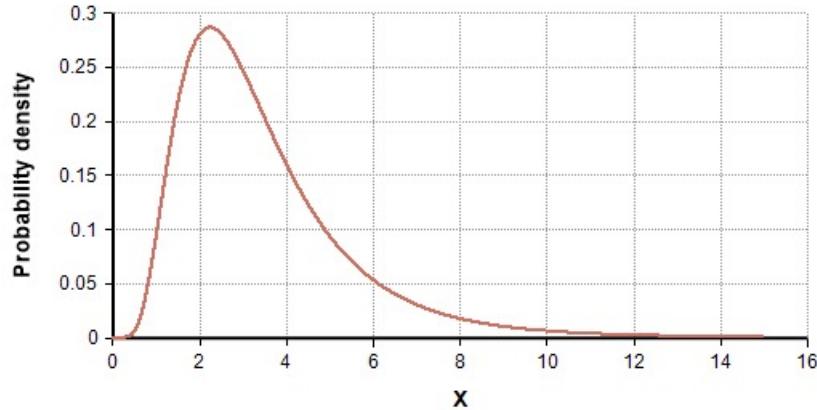


Figura A.2: Distribuzione LogNormale

Nel caso della distribuzione LogNormale la funzione di densità di probabilità, indicata con $f(x)$, è espressa come:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\theta\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x-\alpha}{\beta} \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\theta^2} \left(\ln \frac{x-\alpha}{\beta} \right)^2 \right) \quad x > \alpha \quad (\text{A.23})$$

Con θ è stato indicato il parametro di forma e si ha che $\theta>0$. Il parametro di locazione α e il parametro di scala β sono così definiti:

$$\alpha = \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{\exp(\theta^2) - 1}} \quad \beta = \frac{\sigma}{\exp \frac{(\theta^2)}{2} \sqrt{\exp(\theta^2) - 1}} \quad (\text{A.24})$$

Appendice B

Tabelle

B.1 Tabella n.1

Nodi tempo	Tassi swap	Bootstrap ZC-D
0,003	0,390%	0,390%
0,083	1,005%	1,005%
0,167	1,165%	1,165%
0,250	1,343%	1,343%
0,500	1,606%	1,606%
0,750	1,782%	1,782%
1,000	1,937%	1,937%
2,000	1,334%	1,330%
3,000	1,413%	1,411%
4,000	1,582%	1,585%
5,000	1,785%	1,795%
6,000	1,970%	1,989%
7,000	2,129%	2,157%
8,000	2,251%	2,287%
9,000	2,351%	2,395%
10,000	2,443%	2,496%
11,000	2,525%	2,586%
12,000	2,599%	2,668%
13,000	2,655%	2,731%
14,000	2,697%	2,778%
15,000	2,726%	2,808%
16,000	2,745%	2,828%
17,000	2,753%	2,833%
18,000	2,755%	2,832%
19,000	2,753%	2,825%

20,000	2,752%	2,819%
21,000	2,746%	2,808%
22,000	2,728%	2,781%
23,000	2,714%	2,759%
24,000	2,704%	2,742%
25,000	2,685%	2,713%
26,000	2,670%	2,692%
27,000	2,656%	2,670%
28,000	2,645%	2,654%
29,000	2,628%	2,629%
30,000	2,617%	2,612%
35,000	2,598%	2,583%
40,000	2,603%	2,594%
45,000	2,618%	2,621%
50,000	2,619%	2,622%

Tabella B.1: Valori dei tassi Swap e Bootstrap relativi ai 40 nodi.

Appendice C

Glossario

- *ALM (Asset and Liability Management)*: Metodologie specifiche per la gestione integrata dell'attivo e del passivo. In particolare si intende l' insieme degli strumenti, delle regole e delle procedure organizzative aventi lo scopo di ottimizzare il profilo di rischio - rendimento di una banca. Vedi sezione 2.1.
- *ALMO (Asset and Liability Management Operativo)*: Politiche di Asset and Liability Management adottate come strumento di supporto alla gestione operativa di rischio. Vedi sezione 2.1.
- *ALMS (Asset and Liability Management Strategico)*: Politiche di Asset and Liability Management adottate in fase di pianificazione con funzione quindi strategica. Vedi sezione 2.1.
- *Attività finanziaria (Asset)*: L'investitore (credитore) vanta un diritto nei confronti della ricchezza e del reddito presente e futuro dell'emittente (debitore) dello strumento finanziario, il quale, a sua volta, ha l'obbligo di soddisfare questo diritto. Un Asset può essere definito quindi come un contratto di credito.
- *Attualizzazione*: Con questo termine si indica il processo finanziario che permette di stabilire oggi il valore attuale di un capitale che ha come scadenza una data futura.
- *AS (Attività sensibili)*: Sono le attività il cui valore dipende dai tassi di mercato. Rientrano in questa categoria le attività che giungono in scadenza o che prevedono una revisione del relativo tasso di interesse nel corso del tempo.
- *Capitale nozionale*: È il capitale su cui saranno calcolati gli interessi.
- *Cash flow mapping*: Procedura utilizzata per stimare il rischio di tasso. I flussi di cassa vengono divisi in una serie di fasce temporali e in questo modo a ogni flusso, caratterizzato da specifica scadenza, è possibile associare un valore specifico di tasso. Vedi sezione 2.1.1.

- *Curva dei rendimenti*: Rappresentazione grafica dei tassi di rendimento per operazioni di debito/credito tra banche (tassi interbancari) con diverse scadenze. È chiamata anche *yield curve*.
- *Credit spread*: Indica la differenza tra il tasso di rendimento di un'obbligazione e quello di un altro titolo preso come riferimento.
- *Delta Value*: Variazione del valore economico complessivo della banca. È definito come la somma dei gap ponderati relativi alle varie fasce periodali.
- *Discounted Cash Flow Analysis*: Metodo di valutazione di un investimento basato sull'attualizzazione dei flussi attesi dell'attività in questione. Vedi sezione 1.2.
- *Duration*: Permette di misurare la sensibilità del valore di uno strumento finanziario al variare del tasso di rendimento di mercato. Rappresenta pertanto un vero e proprio indicatore del grado di rischio dello strumento. Vedi sezione 1.6 ed eq. (1.13).
- *Duration gap analysis*: Modello utilizzato per la misurazione e la gestione del rischio di interesse. Le tecniche di duration-gap analysis sono impiegate per stimare la reazione del valore delle attività e della passività di un ente ad un cambiamento istantaneo della struttura dei rendimenti di mercato. È un approccio di tipo patrimoniale. Vedi sezione 2.1.
- *Euribor*: Il tasso Euribor (Euro interbank offered rate) tasso d'interesse di riferimento applicato ai prestiti interbancari in Euro. È ottenuto giornalmente come media dei tassi d'interesse a cui i maggiori istituti bancari europei scambiano depositi con scadenza che può variare da 1 settimana a 12 mesi. Viene rilevato quotidianamente dall'European Banking Federation. Viene anche utilizzato come riferimento per il calcolo dei mutui a tasso variabile.
- *Fixed leg, floating leg*: Vedi definizione *Plain vanilla swap*.
- *Forme tecniche a scadenza*: Sono i contratti di debito/credito per i quali si stabilisce, nel momento in cui vengono stipulati, una data di scadenza. Si può decidere di applicare o un tasso fisso o un tasso variabile.
- *Forme tecniche a tasso fisso*: Vedi definizione *forme tecniche a scadenza* e definizione *tasso fisso*.
- *Forme tecniche a tasso variabile*: Vedi definizione *forme tecniche a scadenza* e definizione *tasso variabile*.

- *Forme tecniche a vista*: Sono i contratti di debito/credito che possono essere ritirati dal creditore in qualsiasi momento senza preavviso o al massimo con preavviso di un giorno.
- *Flusso di cassa*: Con il termine “cassa” si fa riferimento alle disponibilità liquide di un soggetto. Qualsiasi movimento in entrata, o in uscita, che comporta variazioni di tale disponibilità può essere definito “flusso di cassa”.
- *FRA (Forward Rate Agreement)*: È un accordo in cui due parti stabiliscono il tasso di interesse che sarà applicato ad un credito/debito figurativo (nozionale) che sorgerà in un determinato periodo di tempo futuro. Vedi sezione 1.3.
- *Information Providers*: Sono le società che si occupano di distribuire i dati e le informazioni di mercato tramite o dispositivi a pagamento o tramite il proprio sito Internet.
- *IRR (Internal Rate of Return)*: È il tasso interno di rendimento.
- *IRS (Interest Rate Swap)*: È un contratto che impegna due parti a scambiare, a determinate date future, i flussi di interesse calcolati su un medesimo capitale figurativo (nozionale) secondo diverse condizioni di tasso. Nella forma tipica (plain vanilla) le due parti scambiano un tasso fisso contro un tasso variabile che viene rivisto periodicamente sulla base della dinamica di un dato nodo della curva dei rendimenti per scadenza. Vedi sezione 1.4.
- *Margine di interesse*: È definito come la differenza fra interessi attivi e passivi.
- *Modified Duration*: Esprime la misura in cui il valore reagisce alle oscillazioni del tasso interno di rendimento. Vedi sezione 1.6 ed eq. (1.14)
- *OIS (Overnight Index Swap)*: È un contratto in cui due parti scambiano un tasso fisso contro un tasso variabile calcolato per composizione dei tassi overnight osservati durante il periodo di maturazione degli interessi. Vedi sezione 1.5
- *Passività finanziarie (Liabilites)*: Lo strumento finanziario, visto dal lato dell'emittente (debitore) rappresenta un impegno patrimoniale. Una Liabilites può essere definita quindi come un contratto di debito.
- *Plain vanilla swap*: È il contratto più comune degli Interest Rate Swap, in base al quale due parti si impegnano a scambiarsi reciprocamente un flusso di interessi a tasso fisso (la sequenza di interessi a tasso fisso viene detta fixed leg dello swap ovvero gamba fissa) e uno a tasso variabile (la sequenza di interessi a tasso variabile viene detta floating leg dello swap ovvero gamba variabile) che viene definito periodicamente in base all'andamento dei mercati.

- *Piattaforma Bloomberg*: Bloomberg è un'azienda internazionale che fornisce servizi finanziari attraverso informazioni a società e a professionisti ed opera nel software finanziario. È stata fondata da Michael Bloomberg nel 1981. In particolare si rivolge agli operatori finanziari che vogliono essere aggiornati in tempo reale. La piattaforma Bloomberg è un sistema multimediale computerizzato che fornisce, in tempo reale 24 ore su 24, servizi circa le variazioni e i movimenti del mercato finanziario in modo da poter operare in maniera informata.
- *Poste a vista*: Attività e passività prive di scadenza e che possono essere estinte istantaneamente.
- *Proxy*: È sinonimo di un indicatore statistico che descrive il comportamento di un aggregato economico..
- *PS (Passività sensibili)*: Sono le passività il cui valore dipende dai tassi di mercato. Rientrano in questa categoria le passività che giungono in scadenza o che prevedono una revisione del relativo tasso di interesse nel corso del tempo.
- *RW (Random Walk)*: Cammini casuali.
- *Rendimenti risk-free*: Sono i rendimenti certi privi di rischio.
- *Repricing - gap analysis*: Modello per la misurazione e la gestione del rischio di interesse. Le tecniche di repricing-gap analysis sono impiegate, nei sistemi di asset and liability management, per stimare la variazione del margine di interesse che conseguirebbe ad uno shift istantaneo del tasso di mercato. Può essere definito un modello di tipo reddituale dato che la variabile su cui si calcola l'effetto di possibili variazioni dei tassi di interesse è il margine di interesse che è una variabile di tipo reddituale. Vedi sezione 2.1.
- *Rischio di insolvenza*: È il rischio che corre il beneficiario di un prestito nel momento in cui non sia in grado di adempiere ai suoi obblighi di pagamento di interessi e di rimborso del capitale.
- *Shift*: Possibile spostamento che può subire la curva dei rendimenti. Si possono verificare sia spostamenti paralleli in senso verticale (al rialzo o al ribasso) e sia spostamenti non paralleli (quindi il caso di shift torsionali).
- *Shift parallelo al rialzo*: Spostamento parallelo della curva dei rendimenti in alto rispetto alla posizione iniziale. In questo caso tutti i rendimenti si muovono dello stesso ammontare quindi la curva non cambia né forma né inclinazione.
- *Shift parallelo al ribasso*: Spostamento parallelo della curva dei rendimenti in basso rispetto alla posizione iniziale. In questo caso tutti i rendimenti si muovono dello stesso ammontare quindi la curva non cambia né forma né inclinazione.

- *Shift torsionale*: Spostamenti non paralleli della curva dei rendimenti. Tutti i rendimenti non subiscono lo stesso spostamento in ampiezza e segno.
- *Struttura dei rendimenti per scadenze*: Vedi definizione curva dei rendimenti.
- *Tassi d'interesse nominali*: Sono i tassi in cui si trascurano gli effetti dell'inflazione.
- *Tasso d'interesse*: È il costo di un prestito o prezzo pagato per l'utilizzo di fondi (espresso solitamente come percentuale annua). In formule il tasso di interesse r può essere definito come il rapporto fra la somma I pagata per l'uso e il capitale preso in prestito C in un certo periodo di tempo t ; il tasso rappresenta pertanto l'ammontare dell'interesse maturato per ogni unità di capitale in una unità di tempo. Risulta essere quindi uguale a :

$$r = \frac{I}{C} \quad (\text{C.1})$$

L'interesse può essere semplice o composto. Nel caso del calcolo dell'interesse semplice si applicherà la legge di capitalizzazione semplice. Mentre nel caso del calcolo dell'interesse composto si applicherà la legge di capitalizzazione composta.

- *Tasso fisso*: Quando indipendentemente dalle condizioni di mercato e/o dalle esigenze di una o entrambe le parti, il tasso applicato rimarrà costante per tutta la durata del contratto.
- *Tasso forward*: È il tasso d'interesse previsto in base alla struttura a termine dei tassi di interesse. Vedi sezione 1.3.
- *Tasso variabile*: È il tasso che si adegua al mutamento delle condizioni di mercato.
- *Tasso "a pronti"*: È il tasso di rendimento definito per il periodo corrente. Quindi è il tasso che ad oggi si conosce con certezza.
- *Tempo di repricing*: È il tempo in cui da contratto viene ridefinito il tasso di interesse di un credito e di un debito.
- *Time buckets*: Fasce temporali.
- *Valore attuale*: Rappresenta il valore odierno di una somma disponibile tra n periodi applicando un tasso chiamato tasso di attualizzazione.
- *Vita residua di un titolo*: Tempo mancante alla scadenza contrattuale di un titolo di debito.
- *What-if analysis*: È una tipologia di analisi che può contribuire a rendere più efficaci e sicure le decisioni manageriali. È quello strumento che permette di elaborare scenari diversi in modo da offrire i diversi esiti possibili.
- *Yield curve*: Vedi definizione curva dei rendimenti.

Bibliografia

- [Alv17] S. Alvaro, A. Gentili, C. Mottura, Effetti dei tassi di interesse negativi sui mutui e obbligazioni a tasso variabile, Un'analisi dei profili giuridici e finanziari, CONSOB, (2017).
- [Bac00] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, PhD dissertation at Sorbonne, Paris, (1900).
- [Ban16] Banca Centrale Europea, La politica monetaria della BCE: ritorno alla stabilità dei prezzi a medio termine, ossia un'inflazione inferiore ma prossima al 2 per cento, Tratto da European Central Bank: <https://www.ecb.europa.eu/press/key/date/2016/html/sp160113.it.html>, (2016, Gennaio).
- [Ban13] Banca D'Italia, Circolare 285, Rischio di tasso di interesse sul portafoglio bancario in termini di variazioni del valore economico, Disposizioni di vigilanza per le banche, Allegato C, (2013).
- [Ban19] Banca D'Italia, Glossario Banca D'Italia, Tratto da Banca D'Italia: <https://www.bancaditalia.it/footer/glossario/index.html> lettere, (2019).
- [Ben91] R. Benincampi, & all., Asset and Liability Management nelle istituzioni creditizie: l'esposizione al rischio di tasso d'interesse, Roma: Bancaria editrice, (1991).
- [Ber12] D. Berkyürek, Random Walk, University of Gaziantep Engineering of Physics, EP499 Graduation project, (2012).
- [Bla73] F. Black and M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, Vol. 81, 637-654, (1973).
- [Bla76] F. Black, The Pricing of Commodity Contracts, Journal of Financial Economics, Vol. 3, 167-179, (1976).
- [Bloo19] Bloomberg, <https://www.bloomberg.com/>, (2019).

- [Bof12] G. Boffetta, A. Vulpiani, Probabilità in Fisica, Un'introduzione, Springer, (2012)
- [Bol19] E. Bolisani, R. Galvan, La simulazione Monte Carlo: appunti integrativi, Corso di Economia applicato all'ingegneria, Università degli studi di Padova, (2019).
- [Bor11] Borsa Italiana, L'asset and Liability Management nelle banche, Tratto da Borsa Italiana: <https://www.borsaitaliana.it/notizie/sotto-la-lente/asset-and-liability-management-banche167.htm>, (2011).
- [Bor19] Borsa Italiana, Rischio di insolvenza, Tratto da Glossario finanziario: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/rischio-di-insolvenza.html>, (2019).
- [Bri06] D. Brigo, F. Mercurio, Interest Rate Models - Theory and Practice, Milano: Springer, (2006).
- [Bou00] J.P. Bouchaud, M. Potters, Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management, Cambridge University Press, (2000).
- [Com04] Comitato di Basilea, Principles for the management of the interest rate risk, (2004).
- [Com16] Comitato di Basilea, Interest rate risk in the banking book, (2016)
- [DeF14] A. De Falco, Il metodo Monte Carlo, Slides, INFN Cagliari, (2014).
- [DeF91] M. De Felice, F. Moriconi, La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Bologna: Il mulino, (1991).
- [DeF35] B. De Finetti, Sulle operazioni finanziarie, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 289-302, Roma, (1935).
- [DiN08] C. Di Natale, D. Ricceri, Dalle molecole alla finanza, Il moto Browniano e le sue applicazioni alla finanza matematica, Panorama per i giovani, (2008)
- [Ein05] A. Einstein, On the movement of small particles suspended in a stationary liquid required by the molecular-kinetic theory of heat, Annalen der Physik, 17, 549-560, (1905)
- [Exc19] Excel Professionale, Usa il meglio di Excel nella tua professione, Introduzione al VBA, Tratto da: <https://www.excelprofessionale.it/introduzione-al-vba/>, (2019)
- [Fab03] F. J. Fabozzi, S. V. Mann, M. Choudhry, Measuring and Controlling Interest Rate Risk (Seconda edizione ed.), John Wiley & Sons, (2003).

- [Fel68] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol.I, John Wiley & Sons, (1968).
- [Fis30] I. Fisher, The Theory of Interest, The Macmillan Company, New York, (1930).
- [Ful93] R. J. Fuller, J. L. Farrell, Analisi degli investimenti finanziari, Milano: McGraw - Hill Education, (1993).
- [Gia07] E. R. Gianin, C. Sgarra, Richiami di Probabilità e Processi Stocastici, Milano: Springer, (2007).
- [Got16] M. Gotta, Quantificare e controllare il rischio di tasso obbligazionario, Investors l'evoluzione della specie, (2016).
- [Hic46] J. R. Hicks, Value and Capital, Oxford Clarendon Press, (1946).
- [Hua13] W. Huang, Risk Measures with Normal Distributed Black Options Pricing Model, Malardalen University, Vasteras, Sweden, Division of Applied Mathematics, (2013).
- [Hul12] J. Hull, A. White, LIBOR vs. OIS : The Derivates Discounting Dilemma, Journal Of Investment Management, 11, p. 9, (2012, Marzo).
- [Hul15] J. Hull, Options, Futures and Other Derivates, Ninth Edition, University of Toronto: Pearson, (2015).
- [Iwa01] K. Iwasawa, Analytic Formula for the European Normal Black Scholes Formula, (2001).
- [Let17] A. Letizia, A stochastic approach to the measurement of interest rate risk in the banking book, (2017).
- [Let10] A. Letizia, Vulnerability of Risk Management Systems in Credit Spread Widening Scenarios, (2010).
- [Let18] A. Letizia, Metodi matematici per il risk management, Slides, Università del Salento, Dipartimento di matematica e fisica, (2018).
- [Let01] A. Letizia, Codici in ambiente VBA, Banca Popolare Pugliese, (2018).
- [Mer73] R. C. Merton, Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol.4, 143-183, (1973).
- [Met49] N. Metropolis, S. Ulam, The Monte Carlo Method, Vol.44, Numero 247, Journal of the American Statistical Association, (1949).

- [Min18] R. M. Mininni, Valutazione delle opzioni col modello di Black and Scholes, Dispensa, Università Di Bari Aldo Moro:Dipartimento di matematica, (2018).
- [Mis12] F. S. Mishkin, S. G. Eakins, G. Forestieri, Istituzioni e mercati finanziari (Terza Edizione ed.), Milano: Pearson, (2012).
- [Mon08] G. Montesi, G. Papiro, Simulazioni e Corporate Finance Analysis, Milano: FrancoAngeli, (2008).
- [Pea05] K. Pearson, J. W. S. Rayleigh, The problem of the random walk, *Nature*, 72(1865;1866;1867), (1905).
- [Pet04] N. C. Petroni, Econofisica, Finanza e Processi Stocastici, Università degli Studi di Bari, (2004).
- [Pre86] W. H. Press, B. P. Flannery, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, Numerical Recipes, Cambridge University Press, (1986).
- [Res08] A. Resti, A. Sironi, Rischio e valore nelle banche, Milano: EGEA, (2008).
- [Tra14] R. Tramontano, L’evoluzione dell’immunizzazione finanziaria: dalla definizione classica alle teorie semi deterministiche, Tesi di Laurea in Matematica finanziaria, LUISS Guido Carli, (2014).
- [Ver12] F. Verhulst, Henri Poincaré, Impatient Genius, Springer, (2012).
- [Wie64] R. Wiener, I Am a Mathematician, The later life of a prodigy, First MIT Press Paperback Edition, (August 15, 1964).
- [Wol13] P. Wolfgang, J. Baschnagel, Stochastic Processes: From Physics to Finance, 2nd Edition, Springer, (2013)