



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”
Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Reazioni nucleari e stabilità stellare

Laureando:
Alexandru ARATI

Relatore:
Prof. Giampaolo CO’

Anno Accademico 2020/2021

Ringraziamenti

*A mio padre Fabrizio,
a mia madre Alessandra
e a mio fratello Andrei.*

Indice

Ringraziamenti	2
Indice delle figure	4
Indice delle tabelle	5
Introduzione	6
1. Processi di formazione ed evoluzione stellare	7
1.1. Processi fisici che governano la vita della stella	7
2. Reazioni termo-nucleari che rendono stabile il nucleo della stella	13
2.1. Catena protone-protone	13
2.2. Fusione 3α del ^4He in ^{12}C nel nucleo stellare, decadimento 3α e risonanza di Hoyle del ^{12}C	24
2.3. Ciclo CNO (carbonio-azoto-ossigeno)	29
2.4. Nuclei più pesanti del ^{12}C	31
2.5. Reazioni nucleari per la produzione di nuclei più pesanti del ^{56}Fe mediante la cattura neutronica che avviene nei processi s e r	35
2.5.1. Processi lenti (s)	39
2.5.2. Processi rapidi (r)	40
3. Metodi osservativi dell'attività stellare	44
3.1. Misure dello spettro elettromagnetico	44
3.2. Neutrini solari	56
Conclusione	66
A. Coefficiente di Gamow	67
B. Picco massimo della sezione d'urto in condizioni di risonanza	69
C. Criterio di Schwarzschild	72
D. Gas elettronico degenere di Fermi nella stella di neutroni e calcolo della massa limite di Chandrasekhar	77
D.1. Energia ed impulso del gas di Fermi	77
D.2. Statistica di Fermi-Dirac e densità di particelle	78
D.3. Pressione	80
D.4. Equazioni di stato	81
D.5. Equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff	83
E. Tipi di classificazione stellare	87
F. Allargamento naturale della banda spettrale ad oscillazione smorzata	97
G. Equazione di Saha	100
H. Strumenti di spettroscopia applicata	102
Bibliografia	104

Indice delle figure

Figura 1 – Diagramma HR	8
Figura 2 – Ramificazioni della catena protone-protone	9
Figura 3 – Rappresentazione schematica del ciclo CNO	10
Figura 4 – Potenziale di interazione tra due nuclei elettricamente carichi	13
Figura 5 – Efficienza relativa delle catene di combustione pp al variare della temperatura [...]	18
Figura 6 – Rapporto di equilibrio D/H al variare di T misurato in 106 K	20
Figura 7 – Rapporto $^3\text{He}/\text{H}$ e tempo di evoluzione del processo di distruzione del deuterio [...]	22
Figura 8 – Schema della valle di stabilità dei nuclei isobari	22
Figura 9 – Andamento della massa dei nuclei con equale numero di massa $A = Z + N$ [...]	23
Figura 10 – Schema di formazione e di decadimento del ^{12}C	27
Figura 11 – Conteggio delle coincidenze del $^{12}\text{C}^*$ al variare della somma dell'energia [...]	29
Figura 12 – Rappresentazione del ciclo CNO principale. Si noti bene la differenza [...]	30
Figura 13 – Energia di legame per nucleone B/A in funzione del numero di massa A	34
Figura 14 – Rappresentazione schematica dei processi s e r . I quadri neri indicano reazioni [...] ..	37
Figura 15 – Sezione d'urto di cattura neutronica in funzione del numero di neutroni. [...]	38
Figura 16 – Abbondanze relative per nuclei con $A > 60$. Il riferimento è sempre [...]	40
Figura 17 – Abbondanze relative riguardanti i soli processi r	41
Figura 18 – Schema di formazione dei vari nuclei con processi s e con processi r . [...]	42
Figura 19 – Definizione grafica di larghezza equivalente di una riga spettrale tale che [...]	47
Figura 20 – Curva di crescita della larghezza spettrale equivalente W in funzione [...]	49
Figura 21 – Variazione di luminosità e dimensione di una tipica variabile Cefeide [...]	52
Figura 22 – Tassi della reazione $^4\text{He}(2\alpha,\gamma)^{12}\text{C}$ in relazione alla temperatura T	54
Figura 23 – Relazione massa-periodo per modelli teorici computati con CHeB [...]	55
Figura 24 – Flussi dei neutrini con le loro corrispettive probabilità calcolati della coppia [...]	57
Figura 25 – Schema dell'apparecchiatura dell'esperimento GALLEX	60
Figura 26 – Numero di neutrini al giorno per bin (unità elementare dell'istogramma) [...]	61
Figura 27 – Schema delle fasi dell'esperimento SNO	62
Figura 28 – Il flusso spettrale (linea rossa normale) dei neutrini generati dal ciclo CNO [...]	65
Figura 29 – Separazione tra i due regimi in funzione del criterio di Schwarzschild	74
Figura 30 – Andamenti dei gradienti logaritmici di temperatura negli interni stellari. [...]	75
Figura 31 – Tassi di produzione di energia dei processi pp, CNO e 3α [...]	76
Figura 32 – Curve di trasmissione del sistema di Johnson [...]	88
Figura 33 – Schema di Harvard in ordine di temperatura	91
Figura 34 – Schema di Harvard in ordine alfabetico	91
Figura 35 – Stelle della sequenza principale $O9 \div B9$ tutte quante di classe di luminosità V	91
Figura 36 – Diagramma di Hertzsprung-Russell	93
Figura 37 – Schema di funzionamento di un microdensitometro	95
Figura 38 – Fotografia di uno spettro stellare ottenuta con il microdensitometro [...]	96
Figura 39 – Allargamento spettrale naturale smorzato	98
Figura 40 – Struttura di uno spettroscopio tradizionale	102
Figura 41 – Confronto delle prestazioni delle varie griglie di trasmissione	103

Indice delle tabelle

Tabella 1 – Energia prodotta e persa nella catena pp nelle sue tre ramificazioni principali [...]	17
Tabella 2 – Reazioni primarie del ciclo CNO	30
Tabella 3 – Reazioni secondarie del ciclo CNO	31
Tabella 4 – Fusione del ^{12}C in ^{16}O oppure in ^{20}Ne mediante le emissioni 2α oppure α	31
Tabella 5 – Fusione del ^{12}C fino al ^{56}Ni mediante la ripetizione di diverse catture α	32
Tabella 6 – Tempi di fusione degli elementi reagenti in stelle aventi massa $M_{\text{star}} \sim 20 M_{\odot}$	33
Tabella 7 – Bilanciamento tra cattura α e fotodisintegrazione dal ^{28}Si al ^{36}Ar	33
Tabella 8 – Evoluzione di una stella con massa $M = 15 M_{\odot}$	34
Tabella 9 – Logaritmi della luminosità media (L/L_{\odot}) per modelli giacenti nella striscia di [...] ..	55
Tabella 10 – Logaritmi della periodi medi per modelli giacenti nella striscia di instabilità [...] ..	55
Tabella 11 – Confronto degli SNU misurati separatamente, uno nell'esperimento [...]	61
Tabella 12 – Esperimenti di terza generazione possibilmente candidati nell'osservazione [...] ..	63
Tabella 13 – Parametri iniziali e finali di una stella soggetta al moto convettivo [...]	72
Tabella 14 – Confronto tra la classificazione stellare di Secchi e quella di Harvard	90
Tabella 15 – Catalogo di Harvard con le corrispondenti righe spettrali [...]	94
Tabella 16 – Studio dei potenziali di ionizzazione e dei rapporti di degenerazione [...]	101

Introduzione

La tesi che stiamo per introdurre parla principalmente delle reazioni nucleari che avvengono nel nucleo della stella e di come queste ne garantiscano la stabilità.

Il primo capitolo è un ripasso teorico sulla formazione stellare e sulla sua relativa evoluzione.

Il secondo capitolo, che è il cuore stesso della tesi, parla dei processi fisici che ci sono dietro alla formazione stellare, soprattutto quelli nucleari per stelle simili al Sole o più pesanti di esso. I processi nucleari che tratteremo sono la fusione e il decadimento 3α , la catena protone-protone, la cattura protonica, il ciclo CNO (carbonio-azoto-ossigeno), la risonanza di Hoyle del ^{12}C e i processi r e s . Da queste reazioni vengono generati fotoni e neutrini, rilevabili da Terra mediante opportune strumentazioni di laboratorio. Di questo ne tratteremo nel terzo capitolo.

Il primo paragrafo del terzo capitolo parla delle misurazioni spettroscopiche, dei suoi strumenti e dei suoi metodi di misurazione, delle variazioni di luminosità e temperatura delle stelle mediante gli spostamenti spettrali, delle variazioni di composizione chimica della superficie stellare e dei suoi strati più interni. Si parlerà anche del gradiente termico, convettivo e radiativo per parlare del criterio di Schwarzschild applicabile alle stelle variabili.

Il secondo paragrafo del terzo capitolo parla della rivelazione dei neutrini emessi dal Sole e dei problemi legati a queste misure, soprattutto quelli generati dall'oscillazione di sapore.

La tesi termina con le Conclusioni ed una serie di Appendici che approfondiscono alcuni dei temi trattati.

1. Processi di formazione ed evoluzione stellare

1.1. Processi fisici che governano la vita della stella

Negli attuali modelli teorici sull’evoluzione stellare si ritiene che la stella nasca da una grande nebulosa molecolare. La densità media della materia dello spazio intergalattico si aggira tra 10^5 e 10^6 particelle per m^3 . Quella della nube molecolare è circa $10^5 \div 10^7$ volte superiore.

Perturbazioni gravitazionali possono dare vita ad aggregati di materia capaci di attirare a loro volta altro gas intergalattico^[Co12].

L’attrazione gravitazionale fa sì che la nube formatasi si contragga in volumi sempre più piccoli fino a fare innalzare i livelli di densità, pressione e temperatura. Se la massa totale della nube molecolare, che dipende notevolmente dalla composizione elementare della materia, supera la cosiddetta massa critica di Jeans, allora la nube collassa innescando processi di fusione nucleare nel cuore della neonata protostella, non ancora una vera e propria stella. Se la temperatura del nucleo stellare supera i $10^6 K$ è possibile innescare la fusione dell’idrogeno che si trasforma in ^4He mediante una catena di reazioni nucleari intermedie. Il ciclo CNO esiste anche nel Sole, come dice l’esperimento BOREXINO. Per masse inferiori a quelle solari c’è solo produzione di ^4He , sia per la catena protone-protone che per il ciclo CNO. Questo implica che il ^{12}C fosse già presente nella nube stellare. Per le stelle con massa maggiore di quella solare possono avvenire reazioni 3α ^[Co12]. Di questo parleremo nel secondo capitolo della tesi.

Riprendiamo ora il nostro discorso sulla formazione stellare.

Una volta conclusa la transizione dalla protostella alla stella vera e propria ci si pone il problema di studiare la varietà di queste stelle in termini di dimensione, massa, colore, luminosità, temperatura e pressione. Si passa dalle stelle calde di un colore blu intenso a stelle fredde di un colore rosso debole. Le masse stellari variano da 0.1 a 30 masse solari^[Co12]. La collocazione di queste stelle nel cosiddetto diagramma di Hertzsprung-Russell (diagramma HR – Figura 1) dipende dalla temperatura, che a sua volta è legata alla massa^[Co12]. In questo diagramma si studia lo spettro dei colori in termini di classe secondo lo schema di Harvard lungo l’asse inferiore delle ascisse (lettere maiuscole eventualmente seguite dalle cifre romane o da quelle moderne) e possibilmente secondo gli indici di colore dal blu al verde^[Co12]. Nell’asse superiore delle ascisse si indica la temperatura effettiva della superficie stellare^[Co12]. Nell’asse sinistro delle ordinate si indica la magnitudine assoluta ed eventualmente nell’asse destro delle ordinate la luminosità assoluta messa a confronto con la luminosità solare^[Co12].

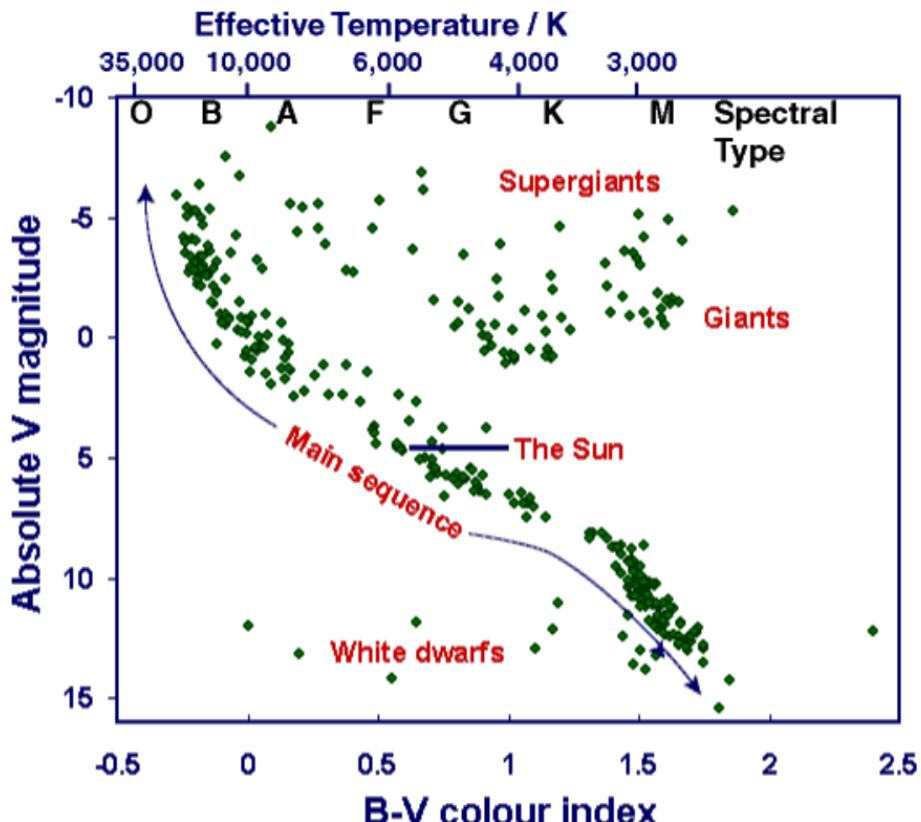


Figura 1 – Diagramma HR

Dal punto di vista empirico la differenza tra le due magnitudini assolute nel blu e nel verde $B - V$ è legata alla temperatura assoluta T superficiale effettiva (media in realtà), quest'ultima misurata in Kelvin, secondo la seguente formula empirica^[Co12]:

$$B - V \sim 7000 K \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{15000 K} \right) \quad (1.6)$$

L'emissione di luce da parte della stella obbedisce grossomodo alla legge di Stefan-Boltzmann del corpo nero in termini di luminosità L (flusso di fotoni) messo in relazione al raggio R e alla temperatura superficiale effettiva T secondo la relazione

$$L = 4\pi R^2 \sigma_B T^4 \quad (1.7)$$

dove σ_B è la costante di Stefan-Boltzmann^[Co12].

Nella formula (1.7) viene definita la potenza luminosa (ovvero luminosità) L della stella come l'energia luminosa in unità di tempo che attraversa la superficie $4\pi R^2$ di una sfera immaginaria. Il raggio R di tale sfera è definito come il raggio della stella inteso come la distanza di un qualsiasi punto della sua superficie sferica dal suo centro.

Ritornando al discorso del diagramma HR, ci si accorge, però, che le stelle non sono uniformemente distribuite lungo le coordinate luminosità-temperatura. Dalla Figura 1 qui sopra indicata notiamo che ci sono delle ben precise zone di addensamento dei gruppi stellari. Questi gruppi maggioritari sono la sequenza principale, l'insieme delle nane bianche, quello delle giganti e quello ancora delle supergiganti. Empiricamente si nota che la sequenza principale segue un andamento a forma di serpente passando dalla classe O delle stelle giganti, calde e blu alla classe M delle stelle piccole, fredde e rosse. Lungo la classe F , attorno alla magnitudine assoluta di valore $M = 5$, la sequenza

principale assume un andamento localmente quasi lineare con una discesa moderata. Al di fuori della sequenza principale ci sono decisamente più giganti rosse che nane bianche in accordo alla legge di Stefan-Boltzmann enunciata nella formula (1.7). In altre parole, le giganti rosse non solo hanno un grande raggio, ma anche una grande luminosità, sempre per effetto della relazione (1.7). Le giganti rosse sono inserite in alto a destra del diagramma HR, mentre le nane bianche in basso a sinistra^[Co12].

Una volta collocate le varie stelle nel diagramma HR cerchiamo ora di capire come si evolve una stella dalla sua nascita alla sua morte passo dopo passo.

Abbiamo già parlato del processo di formazione stellare partendo dalla nebulosa planetaria fino ad arrivare alla protostella e alla stella vera e propria. Cerchiamo ora di prevedere come si evolverà la stella attuale a seconda dei suoi parametri di magnitudine, colore, raggio, massa e temperatura ricavati nel diagramma HR.

I due parametri principali nel determinare le tappe di vita stellare sono la massa e la temperatura^[Co12]. Riguardo alle stelle più leggere del Sole ne abbiamo già fatto cenno quasi all'inizio del presente paragrafo. Per stelle più pesanti del Sole si innescano processi più avanzati di quello della semplice fusione dell'idrogeno in elio (fusione 3α , catena protone-protone, ciclo CNO).

Ristudiamo, adesso, questi processi, stavolta in termini di temperatura. Se il nucleo stellare ha una temperatura che arriva fino a $10^6 K$ è possibile trasformare l'idrogeno in elio mediante una catena, non più elementare, di reazioni nucleari che danno vita a positroni, a fotoni e a neutrini elettronici. Siamo parlando in questo caso della catena protone-protone nelle sue diverse ramificazioni (Figura 2)^[Co12].

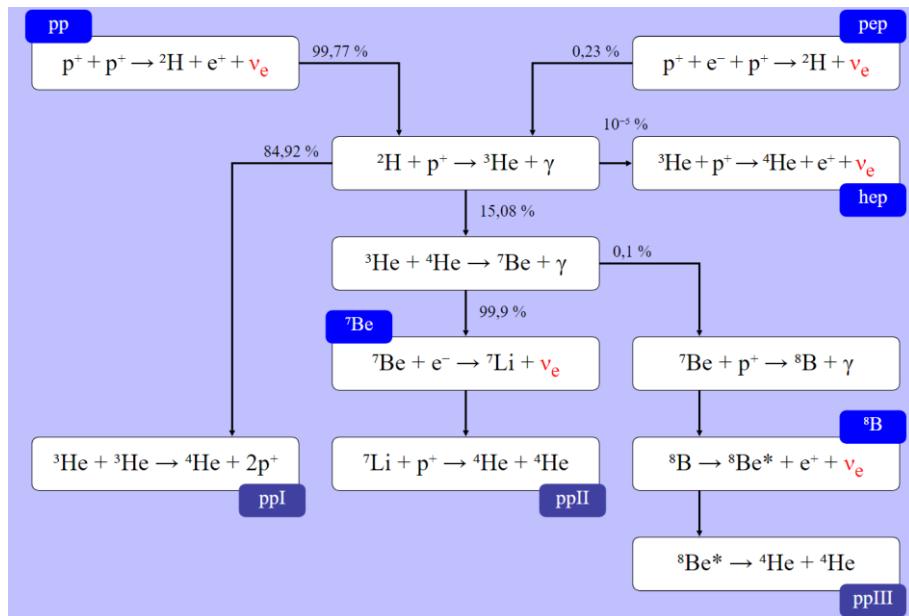


Figura 2 – Ramificazioni della catena protone-protone

Se la temperatura del nucleo della stella rimane ancora a $10^6 K$ e la sua massa totale è abbastanza simile a quella del Sole, si innesca un processo alternativo alla catena protone-protone, si tratta del **ciclo CNO**, detto anche *ciclo di Bethe* (Figura 3)^[Co12].

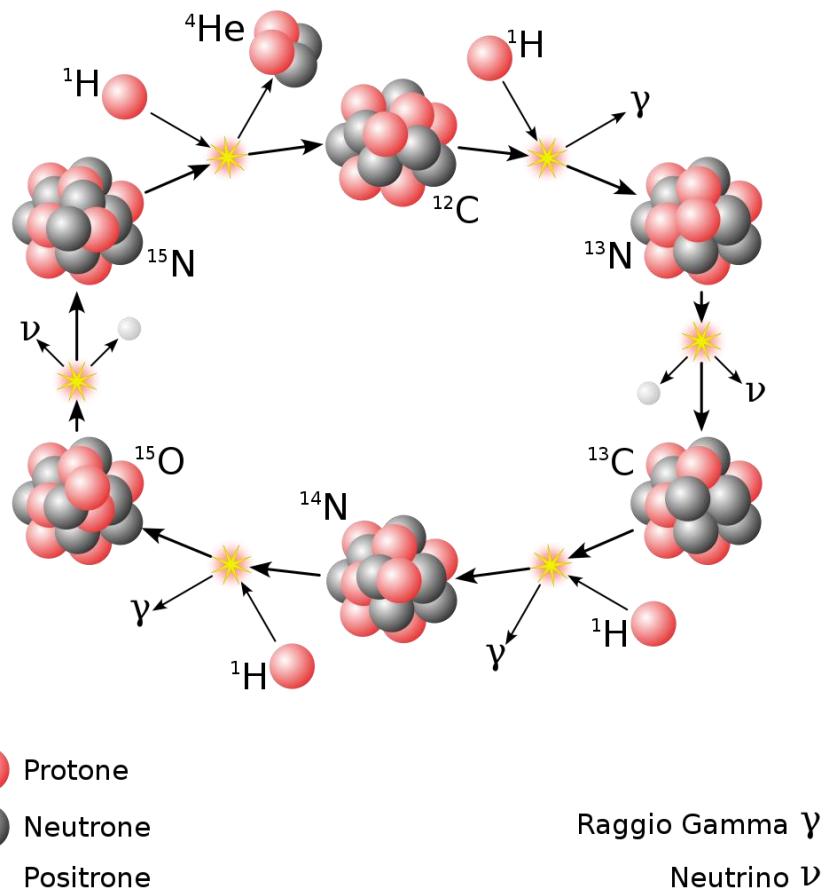


Figura 3 – Rappresentazione schematica del ciclo CNO

Riprendiamo ancora il discorso sulla massa stellare. Ci siamo fermati al caso di stelle aventi masse fino a dieci volte quella del Sole. Arriviamo a discutere il caso di stelle aventi masse fino a 30 volte quella del Sole. Per farne uno studio metodico occorre individuare le stelle in questione lungo le coordinate del diagramma HR, ricavarne la luminosità, e quindi la temperatura. Dalla temperatura si può infine risalire alla massa. La posizione stellare nel diagramma HR ne determina il suo tempo totale di vita. Nello specifico succede che le stelle nane rosse possono rimanere in sequenza principale per centinaia di miliardi di anni. Le stelle giganti bianche, invece, bruciano rapidamente il loro combustibile in qualche milione di anni. Le stelle medie come il Sole permangono in sequenza principale per circa una decina di miliardi di anni^[Co12].

Nelle stelle di sequenza principale avviene il processo di fusione dell'idrogeno. Quando tale fusione termina, la stella se ne esce dalla sequenza principale. Di conseguenza l'attrazione gravitazionale non è più bilanciata dal calore interno generato dalle reazioni nucleari. Nello specifico si ha che la pressione di radiazione, ed eventualmente quella di degenerazione, compensano assieme quella gravitazionale fintanto che la stella rimane in sequenza principale^[Co12].

Secondo gli attuali modelli di astrofisica si ritiene per stelle aventi meno della metà della massa solare non ci sia pressione gravitazionale sufficiente da compensare quella di degenerazione elettronica di Fermi. Di conseguenza ci si limita alla fusione elementare dell'idrogeno in elio senza ulteriori processi di fusione successivi all'elio. Se, invece, la massa stellare è superiore (leggermente o notevolmente) a quella solare è possibile innescare la fusione dell'elio. Tuttavia, ritornando al caso delle stelle leggere, occorre precisare che anche qui c'è la fusione dell'elio,

sebbene assai lenta, che ha un tempo di vita di diversi ordini di grandezza superiore all'età attuale dell'universo. L'insufficienza della pressione di degenerazione rispetto a quella gravitazionale provoca una contrazione del nucleo. Tale contrazione comporta un aumento della pressione termodinamica delle sue particelle che sommandosi a quella di degenerazione elettronica ribilancia quella gravitazionale provocandone un surriscaldamento. Di conseguenza la stella leggera, ormai quasi in fin di vita, diventa una nana bianca^[Co12].

Nel caso di stelle simili al Sole in termini di massa si sviluppa un nucleo fatto di elio ben stabilizzato dalla pressione elettronica. Attorno ad esso ci sono strati di idrogeno che per effetto della pressione gravitazionale bruciano più rapidamente di quanto avviene in una stella in sequenza principale avente la stessa massa. Ciò comporta un'amplificazione della luminosità di un fattore di circa $10^3 \sim 10^6$. L'espansione dell'involucro ne comporta un calo di temperatura, dando vita ad una gigante rossa, questo a causa della legge sperimentale di Wien che mette in relazione la temperatura con la lunghezza d'onda avente il maggiore flusso luminoso in assoluto^[Co12]. Se il lettore non dovesse avere ben presente come funziona la legge di Wien, ne facciamo un piccolo ripasso teorico. In parole chiare, nella formula (1.8) indicata qui sotto, la lunghezza d'onda del colore più luminoso in assoluto λ_{max} è inversamente proporzionale alla temperatura superficiale assoluta della stella T mediante un preciso fattore di proporzione, noto come la *costante dello spostamento di Wien* b , che vale circa $2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$.

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (1.8)$$

Una volta che si è conclusa la fusione dell'idrogeno, l'involucro esterno diventa una nebulosa planetaria al cui centro rimane il nucleo della vecchia stella, ormai defunta, fatto di elio e sostenuto dalla pressione di degenerazione elettronica di Fermi: si tratta di una nana bianca^[Co12].

Se il nucleo della nana bianca è più massiccio della cosiddetta massa limite di Chandrasekhar di circa 1.44 masse solari (vedi il calcolo svolto nell'Appendice D della tesi) è possibile generare elementi più pensanti dell'elio mediante i processi nucleari più complessi appena citati. In queste condizioni la pressione di degenerazione elettronica non riesce a compensare quella gravitazionale. Il collasso della nana bianca è inevitabile. Il suo nucleo si comprime così rapidamente tale da innescare un processo di cattura neutronica da parte dei nuclei atomici con la conseguente formazione di un nucleo stellare essenzialmente costituito da neutroni. Di questo passo l'alta densità (circa $10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) e le basse dimensioni (raggio di circa 20 km) del core della stella di neutroni fanno sì che l'elevatissima forza di gravità ne provochi un nuovo collasso generando un'onda d'urto capace di far espellere gli strati esterni della stella. Stiamo parlando di un'esplosione di supernova di tipo II^[Co12], il cui nucleo rotante si chiama *pulsar*^[Bernardis16 – Pag. 12 su 52]. Per la legge della conservazione del momento angolare ne deriva che la velocità angolare di rotazione della pulsar si aggira su diverse migliaia di giri completi al minuto (qualche decina di Hertz)^[Bernardis16 – Pag. 12 su 52]. Tuttavia, a seconda dei vari tipi di pulsar questo periodo di rotazione può variare sensibilmente da poco più di un millisecondo a circa quattro secondi. Molte delle pulsar oscillano per periodi compresi tra 0.5 s e 1 s. Solo una ventina di pulsar, dette *millisecond pulsars*, oscillano per periodi inferiori a 0.01 s. I periodi sono assai stabili, tanto che si allungano di circa una parte su 10^{15} per il semplice fatto che le pulsar tendono gradualmente a rallentare il loro moto rotazionale^[Treccani11-P].

Per diverso tempo si è sospettato che la causa del rallentamento rotazionale delle pulsar fosse semplicemente l'energia di radiazione di dipolo magnetico espulsa verso l'esterno. Tuttavia, nel 2019 un gruppo di ricercatori dell'Istituto di Fisica delle Alte Energia dell'Accademia Cinese delle Scienze ha scoperto che se il vento relativistico delle pulsar rotanti, costituito da elettroni, positroni e, possibilmente, di un campo magnetico, è abbastanza forte, questo espelle abbastanza energia più di quanto riesca a fare il dipolo magnetico così da far rallentare apprezzabilmente la pulsar, come nel caso della PSR B0540-69, situata nella Grande Nube di Magellano a 160 000 anni-luce dalla Terra^[Gaetani19].

Se le dimensioni del nucleo stellare di neutroni sono sufficientemente piccole a parità di massa, succede che la pressione gravitazionale ha la meglio su quella di Fermi. Di conseguenza il nucleo stellare collassa definitivamente diventando più piccolo del raggio di Schwarzschild, ossia si trasforma in un buco nero^[Co12].

Una volta che ci siamo fatti un'idea qualitativa dei processi di evoluzione stellare, passiamo alle cause fisiche che ci sono dietro, ossia le reazioni termo-nucleari che avvengono nel nucleo della stella in modo da renderla stabile e duratura. Le studiamo proprio adesso nel secondo capitolo della tesi.

2. Reazioni termo-nucleari che rendono stabile il nucleo della stella

2.1. Catena protone-protone

Il primo processo che studieremo nel nucleo di una stella riguarda il caso di stelle che hanno masse inferiori o simili a quella del Sole. Questo processo, che prevale di gran lunga sugli altri e che studieremo nei prossimi paragrafi di questo capitolo, non è altro che la cosiddetta **catena protone-protone** (catena *pp*). Cerchiamo ora di capire in cosa consiste questo tipo di reazione.

La catena *pp* è maggiormente efficace a temperature dell'ordine di 10^7 K ed è la reazione che prevale in gran lunga nel Sole nella conversione dell'idrogeno in elio. Partiamo dall'inizio della catena *pp*, come illustrato nella Figura 2. Essenzialmente succede che due protoni possano fondersi dando vita a un deutone (nucleo di deuterio) con la conseguente emanazione di un positrone e di un neutrino elettronico. Questa prima reazione, probabile al 99.77%, è consentita a patto che la distanza tra i due protoni sia dell'ordine di qualche *fm*. La forza repulsiva di Coulomb ostacola questo processo, ma la fusione può avvenire in maniera non risonante per effetto tunnel^[Co12]. Spieghiamo ora meglio questo nuovo concetto.

Consideriamo due nuclei carichi Z_1 e Z_2 interagenti tra di loro. Per distanza di interazione r superiore a 2 fm abbiamo solo il potenziale elettrico di Coulomb $V(r)$ repulsivo, ossia $V(r) > 0$. Al di sotto di 2 fm prevale in gran lunga l'interazione forte. Fatto sta che in questa zona il potenziale di interazione $V(r)$ risulta prettamente attrattivo, ossia $V(r) < 0$. Lo schema grafico è illustrato in Figura 4.

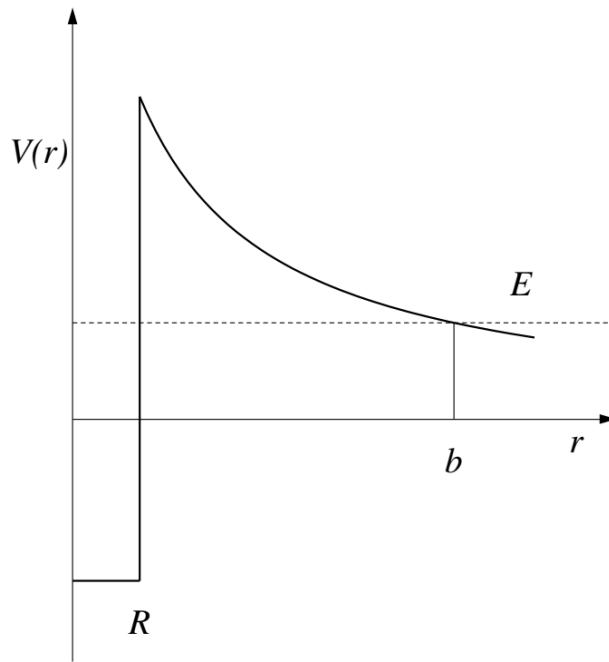


Figura 4 – Potenziale di interazione tra due nuclei elettricamente carichi.

Definiamo ora la massa totale M e la massa ridotta m del sistema a due corpi tenendo conto delle loro rispettive masse m_1 e m_2 (equazioni 2.1-2.2) in modo da semplificare lo studio del potenziale di interazione $V(r)$ tra i due nuclei Z_1 e Z_2 ^[Co12].

$$M = m_1 + m_2 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (2.2)$$

Ricordiamoci che per $r > R$ c'è solo il potenziale coulombiano $V(r)$ tra Z_1 e Z_2 distanti di lunghezza r secondo la relazione (2.3) indicata qui sotto^[Co12].

$$V(r) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.3)$$

In questa relazione abbiamo inserito i due numeri atomici Z_1 e Z_2 , il modulo della carica elettrica elementare $e = |e^-| = p$ e la costante dielettrica nel vuoto ϵ_0 ^[Co12].

Nella relazione (2.4), analoga alla (2.3), sostituiamo il parametro r con b ^[Co12].

$$V(b) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \quad (2.4)$$

In pratica, succede che i due nuclei Z_1 e Z_2 , posti a distanza reciproca b , sono soggetti ad un potenziale $V(b)$ tale da essere bilanciato con l'energia cinetica relativa tra i due nuclei mediante il parametro di massa ridotta m , precedentemente definito dall'equazione (2.2), e l'altro parametro v , riguardante la velocità del centro di massa tra i due nuclei rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, secondo l'equazione (2.5) sostanzialmente uguale alla (2.4)^[Co12].

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \quad (2.5)$$

Il valore massimo del potenziale (2.3), ovviamente, si trova a distanza $r = R$, in analogia con la formula (2.4)^[Co12].

$$V(R) = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (2.6)$$

Se abbiamo l'energia totale $E < V_0$, come nel caso dell'interazione coulombiana nelle zone intermedie tra R e b , dove abbiamo assunto per il momento $V(r) = V_0 = \text{costante}$ da non confondere con la formula (2.3), il problema va studiato secondo lo schema unidimensionale della barriera quadrata di potenziale, tenendo conto degli strumenti teorici della meccanica quantistica di Schrödinger all'interno della sua omonima equazione relativa alla funzione d'onda della particella $\Psi(x, t)$, inizialmente dipendente dal tempo, inserita nella buca di potenziale $U(x)$ secondo la seguente equazione (2.7) indicata qui sotto.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

Per l'interazione forte, invece, abbiamo una buca di potenziale con $E > V_0$ ^[Co12].

Nella formula (2.8) togliamo la dipendenza dal tempo della funzione d'onda $\Psi(x, t)$ in maniera tale da inserire l'energia totale E come l'autovalore dell'operatore temporale $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ^[Co12].

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + U(x) \Psi(x) = E \Psi(x) \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \Psi''(x) + [E - U(x)] \Psi(x) = 0 \quad (2.8)$$

Sfruttando i criteri di Analisi Matematica sulle soluzioni di un'equazione di secondo grado, arriveremo a dire che il coefficiente di trasmissione T per una collina quadrata di larghezza l e di altezza V_0 con la particella avente energia $E < V_0$ vale^[Co12]

$$T = \exp \left[-2l \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)} \right] \quad (2.9)$$

Immaginiamo di avere infinite colline di potenziale di larghezza infinitamente sottile e ne facciamo l'integrazione dalla zona R , in cui il potenziale cambia bruscamente da interazione forte a interazione elettrica, alla zona b , dove l'energia cinetica della coppia dei due nuclei carichi bilancia quella potenziale. Sostituiamo quindi V_0 con $V(r)$, preso dalla formula (2.3), e la larghezza l , presa dalla formula (2.9), con l'integrale $\int_R^b dr$. Otteniamo così la relazione (2.10) del coefficiente di trasmissione dei due nuclei che interagiscono mediante l'effetto tunnel^[Co12].

$$T = \exp \left\{ -2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(r) - E]} \right\} \quad (2.10)$$

Nello specifico se sostituiamo l'espressione $V(r)$ con l'equazione di Coulomb della coppia di nuclei Z_1 e Z_2 ed estraiamo l'argomento della funzione esponenziale riportata nella formula (2.10) otteniamo il cosiddetto *coefficiente di Gamow G* riportato nella formula (2.11).

$$\begin{aligned} G &= 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [V(r) - E]} = 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E \right)} = \\ &= 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \right)} = \\ &= 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)} = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{b} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{R}{b}} \right) - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

La dimostrazione della (2.11) si trova nell'Appendice A della tesi.

Chiusa la parentesi teorica dell'effetto tunnel, riprendiamo, il nostro discorso relativo alla fusione non risonante di particelle cariche. Se ci poniamo la condizione che la distanza limite R ad interazione forte sia intesa come la somma dei raggi dei due nuclei che si toccano, a loro volta considerati sfere rigide, allora ci chiediamo come si devono comportare i due nuclei quando la distanza dei loro centri è inferiore a R , ossia quando sono soggetti all'interazione forte, e l'altro caso in cui i due nuclei non si toccano ($r > R$). Ci occuperemo del secondo caso al nostro scopo.

Nel limite in cui $b \gg R$ si ha che il coefficiente di Gamow si approssima come

$$G = \lim_{b \gg R} \left[2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E \right)} \right] = \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} b} \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right) - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \right\} \approx \\
&\approx 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} b} \frac{\pi}{2} = \pi \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} b} = \pi Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{E}} = \pi\eta
\end{aligned}$$

dove

$$\eta = Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{E}} \quad (2.13)$$

è detto *parametro di Sommerfeld*^[Co12].

La sezione d'urto $\sigma(E)$ dei due nuclei interagenti dipendente dalla loro energia cinetica E è legata al parametro η di Sommerfeld e al cosiddetto *fattore astrofisico* $S(E)$ contenente l'informazione della struttura nucleare secondo la seguente relazione (2.14)^[Co12].

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \exp(-\pi\eta) S(E) \quad (2.14)$$

Per reazioni non risonanti tale fattore $S(E)$ varia più lentamente con l'energia rispetto a quanto fa con la sezione d'urto. Per questo motivo $S(E)$ diventa utile nell'estrapolare le sezioni d'urto ad energie astrofisiche^[Co12].

Chiusa anche questa parentesi teorica sulle sezioni d'urto tra nuclei atomici all'interno del cuore della stella, riprendiamo il caso della catena pp introdotto sin dall'inizio in questo paragrafo.

La Tabella 1 riporta le energie prodotte E e i tempi di vita t_s delle tre ramificazioni $pp\text{-}I$, $pp\text{-}II$, $pp\text{-}III$ della catena pp illustrate in Figura 2^[Gotti15 – Pag. 6 su 16].

PP-I	<i>E</i>	<i>t_s</i>
${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$	$(+1.44 - 0.26) \text{ MeV}$	$1.4 \times 10^9 \text{ anni}$
${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	$+5.49 \text{ MeV}$	6 secondi
${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H}$	$+12.85 \text{ MeV}$	10^6 anni
Energia totale prodotta	26.2 MeV	
Energia persa per neutrini	$-0.5 \text{ MeV} (\simeq 2\%)$	
PP-II	<i>E</i>	<i>t_s</i>
${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$	$(+1.44 - 0.26) \text{ MeV}$	$1.4 \times 10^9 \text{ anni}$
${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	$+5.49 \text{ MeV}$	6 secondi
${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	$+1.59 \text{ MeV}$	10^6 anni
${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu$	$(+0.086 - 0.80) \text{ MeV}$	0.4 anni
${}^7\text{Li} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{He} + \gamma$	$+17.35 \text{ MeV}$	6 minuti
Energia totale prodotta	25.67 MeV	
Energia persa per neutrini	$-1 \text{ MeV} (\simeq 4\%)$	
PP-III	<i>E</i>	<i>t_s</i>
${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$	$(+1.44 - 0.26) \text{ MeV}$	$1.4 \times 10^9 \text{ anni}$
${}^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma$	$+5.49 \text{ MeV}$	6 secondi
${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$	$+1.59 \text{ MeV}$	10^6 anni
${}^7\text{Be} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma$	$+0.135 \text{ MeV}$	66 anni
${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	$+18.07 \text{ MeV}$	1 secondo
${}^8\text{Be} \rightarrow {}^2\text{He} + \gamma$	-7.2 MeV	
Energia totale prodotta	19.3 MeV	
Energia persa per neutrini	$-7.5 \text{ MeV} (\simeq 28\%)$	

Tabella 1 – Energia prodotta e persa nella catena *pp* nelle sue tre ramificazioni principali studiate in Figura 2.

La reazione più lenta della catena *pp* è quella della generazione del ${}^2\text{H}$, comune a tutte e tre le ramificazioni, in quanto richiede la conversione di uno dei due protoni in un neutrone mediante il decadimento β^+ (formula 2.15)[Gotti15 – Pag. 7 su 16].



Il decadimento β^+ appare su un neutrone legato. La reazione (2.15) è esotermica, la sua reazione inversa non avviene per il semplice fatto che il deutone ${}^2\text{H}$ è stabile e non decade. In secondo luogo, si tratta di una reazione indotta dall’interazione debole e poco probabile, le cui sezioni d’urto sono piccolissime ($\sigma \simeq 10^{-55} \text{ cm}^2$). Il ${}^2\text{H}$ riesce a catturare un altro protone diventando ${}^3\text{He}$. Se la T supera $8 \times 10^6 \text{ K}$ il ${}^3\text{He}$ si fonde con un altro ${}^3\text{He}$ generando una particella α (nucleo di ${}^4\text{He}$) ed emanando due protoni. Si conclude così la ramificazione *pp-I*. Per T superiore a $1.5 \times 10^7 \text{ K}$ incomincia la ramificazione *pp-II*. Gli ultimi due isotopi dell’elio della *pp-I* si fondono generando ${}^7\text{Be}$, che diventa ${}^7\text{Li}$ per cattura elettronica, per poi decadere in due particelle α con radiazione γ mediante la cattura protonica. Per T superiore a $2 \times 10^7 \text{ K}$ si passa dalla *pp-I* alla *pp-III*. In altre parole, le ultime due ramificazioni si riconoscono dal tipo di cattura che deve fare il ${}^7\text{Be}$, generato dalla terza reazione della catena *pp*, se di tipo elettronica (*pp-II*) o protonica (*pp-III*).

In queste ultime due ramificazioni si richiede che la temperatura e l’abbondanza di ${}^4\text{He}$ non siano nulle. Perciò tali ramificazioni si possono verificare in modo efficiente a patto che si siano innescate le prime due reazioni. L’energia prodotta nella catena *pp* è diverse volte maggiore di quella di tutti gli altri cicli che caratterizzano l’evoluzione stellare (fusione e decadimento 3α , risonanza di Hoyle del ${}^{12}\text{C}$, ciclo CNO), di cui ne faremo cenno tra poco in questo capitolo della tesi.

Per le stelle simili al Sole la catena più efficiente è la *pp-I* con un tasso di probabilità del 69%. A temperature via via sempre maggiori la situazione cambia drasticamente favorendo prima la *pp-II* e poi la *pp-III*, da come si vede in Figura 5^[Gotti15 – Pag. 7 su 16].

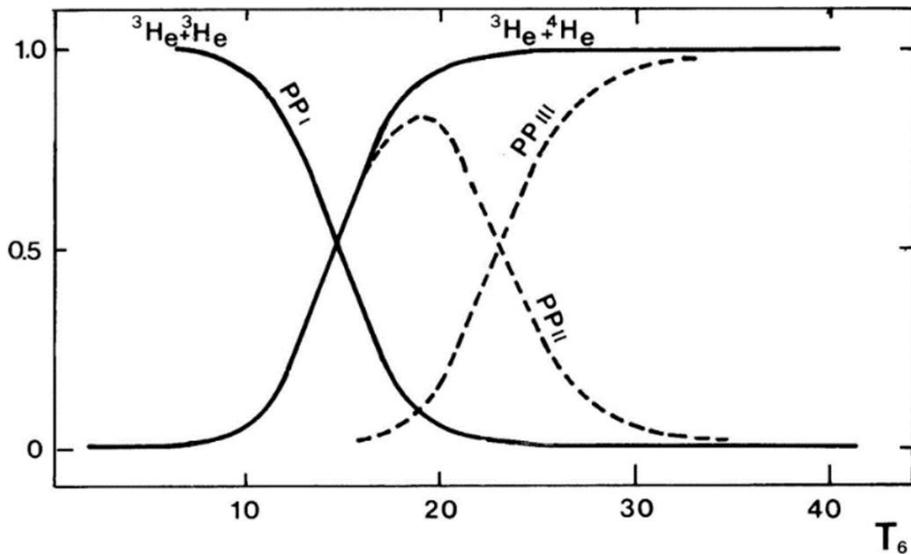


Figura 5 – Efficienza relativa delle catene di combustione pp al variare della temperatura (in milioni di Kelvin).

La questione delle reazioni *primarie* e *secondarie* della catena pp viene trattata definendo quali siano gli elementi *primari* da quelli *secondari*^[Castellani85 – Capitolo 4 – Paragrafo 4.4].

Si parla di *elementi secondari* quando i loro nuclei sono contemporaneamente prodotti e distrutti nella sequenza di reazioni. Allora le loro abbondanze tendono ad equilibrarsi ed i nuclei non influenzano più la velocità delle reazioni se non in maniera indiretta. Esaminiamo bene questo concetto prendendo spunto dal processo di produzione e di distruzione del nucleo di deuterio.

Il processo di creazione del deuterio viene dalla collisione diretta dei due protoni $p + p \rightarrow d + +e^+ + \nu_e$), mentre quello di distruzione dalla cattura protonica ($d + p \rightarrow {}_2^3He_1 + \gamma$). Combiniamo assieme i due effetti studiando le loro variazioni di abbondanza nell'unità di tempo e nell'unità di volume mediante le relazioni (2.16-2.17).

$$\text{Processo di creazione} \Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = n_{11} = \frac{N_1^2}{2} \langle \sigma_{11} v \rangle \quad (2.16)$$

$$\text{Processo di distruzione} \Rightarrow \frac{dN_2}{dt} = -n_{12} = -N_1 N_2 \langle \sigma_{12} v \rangle \quad (2.17)$$

Il pedice 1 si riferisce al protone, il pedice 2 al deutone. La variabile N indica il numero di elementi o di particelle elementari per unità di volume, mentre la n è la derivata temporale di N . La sezione d'urto si indica con σ . Gli stessi pedici indicano che la collisione avviene tra due entità dello stesso tipo: in questo caso σ_{11} è la sezione d'urto dello scattering tra due protoni nel processo di creazione del nucleo di deuterio. La coppia di pedici diversi, invece, indica che collidono due entità di tipo diverso: in questo caso σ_{12} è la sezione d'urto del protone che si allontana dal nucleo di deuterio nel processo di distruzione.

Se si combinano i due processi in simultaneo ne deriva che la variazione temporale dell'abbondanza di deutoni $\frac{dN_2}{dt}$ corrisponde alla differenza tra il numero iniziale di deutoni n_{11} e quello finale n_{12} secondo la formula (2.18).

$$\frac{dN_2}{dt} = n_{11} - n_{12} \quad (2.18)$$

Quando le due abbondanze tendono all'equilibrio abbiamo che la popolazione N_2 non diminuisce più al proseguire del tempo, ossia otteniamo la formula (2.19).

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 \rightarrow n_{11} = n_{12} \quad (2.19)$$

Ne deriva così che il rapporto delle abbondanze tra deutoni e protoni è pari alla metà del rapporto tra i due valori medi dei prodotti tra sezioni d'urto e velocità relativa tra deutone e protone (formula 2.20).

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{eq} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{11} v \rangle}{\langle \sigma_{12} v \rangle} \quad (2.20)$$

Si nota immediatamente che per $N_2 > N_1$ abbiamo $\sigma_{12} > \sigma_{11}$ e viceversa così che le abbondanze evolvono per forza verso l'equilibrio. Tenendo presente che le abbondanze in numero sono messe in relazione a quelle di massa mediante la legge

$$X_i = \frac{N_i A_i H}{\rho} \quad (2.21)$$

dove N_i sta ad indicare la densità volumetrica del numero di elementi A_i di massa multipla o pari a quella del nucleo di idrogeno H e ρ corrisponde alla densità volumetrica di massa di un altro materiale a confronto.

Nelle condizioni di equilibrio la relazione (2.21) studiata su due elementi messi in rapporto tra di loro, fruttando la relazione (2.20), diventa

$$\left(\frac{X_2}{X_1}\right)_{eq} = \left(\frac{N_2 A_2 H}{\rho} \frac{\rho}{N_1 A_1 H}\right)_{eq} = \left(\frac{N_2 A_2}{N_1 A_1}\right)_{eq} = 2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)_{eq} = 2 \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{11} v \rangle}{\langle \sigma_{12} v \rangle} = \frac{\langle \sigma_{11} v \rangle}{\langle \sigma_{12} v \rangle} \quad (2.22)$$

Se la quantità $N_2 \gg (N_2)_{eq}$ allora prevale il processo di distruzione, per la quale

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = \frac{d}{dt} \ln N_2 = -N_1 \langle \sigma_{12} v \rangle \quad (2.23)$$

da cui

$$N_2(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.24)$$

con densità di popolazione di deutoni iniziale per unità di tempo $N_0 = N_2(t=0) = (N_2)_{eq}$ e con tempo di decadimento

$$t = \tau = \frac{1}{N_1 \langle \sigma_{11} v \rangle} \quad (2.25)$$

tale che $N_2/N_0 = e^{-1}$.

Se il gas stellare è ricco di idrogeno e le temperature sono al punto da rendere efficiente la fusione pp abbiamo che

$$(X_2)_{eq} \ll 10^{-18} \quad (2.26)$$

con $\tau < 1 \text{ s}$.

In parole povere si raggiunge l'equilibrio in tempi rapidissimi senza un'apprezzabile variazione del contenuto chimico della materia. La Figura 6 mette in relazione il rapporto di equilibrio tra le due abbondanze dei nuclei di deuterio e idrogeno D/H al variare della temperatura assoluta T del core della stella misurata in unità di 10^6 K .

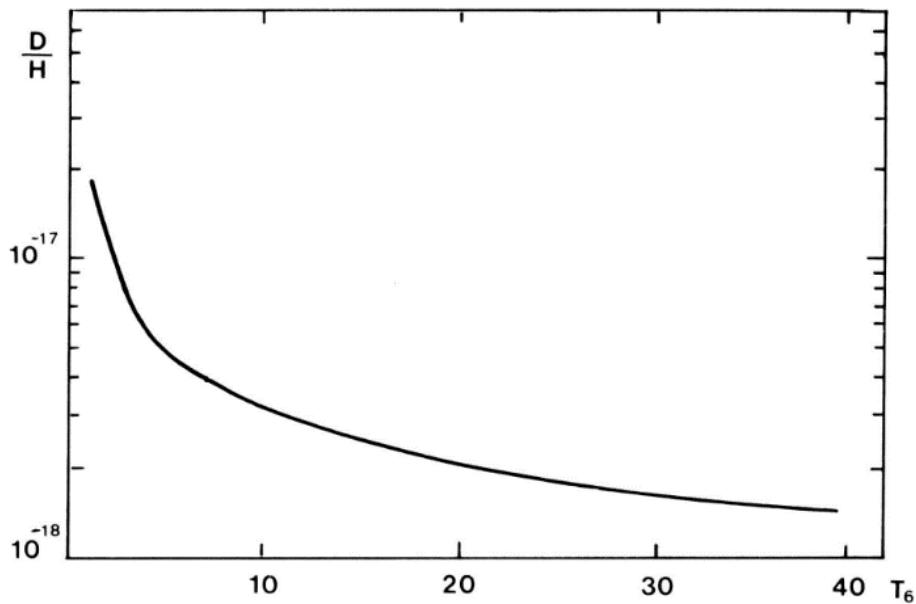


Figura 6 – Rapporto di equilibrio D/H al variare di T misurato in 10^6 K

Da come si vede dal grafico della Figura 6 il rapporto $\frac{D}{H}$ è incredibilmente basso, circa $10^{-18} \div 10^{-17}$ lungo l'asse delle ordinate in un intervallo di $2 \times 10^6 \text{ K} \div 40 \times 10^6 \text{ K}$ lungo l'asse delle ascisse.

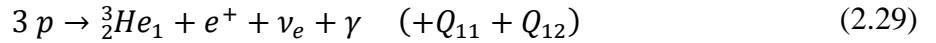
Applicando questo metodo di studio relativo alla combinazione dei due processi di creazione e distruzione ne deriva che la reazione $p + p$ deve necessariamente essere seguita da una reazione $d + p$. Perciò ad ogni reazione $p + p$ scompaiono 3 protoni e viene sintetizzato un nucleo di ${}^3\text{He}$. Ne deriva che la velocità produzione è regolata solo dal parametro n_{11} . In questo modo di pensare si può considerare il deuterio un elemento secondario, così come ${}^7\text{Be}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$ e ${}^8\text{B}$. La loro dettagliata valutazione è inessenziale agli scopi della valutazione chimica e della produzione energetica della catena pp , fermo restando che nelle reazioni primarie bisognerà associare i prodotti in particelle ed i contributi di energia derivanti dalle reazioni secondarie che le seguono^[Castellani85 – Capitolo 4 – Paragrafo 4.4].

Avremo così le due energie di legame liberate Q_{11} e Q_{12} nelle due corrispettive reazioni di creazione $p + p$ e distruzione $d + p$ con decadimento β^+ nel primo caso e con emissione di fotoni γ nel secondo caso (formule 2.27-2.28).



Il simbolo Q_{ij} indica l'energia di legame del nucleo che si è formato e che è emessa in termini di energie delle particelle prodotte, fotoni, positroni e neutrini.

Indicando con i pedici 1,2,3, rispettivamente, il protone, il deutone e il nucleo del ${}^3\text{He}$, e sommando assieme le reazioni (2.27-2.28) ricaviamo la reazione finale:



Sfruttando i tre pedici poco fa citati in termini di variazione di abbondanza per unità di tempo per unità di volume avremo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -3n_{11} & (2.30) \\ \frac{dN_3}{dt} &= n_{11} \\ \frac{dQ}{dt} &= n_{11}(Q_{11} + Q_{12}) \end{aligned}$$

Dalla terza relazione della formula (2.30) si ottiene subito la produzione di energia ε per grammo per secondo della ramificazione $pp\text{-}I$:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \frac{dQ}{dt} \quad (2.31)$$

Precisiamo, adesso, che alcuni elementi, come il ${}^3\text{He}$, possono comportarsi come elementi primari o secondari al variare della temperatura. Ciò ne comporta una regolazione del valore della sezione d'urto del processo di distruzione del nucleo di deuterio urtato dal protone. A temperatura bassa abbiamo una sezione d'urto piuttosto piccola della collisione dei due nuclei di ${}^3\text{He}$ e la sua corrispondente composizione di equilibrio è molto alta e molto lenta. Si parla così del ${}^3\text{He}$ come elemento *pseudoprimary*. Al salire della temperatura la stessa sezione d'urto di distruzione aumenta e il ${}^3\text{He}$ rigorosamente diventa un elemento secondario.

La Figura 7 che ne deriva da questo tipo di ricerca si suddivide in due grafici.

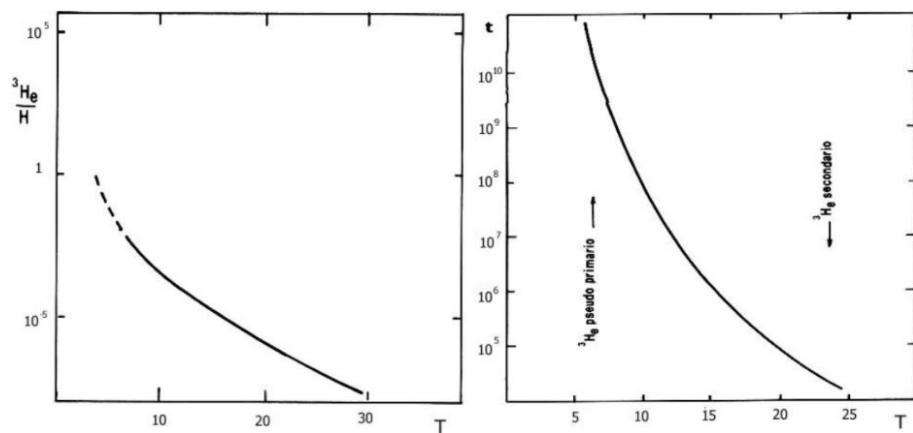


Figura 7 – Rapporto $^3\text{He}/\text{H}$ e tempo di evoluzione del processo di distruzione del deuterio in relazione alla temperatura del nucleo stellare

1. Grafico a sinistra

1.1. Ascissa – Temperatura in unità 10^6 K , in scala lineare

1.2. Ordinata – Rapporto $^3\text{He}/\text{H}$, in scala logaritmica

2. Grafico a destra

2.1. Ascissa – Temperatura in unità 10^6 K , in scala lineare

2.2. Ordinata – Tempo di evoluzione in anni del processo di distruzione del deuterio, in scala logaritmica, in funzione della temperatura in unità 10^6 K , in scala lineare

Una volta capito il meccanismo che c’è dietro la catena pp ci si chiede se questa cattura protonica si può applicare per elementi più pesanti di ^8Be . Per rispondere a questa domanda poniamoci prima la questione se i nuclei più pesanti generati siano stabili oppure instabili.

Prendiamo spunto dalla curva sperimentale illustrata in Figura 8 con il numero di protoni N lungo le ascisse ed il numero di protoni Z lungo le ordinate^[Foglio13 – Pag. 8 su 27].

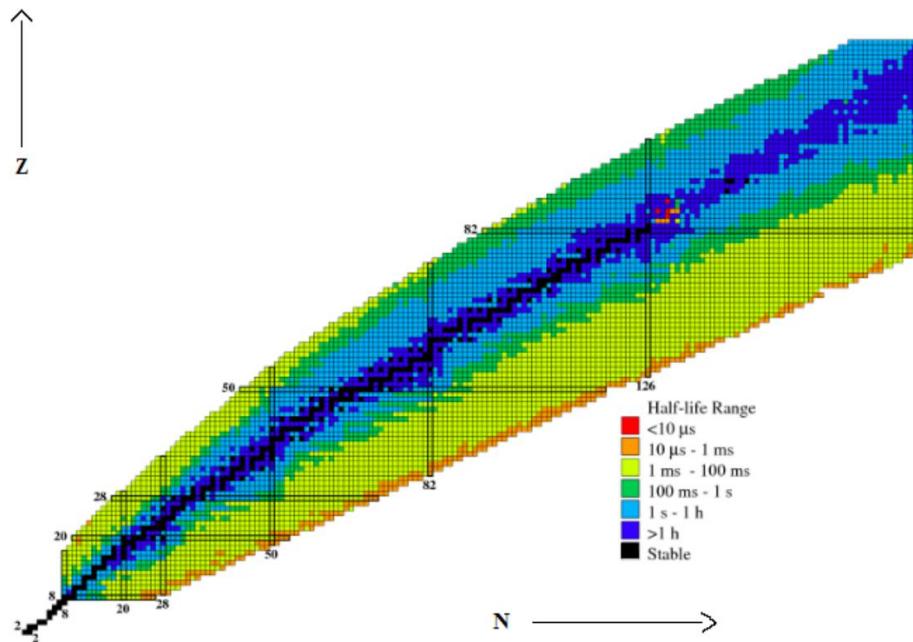


Figura 8 – Schema della valle di stabilità dei nuclei isobari

- Ascissa – Numero di neutroni N

- Ordinata – Numero di protoni Z

I quadratini neri indicano elementi stabili, mentre quelli colorati indicano elementi instabili con le loro emivite τ che variano da $\tau < 10 \mu\text{s}$ a $\tau > 1 \text{ h}$.

Da tale figura non ci sorprende trovare che ad ogni numero di massa fissato $A = Z + N$ la configurazione stabile presenta la maggiore energia di legame (la minore massa) tra tutti gli altri possibili isobari. Risulta sperimentalmente chiaro che l’instabilità dei nuclei è tanto più elevata quando ci si allontana dalla loro cosiddetta *valle di stabilità* (tempi di decadimento più brevi).

Per la precisione, se almeno uno dei due numeri, Z oppure N , è uguale ai cosiddetti *numeri magici* allora il nucleo dell'elemento chimico da analizzare è relativamente stabile. Inoltre, se l'elemento in esame è piuttosto pesante ($A \geq 60$) succede che per bilanciare la repulsione coulombiana con l'attrazione forte occorrono più neutroni rispetto ai protoni. Ecco perché la valle di stabilità tende a piegarsi in direzione di $N \gg Z$.

Più in generale, se la fusione di particelle genera nuclei che si trovano nella valle di stabilità, quest'ultimi decadono emanando dei quanti di energia sotto forma di fotoni γ .

La Figura 9 schematizza l'andamento della massa di nuclei con equale numero di massa. I pallini neri indicano nuclei stabili, mentre quelli bianchi indicano nuclei instabili. Il graduale passaggio verso la stabilità si ottiene mediante diversi decadimenti β^\pm a catena fino ad arrivare al nucleo stabile di massa più leggera con energia di legame massima^[Castellani85 – Capitolo 4 – Paragrafo 4.5].

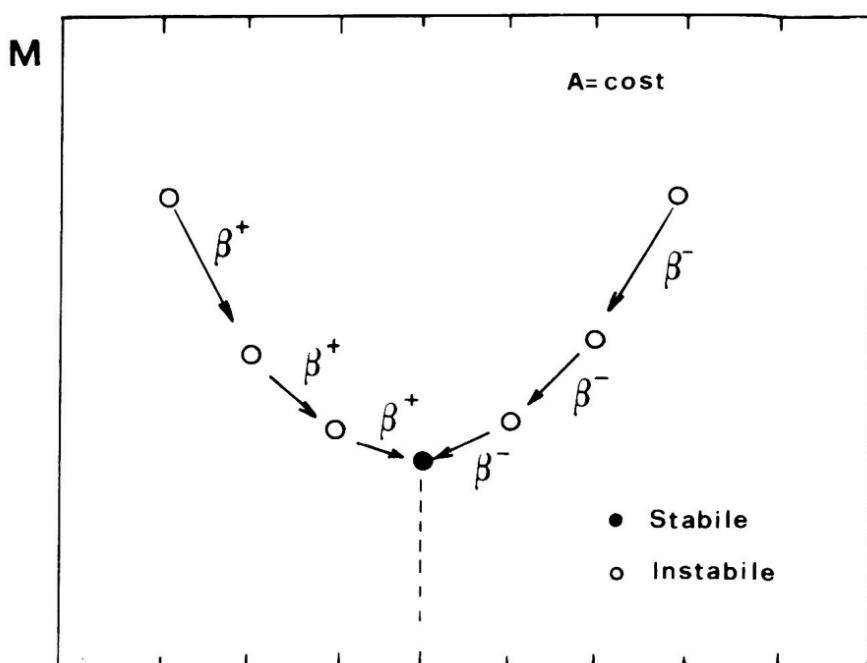


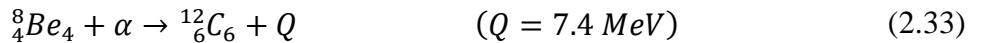
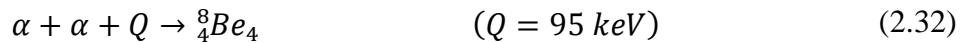
Figura 9 – Andamento della massa dei nuclei con equale numero di massa $A = Z + N$ al variare del numero di protoni Z e neutroni N . Il nucleo stabile (pallino nero) presenta la massima energia di legame (massa minima). I nuclei instabili (pallini bianchi) aventi una massa maggiore di quella stabile tendono allo stato di massimo legame mediante i decadimenti β^- $[(Z, N) \rightarrow (Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e]$ oppure β^+ $[(Z, N) \rightarrow (Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu_e]$ liberandosi, rispettivamente, dell'eccesso di neutroni o di protoni.

Una volta capito il meccanismo di fusione e di decadimento nucleare verso la valle di stabilità, passiamo ad elementi più pesanti di ^8Be . Per fare ciò dobbiamo studiare il cosiddetto processo di fusione 3α che, consiste nella graduale conversione del ^4He in ^{12}C nei nuclei di stelle aventi masse da 1 a 3 volte quella del Sole, come vedremo tra poco nel secondo paragrafo di questo capitolo della tesi. Prima di discuterne focalizziamoci prima sul processo di fusione dell'elio a seguito dell'esaurimento dell'idrogeno, sempre nel prossimo paragrafo.

Nel terzo paragrafo di questo capitolo della tesi parleremo del ciclo CNO (carbonio-azoto-ossigeno), prevalente in stelle aventi almeno 3 masse solari, come processo alternativo nella conversione dell'idrogeno in elio.

2.2. Fusione 3α del ^4He in ^{12}C nel nucleo stellare, decadimento 3α e risonanza di Hoyle del ^{12}C

Nelle stelle di prima generazione (popolazione II), soprattutto nelle giganti rosse formate principalmente da idrogeno, i prodotti residui di combustione sono esclusivamente composti da nuclei ^4He . Siccome i nuclei aventi numeri di massa $A = 5$ e $A = 8$ sono instabili non è possibile produrre elementi più pesanti di questi. In natura non esistono nuclei stabili con questi valori di massa citati. Perciò deve succedere che la cattura protonica si interrompe una volta che si è formato il nucleo di ^4He . Per produrre elementi più pesanti del ^4He (particella α) occorre una doppia sequenza di scattering inelastici di fusione di queste particelle α per produrre la prima volta ^8Be e la seconda volta il ^{12}C secondo le reazioni (2.32-2.33)^{[Co12], [Giammaria14 – Pag. 8 su 50]}.



Uno dei problemi maggiori della nucleosintesi sta nel capire come si possa superare il gradino (*gap*) delle masse nello schema degli isobari stabili presentato in Figura 9. Tecnicamente è possibile fondere contemporaneamente tre particelle α per generare direttamente il nucleo di ^{12}C , ma la sua probabilità è estremamente bassa da non potere essere responsabile della presenza del ^{12}C ^[Co12].

Torniamo a studiare nel dettaglio le due reazioni (2.32-2.33).

La prima reazione (2.32), l'abbiamo appena ribadito, serve per produrre un nucleo di ^8Be . Lo stato fondamentale di quest'ultimo è instabile per la fusione 2α , con una vita media piuttosto corta, circa 10^{-16} secondi. Tuttavia, questa durata è mille volte superiore a quella che occorre alle due particelle α di attraversare il volume nucleare aventi energia cinetica totale di 95 keV. Ciò sta a significare che una parte dei nuclei di ^8Be sta in equilibrio dinamico tra le particelle che lo producono e quelle che lo distruggono^[Co12].

Come stima per temperature di 10^8 K e densità di $10^{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ abbiamo un nucleo di ^8Be ogni 10^9 nuclei di ^4He ^[Co12].

A questo punto si innesca la seconda reazione (2.33). Una stima della sezione d'urto della fusione 3α ha dimostrato che la quantità di ^{12}C teorizzata non si addice a quella sperimentalmente osservata. L'ipotesi adatta a spiegare questo inconveniente sta nel ritenere che il ^{12}C venga generato in presenza di una risonanza.

Prima di affrontare il problema chiariamo, innanzitutto, cos'è un processo di diffusione di risonanza. Questo nuovo tipo di processo è una situazione particolare in cui la sezione d'urto dello scattering tra proiettile e bersaglio presenta un valore massimo ad una specifica energia del proiettile.

La relazione (2.34) che ne deriva è una funzione periodica se si parte dallo studio della soluzione asintotica a corto raggio della funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$ del proiettile all'interno dell'equazione di Schrödinger^[Co12].

$$\sin^2 \delta_l = 1 \quad \text{quindi} \quad \delta_l = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{con} \quad n = \text{numero intero} \quad (2.34)$$

La sua dimostrazione dettagliata è riportata nell'Appendice B della tesi.

La funzione f_l di distribuzione di risonanza, ricavata anch'essa dalla soluzione di $\Psi(\vec{r})$ nell'equazione di Schrödinger, come vedremo sempre nell'Appendice B della tesi, è definita come

$$f_l = e^{i\delta_l} \sin \delta_l = \frac{\sin \delta_l}{e^{-i\delta_l}} = \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l - i \sin \delta_l} = \frac{1}{\cotg \delta_l - i} \quad (2.35)$$

Se sviluppiamo in serie di Taylor $\cotg \delta_l$ rispetto all'energia di risonanza ϵ_r , ossia la condizione che soddisfa la formula (2.33), inserendo energia $\epsilon \sim \epsilon_r$ e troncando tale serie al primo ordine, se ne ricava

$$\begin{aligned} \cotg[\delta_l(\epsilon)] &= \cotg[\delta_l(\epsilon_r)] + (\epsilon_r - \epsilon) \times \\ &\times \left[\frac{d}{d\epsilon} \cotg[\delta_l(\epsilon)] \right]_{\epsilon=\epsilon_r} + \dots = (\epsilon_r - \epsilon) \frac{2}{\Gamma} + \dots \end{aligned} \quad (2.36)$$

dove $\cotg[\delta_l(\epsilon_r)] = 0$ e Γ è l'ampiezza di risonanza.

La formula (2.34) in prossimità della risonanza (2.36) diventa

$$f_l(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon_r - \epsilon) \frac{2}{\Gamma} - i} = \frac{\Gamma/2}{(\epsilon_r - \epsilon) - i \frac{\Gamma}{2}} \quad (2.37)$$

Inserendo la relazione (2.37) nell'espressione dell'onda d'urto elastica (2.38)

$$\sigma = \int d\omega \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (2.38)$$

otteniamo per ogni onda parziale l la relazione

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \left| \frac{f_l}{e^{i\delta_l}} \right|^2 = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma^2}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.39)$$

che esprime la sezione d'urto elastica ed è nota come la *formula di Breit-Wigner*^[Co12]. La sezione d'urto massima in punto di risonanza $\epsilon = \epsilon_r$ vale

$$\sigma_{max} = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) \left[\frac{\Gamma^2}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right]_{\epsilon=\epsilon_r} = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \quad (2.40)$$

L'ampiezza di risonanza Γ viene interpretata come la larghezza della banda di energie possibili del proiettile che colpisce il bersaglio in maniera tale che ad energia $\epsilon = \epsilon_r \pm \Gamma/2$ abbiamo la sezione d'urto per l'onda parziale l di una quantità pari a $\sigma_l = \sigma_{max}/2$. L'equazione (2.36) può essere generalizzata in due maniere^[Co12].

La prima generalizzazione tiene conto degli spin del proiettile \vec{s}_a e del bersaglio \vec{s}_A interagenti tra di loro e \vec{I} è il momento angolare totale di risonanza secondo la relazione

$$\vec{I} = \vec{s}_a + \vec{s}_A + \vec{l} \quad (2.41)$$

Il fattore $2l + 1$ va sostituito con quello giromagnetico degli spin g definito come

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_A + 1)} \quad (2.42)$$

dove i simboli messi senza le frecce (I, s_a, s_A) indicano, rispettivamente, i moduli dei vettori ($|\vec{I}|, |\vec{s}_a|, |\vec{s}_A|$).

Se il proiettile e il bersaglio sono bosoni e sono anche privi di spin allora il fattore giromagnetico g si riduce a

$$\begin{aligned} g &= \left[\frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_A + 1)} \right]_{s_a=s_A=0} = 2I + 1 = 2|\vec{I}| + \\ &+ 1 = 2|\vec{s}_a + \vec{s}_A + \vec{l}|_{\vec{s}_a=\vec{s}_A=\vec{0}} + 1 = 2|\vec{l}| + 1 = 2l + 1 \end{aligned} \quad (2.43)$$

La seconda generalizzazione tiene conto che i canali di entrata e di decadimento della risonanza abbiano ampiezze diverse^[Co12].

Il termine Γ^2 posto al denominatore della formula (2.40) mette in considerazione le varie ampiezze di decadimento. L'ampiezza totale di decadimento Γ è intesa come la somma di tutte le singole ampiezze di decadimento relative a ciascun canale di decadimento, incluso il canale di entrata.

La vita media τ e l'ampiezza di decadimento Γ sono inversamente proporzionali tra di loro secondo la relazione

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (2.44)$$

dove la costante ridotta di Planck \hbar in unità nucleari vale circa $6.6 \times 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}$.

Il tempo di vita medio (2.44) non è influenzato da alcuna osservazione di un canale specifico di formazione della risonanza^[Co12].

Il caso di Γ^2 posto al numeratore ha una storia diversa da quella di Γ^2 posto al denominatore.

Non solo Γ^2 è legato alla formazione di risonanza, ma anche dalla probabilità di decadimento in un canale specifico. Nel caso dello scattering elastico i canali di formazione sono uguali per il semplice fatto che i prodotti sono uguali ai reagenti uno per uno ($a + A \rightarrow a + A$). Il parametro Γ posto al numeratore diventa Γ_{aA} . Nel caso dello scattering inelastico, invece, i prodotti sono diversi dai reagenti ($a + A \rightarrow b + B$), così come sono diversi i canali di entrata e di decadimento. Di conseguenza la sezione d'urto specifica per la singola onda parziale l , precedentemente definita nella formula (2.40), diventa

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA} \Gamma_{bB}}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aA} \Gamma_{bB}}{(\epsilon_r - \epsilon)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (2.45)$$

dove abbiamo sostituito nella (2.45) il fattore d'onda parziale $2l + 1$ con quello di degenerazione g .

Chiuso il discorso sullo scattering risonante riprendiamo il discorso delle fusioni risonanti. Stavamo allora parlando della fusione 3α che consisteva nel convertire in due passaggi il nucleo di ^4He in nucleo di ^{12}C .

Adesso passiamo al discorso inverso, quello del decadimento del ^{12}C . Avremo il 99.96% di probabilità che il ^{12}C decada in ^8Be mediante l'emissione di una particella α . Il restante 0.04% di probabilità consiste in un processo di de-eccitazione del ^{12}C . Abbiamo due livelli energetici al di sopra di quello fondamentale. Il livello più alto con parità $J^P = 0^+$ ed energia 7.65 MeV è meglio noto come lo *stato di Hoyle*. Il secondo livello, più basso del primo, ha parità $J^P = 2^+$ ed energia 4.44 MeV. La transizione elettronica E0 va dallo stato di Hoyle allo stato fondamentale, mentre l'altra transizione E2 avviene due volte passando prima dallo stato di Hoyle a quello intermedio ed infine a quello fondamentale. Si veda l'illustrazione seguente in Figura 10.

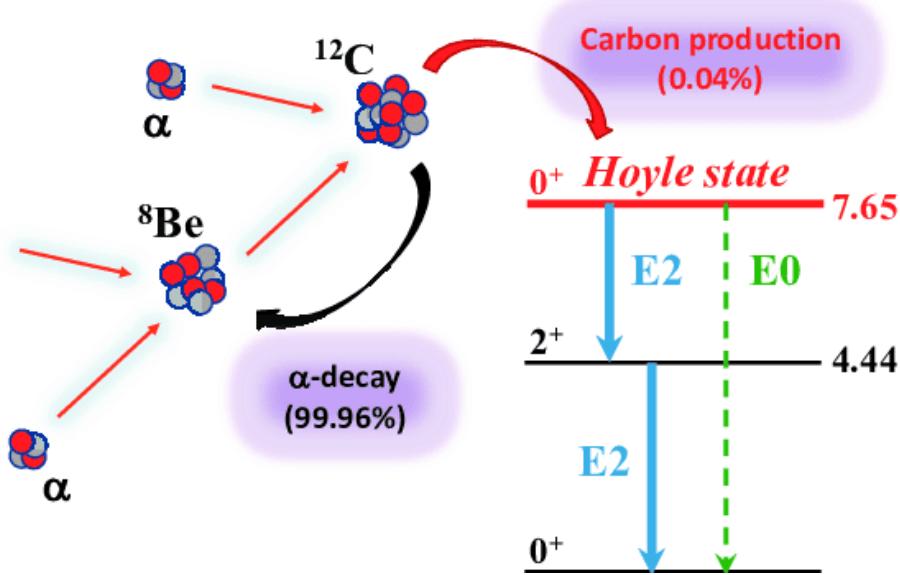


Figura 10 – Schema di formazione e di decadimento del ^{12}C

Nel 2020 ne è stata fatta una conferma sperimentale grazie al multirilevatore 4π -CHIMERA nei pressi dei laboratori INFN-LNS di Catania^[Cardella20]. Prima di descrivere l'esperimento, facciamo una premessa teorica.

La formazione del ^{12}C nei nuclei stellari avviene principalmente con la catena di produzione 3α , ma è anche vero il discorso inverso, ossia il decadimento 3α .

Per il primo caso della fusione 3α a tappe per risonanza abbiamo:



mentre per il secondo caso del decadimento diretto 3α del ^{12}C abbiamo:



Occorre, però, precisare che la reazione di scattering inelastico (2.29) tra ^8Be e α dà vita ad uno stato eccitato $^{12}\text{C}^*$, e non ad uno fondamentale ^{12}C .

Da come si vede subito in Figura 10 abbiamo che soltanto una volta su 2 500 il livello di Hoyle 7.65 MeV (0^+) $^{12}\text{C}^*$ decade emanando fotoni γ ripetendo due volte la transizione elettronica E2 da 7.65

MeV (0⁺) $^{12}\text{C}^*$ al livello fondamentale 0 MeV (0⁺) $^{12}\text{C}^*$ mediante il livello intermedio 4.44 MeV (2⁺) $^{12}\text{C}^*$ (frecce azzurre in grassetto). L'altra transizione elettronica E0 va direttamente da 7.65 MeV (0⁺) $^{12}\text{C}^*$ a 0 MeV (0⁺) $^{12}\text{C}^*$ (freccia verde tratteggiata). In Elettrodinamica Quantistica, questa transizione è proibita al primo ordine. Ci sono stime teoriche che la indicano trascurabile ai fini della struttura stellare. Dal punto di vista sperimentale non si hanno informazioni sulla probabilità della transizione^[Cardella20].

Di recente sono stati osservati lungo la banda rotazionale del ^{12}C altri livelli superiori a quello di Hoyle, 9.64 MeV (3⁻) $^{12}\text{C}^*$, 10.3 MeV (2⁺) $^{12}\text{C}^*$. Poiché nell'ambiente di laboratorio ci sono tracce di ^{13}C soltanto un rapporto di ampiezze di risonanza $\Gamma_\gamma/\Gamma \leq 4 \times 10^{-7}$ è disponibile per il livello 9.64 MeV (3⁻) $^{12}\text{C}^*$, dove per Γ_γ si intende l'ampiezza di risonanza del decadimento γ del $^{12}\text{C}^*$, mentre per Γ ci si riferisce al decadimento completo del ^{12}C ^[Cardella20].

Il metodo sperimentale usato per osservare i diversi livelli di eccitazione del ^{12}C , compreso lo stato di Hoyle 7.65 MeV (0⁺) $^{12}\text{C}^*$, si chiama **misurazione ridondante completa** (CRM – *Complete Redundant Measurement*) ed è applicato mediante l'utilizzo di foto-rivelatori al CsI(Tl) dentro la sfera metallica 4 π -CHIMERA dell'INFN-LNS, quest'ultimi capaci di interferire con i nuclei di ^{12}C diffusi mediante le collisioni con il fascio di particelle α del ciclotrone. Ciascuna di queste particelle possiede un'energia di 64 MeV^[Cardella20].

I metodi identificativi sono **ΔE - E , tempo di volo** (TOF – *Time Of Flight*), **discriminazione sulla base della forma del segnale** ricevuto dal multirivelatore CHIMERA^[Cardella20].

Per registrare bene i parametri di energia-impulso dello scattering tra il fascio di particelle α del ciclotrone e i nuclei di $^{12}\text{C}^*$ (^{12}C a livelli eccitati) occorre abbassare i rumori di fondo, dovuti alla presenza del ^{14}C , ed avere uno sfasamento $\Delta\phi = 180^\circ = \pi \text{ rad}$ tra α e $^{12}\text{C}^*$ ^[Cardella20].

Si parla di coincidenza quando la particella da rilevare attraversa più rivelatori posti tra uno o più strati della sfera 4 π -CHIMERA in tempi di volo apprezzabilmente inferiori ai 10 μs . Inoltre, l'andamento del segnale della particella registrato su due o più rivelatori deve essere simile il più possibile. Ecco perché parliamo di particella rilevata coincidente^[OCRA20].

Sfruttando questa tecnica si è potuto misurare il conteggio delle coincidenze lungo lo spettro energetico del *Q-value*. Quest'ultimo veniva studiato in due maniere^[Cardella20].

Nella vecchia maniera il *Q-value* era inteso come la differenza ΔE tra l'energia totale dei nuclei atomici rilevati sulle apparecchiature CsI(Tl) e l'energia totale E del fascio di particelle α del ciclotrone^[Cardella20].

Nella nuova maniera il *Q-value* è inteso come la differenza tra il vecchio *Q-value* e l'energia totale misurata dei raggi γ . Tale *Q-value* nuovo è quindi uguale all'energia mancante dei raggi γ in eventi di coincidenza a singolo γ ^[Cardella20].

Questi due tipi di misura del *Q-value* sono stati eseguiti per i livelli 4.44 MeV (2⁺) $^{12}\text{C}^*$, 9.63 MeV (3⁻) $^{12}\text{C}^*$, 12.7 MeV (2⁺) $^{12}\text{C}^*$ ^[Cardella20].

Tuttavia, la risoluzione spettrale del *Q-value* rispetto al **conteggio delle coincidenze** (*Coincidence Counts*) non era ancora promettente. Per migliorarla occorreva ridefinire il *Q-value* sommando le

energie delle tre particelle α generate dal decadimento del $^{12}\text{C}^*$ nel loro centro di massa con il vecchio *Q-value* del canale di decadimento. Il risultato finale che ne deriva è disegnato in Figura 11^[Cardella20].

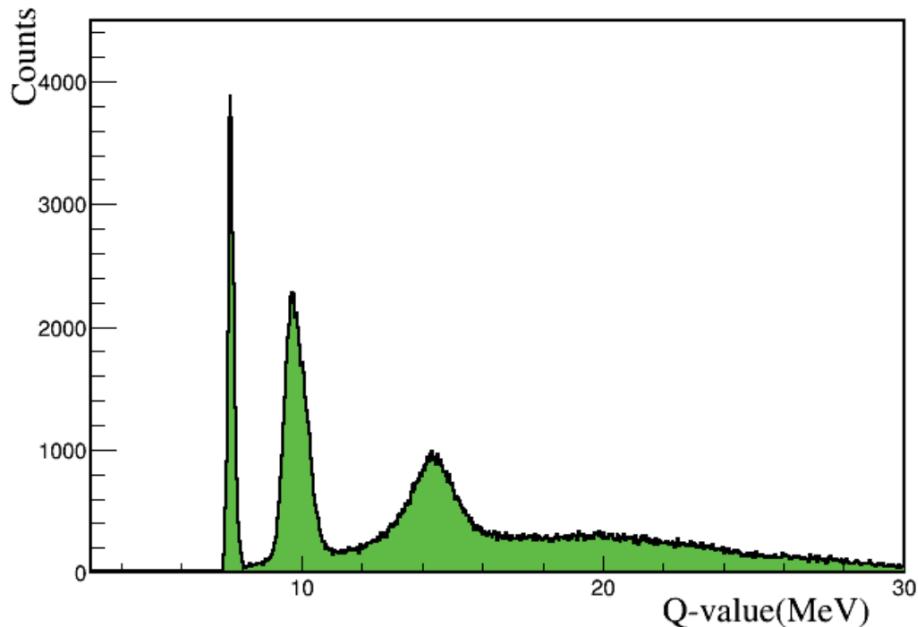


Figura 11 – Conteggio delle coincidenze del $^{12}\text{C}^*$ al variare della somma dell'energia di tutte e tre le particelle α con quella di decadimento.

A livello pratico è stato ricavato un rapporto tra le ampiezze di decadimento di valore $\Gamma_\gamma/\Gamma =$

$= (3.87 \pm 0.25) \times 10^{-4}$, dove abbiamo inteso per Γ_γ l'ampiezza di decadimento del $^{12}\text{C}^*$, semplicemente in fotoni γ , e per Γ l'ampiezza di tutti e due i suoi possibili decadimenti^[Cardella20].

Da tale figura si nota subito che il decadimento 3α è 2 500 volte più probabile del decadimento γ del $^{12}\text{C}^*$ eccitato in ^{12}C fondamentale, da come ci sarebbe aspettati prima secondo la teoria formulata da Fred Hoyle nel 1953 illustrata in Figura 11^[Cardella20].

Tipicamente sono stati registrati circa 63 000 eventi di coincidenza lungo la risonanza di Hoyle, contro i soli 5 attorno al livello 9.64 MeV (3^-) ^{12}C ^[Cardella20].

Come ha teorizzato lo stesso Hoyle, la risonanza 7.64 MeV (0^+) $^{12}\text{C}^*$ serve a far sì che la popolazione di ^{12}C nel nucleo stellare sia sufficiente ad innescare ulteriori processi di fusione, come il ciclo CNO che vediamo subito nel prossimo paragrafo, a temperature prossime a 10^8 K in stelle almeno 3 volte più massicce del Sole^[Livio89].

2.3. Ciclo CNO (carbonio-azoto-ossigeno)

Il ciclo CNO è un modo alternativo di convertire l'idrogeno in elio al posto della catena pp studiata nel primo paragrafo di questo capitolo della tesi. In pratica in questo nuovo ciclo il passaggio dall'idrogeno all'elio avviene mediante la presenza elementi più pesanti che fungono da catalizzatori mediante una serie di decadimenti β^+ e catture protoniche. Tali elementi sono già presenti nel plasma stellare e non è necessario che siano generati dalla catena stessa. Il ciclo CNO, come prerogativa, si verifica in stelle giovani di popolazione I ricche di metalli al loro interno.

Questo ciclo bilancia la catena *pp* per temperatura del nucleo stellare $T = 1.5 \times 10^7 K$. Il bilancio totale della reazione consiste nel far reagire quattro atomi di idrogeno per dare vita a un atomo di elio. Nella Tabella 2 si studiano le singole reazioni del ciclo CNO in termini dell'energia prodotta e del tempo richiesto di tali reazioni^[Favoino20].

Reazione del ciclo CNO	Energia E (MeV)	Tempo t della reazione
$^{12}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$	+1.94	1.3×10^7 anni
$^{13}\text{N} \rightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	+2.2 (-0.7)	7 minuti
$^{13}\text{C} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + \gamma$	+7.55	2.7×10^6 anni
$^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$	+7.29	3.2×10^8 anni
$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	+2.7 (-1.0)	82 secondi
$^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{12}\text{C} + \alpha$	+4.96	1.1×10^5 anni

Tabella 2 – Reazioni primarie del ciclo CNO

La reazione più lenta, da come si nota nella Tabella 2, è la cattura protonica sul ^{14}N che genera il ^{15}O . Si accumula così la quantità di azoto, facendo sì che le abbondanze relative siano alterate a discapito dell'ossigeno e del carbonio. Di conseguenza la catena CNO si suddivide in due ramificazioni, una veloce e una lenta. Quella veloce parte dal carbonio e si ferma sull'azoto, che è un elemento stabile, mentre quella lenta arriva fino alla produzione del ^4He ^[Favoino20].

L'energia dell'intero processo CNO studiato nella Tabella 2 è pari a $E = 25 \text{ MeV}$ (Colonna 2 – valori positivi senza parentesi tonde) con quella di 1.7 MeV persa nell'emissione dei neutrini elettronici (Colonna 2 – valori negativi con parentesi tonde)^[Favoino20]. L'ultima reazione primaria del ciclo CNO nella Tabella 2 (Colonna 1 – Riga 7) consiste non solo nella produzione del ^4He ma anche del ^{12}C . Di conseguenza il ciclo CNO si ripete.

Torniamo al discorso delle due ramificazioni CNO e facciamone un ulteriore approfondimento (vedi Figura 12).

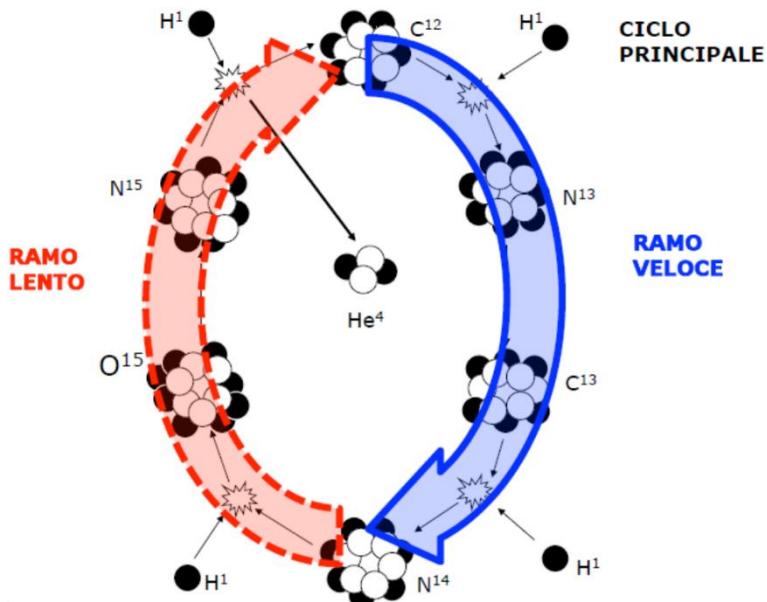


Figura 12 – Rappresentazione del ciclo CNO principale. Si noti bene la differenza tra ramo lento e ramo veloce.

In pratica succede che la prima metà del ciclo CNO, ossia il passaggio graduale dal ^{12}C al ^{14}N , che avviene in tempi relativamente brevi (dall'ordine dei minuti all'ordine delle decine di milioni di anni), segue la sequenza di reazioni presentata nelle prime tre righe della Tabella 2.

L'altro ramo, quello lento, riguarda le reazioni indicate nelle ultime tre righe della Tabella 2, nelle quali i tempi di reazione si aggirano al massimo sul centinaio di milioni di anni, da come si nota nella lentissima reazione del ^{14}N convertito in ^{15}O ^[Favoino20].

Se la temperatura del nucleo stellare è simile o superiore a $T = 10^8 \text{ K}$ succede che il ciclo CNO presenta delle ramificazioni secondarie. A questo punto il passaggio dall'idrogeno all'elio avviene non più con gli elementi citati in Tabella 2, ma con ^{16}O e ^{17}F usati anch'essi come catalizzatori. Nella Tabella 3 sono riportate le seguenti reazioni secondarie del ciclo CNO^[Favoino20].

Reazione del ciclo CNO
$^{14}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$
$^{15}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$
$^{15}\text{N} + ^1\text{H} \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$
$^{16}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{17}\text{F} + \gamma$
$^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e$
$^{17}\text{O} + ^1\text{H} \rightarrow ^{14}\text{N} + \alpha$

Tabella 3 – Reazioni secondarie del ciclo CNO

L'energia totale rilasciata vale 24.9 MeV . Altri rami secondari del ciclo CNO avvengono in stelle aventi massa o temperatura più elevate di quelle di popolazione I in cui si verificava il ciclo CNO descritto in Tabella 2^[Favoino20].

Per produrre elementi ulteriormente più pesanti del ^{16}O occorre che il nucleo stellare sia più caldo di $6 \times 10^8 \text{ K}$. Stiamo parlando, nello specifico, di una **nana bianca al carbonio-ossigeno**. La sua formazione è dovuta alla precedente contrazione del suo nucleo e della precedente espulsione degli stati esterni di quella che una volta era una stella in sequenza principale del diagramma HR. Quando il ^{12}C derivante dal ramo principale del ciclo CNO inizia a fondersi, inizia a dare vita al ^{16}O o al ^{20}Ne secondo le due seguenti possibili reazioni di emissione 2α oppure α (Tabella 4)^[Favoino20].

Fusione diretta del carbonio con emissione 2α oppure α per $T = 6 \times 10^8 \text{ K}$
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{16}\text{O} + 2\alpha$
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow ^{20}\text{Ne} + \alpha$

Tabella 4 – Fusione del ^{12}C in ^{16}O oppure in ^{20}Ne mediante le emissioni 2α oppure α .

2.4. Nuclei più pesanti del ^{12}C

La questione riguardante le due catture 2α e α della Tabella 4 può essere discussa nella seguente maniera. Per formare nuclei più pesanti del ^{12}C occorre un'energia cinetica E sufficiente da superare la barriera Coulombiana $V(r)$ secondo quanto detto nel primo paragrafo del presente capitolo, ossia secondo la collisione non risonante tra proiettile e bersaglio con effetto tunnel studiato con il coefficiente di Gamow (2.11). Applicando tali strumenti arriviamo a dire che la cattura α è quella più conveniente per produrre nuclei più pesanti con energia di legame rilasciata sotto forma di fotoni. Empiricamente si passa dopo varie catture α dal ^{12}C al ^{56}Ni , come riportato in Tabella 5^[Forus18 – Pag. 9 su 23].

Reazione di cattura α	Energia E emessa sottoforma di fotoni γ
$^{12}\text{C} + \alpha \leftrightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$	7.16 MeV
$^{16}\text{O} + \alpha \leftrightarrow ^{20}\text{Ne} + \gamma$	4.73 MeV
$^{20}\text{Ne} + \alpha \leftrightarrow ^{24}\text{Mg} + \gamma$	9.32 MeV
$^{24}\text{Mg} + \alpha \leftrightarrow ^{28}\text{Si} + \gamma$	9.98 MeV
$^{28}\text{Si} + \alpha \leftrightarrow ^{32}\text{S} + \gamma$	6.95 MeV
$^{32}\text{S} + \alpha \leftrightarrow ^{36}\text{Ar} + \gamma$	6.64 MeV
$^{36}\text{Ar} + \alpha \leftrightarrow ^{40}\text{Ca} + \gamma$	7.04 MeV
$^{40}\text{Ca} + \alpha \leftrightarrow ^{44}\text{Ti} + \gamma$	5.13 MeV
$^{44}\text{Ti} + \alpha \leftrightarrow ^{48}\text{Cr} + \gamma$	7.70 MeV
$^{48}\text{Cr} + \alpha \leftrightarrow ^{52}\text{Fe} + \gamma$	7.94 MeV
$^{52}\text{Fe} + \alpha \leftrightarrow ^{56}\text{Ni} + \gamma$	8.00 MeV

Tabella 5 – Fusione del ^{12}C fino al ^{56}Ni mediante la ripetizione di diverse catture α .

Occorre però precisare che accanto al processo di cattura α , studiato nella Tabella 5, c’è anche il suo corrispondente processo inverso, quello della fotodisintegrazione dei nuclei, ossia il foto-assorbimento da parte del nucleo, motivo per cui nella Tabella 5 si usa la doppia freccia al posto della singola freccia. Spieghiamo meglio questo concetto^[Monaco15 – Pag. 82 su 215].

Il nucleo stellare di massa $M > 8 M_{\odot}$ brucia tutti gli elementi fino al ^{56}Fe , per poi collassare quando la sua massa supera il limite di Chandrasekhar ($M \simeq 1.44 M_{\odot}$ – vedi il calcolo svolto nell’Appendice D della tesi). Durante il suo collasso avvengono **due processi nucleari di importanza cruciale**:

- 1- **fotodisintegrazione** di tutti i nuclei pesanti: la temperatura del nucleo stellare è talmente alta ($T > 10^8 \text{ K}$) facendo sì che i fotoni termici riescano a disintegrare i nuclei atomici, quest’ultimi precedentemente generati secondo lo schema della Tabella 4, ritrasformandoli in protoni e neutroni;
- 2- **cattura elettronica** da parte dei protoni, che diventano quindi neutroni con la conseguente emanazione di neutrini elettronici (decadimento β^- inverso $\rightarrow p + e^- \rightarrow n + \nu_e$).

Il primo processo è più importante del secondo: studiamolo meglio.

Se, invece, come vogliamo aspettarci nella discussione del presente paragrafo, le catture α prevalgono sulle fotodisintegrazioni, allora le catture α proseguono a catena fino a quando non si arriva al ^{56}Ni , che quest’ultimo decade in ^{56}Fe mediante la trasformazione di due protoni in due neutroni (due decadimenti β^+ successivi). Quest’ultimo nucleo risulta essere il più stabile con la maggiore energia di legame.

Facciamo un confronto dei processi nucleari studiati fin dall’inizio di questo capitolo studiando in Tabella 6 tempi di bruciamento dei nuclei reagenti presenti in stelle con massa $M_s \sim \sim 20 M_{\odot}$ ^[Favoino20].

Bruciamento dell’elemento reagente	Tempo t della reazione
$^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}$ (catena pp)	10^7 anni
$^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}$ (fusione 3α per tappe)	10^6 anni
$^{12}\text{C} + \alpha \rightarrow ^{16}\text{O} + \gamma$ (cattura α)	1000 anni

$^{16}\text{O} + \alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne} + \gamma$ (cattura α)	200 giorni
$^{28}\text{Si} + \alpha \rightarrow ^{32}\text{S} + \gamma$ (cattura α)	7 giorni

Tabella 6 – Tempi di fusione degli elementi reagenti in stelle aventi massa $M_{\text{star}} \sim 20 M_{\odot}$.

Studiamo l'ultima riga della Tabella 6. Siamo analizzando, in questo caso il processo di fusione del ^{28}Si ^[Michel19], che tipicamente avviene in stelle aventi masse $15 M_{\odot} \leq M \leq 25 M_{\odot}$ e temperature $2.7 \times 10^9 K \leq T \leq 3.5 \times 10^9 K$ ^[Oughton10 – Pag. 11 su 21].

Nella Tabella 7 sono riportate le prime due catture α del ^{28}Si gradualmente convertito in ^{36}Ar ^[Oughton10 – Pag. 11 su 21].

Bruciamento dell'elemento reagente	Tempo t della reazione
$^{28}\text{Si} + \alpha \leftrightarrow ^{32}\text{S} + \gamma$	Massimo 1 giorno
$^{32}\text{S} + \alpha \leftrightarrow ^{36}\text{Ar} + \gamma$	

Tabella 7 – Bilanciamento tra cattura α e fotodisintegrazione dal ^{28}Si al ^{36}Ar .

La combustione del ^{28}Si è l'ultimo processo che può avvenire nelle stelle citate qui sopra prima di diventare supernove. La sequenza di reazioni riportata nella Tabella 7 è detta **processo di fusione del silicio**. Spieghiamolo meglio.

Dopo che una stella completa il processo di fusione del ^{16}O , il suo nucleo è principalmente composto da ^{28}Si e ^{32}S . Se tale stella ha una massa sufficientemente elevata, essa si contrae ulteriormente fino a quando la temperatura del suo nucleo raggiunge $2.7 \times 10^9 K \leq T \leq 3.5 \times 10^9 K$ ($230 \text{ keV} \leq E_T \leq 300 \text{ keV}$), dove E_T è l'energia termica del nucleo della stella. A queste temperature, il ^{28}Si e altri elementi possono foto-disintegrarsi emettendo un protone o una particella α .

Per nuclei simili al ^{28}Si l'energia di separazione di un nucleone vale circa 8 MeV ed è molto vicina a quella di separazione della particella α . Questo perché la particella α ha una grande energia di legame per nucleone. Per questo motivo le reazioni di fotodisintegrazione (γ, p) , (γ, n) e (γ, α) sono molto attive nella disintegrazione dei nuclei di ^{28}Si . Dato che il ^{28}Si è particolarmente stabile, il suo tempo di fotodisintegrazione è piuttosto lungo. La scala temporale della generazione di nuclei pesanti viene quindi determinata dal tasso di reazioni di fotodisintegrazione del ^{28}Si . La presenza di protoni, neutroni e α liberi ne consente il loro assorbimento da parte di nuclei non dissociati, formando nuclei tendenzialmente più stabili^[Co12].

Stando quindi alle prime due reazioni indicate nella Tabella 7 diciamo che per garantire una normale fusione di due nuclei di ^{28}Si servono temperature di almeno $3.5 \times 10^9 K$. Al di sotto di tali valori prevalgono i processi di disintegrazione del ^{28}Si . L'abbondanza dei fotoni è proporzionale alla quarta potenza della temperatura. Perciò avremo nuclei di ^{28}Si circondati da un gas di fotoni^[Co12]. Una volta che nei normali processi di cattura α si creano elementi più pesanti del ^{28}Si producendo ulteriormente altri fotoni, questi ultimi disintegran i nuclei generati in precedenza invertendo le reazioni finora studiate. Ecco perché i due passaggi indicati nella Tabella 7 sono indicati con le doppie frecce.

Una volta che si arriva al ^{56}Ni (Tabella 5), quest'ultimo diventa ^{56}Fe per due decadimenti β^+ successivi.

Tutte le reazioni che servono per passare dal ^{28}Si al ^{56}Fe seguono la stessa logica della cattura α . Nella Tabella 8 sono riportate le caratteristiche fisiche di una stella avente massa $M = 15 M_{\odot}$ [Oughton10 – Pag. 14 su 21].

Fase	Scala temporale	Temperatura (10^9 K)	Densità (g/cm^3)	Luminosità (unità solari)
Idrogeno	11×10^6 anni	0.035	5.8	28 000
Elio	2.0×10^6 anni	0.18	1 390	44 000
Carbonio	2 000 anni	0.81	2.8×10^5	72 000
Neon	0.7 anni	1.6	1.2×10^7	75 000
Ossigeno	2.6 anni	1.9	8.8×10^6	75 000
Silicio	18 giorni	3.3	4.8×10^7	75 000
Collazzo del nucleo di $^{56}\text{Fe}^{(a)}$	~ 1 secondo	> 7.1	> 7.3×10^9	75 000

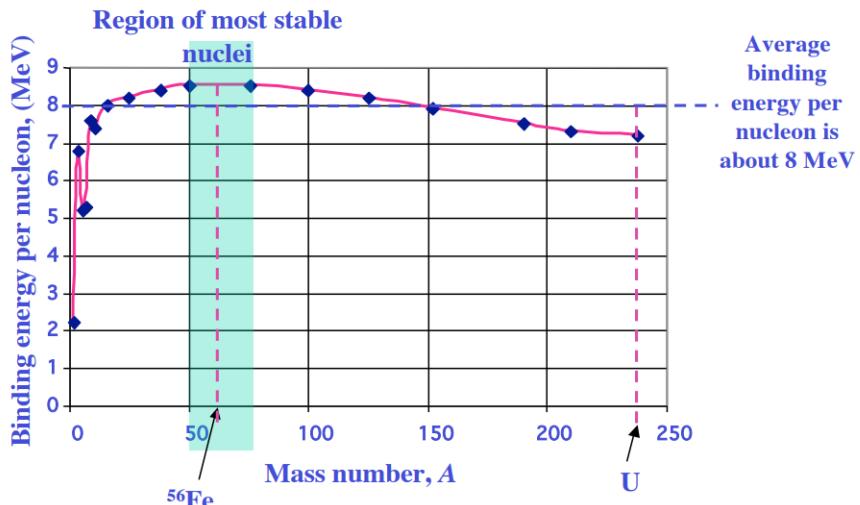
Tabella 8 – Evoluzione di una stella con massa $M = 15 M_{\odot}$

Nota indicata con l'apice (a) – La stella presupernova è definita dal momento in cui la velocità di contrazione in qualsiasi punto del nucleo di ferro raggiunge i 1000 km/s .

L'energia di legame per nucleone B/A in funzione del numero di massa A , massima nell'isotopo ^{56}Fe , assume il seguente andamento sperimentale illustrato nella Figura 13 [CERN-Indico-15-12 – Diapositiva 14 su 16 di Power Point – Pagina 3 su 4 in formato PDF].

Binding Energy and Nuclear Forces

Binding Energy per Nucleon



The binding energy per nucleon as a function of the mass number.

Figura 13 – Energia di legame per nucleone B/A in funzione del numero di massa A

Dal diagramma dell'energia di legame illustrato nella Figura 13 risulta chiaro che l'energia può essere ottenuta da elementi più pesanti, come il ^{238}U , mediante il processo di *fissione*, cioè quando il nucleo più pesante si divide in due nuclei più leggeri. Vale anche il discorso inverso, ossia il processo di *fusione*, cioè quando due nuclei si fondono per formare un nucleo più pesante.

La questione della produzione di elementi più pesanti del ^{56}Fe nelle stelle massicce e decisamente calde viene risolta spiegando i cosiddetti processi *r* (rapid – **veloce**) e *s* (slow – **lento**), come

vedremo subito nel prossimo paragrafo della tesi, mediante la cattura neutronica e il decadimento β^- .

Prima studiamo il **criterio di Schwarzschild**^[Onorato17 – Pagg. 15-16 su 19] e dopo confrontiamo i tassi di produzione energetica ϵ rispetto alla temperatura T nei tre processi pp , CNO e 3α ^[Favoino20] (vedi Appendice C della tesi).

2.5. Reazioni nucleari per la produzione di nuclei più pesanti del ^{56}Fe mediante la cattura neutronica che avviene nei processi s e r

Poiché nel ^{56}Fe abbiamo il massimo assoluto dell'energia di legame per nucleone, ne deriva che per creare elementi più pesanti di esso non è più energeticamente sufficiente il processo di fusione tra due nuclei. Il meccanismo idoneo alla produzione di nuclei più pesanti del ^{56}Fe è la cattura neutronica che compete con il decadimento β^- . La prima reazione prevale sulla seconda meglio nel processo r che nel processo s .

Prima di studiare nel dettaglio i due processi s e r , cerchiamo di capire in che tipi di stelle si può generare l'isotopo stabile del ^{56}Fe mediante i processi nucleari studiati fino ad ora. Andiamo per gradi partendo dal concetto di supernova^[Gotti15 – Pagg. 13-15 su 16].

Le supernovae (SNe) sono massicce esplosioni che coinvolgono le strutture stellari rilasciando un'energia cinetica di circa 10^{51} erg , della quale l'1% si trasforma in fotoni, e iniettando parecchio materiale nel mezzo interstellare a velocità possibilmente superiori a 10^4 km/s . Durante l'esplosione una SN può raggiungere una luminosità di $L = 10^9 L_\odot \div 10^{10} L_\odot$, pari a quelle galattiche. Una SN è di tipo *II* quando le sue righe spettrali di emissione comprendono anche quelle dell'idrogeno, altrimenti è di tipo *I*. Quest'ultimo si suddivide in tre sottotipi: *Ia*, *Ib* e *Ic*. *Ia* si riferisce alle righe dell'elio, *Ib* alle righe del silicio e *Ic* a tutti gli altri elementi diversi dall'elio e dal silicio. Le SNe di tipo *Ia* si chiamano **terminucleari**, mentre le altre (*Ib*, *Ic* e *II*) si chiamano **Core-Collapse**^[Gotti15 – Pag. 13 su 16].

1. **SNe Termonucleari**^[Gotti15 – Pagg. 13-14 su 16] → Una SN *Ia* si genera dall'innescata della fusione del carbonio nel nucleo della stella in ambiente completamente degenero. Ci sono diverse teorie che ne spiegano il meccanismo, ma ci limitiamo a considerare il caso di una **nana bianca**, dato che quest'ultima contiene più materiale $C \div O$ degenero di tutte le altre stelle dell'Universo. Una nana bianca è il residuo di una gigante rossa morente, di massa $M < 8 M_\odot$, incapace di innescare la fusione del carbonio. La contrazione del nucleo rende il gas di elettroni del tutto degenero, mentre gli strati esterni vengono espulsi, raffreddando ancora di più la stella quasi defunta. La nana bianca è stabile, in quanto sostenuta dalla pressione degli elettroni completamente degeneri, se la sua massa non supera il valore critico del cosiddetto **limite di Chandrasekhar**, circa pari a $M_{Ch} \simeq 1.44 M_\odot$. Tale limite può essere superato in due modi possibili, a patto che la nana bianca si trovi in un sistema binario stretto.
 - 1.1. **Single Degenerate Scenario** → La nana bianca acquisisce massa da una compagna gigante.

1.2. Double Degenerate Scenario → La bianca si fonde con un'altra bianca tramite coalescenza (analogia con le goccioline d'acqua che si fondono per formarne una più grossa).

In entrambi i casi per $M > M_{Ch}$ la bianca si contrae innescando le fusioni del ^{12}C e del ^{16}O in elementi del gruppo del Ferro, con il picco di energia prodotta al ^{56}Fe , come dimostrato dalle catture α presenti nella Tabella 5.

Dopo la contrazione si passa ad un'espansione della stella mediante la formazione di fronti d'onda che viaggiano dal centro alla superficie. Al centro della stella si forma una zona molto calda per la fusione del ^{12}C . Questa zona tende ad espandersi provocando un fronte d'onda. Il fronte d'onda si espande a velocità subsonica (deflagrazione) dietro al quale si hanno vari gusci in cui viene processato il materiale che formava la stella. Mentre si espande il fronte può accelerare da una velocità subsonica ad una supersonica: questa transizione di velocità si chiama **transizione da deflagrazione a detonazione** (*defragration to detonation transition*) ed origina una **detonazione ritardata** (*delayed transition*). Poiché l'onda d'urto coinvolge l'intero nucleo, la SN *Ia* si distrugge completamente, espellendo nel mezzo interstellare molti degli elementi del gruppo del Ferro prodotti nella nucleosintesi esplosiva. Inoltre, il loro modo di esplodere è abbastanza simile tale da fare utilizzare le SN *Ia* come delle candele standard per misurare le distanze cosmologiche.

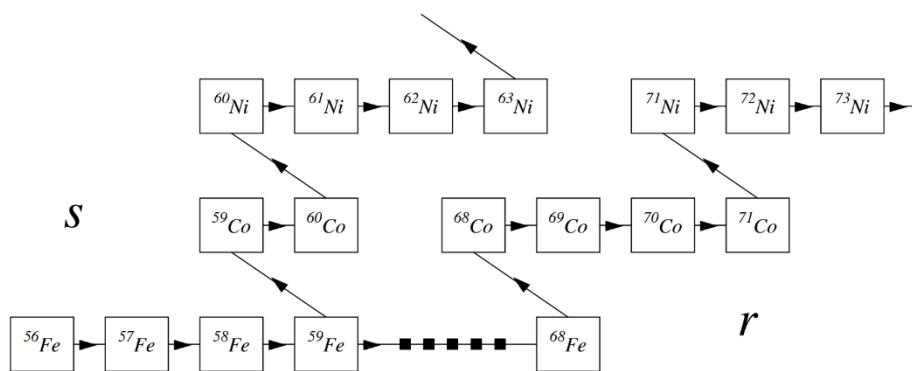
2. **SNe Core-Collapse**^[Gotti15 – Pagg. 14-15 su 16] → Una stella con $M > 11 M_{\odot}$ brucia tutti gli elementi leggeri fino ad arrivare ai due nuclei inerti di ^{56}Fe e ^{56}Ni per $T = 10^9 \text{ K} \div 10^{10} \text{ K}$, in quanto un'ulteriore fusione nucleare sarebbe endotermica. Il raggiungimento di questo stadio è determinato in primo piano da catture α e alimentato dalla fotodisintegrazione degli elementi presenti (rivedi attentamente la Tabella 5), che rilasciano altri nuclei α e neutroni liberi, che sostengono i processi s . Tuttavia, l'elevatissimo flusso di neutrini espelle dalla stella gran parte dell'energia prodotta da questi processi, passando da pochi anni per la combustione del ^{12}C a pochi giorni per quella del ^{28}Si . Una volta formatosi un nucleo stellare costituito da ^{56}Fe la stella avrà una struttura a cipolla in cui ci sono diverse *shell* costituite da elementi sempre più pesanti man mano che si scende in profondità da ^1H a ^{28}Si . In condizioni di densità e temperatura tipiche di questo ambiente ($\rho \simeq 10^{10} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $T > 2 \times 10^9 \text{ K}$) i fotoni hanno energia sufficiente da frantumare i nuclei di ^{56}Fe per fotodisintegrazione, liberando nuclei atomici o singoli protoni a seconda della specie atomica distrutta, che possono assorbire elettroni dal mezzo, dato che l'energia cinetica degli elettroni per $T > 2 \times 10^9 \text{ K}$ riesce a colmare la differenza di massa tra protoni e neutroni, rilasciando neutrini e degradando (abbassando) l'energia del sistema. Queste reazioni si autoalimentano poiché la perdita degli elettroni causa la contrazione rapida della struttura e, di conseguenza, l'aumento dell'efficienza del circolo vizioso venutosi a creare: questo processo, detto **processo URCA**, provoca il collasso del nucleo in scale temporali di frazioni di secondo fino a quando la sua densità supera quelle dei nuclei atomici. La situazione è la seguente. La cattura degli elettroni produce nuclei sempre più ricchi di neutroni e forma un nocciolo di pura materia neutronica. La materia al di sopra di questo nocciolo non riesce a comprimerne ulteriormente il nocciolo e quindi c'è un rimbalzo che produce l'onda d'urto. La compressibilità finita della materia nucleare, soprattutto quella

neutronica (cioè il fatto che non si possa comprimere all'infinito), è legata al fatto che le interazioni tra due nucleoni, a distanze inferiori a circa 0.5 fm , sono altamente repulsive. L'evento lascia dietro di sé il nucleo collassato della stella che a seconda della sua massa può diventare una stella di neutroni, se la pressione di degenerazione riesce ad arrestare il collasso, con $M_{nucleo} > 2 \div 3 M_{\odot}$, altrimenti si formerà un buco nero. Il materiale espulso è fatto in gran parte di elementi α degli strati esterni e in piccola parte da elementi del gruppo del Ferro generati dalla fusione del ^{28}Si e da altri elementi generati con il processo r al passaggio dell'onda d'urto.

Poiché nel ^{56}Fe abbiamo il massimo assoluto dell'energia di legame per nucleone, ne deriva che per creare elementi più pesanti di esso non è più energeticamente sufficiente il processo di fusione tra due nuclei, dato che al diminuire dell'energia di legame per nucleone ne paga il prezzo la sua stabilità. Il meccanismo idoneo alla produzione di nuclei più pesanti del ^{56}Fe è la cattura neutronica. Supponiamo che nella **SN Core-Collapse** ci sia una popolazione di isotopi di ^{56}Fe tale da far sì che ci sia una buona probabilità che un neutrone possa essere catturato dal ^{56}Fe . Tale processo si ripeterà per altre due volte fino al ^{59}Fe , come illustrato nelle formule (2.48-2.50)^[Co12].

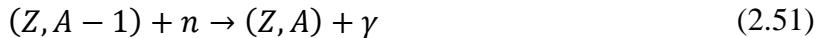


L'isotopo ^{59}Fe non è stabile e vive in media per circa 45 giorni. Se il flusso di neutroni è così basso da rendere trascurabile la probabilità di cattura neutronica nel tempo di vita consentito, il ^{59}Fe diventa ^{59}Co per decadimento β^- ($^{59}\text{Fe}_{33} \rightarrow ^{59}\text{Co}_{32} + e^- + \bar{\nu}_e$). D'altra parte, è anche possibile che il ^{59}Fe diventi dopo ripetute catture neutroniche ^{68}Fe . Anche quest'altro isotopo è instabile e decade β^- diventando ^{68}Co . Da questo punto si fa distinzione tra i cosiddetti processi s e r (Figura 14^[Co12 – Pag. 135 su 149 in versione PDF]). Di questo ne discutiamo a breve dopo avere trattato teoricamente la variazione dell'abbondanza isotopica N_A rispetto al tempo t nel capoverso sotto la Figura 14.



I due processi disegnati in Figura 14 sono quelli che maggiormente producono elementi con numero di massa $A > 60$. Il primo processo è di tipo s , questo perché il flusso di neutroni è talmente debole che il tempo di cattura neutronica è molto più lento del tempo di vita media dei nuclei instabili generati. Il processo di tipo r riguarda il caso opposto a quello del processo di tipo s .

Le reazioni (2.48-2.50) di cattura neutronica si possono applicare per qualsiasi elemento con $A > 60$ nella seguente reazione generalizzata:



Questi processi sono determinati non solo dall'intensità del flusso neutronico, ma anche dalla loro sezione d'urto e dalla costante di decadimento β^- dell'isotopo prodotto (Figura 15^[Co12 – Pag. 136 su 149 in versione PDF]).

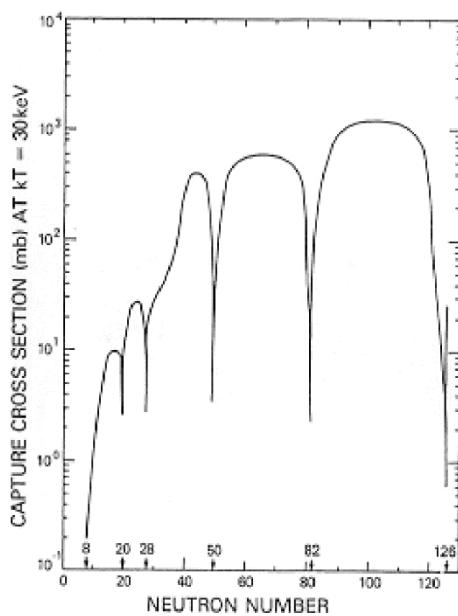


Figura 15 – Sezione d'urto di cattura neutronica in funzione del numero di neutroni. Da notare i minimi in corrispondenza dei numeri magici.

La legge che descrive l'abbondanza di N_A di un isotopo in funzione del tempo è dettata dalla seguente equazione:

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = N_n(t)\langle v \rangle [\sigma_{A-1}N_{A-1} - \sigma_A N_A] - \lambda_A N_A(t) \quad (2.52)$$

dove N_n è la densità di neutroni, $\langle v \rangle$ la loro velocità media, σ la sezione d'urto della cattura neutronica, λ_A la costante di decadimento β^- per il nucleo avente numero di massa A e, infine, i prodotti $\sigma_{A-1}N_{A-1}$ e $\sigma_A N_A$ sono, rispettivamente, le moltiplicazioni delle sezioni d'urto per le abbondanze prima e dopo la cattura neutronica.

Abbiamo un processo di formazione di nuovi nuclei per cattura elettronica $\frac{dN_A(t)}{dt} > 0$ per $\sigma_{A-1}N_{A-1} > \sigma_A N_A$ e domina il termine di decadimento $\lambda_A N_A(t)$. L'ampiezza della differenza $\sigma_{A-1}N_{A-1} - \sigma_A N_A$ risulta cruciale nel distinguere nettamente il processo s da quello r .

Per un dato isotopo avente un numero A di nucleoni sono fissati i parametri σ_{A-1} , σ_A e λ_A . Il fattore che favorisce o inibisce la formazione del nucleo è il flusso neutronico definito dal prodotto $N_n(t)\langle v \rangle$ tra il numero di neutroni in tempo reale $N_n(t)$ e la loro velocità media $\langle v \rangle$. Ciò sta a significare che i flussi neutronici bassi, che si verificano in una presupernova, caratterizzano il processo s , mentre quelli elevati, che avvengono durante l'esplosione di una supernova, caratterizzano il processo r .

Analizziamo per bene uno alla volta questi due processi^[Co12 – Pagg. 135-141 su 149 in versione PDF].

2.5.1. Processi lenti (s)

Come indicato nella Figura 14, in un processo lento, il nucleo genitore ($Z, A - 1$) cattura un neutrone creare un nucleo figlio (Z, A) che, se instabile, decade prima di catturare un altro neutrone. Per questa ragione nell'equazione (2.50) il termine di decadimento $\lambda_A N_A(t)$ predomina.

Al contrario, per i nuclei (Z, A) stabili, o di vita media decisamente superiore al tempo di cattura neutronica, l'ultimo termine di decadimento $\lambda_A N_A(t)$ dell'equazione (2.50) diventa trascurabile rispetto agli altri. Di conseguenza i nuclei (Z, A) generati nel processo s sono molto vicini alla valle di stabilità (rivedi la Figura 8).

Se i nuclei (Z, A) sono stabili nel senso pratico del termine allora i tassi di produzione e di decadimento si bilanciano a vicenda, ovvero il prodotto tra la sezione d'urto e la densità di popolazione dei nuclei genitori e nuclei figli rimane invariato^{[Castellani85 – Capitolo 11 – Paragrafo 11.2], [Co12 – Pag. 136 su 149 in versione PDF]}.

$$\sigma_{A-1} N_{A-1} = \sigma_A N_A \quad (2.53)$$

Si vede subito come ad una sezione d'urto di cattura neutronica σ_A peculiarmente bassa, cosa tipica $N = N_{mag}$ (N =numero di neutroni, N_{mag} =numero magico), debba corrispondere un'abbondanza N_A peculiarmente elevata dei picchi di popolazione dei nuclei generati nel processo s con $A = N + Z < 60$.

Il processo s avviene nell'ambito della combustione del ^{28}Si in stelle massive. La prima reazione responsabile del flusso di neutroni utilizzati nel processo s è la reazione



La validità della descrizione dei nostri processi s viene verificata simulando dettagliatamente il calcolo dell'abbondanza dei vari nuclei presenti nel sistema solare^[Rolfs88]. La simulazione parte dai valori noti dell'abbondanza di ^{22}Ne , che quantifica il flusso di neutroni secondo la reazione (2.54), e l'abbondanza di ^{56}Fe usato come nucleo bersaglio. Da questa simulazione ne risulta che le due abbondanze sono più che sufficienti per generare elementi più pesanti del ^{56}Fe nel sistema solare.

I neutroni generati dalla reazione (2.54) consentono di formare quasi tutti i nuclei da $A = 23$ ad $A = 44$. I nuclei catturati dal ^{56}Fe possono dare vita a nuclei da $A = 63$ ad $A = 209$. A questo punto la catena si ferma sul ^{209}Bi perché il ^{210}Bi è instabile e subisce un decadimento α . Tale decadimento gestito dalle interazioni forti è estremamente rapido. Di conseguenza, i suoi tempi sono decisamente inferiori a quelli mediamente necessari ad una cattura neutronica.

La condizione di equilibrio (2.53) è illustrata nella Figura 16.

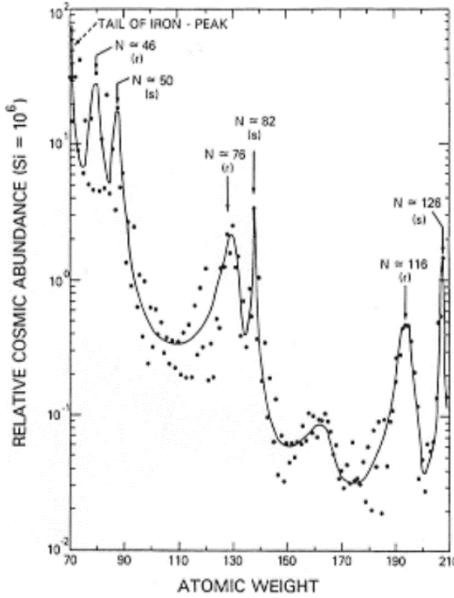


Figura 16 – Abbondanze relative per nuclei con $A > 60$. Il riferimento è sempre l'abbondanza di $^{28}\text{Si} = 10^6$. Da notare l'aumento delle abbondanze in corrispondenza dei numeri magici di neutroni. I picchi prodotti da processi r e s sono indicati.

2.5.2. Processi rapidi (r)

Siamo prima riusciti a spiegare gran parte delle abbondanze osservate con i processi s . Tuttavia, ci sono abbondanze osservate di ulteriori elementi che non sono stati generati con il processo s , che avviene nella fase stellare di equilibrio idrostatico. Ancora ci rimane da spiegare:

- 1- l'abbondanza di 27 nuclei con $A \geq 70$ non ottenibili con il processo s ;
- 2- l'esistenza di elementi più pesanti del ^{209}Bi , ad esempio l'uranio;
- 3- l'abbondanza anomala di elementi leggeri, superiore alle stime basate sulla sintesi primordiale.

La spiegazione convincente sta nell'ipotizzare l'esistenza di processi rapidi, r , che avvengono nelle fasi stellari di non equilibrio, come ad esempio nel collasso di una supernova. Ritornando all'espressione (2.52) diremo che nel processo r il primo termine $N_n(t)\langle\nu\rangle\sigma_{A-1}N_{A-1}$ domina sugli altri due di gran lunga. Di conseguenza si ha che la popolazione di nuclei generati per cattura neutronica aumenta nel tempo in maniera piuttosto rapida per $\frac{dN_A(t)}{dt} > 0$ molto elevato.

Una volta che si interrompe il processo r i nuclei pesanti generati diventano gradualmente nuclei stabili mediante decadimenti β^\pm .

In fase di non equilibrio è ancora possibile la cattura protonica, frenata però dalla barriera Coulombiana, oppure la fotoemissione di un neutrone. Entrambi i processi danno vita a nuclei ricchi di protoni. Nel primo processo aumenta il numero protonico, mentre nel secondo processo diminuisce il numero neutronico. In ogni caso l'abbondanza dei nuclei generati con questi due possibili processi è 100 volte più bassa di quelli prodotti con la cattura neutronica. Ovviamente è anche possibile creare gli stessi nuclei sia con processo r che con processo s .

Per ricavare l'abbondanza N_r di nuclei generati da processo r ci si basa sul fatto che il parametro σN_s , con sezione d'urto σ e abbondanza N_s di nuclei fatti con processo s , è una funzione $f(A)$ molto liscia del numero di massa A .

Empiricamente possiamo approssimare N_r come la differenza tra le abbondanze di elementi N_\odot presenti nel sistema solare e le abbondanze di N_s generati con processo s

$$N_r \simeq N_\odot - N_s = N_\odot - \frac{f(A)}{\sigma(A)} \quad (2.55)$$

a patto di conoscere bene la sezione d'urto $\sigma(A)$ e l'andamento ipotetico di $f(A)$. Ne rappresentiamo graficamente il risultato in Figura 17^[Co12 – Pag. 139 su 149 in versione PDF].

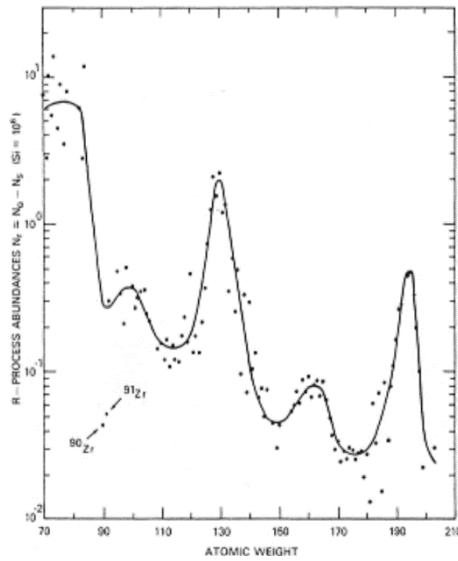


Figura 17 – Abbondanze relative riguardanti i soli processi r .

I picchi massimi di abbondanza relativa, come mostrato in Figura 17, li ritroviamo attorno ad $A = 80$, $A = 130$ e $A = 195$. La spiegazione riguardo a ciò è un vincolo sulle ipotesi riguardanti la nucleosintesi stellare da processo r .

Riprendiamo il concetto di processo r . Abbiamo detto che la cattura neutronica fa aumentare di volta in volta il numero di massa A dei nuclei successivi a (Z, A) originale, questo a causa dell'elevato flusso neutronico. Dopo un numero i di reazioni il processo r si arresta quando il tasso di cattura neutronica $\sigma_A N_A$ è bilanciato con quello di fotodisintegrazione $\sigma_{A-1} N_{A-1}$. Nella generica reazione i -esima abbiamo che la prima sezione d'urto σ_A si riferisce alla superficie di collisione tra il nucleo (Z, A) ed il neutrone catturato, mentre la seconda sezione d'urto σ_{A-1} si riferisce alla superficie di collisione tra il nucleo $(Z, A - 1)$ ed il fotone catturato. Studiamo ora il bilanciamento tra il flusso neutronico ed il flusso fotonico in termini di abbondanze dei nuclei generati da tali flussi.

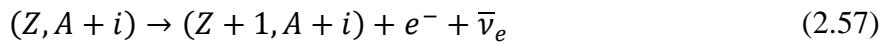
La minima energia necessaria ad estrarre un neutrone dal nucleo, ovvero Q_n , è una caratteristica specifica di ogni isotopo. Il valore di Q_n è fortemente legato alla dettagliata struttura del nucleo, prendendo come fattori Z , la chiusura di *shell* (riempimento dei livelli energetici del nucleo atomico

da parte dei nucleoni che si comportano come fermioni), ecc. Fondamentalmente si ha che Q_n diminuisce con l'aumentare della differenza $Z - N$. Di conseguenza si ha che i processi di fotoemissione (γ, n) possono avvenire con fotoni γ di energia sempre più bassa. A parità di temperatura succede che lo stesso flusso di fotoni bombardando nuclei atomici con grande eccesso di neutroni ne provoca un flusso di neutroni emessi maggiore. L'equazione che descrive la variazione temporale del numero di nuclei con un certo numero atomico, analoga all'espressione (2.52), è del tipo:

$$\frac{dN_A(t)}{dt} = \Phi_n(t)\langle\sigma_{A-1}(n, \gamma)\rangle N_{A-1}(t) + \Phi_\gamma(t)\langle\sigma_A(\gamma, n)\rangle N_A(t) - \lambda_A N_A(t) \quad (2.56)$$

dove $\Phi_n(t)$ e $\Phi_\gamma(t)$ sono, rispettivamente, i flussi di neutroni e fotoni, σ sono le sezioni d'urto di cattura neutronica e fotodisintegrazione, e λ è la costante di decadimento debole.

Quando la cattura neutronica e la fotodisintegrazione si bilanciano a vicenda succede che i primi tre termini della formula (2.56) a destra dell'uguale si annullano. La variazione della popolazione dei nuclei ($Z, A + i$) rimane stabile fino a quando il decadimento β^- acquisisce rilievo



Il processo (2.57) si ripete per nuclei $Z + 1$. L'isobaro $(Z + 1, A + i)$ continua a catturare neutroni fino a quando non si raggiunge dopo k ripetizioni l'equilibrio della (2.57), questa volta per l'isobaro $(Z + 1, A + i + k)$.

Questo susseguirsi di eventi implica che ogni nucleo atomico di carica Z abbia un *punto di attesa*.

Per *punto di attesa* si intende il fatto che elementi chimici aventi un numero atomico Z determinato **devono attendere il decadimento β^-** per proseguire con la cattura neutronica. Di conseguenza le abbondanze del processo r dipendono dal numero atomico Z e non dal numero di massa A , come si faceva per il processo s . Lo schema dei punti di attesa è illustrato in Figura 18^[Co12 – Pag. 140 su 149 in versione PDF].

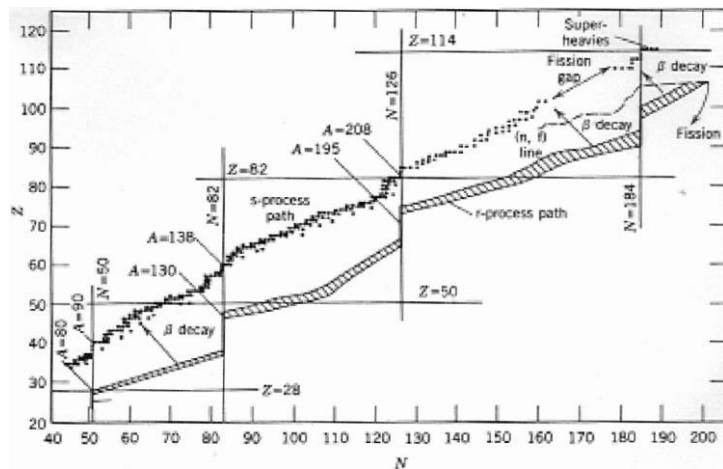


Figura 18 – Schema di formazione dei vari nuclei con processi s e con processi r . Sono evidenziati i punti di attesa attorno ai numeri magici di nucleoni.

Se si osserva attentamente l'andamento del processo r lungo il diagramma NZ in Figura 18 ci si accorge che i nuclei generati in tale processo sono ricchi di neutroni, tipicamente con 10-20 neutroni in eccesso rispetto ai vicini nuclei stabili. Il ruolo dei numeri magici per la chiusura di *shell* è di importanza cruciale nel processo r . Ciò sta a significare che l'energia di separazione Q_n per un nucleo magico è largamente superiore a quella dell'isotopo con un neutrone in più, ossia

$$Q_n(Z, A) \underset{\substack{\text{nucleo} \\ \text{semi-magico}}}{>} Q_n(Z + 1, A) \underset{\substack{\text{nucleo} \\ \text{non magico}}}{>}. \text{ Inoltre, la vita media del decadimento } \beta^- \text{ dei}$$

nuclei semi-magici è decisamente più lunga di quella dei nuclei compagni lungo il diagramma NZ .

Per queste ragioni i nuclei con la *shell* chiusa di neutroni sono un gruppo speciale di punti di attesa, ossia sono dei prodotti finali privilegiati dopo vari decadimenti β^- ripetuti. Entriamo più nello specifico. Una volta che il nucleo (Z, N_M) , dove N_M è il numero magico di neutroni, è diventato $(Z + 1, N_M - 1)$ per decadimento β^- , quest'ultimo mediante la cattura neutronica si trasforma in $(Z + 1, N_M)$, dove alla fine il numero di neutroni rimane magico. Ripetendo diverse volte questa alternanza tra decadimento β^- e cattura elettronica ci si aspetta che nei punti di attesa successivi all'originale Z aumenti di un'unità alla volta mentre N_M rimane costante. Alla fine, abbiamo un numero vasto di nuclei prodotti vicini alla valle di stabilità dove l'energia di separazione Q_n è abbastanza elevata da infrangere l'equilibrio con la fotoemissione di neutroni, così da superare quindi il limite del punto di attesa, e produrre allora nuclei con un numero di neutroni maggiore di quello magico.

L'elevato flusso neutronico che consente l'innesto dei processi r è presente nelle fasi altamente instabili della stella e dura tipicamente molto poco rispetto all'intera vita della stella. Per questo motivo il processo r si interrompe ad un certo momento dato che il flusso neutronico non è sufficientemente intenso da poterlo innescare. A questo punto nel core della stella in fin di vita c'è un'elevata popolazione di nuclei atomici aventi neutroni in grande eccesso. Tali nuclei per tornare nella valle di stabilità dovranno compiere diversi decadimenti β^- fino ad arrivare all'isobaro stabile, ossia l'isobaro più vicino possibile al nucleo progenitore. Come risultato finale abbiamo che per i nuclei progenitori aventi un numero N_n fissato si ottengono nuclei figli con meno protoni mediante il processo r rispetto ai nuclei figli generati mediante il processo s . Studiamoci, ad esempio, il caso del nucleo progenitore $^{124}_{42}Mo_{82}$ che mediante una catena di catture neutroniche e decadimenti β^- genera il nucleo figlio $^{124}_{50}Sn_{74}$. Il primo nucleo possiede un numero magico di neutroni, mentre il secondo non lo possiede.

Nelle Figure 17-18 si nota subito che in corrispondenza dei numeri di massa $A = 80$, $A = 130$ e $A = 195$ e dei numeri neutronici magici N_m si verificano bruchi aumenti del numero atomico Z (Figura 18) che stanno ad indicare i picchi di abbondanza del processo r (Figura 17). In altre parole, i picchi del processo r hanno circa 8-12 unità di massa in meno rispetto ai picchi del processo s .

3. Metodi osservativi dell'attività stellare

3.1. Misure dello spettro elettromagnetico

Prima di entrare nel merito di ciò che discuteremo nel presente paragrafo, da come si dice dal suo titolo medesimo, facciamoci una ripassata teorica su come funziona uno spettro e su come deve essere misurato al fine di classificare categoricamente le stelle nel diagramma HR, come vedremo tra poco nell'Appendice E della tesi.

Abbiamo già fatto cenno alle leggi di Stefan-Boltzmann e di Wien riguardanti la radiazione di corpo nero nel primo capitolo della tesi. In altre parole, diciamo che uno spettro viene inteso come l'insieme di tutte le frequenze (oppure lunghezze d'onda) emesse da una generica sorgente di radiazione^[Pesaresi15 – Pag. 2 su 19].

La legge di Stefan-Boltzmann dice che la luminosità assoluta bolometrica (su tutto lo spettro) di una stella è determinata strettamente dalle sue dimensioni e dalla sua temperatura effettiva superficiale secondo la relazione

$$L = 4\pi R^2 \sigma_B T^4 \quad (1.7)$$

dove $\sigma_B \simeq 5.67 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann.

La temperatura T_{eff} si misura direttamente osservando il picco di luminosità a una certa lunghezza d'onda λ_{max} mediante la **legge dello spostamento di Wien** secondo la relazione

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (1.8)$$

dove b è la costante sperimentale di Wien, che vale^[CODATA18-Wien]:

$$b = 2.897\,771\,995 \dots \times 10^{-3} m \cdot K \quad (3.1)$$

Si può ottenere lo stesso valore della (3.1) adottando la legge di Planck della radianza corpo nero $B_\nu(T)$ che mette in relazione la frequenza ν dei fotoni irradiati da tale corpo a temperatura T come^[Rybicki79 – Pag. 24 su 312 in versione cartacea – Pag. 37 su 325 in versione PDF]:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \quad (3.2)$$

dove h e k sono due costanti fondamentali della fisica, rispettivamente, di Planck e di Boltzmann.

Ripetendo lo stesso ragionamento in termini di lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$ la (3.2) diventa:

$$B_\lambda(T) = \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| B_\nu(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (3.3)$$

Derivando la (3.2) rispetto a ν e fissando il suo risultato a zero per $\nu = \nu_{max}$ estraiamo numericamente la costante di Wien.

$$\left. \frac{dB_\nu(T)}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_{max}} = \left. \frac{d}{d\nu} \left[\frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \right] \right|_{\nu=\nu_{max}} = \quad (3.3)$$

$$= \frac{2h\nu_{max}^2}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{max}}{kT}\right) - 1} \left[3 - \frac{h\nu_{max}}{kT} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{max}}{kT}\right)} \right] = 0$$

sostituendo $x = h\nu_{max}/kT$ l'espressione (3.3) diventa:

$$\frac{2h\nu_{max}^2}{c^2} \frac{1}{e^x - 1} \left[3 - x \frac{1}{1 - e^{-x}} \right] = 0 \rightarrow 3 = x \frac{1}{1 - e^{-x}} \rightarrow x = 3(1 - e^{-x}) \quad (3.4)$$

La sua soluzione numerica approssimata vale circa $x \approx 2.82$.

Perciò la legge di spostamento di Wien in termini di frequenza diventa:

$$h\nu_{max} \approx 2.82 kT \quad (3.5)$$

Passando dalla frequenza alla lunghezza d'onda si ottiene:

$$\begin{cases} h\nu_{max} \approx 2.82 kT \\ \nu_{max} = \frac{c}{\lambda_{max}} \rightarrow \frac{hc}{\lambda_{max}} \approx 2.82 kT \rightarrow hc \approx 2.82 \lambda_{max} kT \rightarrow \\ \rightarrow \lambda_{max} \approx \frac{hc}{2.82 kT} = \frac{b}{T} \rightarrow b \approx \frac{hc}{2.82 k} \approx 2.898 \times 10^{-3} m \cdot K \end{cases} \quad (3.6)$$

Abbiamo finalmente ottenuto il valore teorico della costante di spostamento di Wien, in buon accordo con il valore empirico riportato nella formula (3.1)^[CODATA18-Wien].

Le stelle non si comportano come dei corpi neri perfetti. Sarà meglio parlare di un insieme di tanti “corpi neri” sovrapposti, ciascuno dei quali possiede una temperatura specifica. Soltanto il “corpo nero” più esterno, ovvero la fotosfera, risulta osservabile. Di conseguenza la sua temperatura va definita come la **temperatura effettiva superficiale** T_{eff} . Con T_{eff} , per l'appunto, si intende la temperatura di un ipotetico corpo nero che irradia la stessa densità di flusso della stella. Tutti gli spettri realmente osservati presentano su certi intervalli di lunghezza d'onda delle attenuazioni del flusso radiativo. Passiamo ora alle leggi fisiche responsabili degli spettri osservati. Siamo parlando delle tre leggi formulate da Kirchhoff nel 1859, che descrivono il comportamento spettrale della radiazione prodotta da un gas molecolare, e della legge generalizzata di Kirchhoff-Planck, che parla del rapporto tra i tassi di emissione e di assorbimento in condizione di equilibrio termodinamico. Quest'ultima è una funzione universale della frequenza e della temperatura.

Kirchhoff osservò tre fenomeni fondamentali relativi al gas incandescente capace di emanare radiazione. Questi tre fenomeni furono lo strumento di base per formulare le sue corrispettive tre leggi^[Prevost01].

- **Fenomeno 1 / Legge 1** → Corpi incandescenti sottoposti ad alta pressione emanano uno spettro continuo.
- **Fenomeno 2 / Legge 2** → Corpi incandescenti sottoposti a bassa pressione emanano uno spettro discontinuo.
- **Fenomeno 3 / Legge 3** → Una nube di gas freddo posta tra la sorgente incandescente e l'osservatore assorbe le stesse linee spettrali di quelle emesse dalla stessa nube di gas caldo secondo la Legge 2.

La spiegazione teorica che spiega le tre leggi di Kirchhoff sta nella legge di radiazione di Kirchhoff-Planck. In altre parole, abbiamo bisogno di una funzione universale $f(\nu, T)$ che metta in relazione i tassi di emissione e di assorbimento con la frequenza e la temperatura^[Springer17].

Per prima cosa si studia la funzione $K(\lambda, T)$, il cui integrale dovrà corrispondere al flusso luminoso governato dalla legge di Stefan-Boltzmann. Avremo allora^[Springer17 – Pag. 9 su 62]:

$$I(T) = \int K(\lambda, T) d\lambda = \sigma_B T^4 \quad (3.7)$$

Supponendo che la $K(\lambda, T)$ si comporti analogamente come la $B_\lambda(T)$ definita nella (3.3), la definiamo come^[Springer17 – Pag. 9 su 62]

$$K(\lambda, T) = \lambda^{-5} f(\lambda, T) \quad (3.8)$$

Siccome la (3.8) obbedisce alla statistica di Maxwell-Boltzmann ne deriva che la funzione universale $f(\lambda, T)$ di Kirchhoff-Planck diventa un esponenziale del tipo^[Springer17 – Pag. 9 su 62]:

$$f(\lambda, T) = e^{-\frac{a}{\lambda T}} \quad (3.9)$$

dove a è una costante specifica del corpo nero delle dimensioni di $[L] \cdot [T]$, L =lunghezza, T =temperatura.

L'altra funzione $f(\nu, T)$ segue lo stesso ragionamento fatto per $B_\nu(T)$ diventando^[Springer17 – Pag. 11 su 62]:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} K(\lambda, T) d\lambda = \int_0^{+\infty} K(\nu, T) d\nu \rightarrow \frac{\lambda^2}{c} \int_0^{+\infty} K(\lambda, T) d\nu = \\ d\lambda = \frac{\lambda^2}{c} d\nu \\ = \int_0^{+\infty} K(\nu, T) d\nu \rightarrow K(\nu, T) = \frac{\lambda^2}{c} K(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda, T) = \\ = \frac{1}{c} \frac{1}{\lambda^3} f(\lambda, T) = \frac{1}{c} \frac{\nu^3}{c^3} f(\lambda, T) = \frac{\nu^3}{c^4} f(\lambda, T) = \nu^3 f(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T) \end{cases} \quad (3.11)$$

Estraendo $f(\nu, T)$ dalla (3.11) dopo la conversione della (3.9) da λ a ν avremo:

$$f(\nu, T) = e^{-\frac{av}{T}} \quad (3.12)$$

dove adesso la costante a ha le dimensioni di $[T] \cdot [\nu]^{-1} = [T] \cdot [t]$, T =temperatura, ν =frequenza, t =tempo.

Una volta capita la funzione di Kirchhoff-Planck usata per dimostrare le tre leggi sperimentali di Kirchhoff sugli spettri emanati o assorbiti dalla nube gassosa, mettiamoci a studiare nel dettaglio i comportamenti degli spettri stellari^[Pesaresi15 – Pag. 6 su 19].

Eravamo rimasti alla questione su come si può studiare la struttura e il funzionamento della stella in maniera indiretta tenendo conto dello spettro emanato dalla fotosfera. Applichiamo a tale fine quanto detto finora sulle righe di emissione e di assorbimento. Le righe di emissione solitamente provengono da stelle molto calde con atmosfera rarefatta, mentre le righe di assorbimento si osservano in quasi tutti gli spettri stellari ottenuti^[Pesaresi15 – Pag. 7 su 19]. Ad ogni salto energetico tra due

livelli specifici di una certa molecola o di un certo elemento corrisponderà una certa lunghezza d'onda del fotone coinvolto^[Pesaresi15 – Pag. 8 su 19].

Una riga spettrale è costituita da una zona centrale di avvallamento dell'intensità del flusso radiativo, dove il punto più profondo si trova a lunghezza d'onda $\lambda = \lambda_0$. Le regioni adiacenti con un maggiore flusso di fotoni si chiamano **ali** (*wings*). Dal centro all'esterno della riga l'assorbimento diminuisce sempre di più, correlato alla crescente profondità della riga a cui esso avviene dentro la fotosfera. Tale profondità è definita come $1 - \frac{F(\lambda)}{F(c)}$, dove $\frac{F(\lambda)}{F(c)}$ è il rapporto tra l'intensità di quella riga e quella di tutto lo spettro continuo. Per misurarla introduciamo la cosiddetta **larghezza equivalente** W (Figura 19^[Sergiastro06 – Pag. 19 su 25])

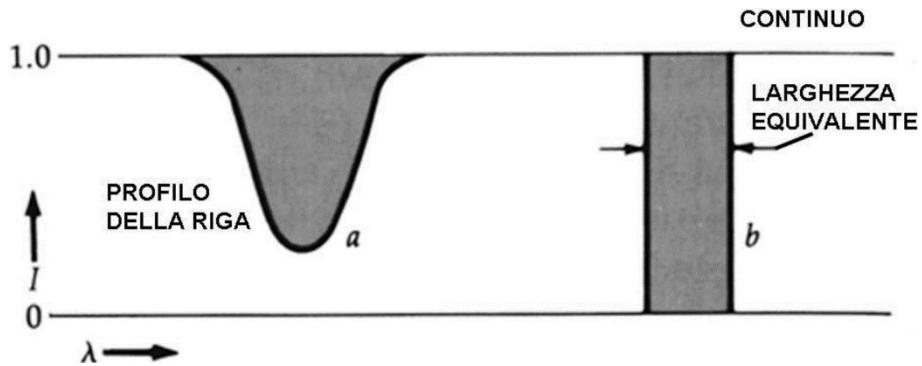


Figura 19 – Definizione grafica di larghezza equivalente di una riga spettrale tale che il rettangolo del grafico (b) abbia la stessa superficie della campana gaussiana del grafico (a) di una banda spettrale.

ovvero la base del rettangolo avente la stessa altezza e la stessa area della riga originale, definita come^[Pesaresi15 – Pag. 8 su 19]:

$$W = \int \left[1 - \frac{F(\lambda)}{F(c)} \right] d\lambda = \int \frac{F(c) - F(\lambda)}{F(c)} d\lambda \quad (3.13)$$

Tuttavia, le righe di assorbimento non sono perfettamente localizzate sul preciso valore matematico della lunghezza d'onda di transizione λ_{trans} . Le ali si flettono leggermente a causa di tre tipi principali di allargamento: **allargamento naturale o intrinseco**, **allargamento collisionale o di pressione**, **allargamento Doppler**^[Pesaresi15 – Pag. 8 su 19].

- **Allargamento naturale o intrinseco**^{[Bohr28], [Demtröder08 – Pagg. 76-84 su 469 in versione PDF], [Giardino15 – Pag. 13 su 19], [Magrini18 – Pagg. 9-13 su 55]} → In meccanica quantistica l'indeterminazione energia-tempo $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ non segue il **principio di indeterminazione di Heisenberg**, come invece fa l'indeterminazione posizione-impulso $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, ma segue il **principio di complementarità** di Niels Bohr, secondo cui l'osservazione di una grandezza sperimentale prelude indirettamente l'osservazione dell'altra grandezza^[Bohr28].
Nel caso della transizione dell'idrogeno^[Magrini18 – Pag. 9 su 55] la prima riga della serie di Balmer riga, ossia $H\alpha$, con $\lambda = 656.3 \text{ nm}$ e $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$ presenta un'incertezza di $\Delta\lambda \approx \approx 4.57 \times 10^{-5} \text{ nm} \sim 5 \times 10^{-4} \text{ Å} = 0.5 \text{ mÅ}$.
- Facciamo un'ulteriore precisazione riguardo l'allargamento naturale nell'Appendice F della tesi^[Demtröder08 – Pagg. 76-84 su 469 in versione PDF]. In questa appendice affermiamo che trattando

l'allargamento naturale della riga come una sovrapposizione di onde monocromatiche è possibile esprimere tale allargamento secondo un **profilo di Lorentz**^[Giardino15 – Pag. 13 su 19].

- **Allargamento collisionale o di pressione**^{[Giardino15 – Pag. 14 su 19], [Rybicki79 – Pag. 303 su 325]} → Le collisioni tra i vari atomi generano un ulteriore allargamento della riga^[Giardino15 – Pag. 14 su 19]. Si può dimostrare che questo allargamento (F.12) può essere descritto definendo Γ come la somma tra γ e il doppio del conteggio delle collisioni N tra gli atomi^[Rybicki79 – Pag. 303 su 325].

$$\psi(v) = \frac{2\Gamma}{\pi} \frac{1}{16\pi^2(v - v_0)^2 + \Gamma^2} = \frac{2(\gamma + 2N)}{\pi} \frac{1}{16\pi^2(v - v_0)^2 + (\gamma + 2N)^2} \quad (3.14)$$

La somma degli allargamenti intrinseco e collisionale è definita **damping profile**.

- **Allargamento Doppler**^{[Emerson96 – Pag. 98 su 460], [Giardino15 – Pag. 14 su 19]} → Un'altra forma di allargamento spettrale è quella dovuto al moto termico degli atomi che emanano la radiazione. Questi ultimi hanno ciascuno un proprio spostamento Doppler delle righe spettrali. In accordo alla statistica di Maxwell-Boltzmann abbiamo l'effetto netto di allargamento delle righe senza variarne l'intensità. Poiché ad energia termica le velocità in gioco degli atomi non sono relativistiche, possiamo tranquillamente studiarci la variazione di frequenza con il classico effetto Doppler che, infatti, risulta^[Giardino15 – Pag. 14 su 19].

$$v - v_0 = \frac{v_0 v_z}{c} \quad (3.15)$$

dove v_0 è la frequenza propria della sorgente, v è la frequenza osservata e v_z è la velocità di allontanamento o di avvicinamento della sorgente rispetto all'osservatore.

L'intensità $\psi(v)$ è proporzionale alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann della gamma delle frequenze $v - v_0$ come $\exp\left[-\frac{mc^2(v-v_0)^2}{2v_0^2kT}\right]$ con m la massa atomica. Il suo profilo di riga vale^[Emerson96 – Pag. 98 su 460]:

$$\psi(v) = \frac{1}{\Delta v_D \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(v-v_0)^2}{(\Delta v_D)^2}} \quad (3.16)$$

Qui l'ampiezza Δv_D , ossia la **larghezza Doppler** (*Doppler width*), viene definita come^{[Emerson96 – Pag. 98 su 460], [Giardino15 – Pag. 14 su 19]}.

$$\Delta v_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (3.17)$$

in cui notiamo la proporzionalità inversa della radice quadrata della massa atomica.

La combinazione dell'effetto Doppler con il *damping profile* è definita come **profilo di Voigt**^[Giardino15 – Pag. 15 su 19].

Al di là del movimento termico delle particelle del gas che costituisce l'atmosfera stellare c'è il problema della turbolenza. In pratica si ha che gruppi di atomi si muovono in maniera collettiva a velocità V_t . Se la scala della turbolenza è minuscola rispetto al libero cammino medio degli atomi, oppure se le dimensioni atomiche sono inferiori allo spessore della regione in cui si forma la riga spettrale, allora si parla di **micro-turbolenza**. Si assume che le velocità V_t di micro-turbolenza obbediscano ad una distribuzione gaussiana esattamente come si faceva prima per le velocità

termodinamiche $\sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Praticamente la vecchia gaussiana per convoluzione diventa una nuova gaussiana^[Giardino15 – Pagg. 14-15 su 19]. La *Doppler width* diventa dunque^[Giardino15 – Pag. 15 su 19]:

$$\Delta v_D = \frac{v_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + V_t^2} \quad (3.18)$$

Un altro parametro fondamentale in astrofisica, dopo aver studiato gli allargamenti e gli spostamenti spettrali, consiste nel misurare le abbondanze degli elementi nel corpo celeste che le ha generate. In particolare, si contano N_a atomi per unità di volume responsabili dell'assorbimento della radiazione. Teoricamente la combinazione delle equazioni di Boltzmann e Saha ci consente di ricavare la percentuale di atomi ionizzati nei loro diversi stati eccitati^[Giardino15 – Pag. 15 su 19].

Dal punto di vista osservativo adoperiamo la cosiddetta **curva di crescita**. Si tratta di un grafico, in scala logaritmica, della W in funzione di N_a , che si suddivide essenzialmente in tre regimi: **regime lineare**, **regime piatto** e **regime di smorzamento** (Figura 20)^[Giardino15 – Pag. 15 su 19].

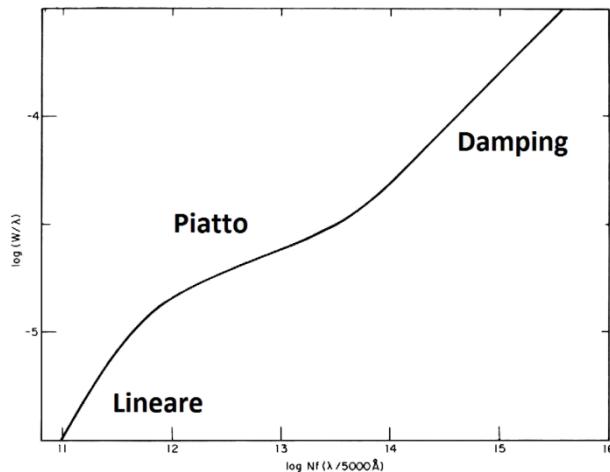


Figura 20 – Curva di crescita della larghezza spettrale equivalente W in funzione dell'abbondanza N_a degli elementi dell'atmosfera stellare che assorbono la lunghezza d'onda fissata λ .

- **Regime lineare**^[Giardino15 – Pag. 15 su 19] → Quando la riga spettrale è di debole intensità, ossia l'abbondanza di N_A atomi che assorbe quella determinata λ è piccola, la curva di crescita assume un profilo lineare.
- **Regime piatto**^[Giardino15 – Pag. 16 su 19] → Man mano che N_a aumenta, il centro della riga spettrale diventa otticamente più spesso, ossia l'assorbimento raggiunge il suo massimo e quindi la riga diventa molto profonda rispetto al continuo. Di conseguenza le ali continuano ad allargarsi senza però modificare sensibilmente la W . Arriviamo così ad un regime di saturazione con andamento quasi piatto del tipo $W \propto \sqrt{\ln(N_a)}$.
- **Regime di smorzamento**^[Giardino15 – Pag. 16 su 19] → A furia di far aumentare N_a arriviamo al **profilo di smorzamento** (*damping profile*) in cui domina l'allargamento collisionale alle ali della riga. L'andamento diventa $W \propto \sqrt{N_a}$.

Ritorniamo al discorso della ionizzazione teorizzato dal fisico indiano Meghnad Saha nel 1921^{[Knapp11], [Nagra20]}.

Secondo la teoria di Saha la ionizzazione è fondamentalmente dovuta al fatto che l'elettrone è stato eccitato con un'energia sufficiente tale da farlo strappare dall'orbitale atomico più esterno.

L'equazione di Saha, che vedremo tra poco, serve a descrivere non solo la composizione chimica, ma anche le condizioni di pressione e temperatura dell'atmosfera stellare.

Deriviamo prima l'equazione di Saha^[Knapp11] e poi ne studiamo il suo significato fisico^[Knapp11] nell'Appendice G della tesi.

Questi strumenti di calcolo li adoperiamo per misurare lo spettro stellare, dalle onde radio ai raggi gamma, dopo avere studiato prima in forma qualitativa i processi fisici (secondo capitolo della tesi) che stanno alla base dell'evoluzione stellare (primo capitolo della tesi). La disciplina a riguardo si chiama **spettroscopia**^[Mete13], di cui ne faremo approfondimento nell'Appendice H della tesi.

Come esempio pratico di spettroscopia ci focalizzeremo sullo studio spettrale delle stelle variabili Cefeidi^[Mennella14 – Pagg. 21-28 su 28].

Le stelle variabili (Cefeidi, RR Lyrae) sono instabili a livello superficiale e presentano oscillazioni periodiche delle loro luminosità. Da qui si ricava la magnitudine assoluta M e, successivamente, la distanza d mediante la magnitudine apparente m , secondo la seguente relazione formulata da Norman Pogdon nel 1856 relativa al suo modulo di distanza $m - M$ ^[Pesaresi15 – Pag. 11 su 19]:

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log_{10} \left[\frac{F(d)}{F(10 \text{ pc})} \right] = & (3.23) \\ &= -2.5 \log_{10} \left[\left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \right] = 2.5 \log_{10} \left[\left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 \right] = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) = \\ &= 5 \log_{10} d - 5 \log_{10} (10 \text{ pc}) = 5 \log_{10} d - 5 \times 1 = 5 \log_{10} d - 5 \end{aligned}$$

dove abbiamo definito il flusso luminoso $F(d) \propto d^{-2}$.

La magnitudine assoluta M , per $m = 0$ nella (3.23), combinata con legge di Stefan-Boltzmann (1.7) si può esprimere come^[Mennella14 – Pag. 22 su 28]:

$$M = -2.5 \log_{10}(4\pi R^2 \sigma T^4) = -5 \log_{10} R - 10 \log_{10} T + \text{costante} \quad (3.24)$$

Nel 1912 l'astronoma americana Henrietta Leavitt scoprì che le magnitudini medie delle Cefeidi sono lineari rispetto al logaritmo del loro periodo di luminosità, quest'ultimo misurato in giorni, secondo la sua espressione sperimentale^[Melchiorri12-27 – Pag. 15 su 68]:

$$M = -2.78 \log_{10} P - 1.35 \quad (3.25)$$

Leavitt notò inoltre che le Cefeidi di tipo II (W Virginis) erano leggermente meno luminose di quelle di tipo I (Cefeidi Classiche) a parità di periodo^[Melchiorri12-27 – Pag. 14 su 68].

Spieghiamo ora i motivi che ci sono dietro i meccanismi di pulsazione stellare^[Cugno10 – Pagg. 22-23 su 93].

Una volta che la stella esce dalla sequenza principale, questa inizia a pulsare mediante una serie di meccanismi che si celano al suo interno. Questo perché le forze non riescono a bilanciarsi e ce ne è sempre una che vince sull'altra. Infatti, secondo quanto ribadito nel secondo capitolo della tesi, la fusione 3α del ^4He in ^{12}C deve avvenire ad una temperatura superiore a 10^8 K e per ottenerla la stella si restringe. Inoltre, queste forze interne sprigionano anche un'energia in un primo momento superiore a quella gravitazionale tale da garantire l'esplosione della stella^[Cugno10 – Pag. 22 su 93].

I meccanismi di pulsazione stellare si possono schematizzare in cinque fasi^[Cugno10 – Pag. 22 su 93]:

- **Fase 1** → La pressione dovuta alle reazioni nucleari del core della stella aumenta fino a superare quella gravitazionale. Di conseguenza si espellono gli strati più esterni. I gas si espandono e la luminosità diminuisce a parità di flusso fotonico. Quindi il gas risulta più freddo.
- **Fase 2** → A questo punto il volume è così ampio che la pressione è ormai inferiore quella iniziale. Perciò tale pressione sarà insufficiente per far proseguire l'espansione della stella. Siamo dunque in una fase di equilibrio idrostatico.
- **Fase 3** → Dopo aver superato la fase di equilibrio idrostatico la pressione gravitazionale vince su quella interna così da far comprimere la stella.
- **Fase 4** → Durante la contrazione stellare aumentano di pari passo la pressione, la temperatura e la densità. A questo punto si innescano i processi di fusione.
- **Fase 5** → La stella ritorna in una nuova situazione di equilibrio idrostatico, momento in cui la pressione nucleare bilancia quella gravitazionale. A questo punto il processo riparte dalla **Fase 1**.

La pulsazione di luminosità una Cefeide descritta nella **Fase 1** si spiega mediante il **meccanismo “kappa”**, suddiviso in sei fasi^[Balmaverde20 – Pag. 6 su 27]:

- **Fase 1** → Quando la stella se ne esce dalla sequenza principale, ad un tratto succede che la pressione di degenerazione dello strato vicino al nucleo viene un poco a mancare così da provocare una ricaduta dello strato.
- **Fase 2** → Durante la caduta lo strato diventa più caldo e più denso modificando il suo coefficiente di opacità κ secondo la legge di Kramers.

$$\kappa = \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.26)$$

- **Fase 3** → All'aumentare di κ il calore generato dal surriscaldamento dello strato si disperde verso l'esterno più lentamente e il materiale sottostante allo strato in caduta si riscalda.
- **Fase 4** → Come conseguenza di quanto detto nella **Fase 3** abbiamo che la pressione dello strato inferiore aumenta e spinge in fuori lo strato di prima.
- **Fase 5** → Come conseguenza di quanto detto nella **Fase 4** questa espansione dello strato ne comporta una diminuzione di temperatura e densità. Come risultato si ha uno strato maggiormente trasparente alla radiazione.
- **Fase 6** → Come conseguenza di quanto detto nella **Fase 5** succede che l'energia generata dalla precedente contrazione della variabile Cefeide fuoriesce liberamente attraverso lo strato e la pressione del materiale sottostante diminuisce. Lo strato che ha provocato la pulsazione ricade verso il nucleo e il ciclo “kappa” si ripete tornando alla **Fase 1**.

Nella Figura 21 viene illustrata una tipica variabile Cefeide in termini di luminosità e dimensione periodiche^[Seligman06].

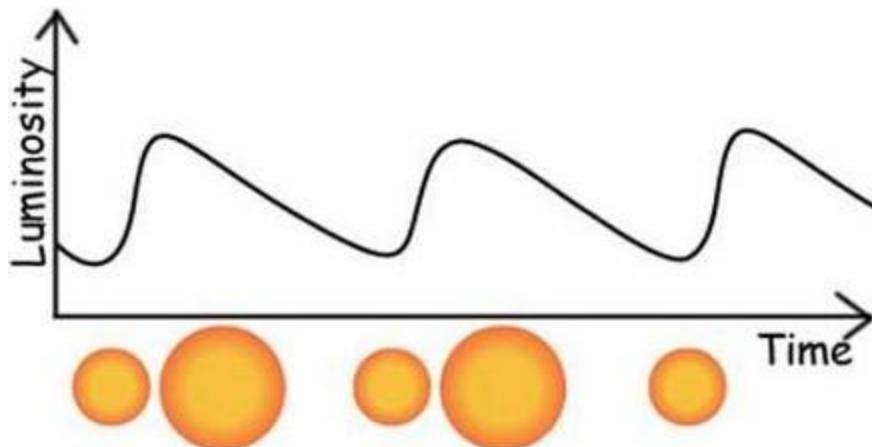


Figura 21 – Variazione di luminosità e dimensione di una tipica variabile Cefeide
(Diagramma tratto da European Space Agency Science e Technology Educational Support)

Il motivo della pulsazione mostrata in Figura 21 sta nel fatto che moderate instabilità in termini di temperatura e densità diventano estreme a causa dei cambiamenti nella struttura degli atomi degli strati che stanno sotto la superficie della Cefeide^[Seligman06].

Una stella è stabile quando il calore che fluisce tra due strati consecutivi è pari sia all'energia prodotta dal nucleo della stella che al calore perso in superficie. Perciò viene richiesto un equilibrio tra temperatura T , densità ρ e opacità $\kappa(\rho, T)$ in una data regione e negli strati adiacenti ad essa, sia sopra che sotto. Se la regione in esame è troppo poco densa per interrompere efficacemente il flusso radiativo verso l'esterno, succede che tale regione perderà calore più di quanto ne possa ricevere. Perciò la regione si raffredda e si contrae diventando così più densa fino a quando non sarà riuscita a fermare il flusso citato prima. Viceversa, se la regione è troppo densa e troppo opaca, il flusso di calore verso l'esterno si interrompe quasi del tutto^[Seligman06].

Queste fluttuazioni di densità seguono un meccanismo analogo a quello della propagazione delle onde sonore, che di solito non producono importanti variazioni della struttura interna della stella, dato che tali variazioni sono mantenute piccole da una continua regolazione della densità e della temperatura. Tuttavia, può succedere a volte che almeno uno di questi parametri si sbilanci abbastanza da provocare fluttuazioni molto più grandi. Questo è proprio ciò che accade nelle stelle variabili Cefeidi^[Seligman06].

Il fenomeno di oscillazione (espansione, contrazione) è un fenomeno limitato alla sola superficie stellare e non è dovuto ad alcun mutamento nella quantità di energia prodotta dalle fusioni nucleari che avvengono nelle regioni più interne delle strutture^[Melchiorri12-27 – Pag. 5 su 68].

Quando una stella con le caratteristiche strutturali delle Cefeidi attraversa la cosiddetta striscia di instabilità del diagramma H-R gli strati esterni diventano instabili, cioè una perturbazione dallo stato di equilibrio tende a propagarsi piuttosto che a smorzarsi, e questa instabilità è la causa dell'innesto del meccanismo di pulsazione. Questa condizione di instabilità non è però in grado da sola di spiegare il ciclo pulsazionale della stella e la sua ripetizione nel tempo, in quanto sarebbe lecito attendersi che l'energia persa per dissipazione nel ciclo pulsazionale possa mettere fine alla pulsazione stessa. Bisogna allora tener conto dell'abbondanza di $^{4}_{2}He^{+}$ nella loro atmosfera e dei fenomeni di ionizzazione e ricombinazione che avvengono a causa dell'aumento (diminuzione) di

temperatura e pressione. La potente radiazione generata dalla stella ionizza una piccola frazione del ${}_2^4He_2^+$ a ${}_2^4He_2^{2+}$, che è molto più opaco alla radiazione^[Melchiorri12-27 – Pag. 5 su 68].

L'atmosfera inizia a bloccare una parte della radiazione uscente, diventa più calda e inizia ad espandersi. Un'atmosfera più calda ed estesa causa un aumento della luminosità della stella^[Melchiorri12-27 – Pag. 5 su 68].

L'atmosfera espansa inizia presto a raffreddarsi con la conseguenza che il ${}_2^4He_2^{2+}$ si ricombina in ${}_2^4He_2^+$ ^[Melchiorri12-27 – Pag. 5 su 68].

Adesso l'atmosfera è di nuovo relativamente trasparente, perde calore e si restringe^[Melchiorri12-27 – Pag. 5 su 68].

L'intero processo riparte ora dall'inizio^[Melchiorri12-27 – Pag. 5 su 68].

Nello studio delle Cefeidi sorge, però, un grosso problema: alla fine degli Anni '60 del '900 Bob Cristy si rese conto che le masse delle Cefeidi stimate con gli osservabili pulsazionali (periodo, raggio medio) erano più piccole di quelle ottenute con gli osservabili evolutivi (magnitudine media, colore medio). La differenza tra le due masse era dell'ordine del 30% ÷ 40% e la si poteva spiegare sotto varie ipotesi avanzate^[Bono10 – Pag. 1 su 2].

I meccanismi fisici che sono stati suggeriti per risolvere tale discrepanza sono^[Bono10 – Pag. 1 su 2]:

1. maggiore efficienza dei fenomeni di mescolamento nelle regioni centrali;
2. aumento della velocità di rotazione;
3. aumento dell'efficienza della perdita di massa;
4. aumento di opacità.

Alla fine degli Anni '90 del '900 si è rivelata corretta l'ipotesi (4), nuove stime hanno fatto ridurre la differenza di massa di un fattore due^[Bono10 – Pag. 1 su 2].

Il punto forte del problema risiedeva nel fatto che non erano disponibili misure indipendenti della massa dinamica (legge di Keplero) di una Cefeide. Infatti, nella Via Lattea non sono state identificate finora Cefeidi in sistemi binari ad eclisse. Questo difetto è stato superato di recente grazie ad uno studio fotometrico sistematico delle stelle varabili situate nelle Nubi di Magellano^[Bono10 – Pag. 1 su 2].

L'uso dei moderni telescopi della classe dei 10 m ha reso possibile una misura accurata delle velocità radiali del sistema binario e della Cefeide in uno di questi sistemi. Tali misure ci hanno permesso di determinare la massa della Cefeide con una precisione dell'1%. La massa misurata è in buon accordo con la massa pulsazionale e la perdita di massa sembra essere la principale indiziata responsabile della differenza tra massa evolutiva e massa pulsazionale^[Bono10 – Pag. 2 su 2].

Nella Figura 22 sono indicate le temperature di attivazione della fusione 3α del ${}_4^4He$ in ${}^{12}C$, rispettivamente, nelle **combustioni ad elio freddo e caldo (CHeB, HHeB)**^[Morel10 – Pag. 1 su 7].

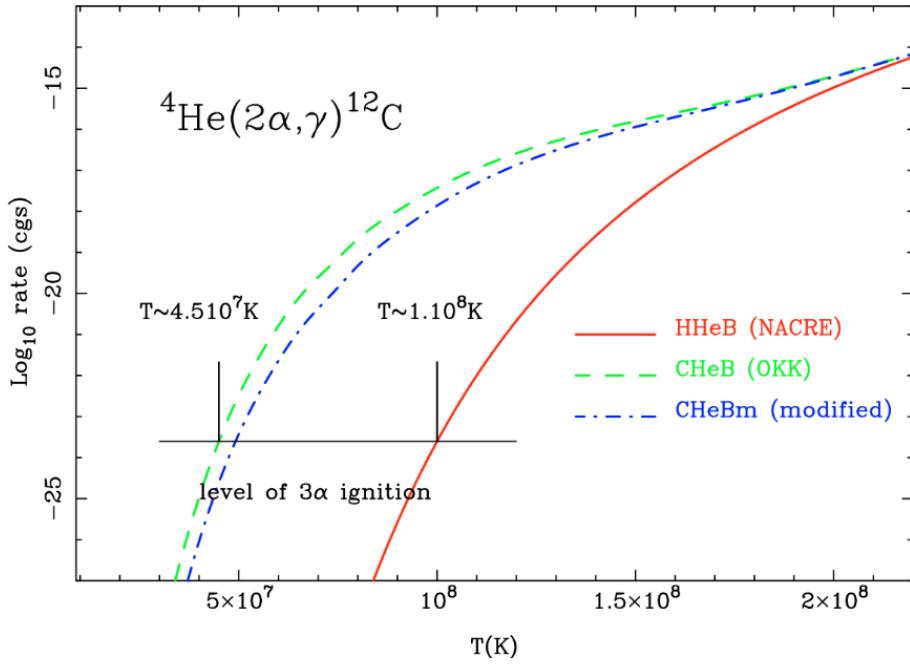


Figura 22 – Tassi della reazione ${}^4\text{He}(2\alpha, \gamma){}^{12}\text{C}$ in relazione alla temperatura T .

Linea verde – Misura del logaritmo rapporto delle sezioni d’urto dopo e prima lo scattering inelastico della fusione 3α fatta con l’elio freddo a temperatura $T \sim 4.5 \times 10^7 \text{ K}$.

Linea rossa – Discorso analogo a quello della linea verde fatto con l’elio caldo a temperatura $T \sim 1.1 \times 10^8 \text{ K}$.

Nota bene – Le sezioni d’urto di CHeB (OKK) calcolate teoricamente sono circa 20 volte inferiori a quelle misurate sperimentalmente nella raccolta dati NACRE (Nuclear Astrophysics Compilation of Reaction rates). La correzione tra i due grafici si ottiene facendo la differenza dei due logaritmi, ossia $\log_{10}(\Delta 3\alpha) = \log_{10}(3\alpha_{\text{NACRE}}) - \log_{10}(3\alpha_{\text{OKK}})$, nella linea blu (CHeBm), dove CHeBm è una variante modificata di CHeB.

Nella reazione ${}^4\text{He}(2\alpha, \gamma){}^{12}\text{C}$ è stato trovato uno scattering risonante ad energie prossime a 11 MeV ; tuttavia nell’intervallo di temperatura richiesto nella Figura 22 gli intervalli di incertezza di $\log_{10}(\Delta 3\alpha)$ giacciono dentro quelli di $\log_{10}(3\alpha_{\text{NACRE}})$ raggiungendo un massimo di circa il 20% per $T \sim 10^8 \text{ K}$ [Valle18 – Pag. 4 su 16].

Per questo motivo si è stata messa in considerazione l’incertezza $\log_{10}(3\alpha_{\text{NACRE}})$, quest’ultima pari circa al 20%, nell’intervallo temperatura di interesse, come stima conservativa dell’incertezza sulla velocità di reazione 3α . Sono stati calcolati modelli specifici variando il tasso 3α all’interno dell’errore stimato per diverse masse stellari lungo il *loop* di instabilità della famiglia delle Cefeidi nel diagramma HR. Ne risulta così che le incertezze del tasso 3α non influenzano sensibilmente le quantità evolutive e pulsazionali delle Cefeidi [Valle18 – Pag. 4 su 16].

In sostanza abbiamo che la quantità di elio prodotto nei processi HHeB e CHeB è identica per le stelle in sequenza principale. Una volta usciti dalla sequenza principale abbiamo che l’innesto della fusione 3α nei modelli calcolati con HHeB l’elio è già stato diluito con un drogaggio molto profondo. Di conseguenza succede che c’è meno riserva di elio usato come combustibile nucleare. Perciò avremo che l’energia prodotta nella catena 3α è inferiore a quella ottenibile con gli altri processi finora studiati nel secondo capitolo della tesi [Morel10 – Pag. 4 su 7].

La luminosità media delle Cefeidi appartenenti alla fascia di instabilità è maggiore nel processo CHeB rispetto a quella nel processo HHeB in base ai valori seguenti riportati in Tabella 9^[Morel10 – Pag. 4 su 7].

M/M_{\odot}	HHeB	CHeB	CHeBm
4.0	2.440	2.613	2.602
5.0	2.949	3.025	2.964
6.0	3.235	3.300	3.198
7.0	3.470	3.554	3.442
8.0	3.666	3.755	3.747
9.0	3.818	3.939	3.891
10.0	3.926	4.116	4.048

Tabella 9 – Logaritmi della luminosità media (L/L_{\odot}) per modelli giacenti nella striscia di instabilità computati con HHeB, CHeB, e CHeBm.

Pertanto, se fissiamo la luminosità, otteniamo l'effetto opposto per le masse, ossia la massa calcolata con HHeB è inferiore a quella calcolata con CHeB^[Morel10 – Pag. 4 su 7].

La relazione massa-periodo è schematizzata numericamente nella Tabella 10^[Morel10 – Pag. 4 su 7] e graficamente nella Figura 23^[Morel10 – Pag. 5 su 7].

M/M_{\odot}	HHeB	CHeB	CHeBm
4.0	0.0096 ± 0.025	0.1623 ± 0.063	0.1519 ± 0.025
5.0	0.4317 ± 0.024	0.5222 ± 0.032	0.4447 ± 0.056
6.0	0.6840 ± 0.034	0.7444 ± 0.034	0.6305 ± 0.066
7.0	0.8744 ± 0.072	0.9344 ± 0.040	0.8492 ± 0.050
8.0	1.034 ± 0.089	1.123 ± 0.034	1.109 ± 0.056
9.0	1.124 ± 0.099	1.270 ± 0.046	1.212 ± 0.063
10.0	1.239 ± 0.134	1.400 ± 0.047	1.339 ± 0.069

Tabella 10 – Logaritmi della periodi medi per modelli giacenti nella striscia di instabilità computati con HHeB, CHeB, e CHeBm misurati con i loro valori medi e le loro incertezze.

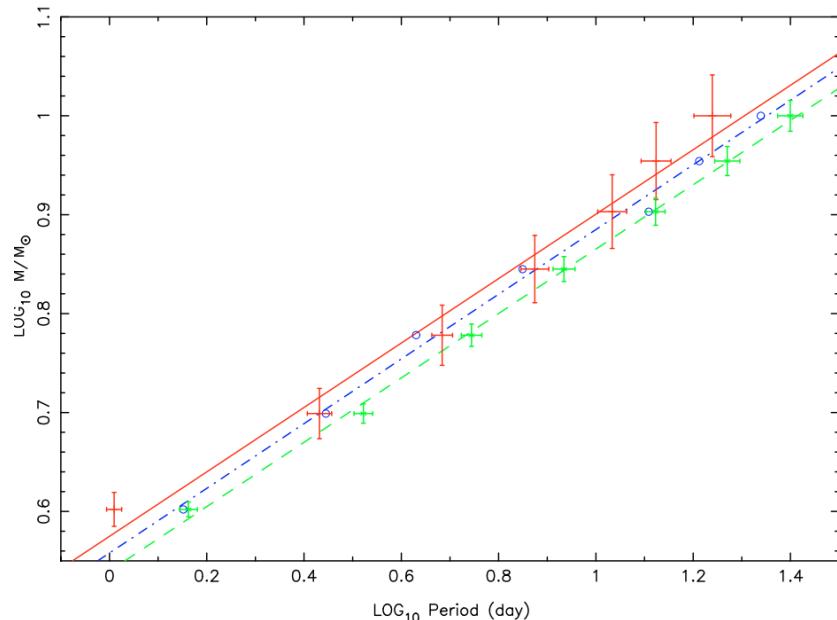


Figura 23 – Relazione massa-periodo per modelli teorici computati con CHeB (linea verde tratteggiata), HHeB (linea rossa normale), e CHeBm (linea blu tratteggiata-punteggiata).

Ci accorgiamo, inoltre, che la discrepanza tra le due masse teoriche è relativamente alta ($\Delta M/M \sim \sim 20\%$) per Cefeidi poco pesanti ($M \sim 5 M_{\odot}$), mentre è relativamente bassa ($\Delta M/M < 1\%$) per Cefeidi molto pesanti ($M \sim 20 M_{\odot}$)^[Keller08 – Pag. 2 su 5]. Praticamente il nucleo è abbastanza convettivo per Cefeidi leggere, dove la pulsazione della luminosità è di durata relativamente breve.

Dagli studi fatti nel 2000 da Caputo e da altri suoi colleghi abbiamo che la relazione massa-luminosità indicata in Figura 23 è soggetta ad incertezze molto elevate per Cefeidi molto pesanti^[Keller08 – Pag. 4 su 5]. Inoltre, tali valori di massa evolutiva sono più grandi del $(17 \pm 5)\%$ di quelli di massa pulsazionale, secondo le misure fatte da Girardi e da altri suoi colleghi nello stesso anno^[Keller08 – Pag. 4 su 5]. Tuttavia, la vera causa della discrepanza delle tue masse teoriche non è stata ancora completamente chiarita tutt'oggi^[Keller08 – Pag. 4 su 5], nonostante la conferma dell'ipotesi (4) relativa alla differenza di massa^[Bono10 – Pag. 1 su 2].

Come ultima premessa, analizziamo il rapporto tra le abbondanze di carbonio e azoto, quest'ultimi derivati dal ciclo CNO, nel nucleo di una variabile Cefeide^[Takeda21].

La misurazione spettroscopica delle abbondanze di carbonio, azoto e ossigeno è stata ottenuta prendendo spunto dalle linee spettrali (misurate in Ångstrom) C I 7111/7113/7115/7116/7119, N I 8060/8063/8086, O I 6155/6158 provenienti da 12 Cefeidi, quest'ultime avendo pulsazioni che durano tra i 2 e i 16 giorni, tenendo dell'effetto **non-LTE**, ossia di bande di frequenze diverse da quelle per telecomunicazioni **LTE** (*Long Term Evolution*)^[Takeda21 – Pag. 1 su 35].

Nel ramo FGK delle supergiganti del diagramma HR è stato trovato che l'abbondanza di ossigeno è inferiore a quella del Sole di un fattore $0.2 \div 0.4 \text{ dex}$ ($10^{0.2} \div 10^{0.4}$), mentre quella del carbonio è sotto-abbondante di un fattore $0.2 \div 1.0 \text{ dex}$ ($10^{0.2} \div 10^1$) e quella dell'azoto sovrabbondante di un fattore $0.2 \div 0.8 \text{ dex}$ ($10^{0.2} \div 10^{0.8}$)^[Takeda21 – Pag. 1 su 35]. Quindi il rapporto C/N è inferiore a quello previsto dal tasso di reazione 3α ^[Morel10 – Pag. 4-5 su 7].

Chiuso l'argomento sulle Cefeidi, studiamoci nell'Appendice E della tesi i diversi sistemi di classificazione stellare, dallo schema di Norman Pogson fino quello di Harvard, e passiamo direttamente al prossimo ed ultimo paragrafo di quest'ultimo capitolo della tesi per parlare dell'osservazione sperimentale dei neutrini solari generati dalla catena *pp* e dal ciclo CNO.

3.2. Neutrini solari

Nei primi due capitoli abbiamo già ribadito che nella catena *pp* e nel ciclo CNO vengono generati fotoni e neutrini elettronici. Per la precisione abbiamo che i fotoni osservati da Terra provengono dalla superficie della stella, mentre i neutrini provengono dalle reazioni nucleari presenti nel cuore della stella. Tuttavia, i neutrini rilevati a Terra mediante opportune strumentazioni di laboratorio possono essere sia solari che artificiali, quest'ultimi provenienti da reattori nucleari, come è successo negli esperimenti Kamiokande e MACRO, di cui ne faremo cenno a breve.

Studiamoci adesso i flussi dei neutrini solari lungo la scala delle energie di emissione previsti dal cosiddetto **Modello Solare Standard** (SSM – *Solar Standard Model*)^[Fiorini07].

La Figura 24 mostra il flusso di neutrini calcolato nel 2005 dalla coppia di scienziati Bahcall e Senerelli tenendo conto dei dati degli esperimenti GALLEX+GNO e SAGE^[Haubold12 – Pag. 3 su 13].

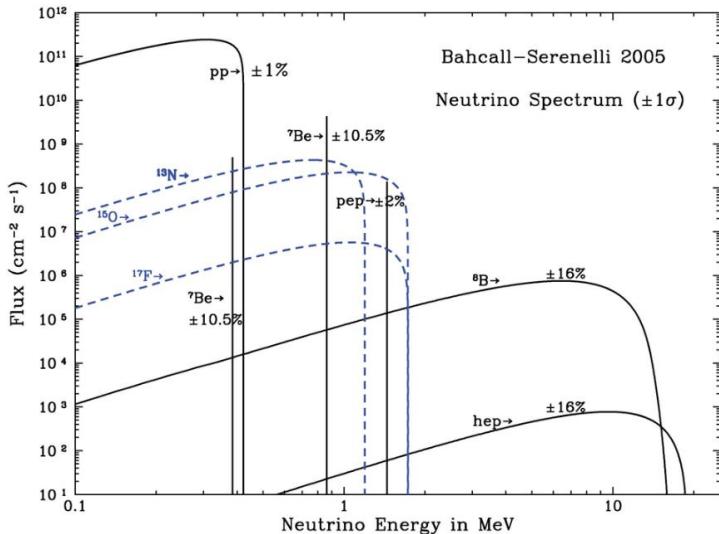


Figura 24 – Flussi dei neutrini con le loro corrispettive probabilità calcolati della coppia di scienziati Bahcall e Senerelli nel 2005 tenendo conto delle misurazioni fatte nei due esperimenti GALLEX+GNO e SAGE.

Le difficoltà relative alle rilevazioni sperimentali dei neutrini solari sono legate al fatto che i processi di iterazione di tali neutrini sulle apparecchiature di laboratorio sono molto rare, tipicamente qualche evento per tonnellata di materiale del rivelatore all'anno. Perciò per rilevare un numero sufficientemente alto di eventi occorrono rivelatori molto grandi e molto pesanti (diverse centinaia di tonnellate) posti sottoterra, dato che il debolissimo segnale dei neutrini solari è fortemente disturbato da quello dei raggi cosmici. Inoltre, i materiali dei rivelatori devono essere il meno possibile soggetti alle contaminazioni radiative^[Fiorini07].

Il primo esperimento a questo proposito è stato fatto quasi mezzo secolo fa nella miniera di Homestake, USA, per iniziativa dell'astrofisico Raymond Davis, oggi premio Nobel per la Fisica. La reazione studiata, per suggerimento del fisico nucleare Bruno Pontecorvo, è la seguente^[Fiorini07]:



seguita da un processo di catture elettronica sull'isotopo ${}^{37}\text{Ar}$, il quale ha un'emivita di soli 35 giorni, mediante la reazione^[Fiorini07]:



La reazione (3.27) si attiva solo se i ν_e superano l'energia di soglia di 814 keV^[Fiorini07].

In pratica, abbiamo che i ν_e collidono con gli atomi ${}^{37}\text{Cl}$ del materiale liquido C_2Cl_4 (percloroetilene) contenuto nel recipiente dell'esperimento di Davis, per un peso 610 tonnellate. Dopo la collisione (3.27) gli atomi ${}^{37}\text{Ar}$ emessi arrivano su dei rivelatori capaci di “contarli”^[Fiorini07].

Il segnale si misura in **SNU** (Solar Neutrino Unit), dove $1 \text{ SNU} = \frac{10^{-36} \text{ interazioni/neutrino}}{\text{atomo} \times \text{secondo}}$ ^[Fiorini07].

Il risultato sperimentale di Davis rivela un chiarissimo segnale pari a $(2.55 \pm 0.25) \text{ SNU}$ ^[Fiorini07].

La sua importanza è assai cruciale dato che il suo valore misurato è circa tre volte inferiore a quello teorizzato dal **SSM**^[Fiorini07].

Il secondo esperimento Kamiokande, eseguito nella miniera giapponese di Kamioka, ne dà un’ulteriore conferma di quanto fatto con il primo esperimento di Homestake. In pratica, succede che i neutrini solari interagiscono con gli elettroni dell’acqua (680 tonnellate) producendo la cosiddetta **luce Cherenkov** (velocità fisica degli elettroni superiore a quella di fase della luce nello stesso mezzo^[Kaminer16]) rilevabile direttamente. Il vantaggio di questo esperimento sta nel ricostruire la traiettoria di provenienza dei neutrini rilevati mediante zone di fluorescenza Čerenkov create dalla collisione di questi neutrini. Il prezzo da pagare sta, però, nell’energia da sfruttare^[Fiorini07]. Nel primo esperimento avevamo che il neutrino era rilevabile almeno con una soglia di 814 keV . Nel secondo esperimento, invece, ci serve una soglia ben più elevata, di circa 7 MeV . Il flusso misurato era pari circa alla metà di quanto previsto dal SSM^[Fiorini07].

Praticamente nel primo esperimento vengono rilevati i neutrini di uno dei due decadimenti



mentre nel secondo esperimento i due decadimenti (3.29-3.30) si sommano eliminando ${}^8\text{Be}$ secondo la reazione



come succede nella curva di flusso di ${}^8\text{B}$ indicata nella Figura 24.

Il terzo esperimento (SuperKamiokande) ha sfruttato i valori elevati di massa e di numero di eventi osservati, nonché la possibilità di rilevarne la direzione di provenienza. Il flusso misurato era pari circa alla metà di quanto previsto dal SSM^[Fiorini07].

Questa differenza tra il flusso sperimentale e quello teorico dei neutrini solari ricavata nei primi due esperimenti suggerisce tre possibili ipotesi^[Fiorini07]:

- **Ipotesi 1** → Teoricamente nel SSM è assai difficile predire il flusso di neutrini ad energia molto elevata. Carmen Overture, G.Bizet, Piano Version - YouTubea inoltre osservato che il flusso dei neutrini generati dal decadimento del ${}^7\text{Be}$ è proporzionale all’ottava potenza della temperatura centrale del Sole, ovvero $\phi_{\nu_e}({}^7\text{Be}_3) \propto T_{\odot}^8$, mentre quello di ${}^8\text{B}$ addirittura alla diciottesima potenza, ovvero $\phi_{\nu_e}({}^8\text{B}_3) \propto T_{\odot}^{18}$! Basterebbe quindi variare di poco la T_{\odot} per risolvere il **problema dei neutrini solari** (SNP – Solar Neutrinos Problem).
- **Ipotesi 2** → Come suggerito da Bruno Pontecorvo, succede che, se la massa del neutrino non è nulla, allora il suo numero leptonico non si conserva, ma cambia di sapore. Di conseguenza, i neutrini elettronici generati dal nucleo del Sole viaggiando fino alla Terra si possono trasformare in neutrini muonici o tauonici. Quest’ultimi non possono pertanto interagire nella reazione (3.27) di Homestake e in quella riguardante gli elettroni dell’acqua messa nel recipiente Kamiokande.
- **Ipotesi 3** → I flussi dei neutrini di alta energia sono praticamente infinitesimali rispetto al flusso totale di neutrini solari. Per questo motivo, per risolvere efficacemente SNP dobbiamo impiegare rivelatori sensibili ai neutrini di bassa energia, soprattutto quelli generati dalla catena pp .

A questo punto il quarto esperimento ed il quinto esperimento idonei a verificare l'ipotesi (3), basandosi sulla reazione dei neutrini solari interagenti con l'isotopo del Gallio ^{71}Ga , sono, rispettivamente, SAGE (Soviet American Gallium Experiment) e GALLEX (GALLium EXperiment)^[Fiorini07].

Il fisico russo Vadin Kuzmin suggerì per l'esperimento SAGE la seguente reazione^[Fiorini07]:



seguita dal decadimento β^- inverso del ^{71}Ge con un'emivita di 11.4 giorni^[Fiorini07]:



La sua energia di soglia è di 233 keV, decisamente più bassa di quella massimamente richiesta dai neutrini della reazione pp -I. Il segnale teorico totale si aggira attorno a 125 SNU \div 232 SNU, di cui almeno 70 SNU sono dovuti alla reazione pp -I^[Fiorini07].

Nell'esperimento SAGE, eseguito nel laboratorio sotterraneo di Baksan, Caucaso, Russia, si utilizzano dei recipienti (prima quattro, adesso otto) contenenti 30 \div 60 tonnellate di gallio metallico liquido, con $T_{fusione} = +29^\circ\text{C} = +302.15\text{ K}$. Ogni tre o quattro settimane viene abbassato opportunamente il pH del liquido e i pochi atomi rimasti di ^{71}Ge diventano tetrachloruro di germanio, composto volatile estratto per decompressione d'aria e convertito in germano (tetraioduro di germanio, ovvero GeH_4) che, inserito in un contenitore, come nell'esperimento di Homestake, permette il conteggio degli atomi di ^{71}Ge prodotti dai neutrini solari. I risultati risalenti al dicembre del 1990 sono di importanza straordinaria in ambito scientifico^[Fiorini07].

L'esperimento GALLEX è stato condotto nel laboratorio sotterraneo INFN del Gran Sasso in una collaborazione di ricercatori francesi, tedeschi, italiani e con un piccolo gruppo americano e israeliano (Figura 25)^[Fiorini07].

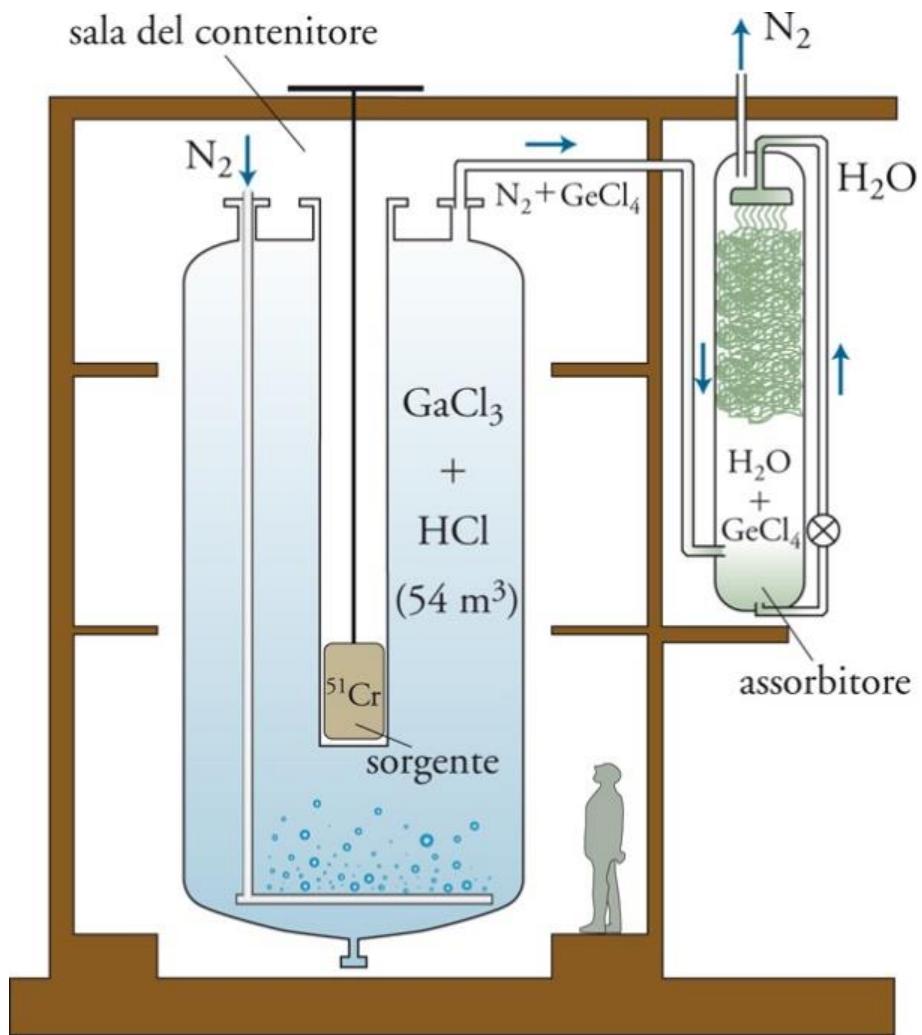


Figura 25 – Schema dell'apparecchiatura dell'esperimento GALLEX

Il bersaglio consisteva in una soluzione di 102 tonnellate, delle quali 30.3 erano fatte di tricloruro di gallio (GaCl_3). Il GaCl_3 veniva estratto facendolo defluire in tre o quattro settimane mediante un intenso flusso di azoto. Il trattamento chimico e le misurazioni sono simili a quelle dell'esperimento SAGE, ma l'estrazione ed il conteggio sono di efficienza considerevolmente maggiore^[Fiorini07].

Nel giugno del 1992 è stato rilevato un segnale fortissimo dovuto ai neutrini solari, sebbene ancora una volta più basso di quello previsto da SSM. Un secondo esperimento della collaborazione SAGE indicava, in contrasto con il primo, un segnale del tutto coerente con quello registrato da GALLEX^[Fiorini07].

L'esperimento GALLEX, sotto il nome di **GNO** (*Gallium Neutrino Observatory*), proseguì per cinque anni, fino alla chiusura nel 2004, con una collaborazione più limitata. L'altro esperimento, il SAGE, è invece ancora in corso^[Fiorini07].

I risultati in SNU dei due esperimenti con il ^{71}Ga sono riportati in Tabella 11 con i loro corrispettivi errori, uno statistico e l'altro sistematico^[Fiorini07].

Esperimento	SNU
GALLEX+GNO	$69.3 \pm 4.1 \text{ (errore statistico)} \pm 3.6 \text{ (errore sistematico)}$
SAGE	$67.2 \pm 3.7 \text{ (errore statistico)} \pm 3.2 \text{ (errore sistematico)}$

Tabella 11 – Confronto degli SNU misurati separatamente, uno nell'esperimento GALLEX+GNO e l'altro nell'esperimento SAGE.

I risultati della Tabella 11 danno conferma che il flusso dei neutrini di alta energia è molto scarso, come evidenziato prima dagli esperimenti di Homestake e di Kamiokande^[Fiorini07].

L'apparato di seconda generazione del vecchio esperimento Kamiokande, ossia il nuovo apparato SuperKamiokande, si basa sulla rivelazione della luce Čerenkov emessa dai neutrini. Il serbatoio contiene ben 50 000 tonnellate d'acqua. La distribuzione angolare degli eventi osservati dimostra chiaramente che i neutrini rilevati provengono dal Sole (Figura 26)^[Fiorini07].

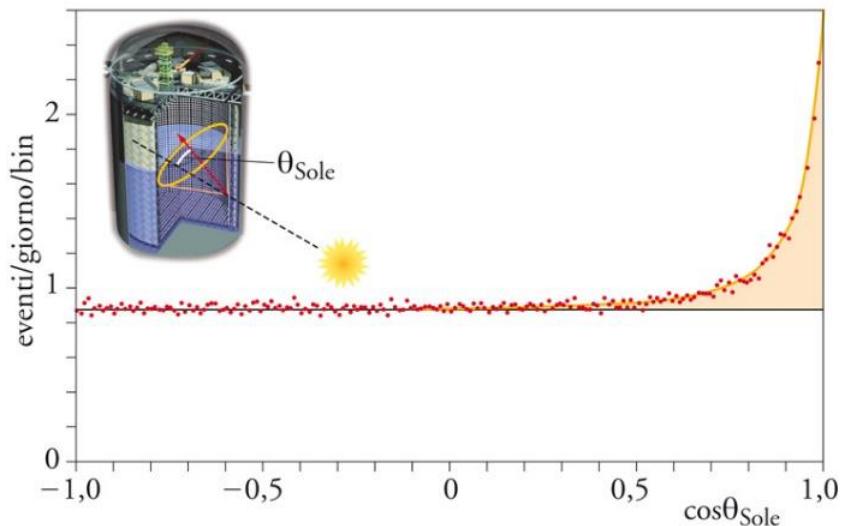


Figura 26 – Numero di neutrini al giorno per bin (unità elementare dell'istogramma) al variare dell'angolo di osservazione rispetto al Sole (θ_{Sole}).

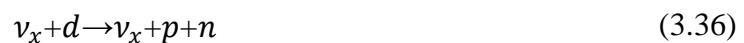
L'esperimento SNO, in funzione dal 2000, si basa anch'esso su un rivelatore ad effetto Cherenkov, dove però vi sono contenute 1000 tonnellate di acqua pesante (D_2O), per osservare i neutrini solari non solo con i nuclei di idrogeno (^1H) ma anche con quelli di deuterio (^2H)^[Fiorini07].

I risultati di questi due esperimenti di grandissima importanza hanno dimostrato definitivamente l'esistenza delle oscillazioni del neutrino^[Fiorini07].

Il quinto esperimento (SNO) ha permesso di osservare non solo la reazione^[Fiorini07]



dove x sta ad indicare il sapore leptonico del neutrino (elettronico, muonico oppure tauonico), ma anche le due reazioni^[Fiorini07]



L'esperimento **MACRO** (*Monopole Astrophysics and Cosmic Ray Observatory*) ha identificato i primi segnali di oscillazione del neutrino confrontando il rapporto tra la popolazione di ν_μ e quella di ν_e .

Nell'esperimento SuperKamiokande, inteso come ampiamento dell'esperimento Kamiokande, è stato misurato il flusso di neutrini atmosferici, messo poi a confronto con quello dei ν_e provenienti dall'acceleratore KEK e con quello dal rivelatore KAMLAND, sempre negli stessi laboratori sotterranei del SuperKamiokande.

L'esperimento SNO si suddivide in tre fasi^{[Caccianiga15 – Pag. 9 su 57], [Majorana01]} (Figura 27^[Majorana01]).

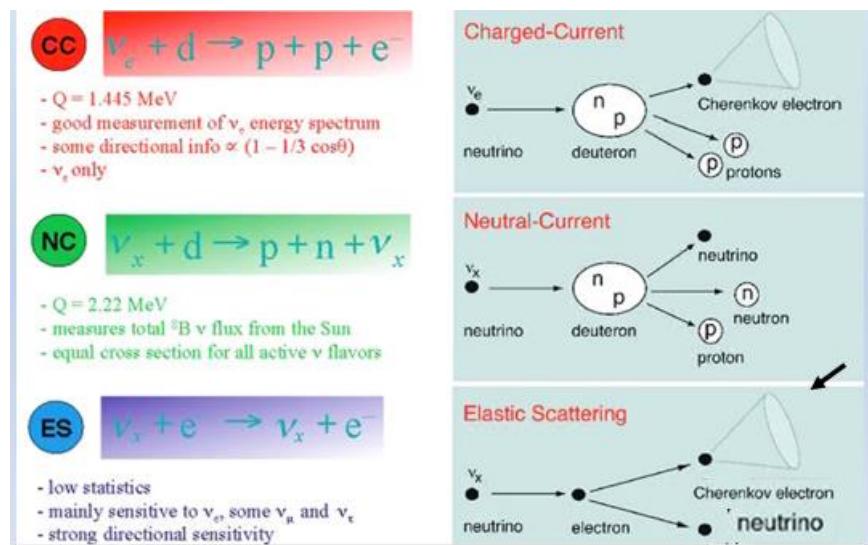


Figura 27 – Schema delle fasi dell'esperimento SNO

- **Fase 1 (Novembre 1999 – Maggio 2001) → Acqua pesante (D_2O) / Corrente carica (Charged current)**^{[Caccianiga15 – Pag. 9 su 57], [Majorana01]} → Un neutrino interagisce col neurone dell'acqua pesante dando vita ad un elettrone e spezzando il nucleo in due protoni. L'elettrone può essere rilevato mediante l'effetto luminoso Čerenkov (velocità della particella nel mezzo superiore alla velocità di fase della luce nello stesso mezzo^[Kaminer16]). Questa reazione può avvenire solo se il neutrino interagente con l'acqua pesante è di sapore elettronico ν_e .
- **Fase 2 (Luglio 2001 – Settembre 2003) → Sale ($NaCl$) / Corrente neutra (Neutral current)**^{[Caccianiga15 – Pag. 9 su 57], [Majorana01]} → Le correnti neutre si possono produrre sia con neutrini elettronici ν_e che muonici ν_μ . In questo caso il neutrino interagisce con il nucleo di deuterio rompendone il legame. Si liberano così un protone ed un neutrone, che rallenta urtando altri nuclei vicini di deuterio. Quando il neutrone avrà un'energia sufficientemente bassa è molto probabile che venga assorbito dall'acqua pesante formando un nucleo di trizio ${}^3\text{H}$. Questo si riassetta energeticamente emettendo un fotone gamma di 6.25 MeV. I raggi gamma interagendo con gli elettroni dell'acqua pesante li estrarranno dall'atomo conferendo loro energia sufficiente perché questi elettroni producano luce Čerenkov.
- **Fase 3 (Estate 2004 – Dicembre 2006) → Elio-3 (${}^3\text{He}$) / Diffusione elastica (Elastic Scattering)**^{[Caccianiga15 – Pag. 9 su 57], [Majorana01]} → Il neutrino (sia elettronico ν_e che muonico ν_μ)

può interagire direttamente con un elettrone atomico ionizzando l'atomo e fornendo all'elettrone energia sufficiente per produrre radiazione Čerenkov.

Nelle correnti cariche i ν_e , ν_μ e ν_τ sono sempre accoppiati con i leptoni carichi. Poiché i neutrini sono molto più leggeri dei leptoni carichi, ne deriva che correnti cariche si accorgono facilmente della loro presenza a patto che questi siano di sapore elettronico.

Passiamo ai risultati dell'esperimento SNO^[Majorana01].

L'esperimento SNO è quindi in grado di misurare il flusso totale di neutrini che concorda sperimentalmente con il flusso teorico di neutrini solari. Inoltre, il flusso dei neutrini elettronici è statisticamente pari a 1/3 del flusso totale di tutti i neutrini. Poiché le reazioni nucleari presenti nel Sole (catena protone-protone, ciclo CNO) sono soltanto di sapore elettronico significa che i 2/3 dei neutrini elettronici hanno cambiato sapore durante il loro tragitto dal Sole alla Terra. L'unico modo che spieghi l'oscillazione del sapore leptonico dei neutrini sta nel dimostrare che i neutrini non sono di massa nulla^[Majorana01].

Le energie di legame delle correnti neutre e cariche sono, rispettivamente, $E_{th} = 2.2 \text{ MeV}$ per la reazione $\nu_x + d \rightarrow n + p^+ + \nu_x$ (dove ν_x è il neutrino di sapore x), e $E_{th} = 1.4 \text{ MeV}$ per la reazione $\nu_e + d \rightarrow p^+ + p^+ + e^-$ ^[Caccianiga15 – Pag. 5 su 57].

Sebbene si possano ritenere del tutto dimostrate le oscillazioni del neutrino, dobbiamo adesso determinarne l'esatta natura studiando sperimentalmente i neutrini solari, con il conseguente impegno di maggiori risorse e di utilizzo di tecniche diverse^[Fiorini07].

I diversi esperimenti di terza generazione sfruttabili nell'osservazione dei neutrini solari sono elencati nella Tabella 12^[Fiorini07].

ESPERIMENTO	REAZIONE	RIVELATORE
LENS	$\nu_e + {}^{115}\text{In} \rightarrow {}^{115}\text{Sn}^*$	600 tonnellate di scintillatore caricato con In
MOON	$\nu_e + {}^{100}\text{Mo} \rightarrow e^- + {}^{100}\text{Tc}$	3.3 tonnellate di ${}^{100}\text{Mo}$
Litio	$\nu_e + {}^7\text{Li} \rightarrow e^- + {}^7\text{Li}$	radiochimico con 10 tonnellate di ${}^7\text{Li}$
XMASS	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	10 tonnellate di xenon liquido
HERON	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	10 tonnellate di elio superfluido
CLEAN	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	10 tonnellate di neon liquido
TPC	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	elettroni in un bersaglio gassoso
SNO ⁺	$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	1000 tonnellate di scintillatore liquido

Tabella 12 – Esperimenti di terza generazione possibilmente candidati nell'osservazione dei neutrini solari.

Un altro esperimento candidato di terza generazione^[Fiorini07] è l'esperimento BOREXINO^[Fiorini07],
[Previtali20] svoltosi nella Sala C del Laboratorio Nazionale del Gran Sasso dal 2007 al 2020^[Previtali20].

L'acronimo BOREXINO viene da BOREX, che quest'ultimo sta ad indicare *BORon solar neutrino EXperiment*. L'omonimo rivelatore è un calorimetro a scintillazione liquida con la più alta radio-purezza al mondo ed è contenuto in una sfera di acciaio inossidabile che contiene i tubi fotomoltiplicatori come rivelatori ed è circondato da un serbatoio d'acqua (18 m di altezza per 16.9 m di larghezza) per schermare le radiazioni ambientali e riconoscere i muoni, provenienti dai raggi cosmici, che penetrano negli strati rocciosi della montagna del Gran Sasso^[Previtali20].

L’obbiettivo principale dell’esperimento è misurare con precisione il flusso di neutrini generati dalle reazioni termonucleari nel cuore solare (compresi i neutrini generati dal decadimento del ^7Be) e confrontare i valori misurati con quelli teorici del modello solare standard^[Previtali20].

Gli altri obbiettivi dell’esperimento sono la rivelazione di neutrini solari generati da ^8B , dalla catena pp e forse dei neutrini del ciclo CNO. L’apparecchiatura è sensibile agli antineutrini elettronici mediante il decadimento β^+ inverso ($\bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow n^0 + e^+$) sui protoni o sui nuclei di carbonio^[Previtali20].

I neutrini a bassa energia sono rilevati tramite lo scattering inelastico sugli elettroni. L’energia di rinculo viene trasformata in luce di scintillazione, quest’ultima rivelata da una serie di fotomoltiplicatori^[Previtali20].

L’ideatore italiano dell’esperimento BOREXINO, il professore Giampaolo Bellini, si è posto negli ultimi dieci anni il problema di sapere quali fossero le reazioni nucleari dentro il Sole ipotizzate inizialmente dai due astrofisici Bethe e Weizsäcker. Per misurare le energie estremamente basse dello spettro di particelle irradiate bisognava sopprimere la radioattività di fondo dei raggi cosmici e dell’ambiente terrestre poiché il numero di aspettazione degli eventi di rilevazione dei neutrini era molto basso^[Previtali20].

All’inizio dell’esperimento gli addetti alle misurazioni si posero il problema di studiare il ciclo CNO partendo dal presupposto che in tale ciclo i nuclei dispari-pari del ^{13}N e del ^{15}O emettessero neutrini decadendo, rispettivamente, in ^{13}C e ^{15}N (Tabella 2 – Righe 3 e 6)^[Previtali20].

Il materiale usato nella capsula BOXREINO è uno scintillatore liquido (idrocarburo) che ha la caratteristica di emettere un piccolo lampo di luce quando una particella deposita energia lasciandone traccia sullo scintillatore^[Previtali20].

La conferma dell’importanza del ciclo CNO deriva dallo stesso esperimento BOREXINO mediante le misurazioni eseguite dal 2007 al 2020. Quindi, in realtà, si è studiato il Sole solo come strumento di indagine per le stelle in generale, non avendo una tecnologia diretta per rivelare neutrini di stelle lontane e diverse dal Sole, come evidenzia il professore Marco Pallavicini, membro della giunta esecutiva^[Previtali20].

Tornando allo studio dell’interno del Sole, ci occorre tenere seriamente presente che il neutrino è la fonte di informazione più diretta su come si comporta il cuore del Sole. Se si sa da dove proviene il neutrino, si può avere una “fotografia” dettagliata del nucleo solare in termini di reazioni nucleari sulla produzione dell’elio mediante il ciclo CNO. In base al numero di neutrini emanati tale ciclo dipende fortemente dalla metallicità della reazione solare (opacità del plasma solare)^[Previtali20].

I neutrini solari raggiungono la Terra quasi esattamente alla velocità della luce in circa otto minuti^{[Previtali20], [Wilson21 – Pag. 2 su 4]}.

I risultati di BOREXINO sono stati pubblicati sull’articolo *Catching the rays* della rivista *Nature*, Volume 587, Numero 7835, del 25 novembre 2020^[Wilson21 – Pagg. 2-4 su 4].

La Figura 28 mostra il flusso spettrale dei neutrini generati dal ciclo CNO del Sole messo a confronto con quelli della catena p-e-p e del decadimento β^+ del ^{210}Bi , successivamente questi flussi vanno sommati per ricavarne il risultato osservato^[Wilson21 – Pag. 3 su 4].

In ascissa si indica lo spettro energetico dei neutrini emessi in keV , mentre in ordinata indica un quinto del rapporto tra il numero di eventi e il numero N_h di fotoelettroni rilevati dai fotomoltiplicatori^[Wilson21 – Pag. 3 su 4].

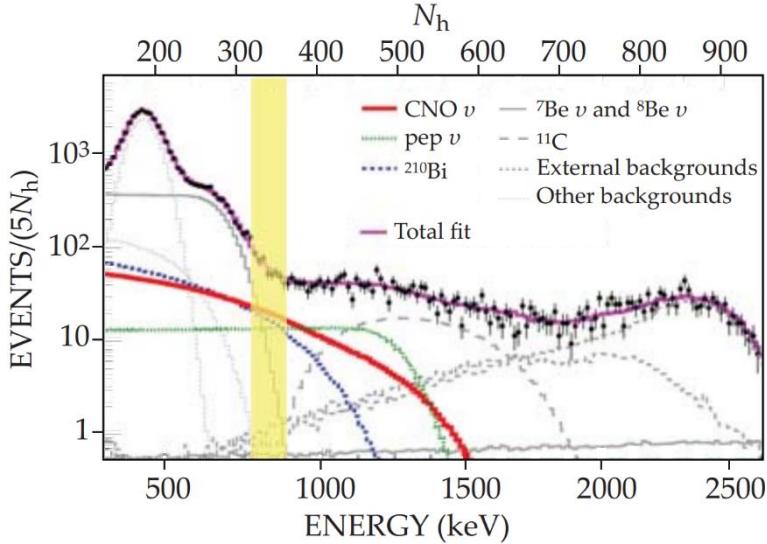


Figura 28 – Il flusso spettrale (linea rossa normale) dei neutrini generati dal ciclo CNO del Sole è la distribuzione delle energie di rinculo degli elettroni diffusi. Tale segnale si ricava sottraendo i contributi di fondo da altri neutrini solari come quelli generati dalla catena p-e-p (linea verde punteggiata), i nuclei radiativi come il ^{210}Bi (linea blu tratteggiata) e altre fonti di rumore (linea grigia normale). I punti neri indicano il segnale totale in funzione dell'energia dei neutrini emanati. N_h rappresenta il numero di foto-elettroni rilevati dai fotomoltiplicatori. Il segnale CNO è completamente abbagliato dal rumore di sottofondo; la striscia gialla rappresenta la regione con il più elevato rapporto segnale-rumore di sottofondo per i neutrini CNO solari.

Il segnale che più ci interessa nella Figura 28 è quello dei neutrini solari generati dal ciclo CNO indicato con la linea rossa, proprio come scopo principale dell'esperimento BOREXINO.

Praticamente abbiamo che il flusso dei neutrini ad alta energia (1500 MeV) è circa 100 volte inferiore a quello dei neutrini a bassa energia (500 MeV), in ottimo accordo con le previsioni del SSM.

Conclusione

In questo lavoro di tesi abbiamo presentato le reazioni nucleari che avvengono all'interno delle stelle per mantenere la loro stabilità. Abbiamo visto che queste reazioni sono strettamente legate alla posizione della stella nel diagramma HR.

Nelle stelle della sequenza principale, dalle nane brune alle giganti blu, le reazioni nucleari producono la combustione diretta dell'idrogeno in elio, la combustione a tappe dell'idrogeno in elio mediante il ciclo CNO nelle sue due ramificazioni primarie (CNO in senso diretto – Tabella 1) e secondarie (^{16}O e ^{17}F usati come catalizzatori – Tabella 2), la catena pp nelle sue varie ramificazioni.

Per le giganti rosse (stelle di prima generazione di popolazione II) abbiamo detto nel secondo capitolo della tesi che i prodotti residui di combustione composti da nuclei di ^4He si trasformano prima in ^8Be e dopo in ^{12}C allo stato eccitato con un'energia di risonanza di 7.65 MeV , detta *stato di Hoyle*. Grazie a questa risonanza, teorizzata da Hoyle e confermata nell'esperimento CHIMERA, la popolazione dei nuclei di ^{12}C è sufficiente ad innescare ulteriori processi di fusione per nuclei stellari piuttosto caldi con almeno $T = 10^8\text{ K}$.

Una gigante rossa in fin di vita può avere due destini diversi, secondo quanto abbiamo studiato nel quinto paragrafo del secondo capitolo della tesi.

1. Se la gigante rossa ha un nucleo di massa inferiore al limite di Chandrasekhar, pari circa a $1.44 M_\odot$, allora si trasforma in una nana bianca.
2. Se la gigante rossa ha un nucleo di massa superiore al limite di Chandrasekhar, allora subisce un collasso gravitazionale che produce un'esplosione di supernova, il cui residuo può essere una stella di neutroni o un buco nero.

Nel primo paragrafo del terzo capitolo della tesi abbiamo introdotto il concetto di spettroscopia in ambito teorico (leggi di Kirchhoff, allargamenti delle righe) e sperimentale (tipologie di spettroscopi). Sempre nello stesso paragrafo abbiamo applicato quanto finora detto sullo studio delle variabili Cefeidi, in termini di massa, periodo di pulsazione, luminosità, al fine di determinare le abbondanze del carbonio e dell'azoto presenti nel ciclo CNO del nucleo della Cefeide. Si è anche cercato di capire la causa della differenza non trascurabile tra la massa teorica evoluzionale e quella pulsazionale delle Cefeidi, ma tutt'oggi senza esito. D'altra parte, è stato, invece, possibile trovare una relazione lineare tra i logaritmi delle loro masse e dei periodi di oscillazione della loro luminosità, in maniera simile alla relazione luminosità-periodo ottenuta quasi un secolo prima dall'astronoma Henrietta Leavitt.

Nell'ultimo paragrafo della tesi abbiamo parlato dell'osservazione dei neutrini provenienti dal Sole. Molti di essi, generati dalla catena pp , sono già stati identificati teoricamente nel SSM negli Anni '60 del '900. Il loro flusso sperimentale era circa tre volte inferiore a quello teorico. Ciò comportò la formulazione dell'ipotesi secondo cui i neutrini oscillano di sapore. Tale ipotesi venne confermata con l'esperimento SNO usando le correnti cariche e neutre. Di recente anche i neutrini generati dal ciclo CNO del Sole sono stati identificati nell'esperimento BOREXINO.

A. Coefficiente di Gamow

Considerando l'interazione coulombiana al di sopra della distanza di Fermi tra due nuclei atomici carichi Z_1 e Z_2 aventi energia totale E inferiore al potenziale colombiano ($V(r)$), succede che queste particelle attraversano la barriera energetica per effetto tunnel. Il coefficiente T di trasmissione lo troviamo nell'espressione (2.10) del secondo capitolo della tesi. Quello che ci interessa è il valore assoluto dell'argomento dell'esponenziale che definisce T , ossia la formula (2.11) qui sotto riportata.

$$\begin{aligned} G &= 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E \right)} = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} = \\ &= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{b} \left[\arccos \left(\sqrt{\frac{R}{b}} \right) - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il parametro G così definito si chiama *coefficiente di Gamow*. Dimostriamo **analiticamente** l'ultima uguaglianza della (2.11).

Il penultimo membro della (2.11) lo manipoliamo con la seguente sostituzione:

$$r = b \cos^2 \theta \quad (\text{A.1})$$

Gli estremi di integrazione diventano:

$$\begin{aligned} \begin{cases} r_i = R \\ r_f = b \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} R = b \cos^2 \theta_i \\ b = b \cos^2 \theta_f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos^2 \theta_i = \frac{R}{b} \\ \cos^2 \theta_f = 1 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \cos \theta_i = \sqrt{\frac{R}{b}} \\ \cos \theta_f = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta_i = \arccos \left(\sqrt{\frac{R}{b}} \right) \\ \theta_f = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Inserendo la (A.2) nell'integrale del penultimo membro della (2.11) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} &= \\ &\begin{aligned} &\stackrel{r=b \cos^2 \theta}{\stackrel{dr=b d(\cos^2 \theta)}{\stackrel{dr=2b \cos \theta d(\cos \theta)}{\stackrel{dr=2b \cos \theta (-\sin \theta) d\theta}{\stackrel{dr=-2b \sin \theta \cos \theta d\theta}}}}} \\ &= \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left(\frac{1}{b \cos^2 \theta} - \frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{2}} (-2b \sin \theta \cos \theta) d\theta = \\ &= -2\sqrt{b} \int_{\theta_i}^0 \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= -2\sqrt{b} \int_{\theta_i}^0 \sin^2 \theta d\theta = 2\sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \sin^2 \theta d\theta = \\ &= 2\sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) d\theta = \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)] d\theta = \\
&= 2\sqrt{b} \int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} d\theta - 2\sqrt{b} \left[\int_0^{\theta_i} \frac{1}{2} \cos(2\theta) d\theta \right]_{\substack{\phi=2\theta \\ \theta=\frac{\phi}{2}}} = \\
&= 2\sqrt{b} \left\{ \left[\frac{\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\theta_i} - \left[\int_0^{2\theta_i} \frac{1}{4} \cos(\phi) d\phi \right]_{\substack{\phi=2\theta \\ \theta=\frac{\phi}{2}}} \right\} = \\
&= 2\sqrt{b} \left\{ \left[\frac{\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=\theta_i} - \left[\frac{1}{4} \sin(\phi) d\phi \right]_{\theta=0}^{\phi=2\theta_i} \right\} = 2\sqrt{b} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=\theta_i} = \\
&= 2\sqrt{b} \left[\frac{\theta_i}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\theta_i) \right] = \sqrt{b} \left[\theta_i - \frac{1}{2} \sin(2\theta_i) \right] = \\
&= \sqrt{b} \left[\theta_i - \frac{1}{2} (2 \sin \theta_i \cos \theta_i) \right] = \sqrt{b} [\theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_i] = \\
&= \sqrt{b} \left[\theta_i - \cos \theta_i \sqrt{1 - \cos^2 \theta_i} \right]
\end{aligned}$$

Sostituendo $\theta_i = \arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right)$ otteniamo il risultato (2.11).

$$\begin{aligned}
&\int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} = \tag{A.4} \\
&\quad \left. \begin{aligned} &r=b \cos^2 \theta \\ &dr=b d(\cos^2 \theta) \\ &dr=2b \cos \theta d(\cos \theta) \\ &dr=2b \cos \theta (-\sin \theta) d\theta \\ &dr=-2b \sin \theta \cos \theta d\theta \end{aligned} \right|_{\theta_i=\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right)} = \\
&= \sqrt{b} \left[\theta_i - \cos \theta_i \sqrt{1 - \cos^2 \theta_i} \right] \Big|_{\theta_i=\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right)} = \\
&= \sqrt{b} \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right) - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \rightarrow \\
&\rightarrow G = 2 \int_R^b dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - E \right)} = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \int_R^b dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} = \\
&= 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} Z_1 Z_2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{b} \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R}{b}}\right) - \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{1 - \frac{R}{b}} \right] \quad (\text{equazione 2.11})
\end{aligned}$$

B. Picco massimo della sezione d'urto in condizioni di risonanza

La sezione d'urto tra proiettile e bersaglio in condizioni di risonanza risulta massima quando^[Co12]

$$\sin^2 \delta_l = 1 \quad \text{quindi} \quad \delta_l = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{con} \quad n = \text{numero intero} \quad (2.34)$$

Supponiamo che a corto raggio ci siano entrambi i potenziali di interazione tra proiettile e bersaglio, quello coulombiano V_C e quello ad interazione nucleare forte V' . Possiamo espandere in serie di multipoli (B.2) la funzione d'onda $\Psi(\vec{r})$ precedentemente studiata nell'equazione di Schrödinger (B.1)^[Co12].

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + U(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (B.1)$$

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta) \quad (B.2)$$

La soluzione radiale della (E.2) si ricava in termini di autovalori $l(l+1)$ dell'operatore momento angolare \hat{L} in unità \hbar^2 e del quadrato del numero d'onda $k^2 = 2mE/\hbar^2$ mediante la seguente equazione differenziale di secondo ordine^[Co12]:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_l(r) = 0 \quad (B.3)$$

La soluzione $u_l(r)$ è la funzione di Bessel sferica $j_l(kr)$ ^[Co12].

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{+\infty} j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (B.4)$$

Le soluzioni asintotiche di (B.1) e (B.4) sono^[Co12]:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l\right)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (B.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{+\infty} A_l i^l (2l+1) \frac{\sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \delta_l\right)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (B.6)$$

dove δ_l è lo sfatamento e A_l è una costante complessa da valutare con opportune condizioni al contorno^[Co12].

Prima di tutto estraiamo la soluzione di (A.1) ed espandiamola in forma asintotica a distanza infinita tra proiettile e bersaglio^[Co12].

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (B.7)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} [\Psi(\vec{r}) - e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}] = \quad (B.8)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{k} P_l(\cos \theta) \left\{ A_l \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right) - \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right\}$$

Dalle condizioni al contorno della (B.7) si deduce che l'onda (B.8) è soltanto uscente. Questo ci consente una volta per tutte di determinare il valore di A_l ^[Co12].

Espandiamo in serie di Eulero il fattore a parentesi graffe dell'argomento della sommatoria (B.8) ^[Co12].

$$\begin{aligned} & A_l \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right) - \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(A_l \left\{ \exp \left[+i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right) \right] - \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right) \right] \right\} + \right. \\ & \quad \left. - \left\{ \exp \left[+i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] - \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \exp \left[+i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] (A_l e^{+i\delta_l} - 1) + \right. \\ & \quad \left. + \exp \left[-i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] (1 - A_l e^{-i\delta_l}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Poiché nell'equazione (B.7) è presente solo l'onda uscente $f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ allora quest'ultima componente della (B.7) non è altro che la prima ed unica componente della (B.9), ovvero^[Co12]

$$f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \exp \left[+i \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right) \right] (A_l e^{i\delta_l} - 1) \quad (\text{B.10})$$

Stando a questo ne ricaviamo che^[Co12]

$$1 - A_l e^{-i\delta_l} = 0 \rightarrow A_l e^{-i\delta_l} = 1 \rightarrow A_l = e^{+i\delta_l} \quad (\text{B.11})$$

Adottando il risultato (B.11) e ricordando che^[Co12]:

$$e^{-i\frac{1}{2}\pi l} = \left(e^{-i\frac{1}{2}\pi} \right)^l = \left[\cos \left(-\frac{1}{2}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{1}{2}\pi \right) \right]^l = (-i)^l \quad (\text{B.12})$$

otteniamo per la (B.8)^[Co12]

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} [\Psi(\vec{r}) - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}] = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) (-i)^l (e^{+i2\delta_l} - 1) e^{ikr} \frac{1}{2i} \quad (\text{B.13})$$

da cui, confrontando la (B.13) con la (B.7), abbiamo^[Co12]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow +\infty} \Psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \\ & \lim_{r \rightarrow +\infty} [\Psi(\vec{r}) - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}] = \end{aligned} \right. \rightarrow \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) (-i)^l (e^{+i2\delta_l} - 1) e^{ikr} \frac{1}{2i} \\ & \rightarrow \left\{ \begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow +\infty} [\Psi(\vec{r}) - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}] = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \\ & \lim_{r \rightarrow +\infty} [\Psi(\vec{r}) - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}] = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) (e^{+i2\delta_l} - 1) e^{ikr} \frac{1}{2i} \end{aligned} \right. \rightarrow \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} &= \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) (e^{+i2\delta_l} - 1) e^{ikr} \frac{1}{2i} \rightarrow \\
\rightarrow f(\theta) &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) (e^{+i2\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \frac{1}{2i} = \\
&= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin \delta_l e^{+i\delta_l} P_l(\cos \theta)
\end{aligned}$$

La sezione d'urto differenziale è definita come il quadrato del modulo della funzione di diffusione angolare^[Co12].

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = |f(\theta)|^2 \quad (\text{B.15})$$

Inserendo la (B.14) nella (B.15) otteniamo^[Co12]:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin \delta_l e^{+i\delta_l} P_l(\cos \theta) \right|^2 \quad (\text{B.16})$$

La sezione d'urto totale si ricava integrando quella differenziale su tutto l'angolo solido^[Co12]:

$$\sigma = \int d\omega \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (\text{B.17})$$

dove abbiamo adottato le proprietà di completezza (grado da 0 a l senza esclusioni di potenze) e ortogonalità (prodotto tra polinomi obbediente al delta di Kronecker) dei polinomi di Legendre^[Co12]:

$$\int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'} \quad (\text{B.18})$$

Adesso studiamo i valori massimi della sezione d'urto totale σ derivandola a zero rispetto allo sfasamento δ_l . Di conseguenza ne ricaviamo il risultato seguente^[Co12]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\delta_l} &= 0 \rightarrow \frac{d}{d\delta_l} \left[\frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \right] = 0 \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) \frac{d \sin^2 \delta_l}{d\delta_l} = 0 \rightarrow \frac{d \sin^2 \delta_l}{d\delta_l} = 0 \rightarrow 2 \sin \delta_l \cos \delta_l = 0
\end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

L'unica soluzione ragionevole è quella di porre massimo il modulo di $\sin \delta_l$. Perciò avremo^[Co12]:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_{max} \rightarrow \sin^2 \delta_l = 1 \rightarrow |\sin \delta_l| = +1 \rightarrow \sin \delta_l = \pm 1 \rightarrow \\
&\rightarrow \delta_l = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{con} \quad n = \text{numero intero} \quad (\text{equazione 2.34})
\end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

C. Criterio di Schwarzschild

Il criterio di Schwarzschild serve per stabilire se la regione in esame della stella è più o meno stabile rispetto alla convezione. Consideriamo un frammento di materia, posto a distanza r dal centro della stella, da cui si allontana radialmente di dr verso la superficie in modo adiabatico. Esso si espande fino a quando la sua pressione non si bilancia con quella del mezzo adiacente^[Treccani11-C]. Se il pezzo di materiale continua a salire diventa instabile e si innesca la convezione; se scende, esso pesa di più, quindi c'è stabilità e non c'è convezione. Inseriamo i parametri iniziali (1) e finali (2) di pressione P , densità ρ e temperatura T nella Tabella 13. Se non c'è l'apice (*) allora si tratta del frammento di materia soggetto al moto convettivo, altrimenti ci si riferisce al materiale adiacente ad esso^[Onorato17 – Pag. 15 su 19].

Punto di partenza (1)	Punto di arrivo (2)
$r; \rho_1^* = \rho_1; P_1^* = P_1; T_1^* = T_1$	$r + dr; P_2^* = P_2$

Tabella 13 – Parametri iniziali e finali di una stella soggetta al moto convettivo dei suoi strati interni.

In base a quanto detto, possiamo stabilire la **condizione di stabilità rispetto al trasporto convettivo**^[Onorato17 – Pag. 15 su 19].

$$\rho_2^* > \rho_2 \quad (C.1)$$

L'elemento è trainato in modo adiabatico^[Onorato17 – Pag. 15 su 19].

$$\begin{aligned} P\rho^{-\gamma} &= \text{costante} \Leftrightarrow P_2^*\rho_2^{*-\gamma} = P_1^*\rho_1^{*-\gamma} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho_2^{*-\gamma} = \frac{P_2^*}{P_1^*} \rho_1^{*-\gamma} \Leftrightarrow \rho_2^* = \rho_1^* \left(\frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_2 \end{aligned} \quad (C.2)$$

Espandendo in serie di Taylor i parametri della colonna (2) rispetto a quelli della colonna (1) della Tabella 13, si ricava^[Onorato17 – Pag. 15 su 19]:

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} &> \rho_2 \Leftrightarrow \rho_1 \left(\frac{P_1 + \frac{dP}{dr} dr}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_1 + \\ &+ \frac{d\rho}{dr} dr \Leftrightarrow \rho_1 \left[1 + \frac{1}{P_1} \left(\frac{dP}{dr} dr \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr \end{aligned} \quad (C.3)$$

Sviluppando sempre in serie di Taylor il termine tra parentesi quadre della (C.3), otteniamo^[Onorato17 – Pag. 15 su 19]:

$$\rho_1 \left[1 + \frac{1}{P_1} \left(\frac{dP}{dr} dr \right) \right]^{\frac{1}{\gamma}} > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} dr \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_1}{P_1} \frac{dP}{dr} dr > \frac{d\rho}{dr} dr \quad (C.4)$$

Da qui si ricava l'esatta espressione, che determina la condizione di stabilità ($P = P_1$, $\rho = \rho_1$) "contro" i moti convettivi, mettendo in relazione il gradiente radiale della pressione $\frac{dP}{dr}$ con quello della densità $\frac{d\rho}{dr}$ ^[Onorato17 – Pag. 15 su 19]:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_1}{P_1} \frac{dP}{dr} dr > \frac{d\rho}{dr} dr \\ P = P_1 \\ \rho = \rho_1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} dr < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} dr \Leftrightarrow -\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (C.5)$$

Adesso supponiamo che sia vera l'equazione di stato (C.6) dei gas perfetti^[Onorato17 – Pag. 13 su 19]

$$P = \frac{k_B \rho T}{\mu H} \quad (C.6)$$

dove μ è il peso molecolare medio del gas considerato e H è la massa del nucleo di idrogeno (massa del protone). Scrivendo la (C.6) in forma logaritmica e differenziandola, ricaviamo^[Onorato17 – Pag. 15 su 19].

$$\begin{aligned} \log P &= \log \left(\frac{k_B \rho T}{\mu H} \right) \Leftrightarrow \frac{d \log P}{dr} = \frac{d \log \left(\frac{k_B \rho T}{\mu H} \right)}{dr} \Leftrightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{k_B \rho T}{\mu H} \right)} \frac{d}{dr} \left(\frac{k_B \rho T}{\mu H} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho T} \frac{d}{dr} (\rho T) \Leftrightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho T} T \frac{d\rho}{dr} + \\ &\quad + \frac{1}{\rho T} \rho \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \end{aligned} \quad (C.7)$$

Sostituendo la (C.7) nella (C.5), si ottiene^[Onorato17 – Pag. 16 su 19].

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} < \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \quad (C.8)$$

Dato che la pressione P e la temperatura T calano al salire di r ne deriva che i due gradienti della (C.8) sono negativi. Adottando i loro valori assoluti la (C.8) diventa^[Onorato17 – Pag. 16 su 19].

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{1}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right| < \frac{1}{T} \left| \frac{dT}{dr} \right| \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) > \frac{\frac{1}{T} \left| \frac{dT}{dr} \right|}{\frac{1}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right|} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) > \frac{d \log T}{d \log P} \quad (C.9)$$

D'ora in poi indicheremo il gradiente $\frac{d \log T}{d \log P}$ con ∇ .

Rendiamo ora più esplicite le espressioni di ∇_{ad} e ∇_{rad} .

Ritorniamo all'espressione (C.7) per ricavare il gradiente di pressione^[Onorato17 – Pag. 13 su 19]:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \Leftrightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \quad (C.10)$$

Sfruttando la pressione adiabatica^[Onorato17 – Pag. 13 su 19]

$$P \propto \rho^\gamma \quad (C.11)$$

e l'espressione (C.10), otteniamo^[Onorato17 – Pag. 14 su 19]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \\ P \propto \rho^\gamma \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \\ \frac{d \log P}{dr} = \frac{d \log(\rho^\gamma)}{dr} \end{array} \right. \Leftrightarrow \frac{dP}{dr} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dr} + \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dP}{dr} \Leftrightarrow \nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{\frac{dT}{dr} \Big|_{ad}}{\frac{P}{T} \frac{dT}{dr}} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} = \frac{d \log T}{d \log P} = \nabla \end{aligned} \quad (C.12)$$

In questo caso abbiamo ottenuto uguaglianza tra il gradiente termico di pressione e quello adiabatico, quest'ultima indicata con una linea rossa orizzontale del diagramma disegnato nella Figura 29^[Onorato17 – Pag. 16 su 19].

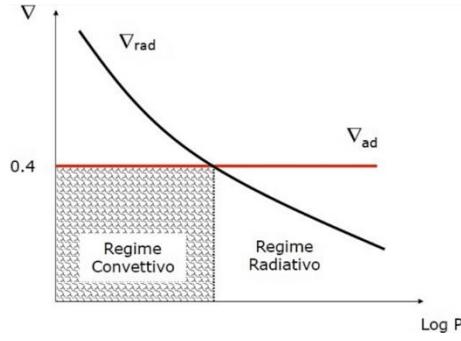


Figura 29 – Separazione tra i due regimi in funzione del criterio di Schwarzschild.

Analizziamo, infine il terzo gradiente, quello radiativo ∇_{rad} ^[Onorato17 – Pagg. 6-7 su 19]. Iniziamo questo studio partendo dalla definizione di gradiente di pressione radiativo nella seguente espressione^[Onorato17 – Pag. 7 su 19]:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{rad} \quad (C.13)$$

dove κ è l'opacità della materia stellare e F_{rad} il flusso radiativo verso l'esterno.

Inoltre, differenziando l'equazione di Stefan-Boltzmann della pressione di radiazione^[Onorato17 – Pag. 7 su 19]

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4 \quad (C.14)$$

con $a = \frac{4\sigma}{c} = 7.6 \times 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$, dove $\sigma = 5.67 \times 10^{15} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ è la costante di Stefan-Boltzmann, vediamo che il gradiente di pressione radiativo diventa^[Onorato17 – Pag. 7 su 19]:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr} \quad (C.15)$$

Uguagliano la (C.15) con la (C.13), abbiamo^[Onorato17 – Pag. 7 su 19]:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} F_{rad} \quad (C.16)$$

Infine, se formuliamo esplicitamente il flusso radiativo F_{rad} in termini della luminosità radiativa locale L_r della stella al raggio r ,

$$F_{rad} = \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (C.17)$$

il gradiente termico radiativo diventa^[Onorato17 – Pag. 7 su 19]:

$$\nabla_{rad} = \frac{dT}{dr} \Big|_{rad} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (C.18)$$

All'aumentare del flusso o dell'opacità, il gradiente di temperatura deve diventare più ripido a valori negativi se la radiazione deve trasportare tutta la luminosità prodotta verso l'esterno. Lo stesso vale all'aumentare della densità o al diminuire della temperatura^[Onorato17 – Pag. 7 su 19].

Riguardo alla Figura 29 facciamo le seguenti considerazioni^[Gavarente19 – Pagg. 8-9 su 19]:

1. **Gradiente convettivo**^[Gavarente19 – Pagg. 8-9 su 19] → Sapendo che, con buona approssimazione, $\nabla \sim \nabla_{rad}$, la condizione affinché sia stabilito il trasporto convettivo è che il gradiente radiativo sia maggiore del gradiente adiabatico, $\nabla_{rad} > \nabla_{ad}$; ricordando allora l'espressione (C.16) di ∇_{rad} per fare sì che si attivi la convezione sono necessari^[Gavarente19 – Pag. 8 su 19].
 - Grandi regioni di opacità κ ^[Gavarente19 – Pag. 9 su 19];
 - Regioni in cui la ionizzazione fa abbassare il gradiente adiabatico^[Gavarente19 – Pag. 9 su 19], come illustrato nella Figura 30^[Gavarente19 – Pag. 6 su 19];

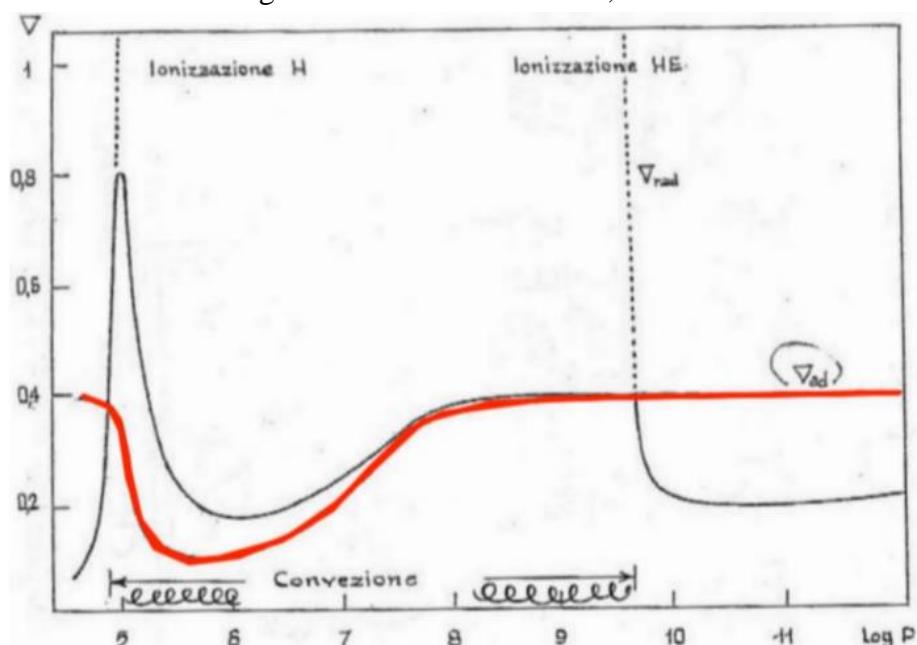


Figura 30 – Andamenti dei gradienti logaritmici di temperatura negli interni stellari. Il valore di ∇_{ad} , sebbene venga trattato per un gas monoatomico, non è sempre costante, da come notiamo dalla curva rossa nei pressi della ionizzazione dell'idrogeno. Questo è dovuto dal fatto che l'indice adiabatico γ è definito come il rapporto tra c_p e c_v , che sono i due calori specifici calcolati a pressione e volume costanti ed intesi come indici di sensibilità, ovvero che questi due calori specifici parametrizzano la quantità di calore richiesta per riscaldare il gas di $\Delta T = 1 K$.

Nelle zone di ionizzazione parziale, abbiamo che parte dell'energia viene spesa per

- Meccanismi di produzione di energia fortemente dipendenti dalla temperatura, poiché, a maggiori T , la produzione di energia si concentra sempre di più nel centro della struttura, aumentando il flusso radiativo F_{rad} e, quindi, la luminosità L_r ^[Gavarente19 – Pag. 9 su 19].
2. **Overshooting**^[Gavarente19 – Pag. 9 su 19] → Nella Figura 29^[Onorato17 – Pag. 16 su 19] viene definito il limite tra i due regimi convettivo e radiativo ponendo l'uguaglianza $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$, ma non è del tutto vero. Una cella di materia soggetto al trasporto convettivo accelera verso le regioni esterne fino a quando, giunti al bordo convettivo, smette di accelerare. Non è detto, però, che la cella sia ferma: difatti per inerzia continua a proseguire il suo viaggio dalla zona convettiva a quella radiativa fino a quando non risente di un'accelerazione negativa di

richiamo. Quest'ultima accelerazione frena la cella di materia riportandola indietro nella regione convettiva. Questo fenomeno si chiama *overshooting*. Una volta che la cella entra nella regione radiativa si verificano due importanti effetti:

- **Modificazione della composizione chimica μ** → Questo effetto, dovuto al rimescolamento, può modificare la durata di vita della stella, poiché può rifornire al nucleo, che sta bruciando idrogeno, di altrettanti atomi dello stesso presenti nella zona radiativa.
- **Diminuzione del gradiente radiativo ∇_{rad}** → Se il gradiente radiativo diminuisce allora gli elementi di materia possono viaggiare facilmente verso la zona radiativa, garantendo un feedback favorevole per l'*overshooting*.

Applichiamo questi strumenti ai tre processi finora studiati, pp , CNO e 3α .

Mettiamo a confronto l'energia prodotta per unità di massa per unità tempo ε ($J \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}$) rispetto alla temperatura assoluta del nucleo stellare $T_6 = \frac{T}{10^6 K}$, come illustrato in Figura 31^[Cincilla99].

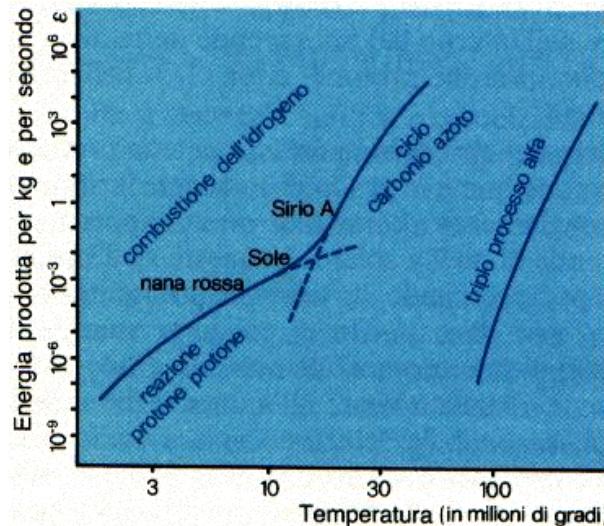


Figura 31 – Tassi di produzione di energia dei processi pp , CNO e 3α in confronto alla temperatura del nucleo stellare.

Dalla Figura 31 appare subito chiaro che nel ciclo CNO variazioni moderate della temperatura T comportano salto rapidi in ε_{CNO} . Fatto sta che a parità di temperatura T con una dose adeguata di combustibile abbiamo che $\varepsilon_{CNO} \gg \varepsilon_{pp}$. In termini astrofisici stiamo parlando di stelle di popolazione II di dimensione e massa superiori a quelle del Sole (giganti blu-bianche di classi O e B nel diagramma HR). Poiché la pendenza tra luminosità L e raggio r dal centro della stella segue una legge del tipo $\frac{dL}{dr} \propto \varepsilon$ ed è piuttosto elevata, ne deriva che il flusso di energia tra nucleo e mantello stellare è relativamente intenso. Stiamo quindi parlando di un nucleo convettivo, dove prevale il ciclo CNO, di una stella molto massiccia^[Favoino20].

D. Gas elettronico degenero di Fermi nella stella di neutroni e calcolo della massa limite di Chandrasekhar

Il principio di esclusione di Pauli stabilisce che fermioni identici, o particelle con spin semi-intero, non possono esistere nello stesso stato quantistico. Per questo, solo due fermioni indistinguibili con spin opposto possono occupare lo stesso spazio delle fasi. Si consideri un sistema di fermioni non interagenti in qualche volume di spazio finito. All'aumentare della densità delle particelle in questo sistema, i fermioni riempiranno gli stati di energia più bassa fino ad una certa energia massima, al di sopra della quale i livelli energetici non si riempiono più. Questa massima energia è nota come *energia di Fermi* e, se tutti i fermioni in questo sistema occupano gli stati energetici più bassi possibili, il sistema è chiamato *degenero*. Dato che le particelle non si possono collocare a stati di energia inferiore, l'impulso associato a ciascuno dei fermioni aumenterà a livelli di energia più elevati. A causa di ciò, i fermioni produrranno una pressione, meglio nota come *pressione di degenerazione*, che è capace di contrastare la pressione gravitazionale presente in sistemi altamente densi come le stelle^[Helstrom20 – Pag. 2 su 15].

Scriviamo in formule quanto detto finora all'inizio di questa Appendice^[Helstrom20 – Pagg. 2-6 su 15].

D.1. Energia ed impulso del gas di Fermi

Il primo passo consiste nel determinare l'energia e l'impulso di Fermi. Consideriamo, per semplicità una regione cubica riempita di neutroni con lato L e volume $V = L^3$. Imponiamo che il potenziale esterno sia infinito ($V_{\text{outside}} = +\infty$) e quello interno nullo ($V_{\text{inside}} = 0$). Assumendo che i neutroni siano identici e non interagenti, questi scenderanno verso gli stati più bassi di energia in coerenza con il principio di esclusione di Pauli e la degenerazione. Consideriamo adesso l'equazione di Schrödinger^[Helstrom20 – Pag. 2 su 15]

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{d}{dt}\Psi \quad (\text{D.1})$$

dove^[Helstrom20 – Pag. 2 su 15]

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \vec{\nabla}^2 \quad (\text{D.2})$$

Questo caso è lo stesso di quello alla buca infinita tridimensionale di potenziale, gli autostati dell'energia sono dunque^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\psi(x) \quad (\text{D.3})$$

che soddisfa l'equazione di Schrödinger (D.1) in conformità con^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \quad (\text{D.4})$$

dove questi autostati sono^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$\psi_n = \sqrt{\frac{8}{L^3}} \sin\left(\frac{n_1 x_1 \pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_2 x_2 \pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n_3 x_3 \pi}{L}\right) \quad (\text{D.5})$$

e gli autovalori^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_N L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (\text{D.6})$$

dove m_N è la massa del neutrone e $n_i = 1, 2, 3$ sono numeri interi positivi. Da ciò possiamo definire un raggio R nello spazio tridimensionale dove^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$R \equiv (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{D.7})$$

tal che^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_N L^2} R^2 \quad (\text{C.8})$$

R corrisponde al raggio di una sfera nello spazio tridimensionale dove ciascun punto della sfera rappresenta uno stato quantico preso dai numeri interi n_i . Dalla (D.8) possiamo trovare il numero totale N di stati quantici in questo sistema. Se assumiamo che i neutroni seguano il principio di esclusione di Pauli e che siano nello stato di energia più bassa, N sarà uguale al numero totale di neutroni in questo gas di Fermi. È importante ricordare che i neutroni sono particelle di spin 1/2 e quindi hanno due stati di spin per un singolo spazio delle posizioni, e i numeri interi n_i sono positivi. Quindi il numero totale di neutroni diventa^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$N = (2) \left(\frac{1}{8} \right) \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \quad (\text{D.9})$$

dove il fattore di 2 viene dagli stati dei due spin del neutrone, e il fattore di 1/8 viene dalla frazione della sfera dove i numeri n_i sono positivi. Usando questa relazione possiamo trovare la soluzione per R ed inserirla nella (D.8)^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15]

$$\begin{cases} E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_N L^2} R^2 \\ N = (2) \left(\frac{1}{8} \right) \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \end{cases} \rightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_N L^2} \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{D.10})$$

Per semplicità indicheremo il volume con $V = L^3$ e l'energia di Fermi con $E_n = E_F$, dato che quest'ultima non dipende più dai singoli livelli n_i dello spazio delle fasi^[Helstrom20 – Pag. 3 su 15].

$$E_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3N}{V\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{D.11})$$

Adesso possiamo usare la (D.11) per trovare l'impulso di Fermi usando la relazione $p =$

$$= \sqrt{2mE} \quad [\text{Helstrom20 – Pag. 3 su 15}].$$

$$p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{D.12})$$

Le espressioni (D.11) e (D.12) denotano l'energia di Fermi e l'impulso di un gas degenere di Fermi di N neutroni confinato in un volume finito. Anche se si tratta di un caso semplice, ciò ci spinge a costruire la relazione tra la pressione e l'impulso e trovare finalmente le equazioni di stato^[Helstrom20 – Pagg. 3-4 su 15].

D.2. Statistica di Fermi-Dirac e densità di particelle

Come possiamo vedere in (D.12) l'impulso di Fermi è dipendente dal numero di neutroni nel gas di Fermi e dal volume della regione cubica. Per ottenere un'espressione per la pressione totale di un sistema con N fermioni, dobbiamo per prima cosa esaminare la densità del numero di stati e la sua

distribuzione a qualche temperatura. Questo ci spingerà a trovare la relazione tra la densità di numero e l'impulso, e di conseguenza la pressione. Perciò, useremo la statistica di Fermi-Dirac per descrivere la distribuzione di particelle come una funzione di energia e temperatura^{[Carroll17], [Rybicki79]}. La distribuzione di Fermi-Dirac è la seguente^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15]:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E(p)-\mu}{k_B T}} + 1} \quad (\text{D.13})$$

dove E è l'energia espressa come una funzione dell'impulso p , μ è il potenziale chimico, k_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta del sistema^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15].

$$E(p) = (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{1/2} \quad (\text{D.14})$$

Adesso, definiremo il numero di densità n_N (non deve essere confuso con i numeri n_i , i punti nello spazio n -dimensionale che descrivono uno stato quantico) come^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15]

$$n_N = \frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int f(E) dN \quad (\text{D.15})$$

dove N è il numero totale di stati e V è il volume (come prima). Nel sistema di buche infinite di potenziale descritto nel Paragrafo C.1 esiste un volume finito V che produrrà un insieme discreto di stati permessi secondo la lunghezza d'onda di De Broglie^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15].

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (\text{D.16})$$

Così^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15]

$$p_i = m_i \frac{2\pi\hbar}{L} \quad m_i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.17})$$

Da ciò possiamo espandere la configurazione permessa degli stati nello spazio delle fasi di volume V fissato^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15].

$$\begin{cases} p_i = m_i \frac{2\pi\hbar}{L} \\ dp_i = \frac{2\pi\hbar}{L} dm_i \end{cases} \rightarrow d^3p = \left(\frac{2\pi\hbar}{L}\right)^3 d^3m \rightarrow \\ \rightarrow d^3m = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 d^3p = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p \quad (\text{D.18})$$

Adesso, comparando (D.15) e (D.18), possiamo vedere che il numero totale di stati nel sistema $\int dN$ è uguale al numero totale di stati permessi $\int g d^3m$. Qui abbiamo introdotto il fattore di degenerazione g . Questo fattore rappresenta il numero di stati di un fermione per un impulso fissato^[Silbar03]. Quindi, $g = 2s + 1$, e, specialmente, per neutroni degeneri $g = 2$ dato che $s = 1/2$. Mettendo in relazione la (D.15) con la (D.18) ricaviamo^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15]

$$n_N = \frac{g}{V} \int f(E) d^3m \quad (\text{D.19})$$

Nello spazio delle fasi possiamo integrare lungo l'impulso totale e la (D.19) diventa^[Helstrom20 – Pag. 4 su 15]

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 2s + 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2 \\ n_N = \frac{g}{V} \int f(E) d^3m \rightarrow n_N = \frac{2}{V} \int_0^{p_F} f(E) \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \\ \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 d^3m = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3p \\ = 2 \int_0^{p_F} f(E) \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \int_0^{p_F} f(E) \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} d^3p = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} f(E) d^3p \end{array} \right. \quad (D.20)$$

Si noti che la distribuzione di Fermi-Dirac è ancora inclusa nella relazione per il numero densità. Per capire l'espressione in (D.20) ulteriormente, andiamo a considerare due casi: un gas *freddo* di Fermi con temperatura zero (zero assoluto, $T = 0 K$) e un gas di Fermi con temperatura non zero ($T > 0$) in equilibrio termico. Il fatto di avere fermioni con temperatura diversa da zero sta a significare che le particelle hanno una certa energia termica associata. Questa energia può essere trasferita tra particelle durante le collisioni e quindi ci sarà una certa probabilità di eccitazione a un livello di energia più elevato. Di conseguenza, il sistema non sarà completamente degenere dato che alcuni degli stati di energia più bassa non sono completamente pieni a causa dei fermioni eccitati. Per studiare un sistema a temperatura finita si richiede l'impiego dell'*insieme gran canonico*^[Jaffe06] e delle funzioni di partizione. Tuttavia, per un sistema con temperatura zero, l'energia termica di ciascuna particella può essere trascurata. Con questo e con l'assunzione che le particelle siano non interagenti, possiamo considerare il sistema degenere e dire che segue il principio di esclusione di Pauli come descritto sopra. Pertanto, per il sistema di N neutroni, imposteremo la temperatura a zero. Questa scelta di temperatura è giustificata dato che l'energia di Fermi (e quindi la temperatura di Fermi: $T_F = E_F/k_B$) è molto più grande delle temperature stimate di una tipica stella di neutroni (dell'ordine di $10^9 K$)^{[Benhar17], [Jaffe06], [Helstrom20 – Pag. 4-5 su 15]}.

Adesso, se assumiamo che i neutroni nel nostro sistema siano non interagenti e che abbiano $T = 0$, la distribuzione di Fermi-Dirac diventa^[Helstrom20 – Pag. 5 su 15]

$$f(E) = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{1}{e^{\frac{E(p) - \mu}{k_B T}} + 1} \right] = \begin{cases} 1 & \text{se } E(p) \leq \mu \\ 0 & \text{se } E(p) \geq \mu \end{cases} \quad (D.21)$$

L'energia massima di cui un neutrone avrà bisogno per entrare nel sistema è definita come l'energia di Fermi. Questa definizione corrisponde a quella del potenziale chimico e quindi possiamo stabilire che $\mu = E_F$. Sotto queste condizioni, il numero densità (D.20) di un gas di Fermi freddo non interagente può essere riscritto come^[Helstrom20 – Pag. 5 su 15]

$$n_N = \frac{N}{V} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} d^3p \quad (D.22)$$

D.3. Pressione

L'espressione più generale per la pressione si può esprimere in termini di forza e area^[Helstrom20 – Pag. 5 su 15]

$$P = \frac{F}{A} \quad (D.23)$$

dove F è la forza e A è l'area. Si noti che la pressione è denotata con una P maiuscola, mentre l'impulso è denotato con una p minuscola. In molti casi, tuttavia, l'impulso sarà accompagnato da

un pedice per evitare potenziali confusioni. Quindi, la pressione per un sistema con N particelle può essere espressa usando le relazioni $F = \frac{dp}{dt}$ e $A = L^2 = \frac{V}{L}$ nella seguente maniera^[Helstrom20 – Pag. 5 su 15]:

$$P_i = N \frac{1}{A_i} F_i = N \frac{L_i}{V} \left(\frac{dp_i}{dt} \right) \quad (D.24)$$

dove N è il numero di particelle (stati), L_i è la lunghezza del lato di un volume cubico V , e $\frac{dp_i}{dt}$ è la derivata temporale dell'impulso. I pedici i sono aggiunti per denotare un singolo asse posizionale. Quindi, il termine $\frac{dp_i}{dt}$ rappresenta il trasferimento di impulso associato con la collisione tra un neutrone e una faccia della regione cubica in un tempo dt lungo una singola direzione. Possiamo riscrivere questo come^[Helstrom20 – Pag. 5 su 15]

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{p_i}{\left(\frac{L_i}{v_i} \right)} = \frac{p_i v_i}{L_i} \quad (D.25)$$

dove v_i è la velocità della particella. Usando la (D.25) ricaviamo ora un'espressione per la pressione in termini di impulso e velocità^[Helstrom20 – Pagg. 5-6 su 15]

$$P_i = \frac{N}{V} p_i v_i \quad (D.26)$$

Generalizzando questo a tre dimensioni otteniamo un fattore di 1/3 a causa delle tre direzioni posizionali. Possiamo anche usare la (D.22) e la relazione $v = pc^2/E(p)$ per trattare la pressione in termini di impulso. Qui rimuoviamo il pedice i ^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15].

$$\begin{cases} P_i = \frac{N}{V} p_i v_i = n_N p_i v_i \\ v = \frac{pc^2}{E(p)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} p v = \frac{1}{3} n_N p v \\ v = \frac{pc^2}{E(p)} \end{cases} \rightarrow P(p) = \frac{n_N p^2 c^2}{3E(p)} \quad (D.27)$$

E dalla (D.14) e (D.22)^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15]

$$\begin{cases} E(p) = (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \\ n_N = \frac{N}{V} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} d^3 p \end{cases} \rightarrow P(p) = \frac{n_N p^2 c^2}{3E(p)} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \frac{1}{3} p^2 c^2 (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} d^3 p = \frac{2}{3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} p^2 c^2 (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} p^2 dp \int_0^{4\pi} d\Omega \quad (D.28)$$

Così^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15],

$$P(p) = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^4 c^2 (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} dp \quad (D.29)$$

L'espressione finale in (D.29) è la pressione di degenerazione del sistema di neutroni^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15].

D.4. Equazioni di stato

Nella tesi vogliamo studiare il limite non relativistico del gas di Fermi degenere nella stella di neutroni. Definiamo quindi la nuova variabile

$$x \equiv \frac{p}{m_N c} \quad (D.30)$$

ed inseriamola nella (D.29) per semplificarne il calcolo integrale^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15].

$$\begin{cases} P(p) = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^4 c^2 (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} dp \\ x = \frac{p}{m_N c} \rightarrow p = m_N c x \rightarrow dp = m_N c dx \\ \rightarrow P(x) = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_N c}} (m_N c x)^4 c^2 (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{-\frac{1}{2}} (m_N c) dx \rightarrow \\ \rightarrow P(x) = \frac{(m_N c)^4}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_N c}} x^4 c^2 \left[\left(\frac{p^2}{m_N^2 c^2} + 1 \right) m_N^2 c^4 \right]^{-\frac{1}{2}} (m_N c) dx \rightarrow \\ \rightarrow P(x) = \frac{(m_N c)^4}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_N c}} x^4 c^2 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{m_N c^2} (m_N c) dx \rightarrow \\ \rightarrow P(x) = \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_N c}} x^4 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx \end{cases} \quad (D.31)$$

Adesso, dalla (D.30) possiamo approssimare la pressione nei due regimi non relativistico ed ultrarelativistico. Nel primo regime l'energia cinetica di neutroni è di parecchio più bassa rispetto all'energia di massa a riposo dei neutroni. Nel secondo regime, invece, è vero il contrario; l'energia cinetica è di gran lunga maggiore della massa a riposo dei neutroni. Usando la (D.14) possiamo vedere che^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15]

$$E = (p^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{\frac{1}{2}} \simeq \begin{cases} m_N c^2 & \text{per il caso non relativistico} \\ pc & \text{per il caso ultrarelativistico} \end{cases} \quad (D.32)$$

Così, secondo la (D.30) e la (D.32) possiamo vedere che^[Helstrom20 – Pag. 6 su 15]

$$E \simeq \begin{cases} m_N c^2 & \Rightarrow p \ll m_N c \Rightarrow x \ll 1 \\ pc & \Rightarrow p \gg m_N c \Rightarrow x \gg 1 \end{cases} \quad (D.33)$$

Pertanto, le equazioni di stato si possono trovare risolvendo la (D.31) nel limite di $x \ll 1$ per un gas di Fermi non relativistico e nel limite di $x \gg 1$ per un gas di Fermi ultrarelativistico. Applicando questi limiti alla (D.31), vediamo che^[Helstrom20 – Pag. 7 su 15]

$$P(x) = \lim_{x \ll 1} \left[\frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_N c}} x^4 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx \right] = \frac{m_N^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p_F}{m_N c} \right)^5 \quad (D.34)$$

e^[Helstrom20 – Pag. 7 su 15]

$$P(x) = \lim_{x \gg 1} \left[\frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{p_F}{m_N c}} x^4 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx \right] = \frac{m_N^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p_F}{m_N c} \right)^4 \quad (D.35)$$

Dalle (D.34) e (D.35) possiamo collegare l'impulso di Fermi visto nella (D.12) e usare la relazione del numero densità $n_N = N/V$ per trovare le equazioni di stato in termini dei numeri n_N per i due regimi. Qui abbiamo abbreviato l'espressione *non relativistico* con *NR* e *ultrarelativistico* con *UR*^[Helstrom20 – Pag. 7 su 15].

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{NR}(x) = \frac{m_N^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p_F}{m_N c} \right)^5 \\ p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \hbar (3\pi^2 n_N)^{\frac{1}{3}} \\ = \frac{m_N^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{\hbar}{m_N c} (3\pi^2 n_N)^{\frac{1}{3}} \right]^5 = \frac{\hbar^2}{5m_N} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} (n_N)^{\frac{5}{3}} \end{array} \right. \rightarrow P_{NR}(n_N) = \frac{m_N^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p_F}{m_N c} \right)^5 = \quad (D.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{UR}(x) = \frac{m_N^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p_F}{m_N c} \right)^4 \\ p_F = \hbar \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} = \hbar (3\pi^2 n_N)^{\frac{1}{3}} \\ = \frac{m_N^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{\hbar}{m_N c} (3\pi^2 n_N)^{\frac{1}{3}} \right]^4 = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} (n_N)^{\frac{4}{3}} \end{array} \right. \rightarrow P_{UR}(n_N) = \frac{m_N^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{p_F}{m_N c} \right)^4 = \quad (D.37)$$

In aggiunta possiamo definire la densità di massa^[Helstrom20 – Pag. 7 su 15]

$$\rho \equiv m_N n_N \quad (C.38)$$

e inserire questa nelle equazioni di stato per entrambi i regimi^[Helstrom20 – Pag. 7 su 15]

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{NR}(n_N) = \frac{\hbar^2}{5m_N} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} (n_N)^{\frac{5}{3}} \\ \rho = m_N n_N \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_{NR}(n_N) = \frac{\hbar^2}{5m_N} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} (n_N)^{\frac{5}{3}} \\ n_N = \frac{\rho}{m_N} \end{array} \right. \rightarrow \quad (C.39)$$

$$\rightarrow P_{NR}(\rho) = \frac{\hbar^2}{5m_N} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{m_N} \right)^{\frac{5}{3}} = \frac{\hbar^2}{5m_N^{\frac{8}{3}}} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{UR}(n_N) = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} (n_N)^{\frac{4}{3}} \\ \rho = m_N n_N \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_{UR}(n_N) = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} (n_N)^{\frac{4}{3}} \\ n_N = \frac{\rho}{m_N} \end{array} \right. \rightarrow \quad (C.40)$$

$$\rightarrow P_{UR}(\rho) = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho}{m_N} \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{\hbar c}{4m_N^{\frac{3}{4}}} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}$$

D.5. Equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Nel Paragrafo D.4 dell'Appendice D della tesi abbiamo trovato la formula della pressione di degenerazione P_F per un gas di Fermi freddo composto rigorosamente da neutroni in funzione della densità di massa ρ . Queste equazioni di stato descrivono un modello per una stella pura di neutroni nei casi non relativistici, ultrarelativistici, e generali in termini di pressione e densità. Tuttavia, esiste un'altra impostazione delle equazioni che descrive le proprietà delle stelle; le equazioni della struttura stellare. Oggi con le equazioni di stato possiamo studiare le caratteristiche della materia in un gas di Fermi puramente degenero a un livello più ampio. Tuttavia, queste equazioni sono limitate dagli effetti relativistici per la materia altamente densa come quella delle stelle di neutroni. Con ciò

possiamo esplorare le correzioni delle equazioni della struttura stellare dovute alla relatività generale. In questo paragrafo definiremo brevemente le equazioni di equilibrio idrostatico della struttura stellare con la conservazione di massa e quindi esploriamo le equazioni corrette ricavate da Tolman, Oppenheimer, e Volkoff^{[Benhar17], [Carroll17], [Chandrasekhar31], [Helstrom20 – Pagg. 7-8 su 15], [Jaffe06], [Oppenheimer39], [Silbar03], [Tolman39]}.

Lo studio delle equazioni di stato dell'equilibrio stellare lo abbiamo già fatto nell'Appendice A della tesi.

Definiamo le due derivate di pressione (D.41) e di massa (D.42) rispetto al raggio della stella^[Helstrom20 – Pag. 8 su 15].

$$\frac{dP}{dr} = \frac{GM_r\rho}{r^2} \quad (\text{D.41})$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (\text{D.42})$$

dove r indica il raggio di una regione a simmetria sferica riempita con un gas freddo di Fermi, M_r indica la massa del gas contenuto fino al raggio r , ed infine ρ indica la densità di massa definita secondo l'espressione (D.38).

Dalle (D.41) e (D.42) possiamo integrare lungo un volume sferico di raggio R e associare l'equazione di conservazione di massa nell'equazione di equilibrio idrostatico per trovare un'espressione per la pressione in termini di un raggio R e densità di massa^[Helstrom20 – Pag. 8 su 15].

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{GM_r\rho}{r^2} \\ \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dP}{dr} = \frac{GM_r(\rho)\rho}{r^2} \\ M_r(\rho) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \end{cases} \rightarrow P(\rho) = \int_0^R \frac{G\rho}{r^2} M_r(\rho) dr = \int_0^R \frac{G\rho}{r^2} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho dr = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \int_0^R r dr = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \frac{R^2}{2} = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2 \quad (\text{D.43})$$

Possiamo notare subito che la (D.43) è un'espressione per la pressione di un sistema di gas degenere di Fermi in termini di densità di massa, proprio come la (D.39) e la (D.40). Siamo quindi capaci di eguagliare queste espressioni e di trovare una stima per entrambi i parametri di raggio e massa totale del modello semplice di stella di neutroni^[Helstrom20 – Pag. 8 su 15].

$$\left[\frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2 \right]_{\text{NR degenerate Fermi gas}} = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} \quad (\text{D.44})$$

$$\left[\frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2 \right]_{\text{UR degenerate Fermi gas}} = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \quad (\text{D.45})$$

Dove la (D.44) è nel limite non relativistico e la (D.45) nel limite ultrarelativistico. Adesso possiamo semplificare queste equazioni usando la relazione^[Helstrom20 – Pag. 8 su 15]

$$\rho = \frac{M_R}{V} = \frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M_R = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = m_N n_N V = m_N n_N \frac{4}{3}\pi R^3 = m_N \quad (\text{D.46})$$

dove abbiamo indicato con ρ la densità di massa, con M_R la massa totale della stella di raggio R , con V il volume della stella di raggio R , con m_N la massa del neutrone, con n_N la densità del numero di neutroni, ed infine con N il numero totale di neutroni^[Helstrom20 – Pag. 8 su 15].

Vediamo dalla (D.45) che il raggio si annullerà in entrambi i membri, non possiamo pertanto trovare un'equazione ultrarelativistica per il raggio^[Helstrom20 – Pag. 8 su 15].

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi R_{UR}^3} \Rightarrow M_R = m_N N \\ \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R_{UR}^2 = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \end{array} \right. & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{m_N N}{\frac{4}{3}\pi R_{UR}^3} \\ \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R_{UR}^2 = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \end{array} \right. \\ & \rightarrow \frac{2}{3}\pi G \left(\frac{m_N N}{\frac{4}{3}\pi R_{UR}^3} \right)^2 R_{UR}^2 = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m_N N}{\frac{4}{3}\pi R_{UR}^3} \right)^{\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{2}{3}\pi G \left(\frac{m_N N}{\frac{4}{3}\pi} \right)^2 \frac{1}{R_{UR}^4} = \\ & = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m_N N}{\frac{4}{3}\pi} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{R_{UR}^4} \rightarrow R_{UR} = \text{soluzione indeterminata} \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

Così, risolvendo per R nel regime non relativistico otteniamo (usando i pedici per denotare il rispettivo regime)^[Helstrom20 – Pagg. 8-9 su 15]

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi R_{NR}^3} \Rightarrow M_R = m_N N \\ \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R_{NR}^2 = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} \end{array} \right. & \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{m_N N}{\frac{4}{3}\pi R_{NR}^3} \\ \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R_{NR}^2 = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} \end{array} \right. \\ & \rightarrow \frac{2}{3}\pi G \left(\frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi R_{NR}^3} \right)^2 R_{NR}^2 = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi R_{NR}^3} \right)^{\frac{5}{3}} \rightarrow \frac{2}{3}\pi G \left(\frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi} \right)^2 \frac{1}{R_{NR}^4} = \\ & = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{M_R}{\frac{4}{3}\pi} \right)^{\frac{5}{3}} \frac{1}{R_{NR}^5} \rightarrow \frac{2}{3}\pi G \left(\frac{3M_R}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} R_{NR} = \frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \\ & \rightarrow R_{NR} = \frac{\frac{\hbar^2}{5} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}\pi G \left(\frac{3M_R}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3\hbar^2}{10\pi G} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\pi}{3M_R} \right)^{\frac{1}{3}} = \\ & = \frac{3\hbar^2 (6\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{10\pi G} \left(\frac{\pi}{3M_R m_N^8} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar^2 (18\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{10\pi^{\frac{2}{3}} G} \left(\frac{1}{M_R m_N^8} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(18\pi^2 \hbar^2)^{\frac{2}{3}}}{10G (M_R m_N^8)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

In maniera simile, usando le (D.44) e (D.45), possiamo risolvere per la massa totale M_R definita nella (D.46). Tuttavia, dato che il raggio non si annulla nel regime non relativistico, troveremo

soltanto M_R per l'equazione ultrarelativistica dato che il risultato conterrà solo costanti fondamentali^[Helstrom20 – Pag. 9 su 15].

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2}{3} \pi G \rho^2 R^2 \right]_{UR \text{ degenerate Fermi gas}} = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{2}{3} \pi G \rho_{UR}^2 R_{NR}^2 = \\
& = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_{UR}^{\frac{4}{3}} \rightarrow \frac{2}{3} \pi G \left(\frac{M_{UR}}{\frac{4}{3} \pi R_{NR}^3} \right)^2 R_{NR}^2 = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{M_{UR}}{\frac{4}{3} \pi R_{NR}^3} \right)^{\frac{4}{3}} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{2}{3} \pi G \left(\frac{3M_{UR}}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{R_{NR}^4} = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3M_{UR}}{4\pi} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{1}{R_{NR}^4} \rightarrow \frac{2}{3} \pi G \left(\frac{3M_{UR}}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \\
& = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(\frac{3M_{UR}}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar c}{2} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\hbar c}{4} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2\pi G} = \\
& = \frac{3}{8\pi} \frac{\hbar c}{G} \left(\frac{3\pi^2}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8} \frac{\hbar c}{G} \left(\frac{3}{\pi m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{3M_{UR}}{4\pi} = \left[\frac{3}{8} \frac{\hbar c}{G} \left(\frac{3}{\pi m_N^4} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} = \\
& = \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{\pi m_N^4} \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow M_{UR} = \frac{\left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{\pi m_N^4} \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{4\pi}} = \\
& = \frac{4\pi}{3} \frac{3}{8} \left(\frac{3}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{\pi m_N^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \frac{3}{8} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{8} \frac{\pi}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
& = 4 \frac{3}{8} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{8m_N^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2\pi}{m_N^4} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 2 M_{\odot}
\end{aligned} \tag{D.49}$$

Inserendo questo limite nella (D.48) otteniamo un raggio approssimato di circa $R \approx 4 \text{ km}$. Come vedremo dopo, queste stime sono diverse rispetto alle attuali approssimazioni, tuttavia, sono all'incirca dello stesso ordine di grandezza. Ciò che abbiamo calcolato nella (D.49) è noto come il *limite di Chandrasekhar*^{[Chandrasekhar31], [Helstrom20 – Pag. 9 su 15]}. Questa è la massa massima per una stella pura di neutroni descritta da un gas di Fermi freddo degenere. Oltre questo limite, la pressione gravitazionale supererà la pressione di degenerazione neutronica e la stella probabilmente collasserà formando un buco nero. Il limite di Chandrasekhar è più fortemente associato alla massa massima delle nane bianche ($M \approx 1.44 M_{\odot}$), tuttavia, come visto sopra, può essere calcolato anche per un sistema di neutroni^[Helstrom20 – Pag. 9 su 15].

E. Tipi di classificazione stellare

Il primo passo verso la classificazione stellare venne svolto nel 1856 da Norman Pogdon, riprendendo il vecchio sistema di catalogazione di Ipparco di Nicea, mediante la definizione di magnitudine apparente secondo la seguente relazione^[Pesaresi15 – Pag. 11 su 19]:

$$m - m_0 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right) \quad (E.1)$$

La magnitudine apparente misurata, tuttavia, riguarda solo una certa parte osservata dello spettro della sorgente per via della diversa sensibilità dello strumento di osservazione alle varie lunghezze d'onda. Quindi i colori osservati non sono intensi allo stesso modo. Per ottenere un maggiore studio della sorgente luminosa ci serve un sistema di filtri capace di analizzare lunghezze d'onda al di fuori della banda di partenza. Il primo sistema fotometrico, che ancora oggi è il più utilizzato, è quello messo a punto negli Anni '50 del '900 da Harold Johnson e William Morgan, con i filtri U, B, V, R, I (ultravioletto, blu, visibile, rosso, infrarosso). Da qui deriva una prima classificazione categorica del diagramma di HR, come già è stato accennato nella Figura 1 e nella formula (1.6) all'inizio del primo capitolo della tesi.

La formula (1.6), in verità, è di tipo empirica, mentre quella di Johnson (E.2), qui sotto riportata, è più concettuale ed è intesa come la differenza di magnitudine tra due colori, nello specifico tra il blu e il verde.

$$\begin{aligned} I.C. (x - y) &= m_x - m_y \Rightarrow (B - V) = m_B - m_V & (E.2) \\ I.C. (x - y) &= \text{indice di colore tra il} \\ &\text{primo colore x ed il secondo colore y} \\ &m_x = \text{magnitudine} \\ &\text{apparente del colore x} \\ &m_y = \text{magnitudine} \\ &\text{apparente del colore y} \\ (B - V) &= \text{indice di colore tra il} \\ &\text{colore blu B ed il colore verde V} \\ &m_B = \text{magnitudine} \\ &\text{apparente del colore blu B} \\ &m_V = \text{magnitudine} \\ &\text{apparente del colore verde V} \end{aligned}$$

Poiché l'*I.C.* è legato ai flussi di radiazione emessa obbedienti alla legge del corpo nero, quindi univocamente dipendenti dalla temperatura superficiale stellare effettiva T_{eff} , questo determina la T_{eff} una volta per tutte. Questo sta a significare che due stelle aventi la stessa T_{eff} possono avere magnitudini assolute ed apparenti diverse per via della loro diversa distanza dalla Terra e delle loro diverse dimensioni.

La Figura 32^[Pesaresi15 – Pag. 12 su 19] mostra il livello di trasmittanza (rapporto tra flusso trasmesso e flusso incidente) dei vari colori in funzione della loro lunghezza d'onda filtrati con i due telescopi a 330 mm e a 2 100 mm (*Otto Struve Telescope*) presso il *McDonald Observatory* in Jeff David County, Texas, USA^[Johnson53].

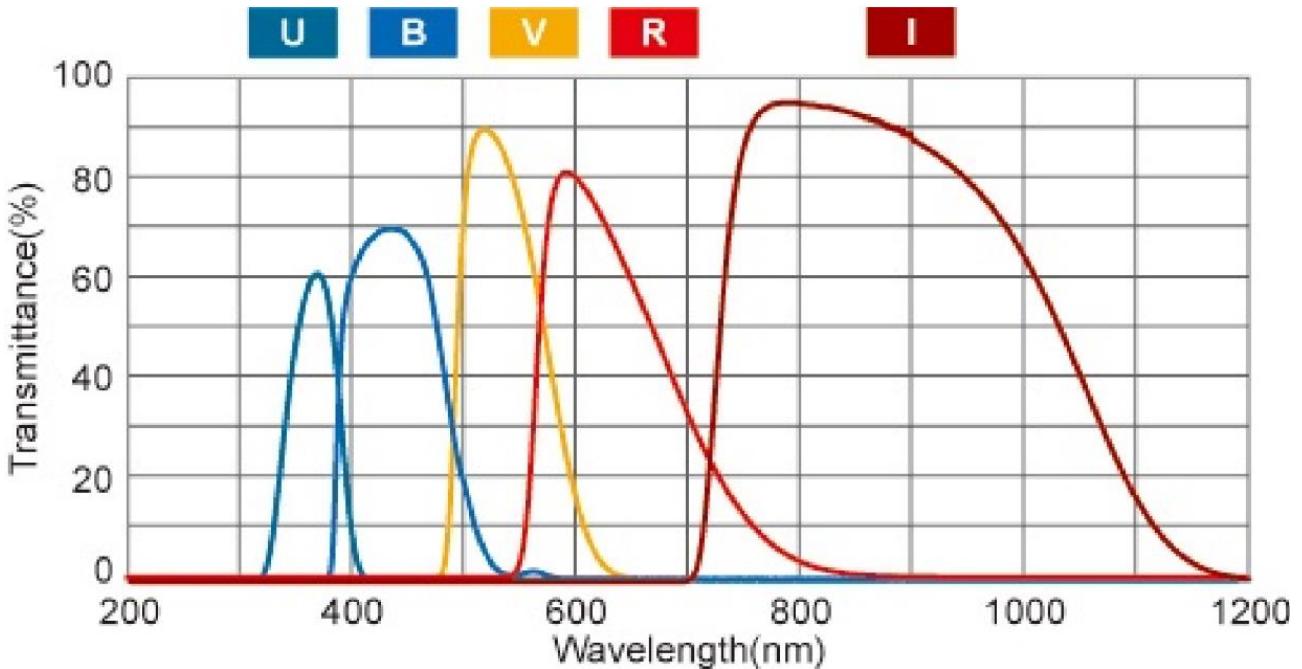


Figura 32 – Curve di trasmissione del sistema di Johnson ampliato nella banda rossa R ed infrarossa I

La magnitudine assoluta M è definita come la magnitudine apparente m della stessa stella distante 10 parsec dalla Terra. Conoscendo la relazione tra intensità luminosa e distanza ricaviamo il rapporto flusso-distanza nella seguente maniera^[Pesaresi15 – Pag. 12 su 19]:

$$\frac{F(d)}{F(10 \text{ pc})} = \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \quad (\text{E.3})$$

Di conseguenza il modulo di distanza $m - M$ diventa^[Pesaresi15 – Pag. 12 su 19]:

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log_{10} \left[\frac{F(d)}{F(10 \text{ pc})} \right] = \\ &= -2.5 \log_{10} \left[\left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 \right] = 2.5 \log_{10} \left[\left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right)^2 \right] = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right) = \\ &= 5 \log_{10} d - 5 \log_{10} (10 \text{ pc}) = 5 \log_{10} d - 5 \times 1 = 5 \log_{10} d - 5 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Così la magnitudine assoluta M risulta pari a^[Pesaresi15 – Pag. 12 su 19]:

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5 \rightarrow M = m + 5 - 5 \log_{10} d \quad (\text{D.5})$$

Ci sono diversi sistemi di classificazione storicamente usati per raggruppare i tipi di stelle in base alla loro luminosità e al loro spettro. Elenchiamoli in ordine cronologico.

- 1866 → Classificazione stellare del gesuita e astronomo italiano Angelo Secchi^[Secchi66].
- 1886 → Classificazione stellare sviluppata presso l'*Harvard College Observatory* di Cambridge, Massachusetts, USA, mediante lo studio degli spettri solari dell'astronomo americano Edward Charles Pickering raccolti nel manuale *Draper Catalogue of Stellar Spectra* nel 1890 e categorizzati dall'astronoma britannica Wiliamina Paton Stevens Fleming. Questa classificazione è ancora tutt'oggi in vigore con le varianti di cifre prima romane e dopo indo-europee per una più precisa riorganizzazione del diagramma di Hertzsprung-Russell^[Pickering90].
- 1906 → Classificazione stellare dell'astronomo danese Ejnar Hertzsprung tra stelle giganti e stelle nane tendenti verso il rosso (classi K e M dello schema di Harvard)^[Brown95].

- 1943 → Classificazione stellare di Yerkes di tipo spettrale, meglio nota come sistema MKK, dalle iniziali dei suoi inventori, William Wilson Morgan, Philip Childs Keenan, Edith Kellman, che lo introdussero nel 1943 dopo le loro ricerche fatte allo *Yerkes Observatory* dell'Università di Chicago^[Morgan43].

Limitiamoci a studiare nella tesi le prime due classificazioni, quelle di Secchi e di Harvard, soprattutto quest'ultima.

Le classi stellari di Secchi in origine erano soltanto tre: classe 1 (I), 2 (II) e 3 (III).

1. Classe 1 (I) → Stelle bianche e azzurre con righe dell'idrogeno forti e larghe, come Vega e Altair.
 - 1.1. Sottotipo Orione → Stelle analoghe a quelle principali della Classe 1 (I), ma con righe dell'idrogeno più strette, come Rigel e Bellatrix.
2. Classe 2 (II) → Stelle gialle con righe prevalentemente emesse da metalli e poco dall'idrogeno, come il Sole, Arturo e Capella.
3. Classe 3 (III) → Stelle rosse con uno spettro complicato con bande molto larghe, come Betelgeuse e Antares.

Nel 1868 Secchi inserì la Classe 4 (IV) per le stelle rosse da lui stesso scoperte e aventi linee e bande evidenti di emissione al carbonio.

Nel 1877 Secchi aggiunse la Classe 5 (V) per le stelle con linee di emissione, come γ -Cassiopeiae e β -Lyrae.

Nel 1890 questa classificazione venne soppiantata dal nuovo sistema di catalogazione di Harvard, sviluppato dall'astronoma Williamina Paton Stevens Fleming, che sì basò sulle ricerche spettrali svolte sperimentalmente dall'astronomo Edward Charles Pickering. Nel manuale [Pickering90] viene presentata la sequenza ufficiale di classificazione stellare in lettere maiuscole, in buona parte ancora adottata nel diagramma di Hertzsprung-Russell, come spiegheremo tra poco. La sequenza originale è la seguente: *ABCDEFGHIJKLMOPQ*. La classe *N* non appariva nel catalogo originale del manuale [Pickering90].

Nel 1897 l'astronoma Antonia Maury, un'altra collaboratrice di Pickering, continuò a usare i numeri romani, come si faceva nello schema di Secchi, estendendo però la sequenza da 1 (I) a 22 (XXII)^[Maury97].

Nel 1901 Annie Jump Cannon sfruttò le lettere maiuscole del catalogo Harvard associate alle vecchie classi di Secchi secondo lo schema originale della Tabella 14^[Pickering90] e le riordinò nella forma attualmente adottata nel diagramma di Hertzsprung-Russell: *OBAFGKM*; ne parleremo a breve.

Secchi	Harvard	Note
I	A, B, C, D	Righe dell'idrogeno dominanti.
II	E, F, G, H, I, K, L	
III	M	
IV	N	Non appariva nel catalogo.
	O	Spettri caratteristici delle Wolf-Rayet con linee brillanti.
	P	Nebulose planetarie.
	Q	Altri spettri.

Tabella 14 – Confronto tra la classificazione stellare di Secchi e quella di Harvard

Se la stella da esaminare si trova a cavallo tra due classi consecutive tra loro, occorre indicare entrambe le lettere concatenate con una cifra di mezzo da 1 a 5. Sempre l'astronoma Cannon ne fece sviluppo indicando, ad esempio, B5A (metà strada tra B e A), F2G (un quinto di strada da F a G), ecc. Nel 1912 Cannon modificò la notazione indicando soltanto una lettera seguita da un numero, arrivando così all'attuale classificazione spettrale delle stelle lungo l'ascissa del di Hertzsprung-Russell (in alternativa si usa la scala termometrica o la differenza di indice di colore $B - V$)^[Cannon12]. L'ordinata si riferisce alla magnitudine assoluta (luminosità reale) della stella.

La classificazione di Harvard all'interno del diagramma HR si basa sul rilevamento di linee di assorbimento notevolmente sensibili alla temperatura superficiale delle stelle: le linee di Balmer dell'idrogeno *H*, le linee dell'elio *He*, del ferro *Fe* e il doppietto del calcio ionizzato *Ca II* (396.8 nm e 393.3 nm). In origine le classi di Harvard furono poste in ordine alfabetico, successivamente furono riordinate in ordine decrescente di temperatura, arrivando così allo schema attuale *OBAFGKMLT*, con le classi aggiuntive *S* e *C* (che affianca le vecchie classi *R* e *N*) parallele alla *M*. Stelle appartenenti alla stessa classe hanno tutte in comune la medesima temperatura^[Pesaresi15 – Pag. 12 su 19].

L'astronomo americano Henry Draper utilizzò delle lastre fotografiche in negativo per immortalare le linee spettrali stellari: le zone scure indicano una forte luminosità, mentre quelle chiare una debole luminosità^[Richmond11].

Una volta ricavata l'attuale sequenza di Harvard, otteniamo altri due livelli di classificazione: uno in cifre arabe da 0 a 9, per indicare la sottoclasse spettrale, e l'altro in cifre romane da I a V per indicare la classe di luminosità in ordine decrescente. Ad esempio, il nostro Sole è di classe G2V^{[Pesaresi15 – Pag. 14 su 19], [Richmond11]}.

Le Figure 33-34 mostrano la classificazione di Harvard negli ordini vecchio e nuovo^[Richmond11].

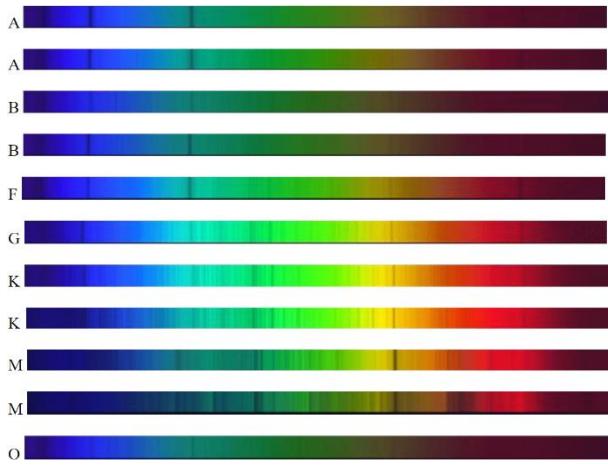


Figura 34 – Schema di Harvard in ordine alfabetico

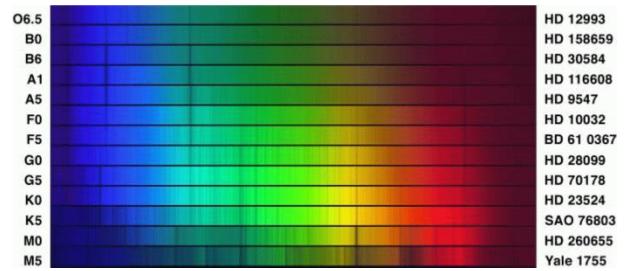


Figura 33 – Schema di Harvard in ordine di temperatura

L’astronoma Annie Jump Cannon notò che l’arrangiamento della Figura 33 era quasi idoneo a quello delle temperature, che conosceva indipendentemente dalla forma complessiva dello spettro e dai colori fotometrici. Riordinando le righe, come riportato in Figura 34, Cannon ottenne una **vera sequenza di temperatura** universalmente adottabile per classificare le stelle nella maniera più generale possibile^[Richmond11].

Lo spessore e l’intensità delle righe si spiegano mediante le equazioni di Boltzmann e di Saha studiate nel primo paragrafo di quest’ultimo capitolo della tesi.

La Figura 35 mostra le righe spettrali delle stelle in sequenza principale $O9 \div B9$ costituite da elio e silicio^[Richmond11].

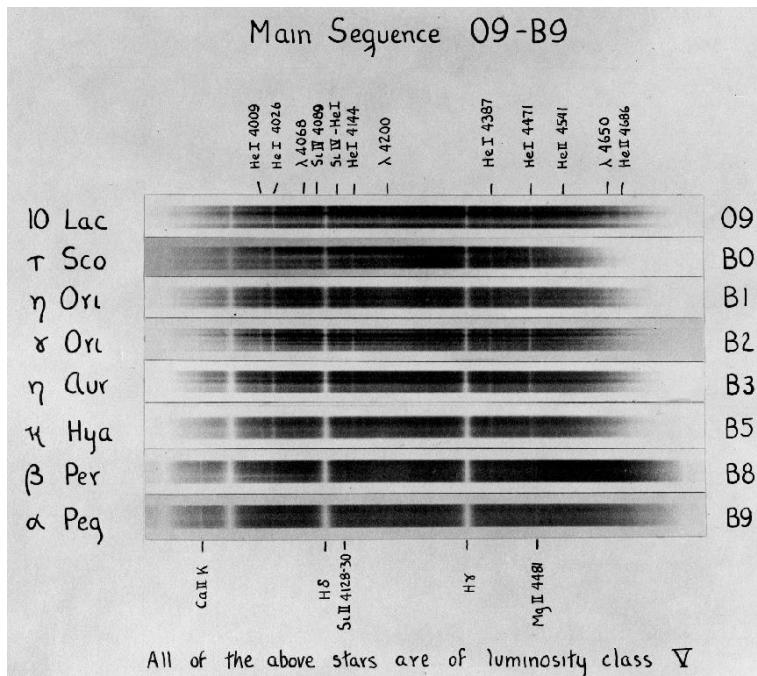


Figura 35 – Stelle della sequenza principale $O9 \div B9$ tutte quante di classe di luminosità V

Le notazioni prima in cifre arabe e dopo in cifre romane a seguito delle lettere di Harvard sono state introdotte più tardi nel 1943 dai tre scienziati americani Morgan, Keenan e Kellman dello *Yerkes Observatory* di Chicago, secondo quanto detto qualche riga sopra in questo paragrafo della tesi.

Studiamoci, finalmente, la configurazione del diagramma HR^[Pesaresi15 – Pag. 15 su 19].

Attorno al 1910 gli astronomi Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell studiarono il legame che si instaura tra la magnitudine assoluta e classe spettrale delle stelle. Entrambi arrivarono allo stesso risultato, ottenendo l'attuale configurazione del diagramma che porta i loro nomi.

Inserendo la formula di Planck del flusso di fotoni (B.4)^[Pesaresi15 – Pag. 5 su 19] nell'equazione di Pogson della differenza di magnitudine tra due colori (E.5)^[Pesaresi15 – Pag. 15 su 19], si ottiene la relazione:

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = -2.5 \log_{10} \left[\frac{F_{\lambda_1}(T)}{F_{\lambda_2}(T)} \right] \quad \text{equazione di Pogson} \\
 \\
 B(\lambda, T) = 2 \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad \text{equazione di Planck} \\
 \\
 B(T) = \int B(T) d\lambda = AT^4 \quad \text{sulla radianza} \\
 \\
 A = \frac{2k^4 \pi^4}{c^2 h^3 15} \quad \text{intensità totale} \\
 \\
 F(T) = \pi B(T) = \pi AT^4 = \sigma T^4 \quad \text{della radiazione} \\
 \\
 \sigma = \pi A = \frac{2k^4 \pi^5}{c^2 h^3 15} \quad \text{isotropica} \\
 \\
 \end{array}
 \right. \quad \text{(E.6)}$$

Applicando la formula di Pogson (E.6) su quella dell'indice di colore (D.2) mediante il sistema di filtri di Johnson otteniamo la scala di colore del diagramma HR con il seguente andamento:

$$B - V \approx -2.5 \log_{10} \left[\exp \left(-\frac{6589 K}{T} \right) \right] \quad (E.7)$$

Quindi dalla (E.7) si può risalire alla T_{eff} della stella in esame.

Se la luminosità bolometrica $L(\lambda)$ e il flusso bolometrico $F(\lambda)$ sono noti, allora si ottiene subito la distanza d della stella dalla Terra tramite

$$L(\lambda) = 4\pi d^2 F(\lambda) \quad (\text{E.8})$$

La configurazione di questo diagramma è rappresentata in Figura 36 [Pesaresi15 – Pag. 16 su 19].

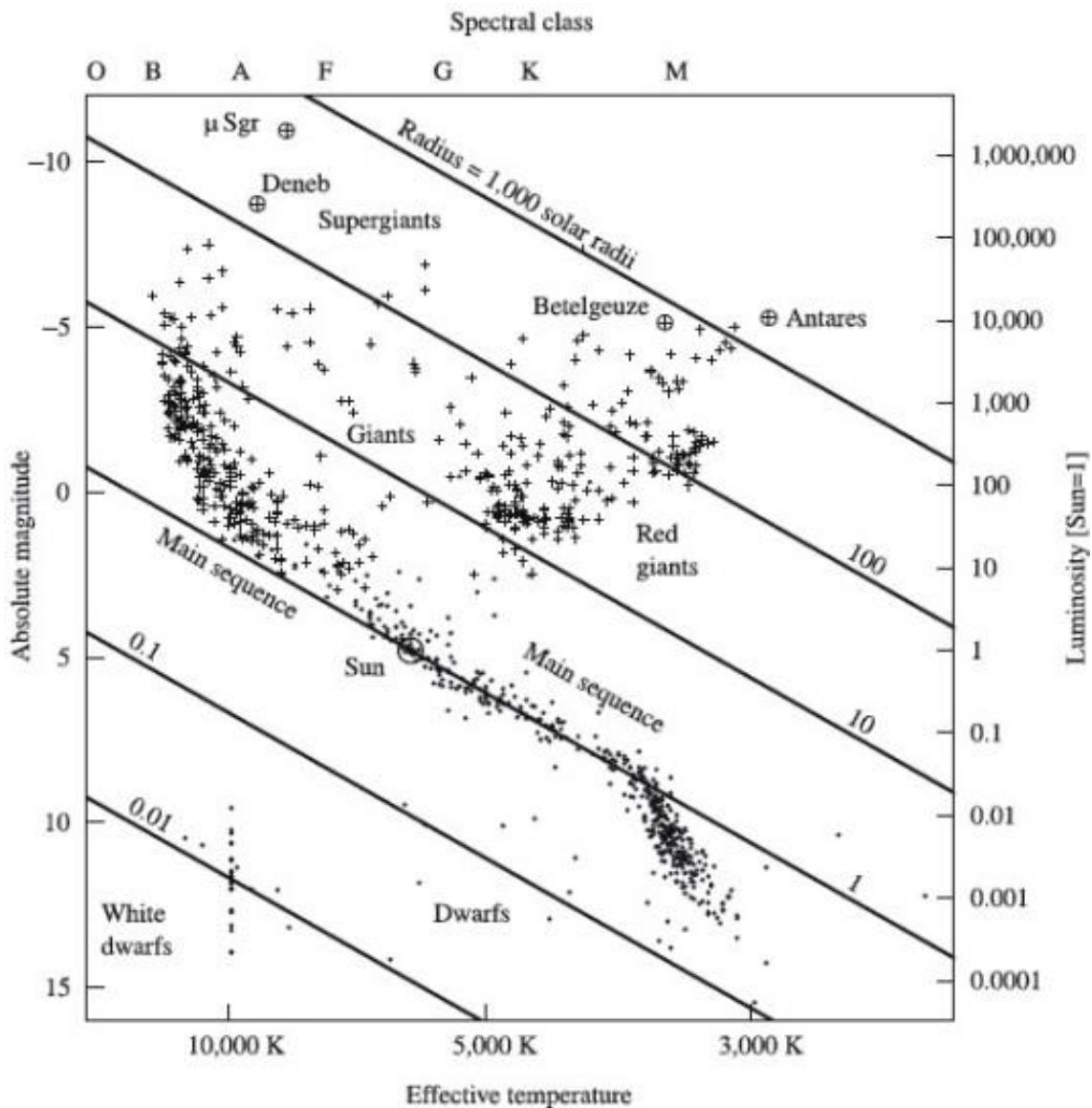


Figura 36 – Diagramma di Hertzsprung-Russell

Ascissa in alto – Classe spettrale secondo il sistema di Harvard

Ascissa in basso – Temperatura effettiva della superficie stellare in scala lineare

Ordinata a destra – Luminosità assoluta in scala logaritmica paragonata rispetto a quella del Sole

Ordinata a sinistra – Magnitudine assoluta in scala lineare

Il grande vantaggio del diagramma HR sta nel fatto di poter collocare le singole stelle in un quadro generale delle loro caratteristiche di base. Inoltre, collocando una determinata popolazione di stelle entro una certa regione del diagramma HR (come un ammasso globulare, un ammasso aperto, una galassia, ecc.) si possono conoscere la loro età e la loro metallicità^[Pesaresi15 – Pag. 16 su 19].

Principalmente ci sono tre aree popolose del diagramma HR per via dell'evoluzione di queste stelle (vedi di nuovo la Figura 36)^[Pesaresi15 – Pagg. 16-17 su 19].

L'area più rilevante del diagramma HR è la cosiddetta **sequenza principale** in forma diagonale dalla zona in alto a sinistra (stelle molto calde e luminose) fino alla zona in basso a destra (stelle più fredde e poco luminose). Tale zona si chiama così per il semplice fatto che queste stelle si

posizionano su quest'area alla fine della loro formazione rimanendoci poi per gran parte della loro vita. In questo asso di tempo bruciano l'idrogeno in elio mediante le reazioni nucleari che studiate nei primi due capitoli della tesi (catena pp , fusione e decadimento 3α , risonanza di Hoyle del ^{12}C , ciclo CNO, decadimenti β^\pm , processi s e r)^[Pesaresi15 – Pag. 17 su 19].

Spostandoci dal centro fino in alto a destra del diagramma HR troviamo le stelle giganti, quelle supergiganti rosse e quelle fredde di grande volume, tutte quante in fin di vita con grande massa^[Pesaresi15 – Pag. 17 su 19].

Nella parte in basso a sinistra del diagramma HR troviamo stelle piccole in fin di vita, cioè le nane bianche^[Pesaresi15 – Pag. 17 su 19].

Le altre zone del diagramma HR sono più lunghe da una parte e meno larghe dall'altra. Si tratta delle giganti e delle supergiganti, poco sopra la sequenza principale, e dalle stelle nane, poco sotto la sequenza principale. La zona di destra è severamente proibita per il limite imposto dall'equilibrio termodinamico^[Pesaresi15 – Pag. 17 su 19]. Il confine tra la zona proibita e le altre zone permesse è noto come *limite di Hayashi*^[Schwarzschild75].

Tipicamente questo limite posto quasi in verticale si aggira su $T \approx 3\,500\text{ K}$. Le stelle con una fotosfera relativamente fredda si comportano in modo convettivo nei loro strati più interni^[Hayashi61].

Le classi di Harvard si basano sulla relazione che c'è tra le righe spettrali di emissione e di assorbimenti di specifici elementi presenti nella fotosfera stellare a seconda dei colori osservati. Da quest'ultimi si risale alla temperatura e alla luminosità assoluta della stella mediante le due relazioni di Pogson e di Planck studiate poco fa. Il catalogo di Harvard riportato nella Tabella 15 si basa sul lavoro volto dall'astronomo Henry Draper^[Pesaresi15 – Pagg. 17-18 su 19].

Classe	Colore	T_{eff}	Righe spettrali
O	Blu	$\geq 30\,000\text{ K} \div 20\,000\text{ K}$	He II, C III, O III, N III, Si V
B	Azzurro	$20\,000\text{ K} \div 10\,000\text{ K}$	He I, Ca II, O II, Si II, Mg II, H I
A	Bianco	$\approx 9\,000\text{ K}$	H I, Ca II, Fe II, Mg II, Si II
F	Bianco-giallo	$7\,000\text{ K} \div 6\,000\text{ K}$	Ca II, Fe I, Fe II, Cr II, Ti II
G	Giallo	$6\,000\text{ K} \div 5\,000\text{ K}$	Fe I, Fe II, Ca II, CN
K	Arancione	$4\,000\text{ K} \div 3\,000\text{ K}$	Ca I, Ca II, Fe I, Fe II, Si I, TiO
M	Rosso	$\approx 3\,000\text{ K}$	Ca I, TiO, VO
L	Rosso, IR	$\approx 2\,000\text{ K}$	Na I, K I
T	Rosso, IR	$\approx 1\,000\text{ K}$	CH ₄ , H ₂ O
C	Rosso, IR	$\approx 3\,000\text{ K}$	C ₂ , CH, CN
S	Rosso, IR	$\approx 3\,000\text{ K}$	ZrO, LaO, YO, TiO

Tabella 15 – Catalogo di Harvard con le corrispondenti righe spettrali sviluppato dall'astronomo Henry Draper

Passiamo ora agli esperimenti che ci sono dietro al lavoro di classificazione di Harvard^[Karttunen06 – Pagg. 207-209 su 510 in versione cartacea – Pagg. 214-216 su 507 in versione PDF]. I metodi più importanti adoperati per formare uno spettro sono l'utilizzo di un **prisma usato come obiettivo** (*objective prism*) oppure uno **spettrografo a fessura** (*slit spectrograph*). Il dettaglio risolutivo dello spettro dipende in prima misura dalla sua *dispersione*, la banda di lunghezze d'onda per millimetro sul piano (oppure per pixel su un obiettivo CCD per fotocamere). La dispersione di un *objective prism* è dell'ordine di poche decine di nanometri per millimetro. La fotografia dello spettro è convertita in una scala

tracciatrice di intensità che mostra la densità di flusso come una funzione della lunghezza d'onda. Questo si fa mediante un microdensitometro (Figura 37^[Charman65]), misurando la quantità di luce trasmessa dallo spettro rilevato.

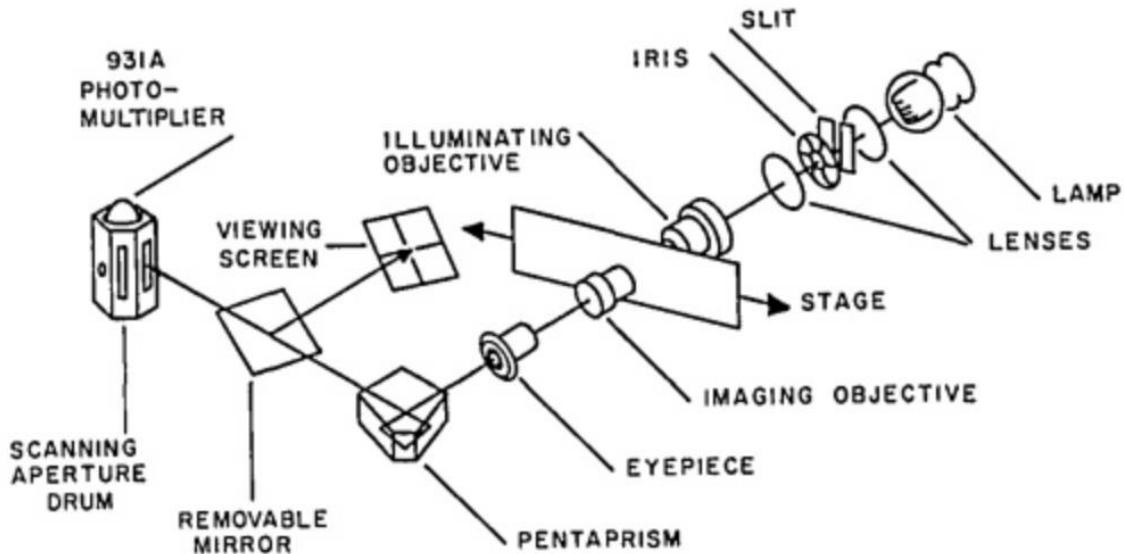


Figura 37 – Schema di funzionamento di un microdensitometro

Da come si vede dalla Figura 37 abbiamo che la luce proveniente dalla sorgente (lampada del laboratorio) passa attraverso la **prima lente** (*first lens*), la **fessura** (*slit*) e l'**iride** (*iris*) tra le due lenti, la **seconda lente** (*second lens*), l'**obbiettivo di illuminazione** (*illuminating objective*), il **filtro** (*stage*), l'**obbiettivo di immagine** (*imaging objective*) e l'**oculare** (*eyepiece*). Alla fine del suo viaggio la luce viene nuovamente deviata da un pentaprisma. Dopodiché viaggia di nuovo verso il **rivelatore ad apertura** (*scanning aperture drum*), dopo aver prima interrotto il suo tragitto con uno **specchio rimovibile** (*removable mirror*) per motivi di verifica da parte dello sperimentatore sull'apposito **schermo di visualizzazione** (*viewing screen*).

Poiché l'annerimento di una lastra fotografica non è linearmente correlato alla quantità di energia che ha ricevuto, l'annerimento misurato deve essere calibrato rispetto alle esposizioni conosciute. Nei moderni spettrografi CCD la curva di intensità è determinata direttamente senza l'ausilio di una lastra fotografica. Per le misurazioni delle larghezze di linea lo spettro è solitamente rettificato dividendolo per l'intensità di quello continuo^[Karttunen06 – Pag. 208 su 510 in versione cartacea – Pag. 215 su 507 in versione PDF].

La Figura 38 mostra una fotografia dello spettro di una stella e la curva di intensità ottenuta da un tracciamento calibrato e rettificato del microdensitometro. La seconda coppia di figure mostra la curva di intensità prima e dopo la normalizzazione. In aggiunta alle linee chiare e profonde, ci sono numeri ampi di linee più deboli a malapena distinguibili. La granulosità dell'emulsione fotografica è fonte di rumore che appare come serie di fluttuazioni irregolari della curva di intensità. Alcune linee sono così ravvicinate da sembrare fuse in questa dispersione^[Karttunen06 – Pagg. 208-209 su 510 in versione cartacea – Pagg. 215-216 su 507 in versione PDF].

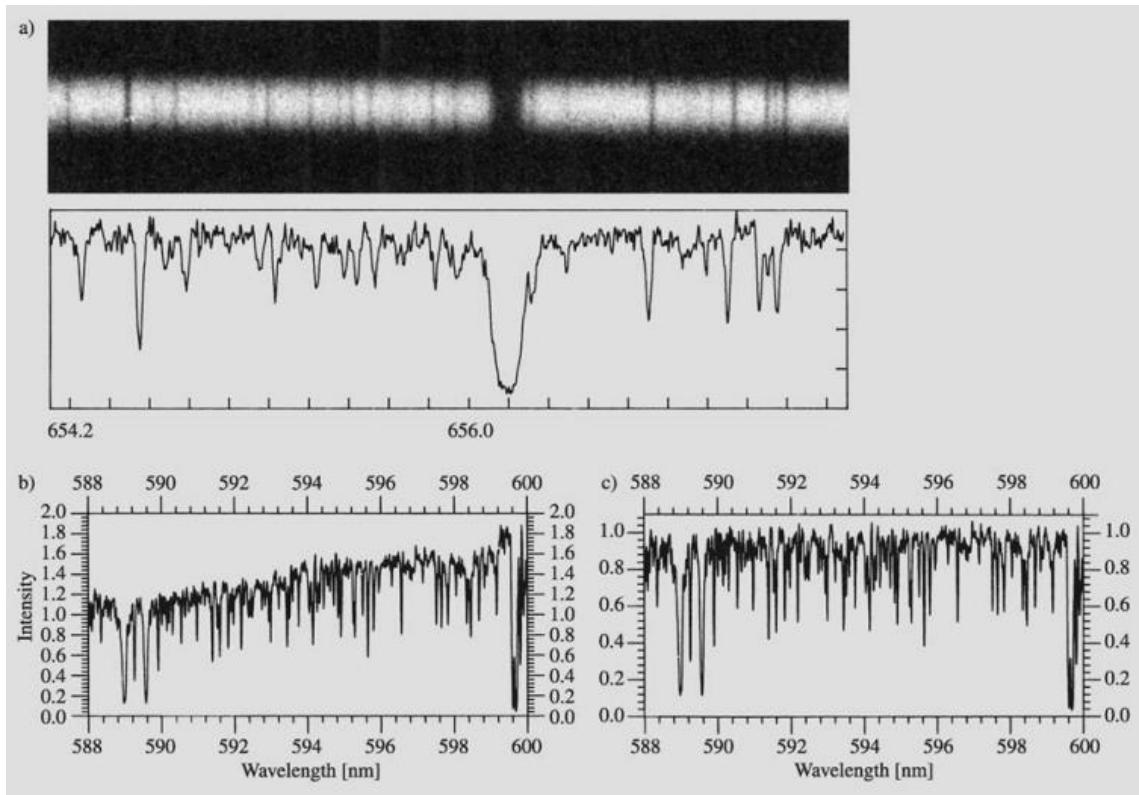


Figura 38 – Fotografia di uno spettro stellare ottenuta con il microdensitometro descritto in Figura 37

Grafico (a) – Una sezione di una fotografia di uno spettro stellare e il corrispondente tracciato di intensità del microdensitometro rettificato. Lo spettro originale è stato preso all'Osservatorio di Crimea.

Grafico (b) – Una parte più ampia dello spettro.

Grafico (c) – La curva di intensità della prima immagine è stata rettificata normalizzando il valore dell'intensità del continuo a uno. (Foto di J. Kyröläinen e H. Virtanen, Osservatorio di Helsinki)

F. Allargamento naturale della banda spettrale ad oscillazione smorzata

Un atomo eccitato può emettere la sua energia di eccitazione come una radiazione spontanea. La transizione $E_i \rightarrow E_k$ va studiata come una distribuzione spettrale usando il modello dell'oscillatore armonico per l'elettrone atomico (m =massa, x =posizione, ω =pulsazione, k =costante elastica, γ =costante di smorzamento). Negli atomi reali abbiamo che $\gamma \ll \omega$, cioè lo smorzamento spettrale è molto piccolo.

L'ampiezza di oscillazione $x(t)$ dell'elettrone va ricercata nell'equazione differenziale del moto armonico smorzato^[Demtröder08 – Pag. 76 su 469 in versione PDF].

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{F.1})$$

dove $\omega_0^2 = k/m$.

La soluzione reale $x(t)$ con i valori iniziali $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$ è

$$x(t) = x_0 e^{-(\gamma/2)t} [\cos(\omega t) + (\gamma/2\omega) \sin(\omega t)] \quad (\text{F.2})$$

La frequenza $\omega = (\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$ dell'oscillazione smorzata è leggermente inferiore alla frequenza ω_0 del caso non smorzato. Nel limite dell'oscillazione poco smorzata la (F.2) si approssima come

$$x(t) = x_0 e^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_0 t) \quad (\text{F.3})$$

La frequenza $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ dell'oscillatore corrisponde alla frequenza centrale $\omega_{ik} =$

$= (E_i - E_k)/\hbar$ di una transizione atomica $E_i \rightarrow E_k$.

Per definire il **profilo di Lorentz** della linea spettrale si può pensare all'ampiezza di oscillazione smorzata come una sovrapposizione di infinite oscillazioni monocromatiche $\exp(i\omega t)$ con frequenze ω infinitamente vicine l'una con l'altra e distribuzioni di frequenza $A(\omega)$. In altre parole, l'ampiezza $x(t)$ non è altro che la trasformata di Fourier di $A(\omega)$ definita nel seguente modo:

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{F.4})$$

La Figura 39 mostra gli andamenti grafici delle ampiezze $x(t)$ e di $A(\omega)$ ^[Demtröder08 – Pag. 77 su 469 in versione PDF]. Quest'ultima verrà poi descritta qualche riga più avanti in questo paragrafo.

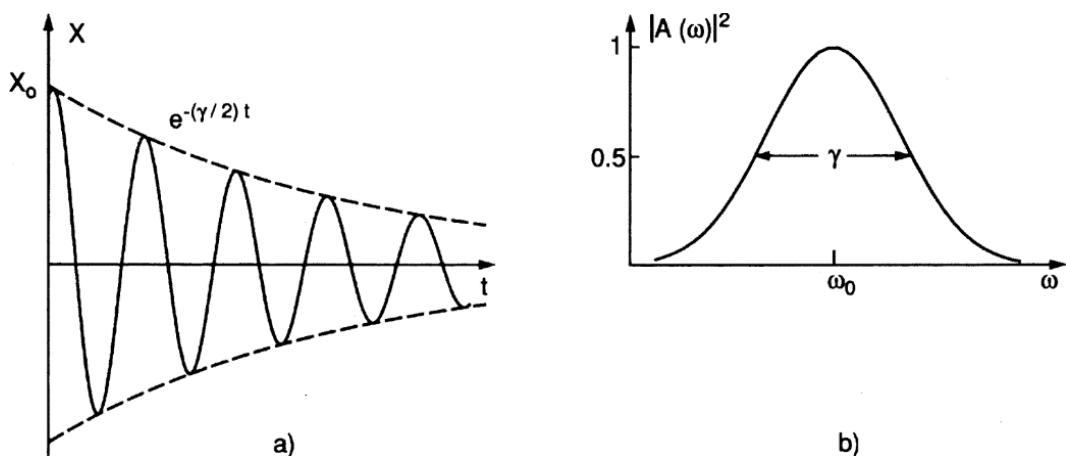


Figura 39 – Allargamento spettrale naturale smorzato

Grafico (a) – Oscillazione smorzata

Grafico (b) – La distribuzione di frequenza $A(\omega)$ delle ampiezze ottenute dalla trasformata di Fourier di $x(t)$ fornisce l'intensità di profilo $I(\omega - \omega_0) \propto |A(\omega)|^2$.

Ricaviamoci $A(\omega)$ da $x(t)$ mediante la trasformazione inversa di Fourier.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \quad (F.5)$$

Si tiene conto solo dell'intervallo $t \geq 0$ dato che $x(t < 0) = 0$.

Calcoliamo adesso esplicitamente la (F.5) per estrarre la componente complessa normale $A(\omega)$ e quella coniugata di $A^*(\omega)$ tale che $I(\omega) \propto A(\omega)A^*(\omega)$.

$$A(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{8\pi}} \left[\frac{1}{i(\omega - \omega_0) + \frac{\gamma}{2}} + \frac{1}{i(\omega + \omega_0) + \frac{\gamma}{2}} \right] \quad (F.6)$$

L'intensità del profilo di Lorentz, nel limite della risonanza $\omega \simeq \omega_0$, diventa

$$I(\omega - \omega_0) = C \left\{ \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega - \omega_0)} \right] \left[\frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega - \omega_0)} \right] \right\} = \frac{C}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (F.7)$$

Normalizziamo $I(\omega - \omega_0)$ rispetto a I_0 con il profilo $L(\omega - \omega_0) = \frac{I(\omega - \omega_0)}{I_0}$, dove $I_0 =$

$= \int I(\omega) d\omega$, così che

$$\int_0^{+\infty} L(\omega - \omega_0) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\omega - \omega_0) d(\omega - \omega_0) = 1 \quad (F.8)$$

Sviluppiamo esplicitamente il calcolo della (F.8) mediante la (F.7) per estrarre il coefficiente di normalizzazione C del profilo di Lorentz.

$$L(\omega - \omega_0) = \frac{I(\omega - \omega_0)}{I_0} = \frac{1}{I_0} \frac{C}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \frac{C}{I_0} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \frac{1}{I_0} \frac{I_0 \gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \rightarrow C = \frac{I_0}{2\pi} \quad (F.9)$$

Il profilo definitivo di $L(\omega - \omega_0)$ si chiama *profilo normalizzato di Lorentz* [Demtröder08 – Pag. 77 su 469 in versione PDF]. Ricaviamoci così il picco di $I(\omega - \omega_0)$.

$$I(\omega - \omega_0) = I_0 L(\omega - \omega_0) = \frac{\gamma I_0}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (F.10)$$

Il picco della (F.10) vale semplicemente

$$I(\omega_0) = [I(\omega - \omega_0)]_{\omega=\omega_0} = \left[\frac{\gamma I_0}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \right]_{\omega=\omega_0} = \frac{2I_0}{\pi\gamma} \quad (\text{F.11})$$

Passando dalla frequenza angolare ω alla frequenza normale ν la (F.9) diventa^[Giardino15 – Pag. 14 su 19]:

$$\psi(\nu) = L(\nu - \nu_0) = \left[\frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \right]_{\omega=2\pi\nu} = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{16\pi^2(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2} \quad (\text{F.12})$$

G. Equazione di Saha

Siano A e B gli stati fisici di un sistema, di energie E_A e E_B , di pesi statistici g_A e g_B e di popolazioni di particelle N_A e N_B . Il dislivello di energia tra E_A e E_B fa sì che le popolazioni e i pesi statistici obbediscano alla statistica di Boltzmann secondo la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{N_A}{N_B} &= \frac{g_A e^{-\frac{E_A}{kT}}}{g_B e^{-\frac{E_B}{kT}}} = \frac{g_A}{g_B} e^{-\frac{E_A - E_B}{kT}} = \\ &= \frac{g_A}{g_B} e^{-\frac{E_A - E_B}{kT}} = \frac{g_A}{g_B} e^{-\left(\frac{E_A - E_B}{kT}\right)} = \frac{g_A}{g_B} e^{-\frac{E_A - E_B}{kT}} \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Si considerino due ioni dello stesso elemento, i e $i + 1$. Il potenziale di ionizzazione, cioè l'energia necessaria a ionizzare i dallo stato fondamentale, vale χ , e i pesi statistici degli stati fondamentali dei due ioni sono, rispettivamente, g_i e g_{i+1} . I numeri densità dei due tipi di ioni e degli ioni liberi sono, rispettivamente, n_i , n_{i+1} e n_e . Il peso statistico di uno ione nello stato di ionizzazione inferiore da usare nell'equazione (G.1) è semplicemente g_i . Il peso statistico di uno ione nello stato di ionizzazione superiore è g_{i+1} moltiplicato per il numero di stati possibili nei quali un elettrone libero può essere inserito. Come sappiamo, in ogni cella di uno spazio delle fasi un volume h^3 ci sono due possibili stati di un elettrone, poiché ci sono due possibili orientazioni del suo spin. $h = 6.63 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$ è la costante di Planck. L'energia di un elettrone libero con un impulso p rispetto allo stato fondamentale di uno ione in uno stato di ionizzazione inferiore è $E = \chi + p^2/2m$. Il numero medio di celle per elettroni liberi con un impulso tra p e $p + dp$ è $V_e 4\pi p^2 dp/h^3$, dove $V_e = 1/n_e$ è il volume medio nello spazio ordinario per elettrone, e n_e è il numero densità di elettroni liberi. Adesso integriamo l'equazione (G.1) con i nuovi parametri in gioco su tutto lo spazio delle fasi, tenendo conto del fattore di Boltzmann

$$\begin{aligned} \frac{n_{i+1}}{n_i} &= \frac{g_{i+1}}{g_i} \frac{2V_e}{h^3} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\chi + p^2}{kT}} 4\pi p^2 dp = \\ &= \frac{g_{i+1}}{g_i} \frac{1}{n_e} \frac{2}{h^3} (2mkT)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}} 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{g_{i+1}}{g_i} \frac{1}{n_e} \frac{2}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}} \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

dove abbiamo impostato $x = p^2/2mkT$ e l'ultimo integrale di valore $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1/2} dx = \pi^{1/2}/2$.

Moltiplicando i due estremi della formula (G.2) per il numero densità n_e si ottiene la tanto attesa equazione di Saha (formula G.3).

$$\frac{n_{i+1} n_e}{n_i} = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{2g_{i+1}}{g_i} e^{-\frac{\chi}{kT}} \quad (\text{G.3})$$

Nella Tabella 16 sono riportati i valori dei potenziali di ionizzazione χ e dei rapporti dei gradi di degenerazione $2g_{i+1}/g_i$, dove il fattore 2 indica il grado di degenerazione aggiuntivo dovuto agli spin dell'elettrone strappato dall'atomo dell'elemento in esame.

Elemento ionizzato	Potenziale di ionizzazione	Rapporto di degenerazione
Ionizzazione dell'idrogeno ($H\ II$)	$\chi = 13.54\ eV$	$2g_{i+1}/g_i = 1$
Prima ionizzazione dell'elio ($He\ II$)	$\chi = 24.48\ eV$	$2g_{i+1}/g_i = 4$
Seconda ionizzazione dell'elio ($He\ III$)	$\chi = 54.17\ eV$	$2g_{i+1}/g_i = 1$

Tabella 16 – Studio dei potenziali di ionizzazione e dei rapporti di degenerazione per le ionizzazioni dell'idrogeno e dell'elio

Consideriamo adesso l'idrogeno puro, parzialmente ionizzato. Siano n_H , $n_{H\ I}$, e $n_{H\ II}$ i numeri densità, rispettivamente, di tutto l'idrogeno, degli atomi neutri di idrogeno, e degli ioni di idrogeno. Abbiamo $n_H = n_{H\ I} + n_{H\ II}$, $n_e = n_{H\ II}$, e $x \equiv n_{H\ II}/n_H$ è il grado di ionizzazione. La densità del gas è $\rho = Hn_H$, dove H è la massa di un atomo di idrogeno. Applicando quanto detto finora nella formula (G.3) l'equazione di Saha si riscrive come:

$$\frac{n_{H\ II}n_e}{n_{H\ I}} = \frac{\rho}{H} \frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{2g_{i+1}}{g_i} e^{-\frac{\chi}{kT}} \quad (G.4)$$

Le costanti fisiche nel sistema CGS valgono: $H = 1.643 \times 10^{-24}\ g$, $m = 9.11 \times 10^{-28}\ g$, $k = 1.381 \times 10^{-16}\ erg \cdot K^{-1}$, $h = 6.63 \times 10^{-27}\ erg \cdot s$, dove H =massa del protone, m =massa dell'elettrone, k =costante di Boltzmann, e h =costante di Planck.

Come scopo della tesi ci occorre avere una versione corretta dell'equazione di Saha, tenendo conto della funzione statistica di partizione Z , dato che la ionizzazione può avvenire a diversi livelli energetici al di sopra di quello fondamentale^[Melchiorri14-10 – Pag. 27 su 40]:

$$Z = \sum_{j=1}^{+\infty} Z_j = \sum_{j=1}^{+\infty} g_j e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}} \quad (G.5)$$

Sostituendo i vecchi fattori di degenerazione g_i , g_{i+1} con Z_i , Z_{i+1} nella (G.4) otteniamo la vera equazione di Saha:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2Z_{i+1}}{n_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \quad (G.6)$$

dove i numeri densità sono adesso indicati in maiuscolo.

Inserendo l'equazione di stato termodinamico della pressione $P_e = n_e k T$ nella (G.6) otteniamo

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kT Z_{i+1}}{P_e Z_i} \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \quad (G.7)$$

H. Strumenti di spettroscopia applicata

Lo strumento di misurazione adoperato in spettroscopia si chiama **spettroscopio**. La sua variante tradizionale è essenzialmente costituita da quattro componenti: la **fenditura**, l'**ottica di collimazione** oppure **collimatore**, l'**elemento dispersivo** oppure **diffrattivo** ed infine l'**ottica di osservazione**^[Mete13], come mostrato in Figura 40.

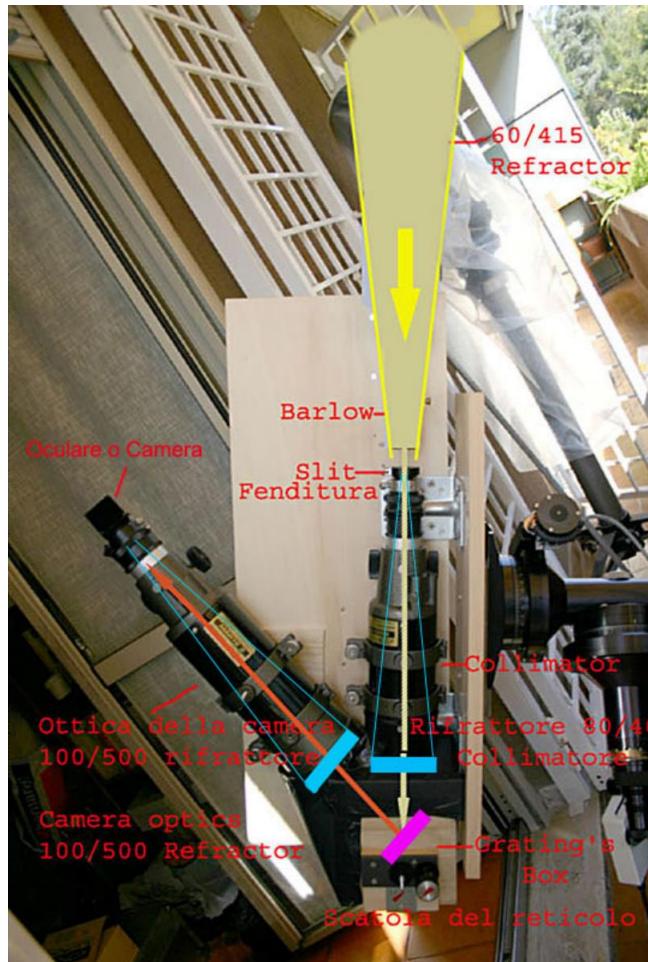


Figura 40 – Struttura di uno spettroscopio tradizionale

- **Fenditura** → Apertura di ingresso usata per omogenizzare la radiazione in entrata, che quest'ultima raggiunge il mezzo dispersivo mediante il collimatore, e per riprendere specifiche lunghezze d'onda dello spettro.
- **Ottica di collimazione o collimatore** → Cannocchiale sistemato al contrario per rendere parallelo il fascio di luce da essere inviato al reticolo. Sul punto focale c'è la fenditura.
- **Elemento dispersivo o diffrattivo (prisma o sistema di prismi; reticolo a trasmissione o a riflessione)** → Cuore vero dell'apparecchiatura capace di diffrangere le varie lunghezze d'onda della luce policromatica ad angoli diversi. L'ordine zero di dispersione si riferisce ad una riflessione o trasmissione parziale del fascio di luce, mentre gli ordini superiori a zero si riferiscono a diffusione del fascio sia a sinistra che a destra.
- **Ottica di osservazione** → Mezzo ottico che ingrandisce lo spettro al fine di aumentarne il suo potere risolutivo.

La variante più semplice di spettroscopio è quella del **cd “slitless”**, senza fenditure ed ottiche aggiuntive. In pratica il mezzo dispersivo si colloca lungo il cammino ottico del telescopio tra il suo obiettivo e il suo piano focale. La sua risoluzione policromatica, studiata in termini di efficienza assoluta tenendo conto dei numeri di linee per *mm* al variare dell’angolo di rifrazione, è rappresentata in Figura 41 (fonte Thorlabs Inc.).

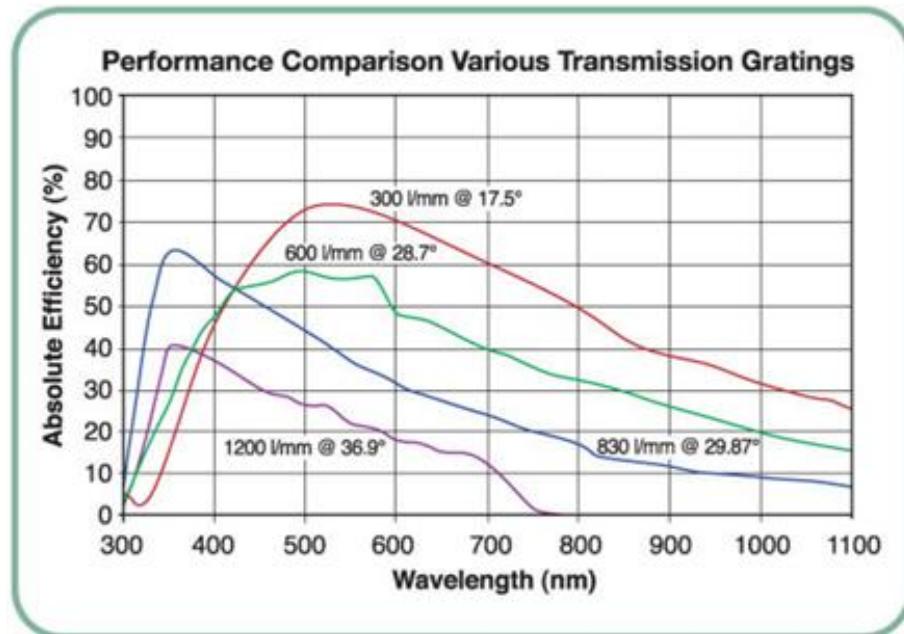


Figura 41 – Confronto delle prestazioni delle varie griglie di trasmissione

Ascissa – Scala lineare dello spettro della lunghezza d’onda misurata in nanometri

Ordinata – Scala lineare dell’efficienza assoluta di trasmissione della luce che viaggia all’interno dello spettrometro **cd “slitless”**

Etichette lungo le curve colorate → Numero di righe per millimetro a seconda dell’angolo di diffrazione all’interno del reticolo a trasmissione

Da come si vede dalla Figura 41 l’efficienza assoluta peggiora di gran lunga per lunghezze d’onda inferiori a 100-200 nm.

Per aumentare ulteriormente la risoluzione spettrale, fino ad arrivare a 0.01nm/mm^[Pesaresi15 – Pag. 14 su 19], si utilizza lo **spettroscopio autocollimante o di Littrow**^[Mete16 – Pag. 54 su 377]. In pratica questo spettroscopio, che richiede una sola ottica per funzionare, agisce contemporaneamente sia come collimatore che come ottica di osservazione.

Bibliografia

[Balmaverde20] B. Balmaverde, *Stelle Variabili – Parte 2, Corso di Formazione di Astronomia e Astrofisica per Docenti di Scuola Secondaria, Osservatorio Astronomico di Torino, A. A. 2020/2021*

[Bernardis16] P. De Bernardis, *Rotazioni in Astrofisica*, Dipartimento di Fisica, Università di Roma, 2016

[Benhar17] O. Benhar, *The Structure of Compact Stars*, Università di Roma, 2017

[Bohr28] N. Bohr, *The Quantum Postulate and Recent Development of Atomic Theory*, Nature, Vol. 121 (1928), Pagg. 580-590

[Bono10] G. Bono, *La stima delle distanze cosmiche*, Memorie della Società astronomica Italiana, 2010

[Brown95] L. M. Brown, A. Pais, A. B. Pippard, *Twentieth Century Physics – Vol. 2*, Bristol; Philadelphia: Institute of Physics Pub.; New York: American Institute of Physics Press, 1995

[Caccianiga15] B. Caccianiga, *Lezione 3 – I neutrini solari e da supernova*, Corso di Introduzione all'astrofisica – Parte 3, Dipartimento di Fisica "Aldo Pontremoli", Università di Milano, A. A. 2015/2016

[Cannon12] A. J. Cannon, E. C. Pickering, *Classification of 1688 southern stars by means of their spectra*, Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College; Vol. 56, Num. 5, Cambridge, Mass.: The Observatory, Pagg. 115-164, 1912

[Cardella20] G. Cardella, *et al.*, *On the ^{12}C Hoyle state gamma decay*, Nuclear Physics in Astrophysics IX (NPA-IX), Journal of Physics: Conference Series, 1668 (2020) 012004

[Carroll17] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, Cambridge University Press, 2017

[Carta01] A. Carta, M. Farina, S. Iacus, N. Recano, A. Vannini, *Le variabili cefeedi*, Astro-link, 2001

[Castellani85] V. Castellani, *Astrofisica stellare*, 1985

[CERN-Indico-15-12] Indico, *Lecture 15 – Binding Energy per Nucleon*, CERN, 2012

[Chandrasekhar31] S. Chandrasekhar, *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*, The Astrophysical Journal, Vol. 74, Num. 81, Pagg. 115-116, 1931

[Cincilla99] G. Cincilla, *Reazioni nucleari nelle stelle*, Liceo Scientifico "Città di Piero", 1999

[Co12] G. Co', *Note di astrofisica nucleare*, Dip. di Mat. e Fis. "E. De Giorgi", 2012

[CODATA18-Wien] CODATA, *Wien wavelength displacement law constant*, NIST, 2018

- [Cugno10] G. Cugno, G. Ciocca, *Osservazioni di stelle variabili della costellazione Camelopardalus*, Liceo cantonale di Lugano – Sede 2, Lavoro di maturità in Fisica, 2010
- [Demtröder08] W. Demtröder, *Laser Spectroscopy – Vol. 1: Basic Principles – 4th Edition*, Springer, 2008
- [Emerson96] D. Emerson, *Interpreting Astronomical Spectra*, Wiley & Sons, 1996
- [Favoino20] M. Favoino, *Principali reazioni termonucleari nelle stelle*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2019/2020
- [Fiorini07] E. Fiorini, *Neutrini Solari*, Treccani – Enciclopedia della Scienza e della Tecnica, 2007
- [Foglio13] A. Foglio, *Produzione di nuclei lontani dalla stabilità con fasci radioattivi veloci*, Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”, Università di Padova, A. A. 2013/2014
- [Forusova18] M. Forusova, *et al.*, *Chemical abundances in closed-box, open-box and infall models; multi-component treatment*, 2018
- [Gaetani19] U. Gaetani, *Ecco come rallenta una pulsar*, La macchina del tempo – Cronache dallo spazio e dal tempo, 2019
- [Gavarente19] M. Gavarente, *Meccanismi di trasporto dell’energia in astrofisica*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2015/2016
- [Giammaria14] T. Giammaria, *Decadimento del ^{12}C eccitato in reazioni $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$: Stato di Hoyle*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2013/2014
- [Giardino15] S. Giardino, *Righe spettrali: formazione, shift, allargamento*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2015/2016
- [Gotti15] L. Gotti, *Meccanismi di produzione di energia in astrofisica*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2015/2016
- [Hayashi61] C. Hayashi, R. Hoshi, *Outer Envelope of Giant Stars with Surface Convection Zone*, Publications of the Astronomical Society of Japan, Vol. 13, Pagg. 442-449, 1961
- [Helstrom20] S. Helstrom, *Neutron Star Structure and Equation of State*, University of Chicago, 2020
- [Jaffe06] R. J. Jaffe, *Degenerate Fermion Systems – Lecture Notes – Quantum Theory 2*, Massachusetts Institute of Technology, 2006
- [Johnson53] H. L. Johnson, W. W. Morgan, *Foundamental stellar photometry for standards of spectral type on the revised system of the Yerkes spectral atlas*, The Astrophysical Journal, Vol. 117, Num. 3, Pagg. 313-352, 1953
- [Kaminer16] I. Kaminer, *et al.*, *Quantum Čerenkov Radiation: Spectral Cutoffs and the Role of Spin and Orbital Angular Momentum*, Physical Review, Vol. 10, Num. 6, 01006, Pagg. 1-11, 2016
- [Karttunen06] H. Karttunen, *et al.*, *Fundamental Astronomy – 5th Edition*, Springer, 2006

[Keller08] S. C. Keller, *Cepheis Mass Loss and the Pulsation-Evolutionary Mass Discrepancy*, 2008

[Livio89] M. Livio, *et al.*, *The anthropic significance of the existence of an excited state of ^{12}C* , *Nature*, Vol. 340, Pagg. 281-284, 1989

[Magrini18] L. Magrini, *Spellar Spectroscopy 2 – Determination of stellar Parameters and Abundances*, Lezione 7 – Fisica delle Galassie – Capitoli 8-9 Carroll & Ostlie, For beural network in astronomy: Leung & Bovy (2018)

[Majorana01] 2001: *L'esperimento SNO risolve in modo definitivo il problema dei neutrini solari – L'oscillazione dei neutrini – Skylab: una finestra sul cosmo*, Liceo Majorana, 2001

[Melchiorri12-27] A. Melchiorri, *Corso di Astronomia – Lezione 27*, G31 Experimental Cosmology Group, Dipartimento di Fisica, Università di Roma, A. A. 2012/2013

[Melchiorri14-10] A. Melchiorri, *Corso di Astronomia – Lezione 10*, G31 Experimental Cosmology Group, Dipartimento di Fisica, Università di Roma, A. A. 2014/2015

[Mennella14] A. Mennella, *Corso di introduzione all'astrofisica – Lezione 5 – La misura delle distanze in astrofisica*, Dipartimento di Fisica, Università di Milano, A. A. 2013/2014

[Mete13] F. Mete, *Invito alla spettroscopia – Tutorial di spettroscopia amatoriale a bassa risoluzione*, Roma, 2013

[Mete16] F. Mete, *Cenni di Spettroscopia astronomica Amatoriale*, Roma, 2016

[Michel19] A. Michel, F. Röpke, C. Dullemond, *Modeling of Silicon Burning during late stages of Stellar Evolution*, Facoltà di Scienze Naturali di Matematica, Università Ruberto-Carola, Heidelberg, Germania, 2019

[Monaco15] P. Monaco, *Introduzione all'astrofisica*, Dipartimento di Fisica, Università di Trieste, A. A. 2015/2016

[Morel10] P. Morel, *et al.*, *Implications of a new triple- α nuclear reaction rate – Consequences for Cepheids*, *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 520, Num 41, 2010

[Morgan43] William Wilson Morgan, Philip Childs Keenan, Edith Kellman, *An atlas of stellar spectra, with an outline of spectral classification*, Chicago, The University of Chicago press, 1943

[OCRA20] OCRA, *In laboratorio con noi*, INFN, 2020

[Onorato17] S. Onorato, *Meccanismi di Trasporto dell'Energia in Astrofisica*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2017/2018

[Oppenheimer39] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *On Massive Neutron Cores*, *Physical Review*, Vol. 55, Pagg. 374-381, 1939

[Oughton10] J. F. Oughton, *Fusion Within Stars*, University of South Wales, 2010

[Pesaresi15] M. Pesaresi, *Classificazione spettrale delle stelle*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, A. A. 2015/2016

[Pickering90] Edward Charles Pickering, *The Draper Catalogue of stellar spectra photographed with the 8-inch Bache telescope as a part of the Henry Draper memorial*, Annals of Harvard College Observatory, Vol. 17, Pagg. 1-338, 1990

[Previtali20] Ezio Previtali, Marco Pallavicini, Barbara Caccianiga, Modera Matteo Massicci, *PERCHÉ LE STELLE BRILLANO? L'ultima scoperta di Borexino*, INFN, 2020

[Prevost01] P. Prevost, et al, *The Laws of Radiation and Absorption: Memoirs by Prévost, Stewart, Kirchhoff, and Kirchhoff and Bunsen*, American Book Company, 1901

[Richmond11] M. Richmond, *Classification of stellar spectra*, Physics 301, University Astronomy, Free Software Foundation, Inc., Boston, USA, 2011

[Rolfs88] C. E. Rolfs, W. S. Rodney, *Cauldrons in the cosmos*, University of Chicago press, Chicago, 1988

[Rybicki79] G. B. Rybicki, A. P. Lightman, *Radiative Process in Astrophysics*, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 1979

[SAO10] Swinburne Astronomy Online, *Pulsating Stars: Stars that Breathe*, 2010

[Schwarzschild75] M. Schwarzschild, *The Study of Stellar Structure – Theoretical Principles in Astrophysics and Relativity*, University of Chicago Press, Pagg. 1-14, 1975

[Secchi66] A. Secchi, *Analyse spectrale de la lumière de quelques étoiles, et nouvelles observations sur les taches solaires*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Vol. 63, Pagg. 364-368, 1866

[Seligman06] C. Seligman, *Variable Stars – Cepheid Variables*, Long Beach City College, 2006

[Sergiastro06] Sergiastro, *Le polveri nel mezzo interstellare*, 2006

[Silbar03] R. R. Silbar, S. Reddy, *Neutron Stars for Undergraduates*, American Journal of Physics, Vol. 72, Num. 7, Pagg. 892-905, 2004

[Springer17] Springer, *Appendix A – The Kirchhoff-Planck Radiation Law*, 2017

[Spurio16] M. Spurio, *Neutrini in profondità: Vita, morte e miracoli dei neutrini rivelati sottoterra, sotto i ghiacci o in fondo al mare*, Giornale di Fisica, Vol. 57, Num. 3, 2016

[Tolman39] R. Tolman, *Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid*, Physical Review, Vol. 55, Pagg. 364-373, 1939

[Treccani11-C] Enciclopedia Treccani, *Convezione*, 2011

[Treccani11-P] Enciclopedia Treccani, *Pulsar*, 2011

[Wilson21] R. M. Wilson, *Borexino experiment detects neutrinos from the Sun's carbon-nitrogen-oxygen cycle*, Physics Today, Vol. 74, Num. 2, Pagg. 12-14, 2021