UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Diffusione elastica di nucleoni da nuclei

Relatore:
Ch.mo Prof. Giampaolo Co'

Candidata:
Roberta Armillis

Correlatore:
Dott. Marco Martini

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005

Indice

Introduzione

Gli esperimenti di diffusione hanno grande importanza nell'ambito della fisica nucleare. Essi consentono di acquisire informazioni sul proiettile, o sonda, sul bersaglio e sul tipo di interazione esistente tra le due particelle.

Ci occupiamo di diffusione elastica di nucleoni su bersagli composti da nuclei leggeri, medio-pesanti e pesanti, trascurando lo spin di tutte le particelle coinvolte nel processo.

L'interazione forte è rappresentata da un potenziale di Woods-Saxon e, nel caso di protoni incidenti, si tiene presente anche il contributo dovuto all'interazione coulombiana.

Lavoriamo in un range energetico tale da non richiedere una trattazione relativistica del problema; risolviamo pertanto l'equazione di Schrödinger che descrive il sistema nucleone-nucleo.

Per un potenziale centrale è possibile sviluppare in onde parziali la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger. Ciascuna onda corrisponde ad un dato valore del numero quantico orbitale l. La sezione d'urto del processo in esame è calcolata utilizzando gli sfasamenti del comportamento asintotico di ogni onda parziale.

Il lavoro di tesi è consistito nello sviluppo di un codice numerico in linguaggio FORTRAN che permette di calcolare la sezione d'urto secondo lo schema presentato. I risultati ottenuti per i nuclei di ^{16}O, ^{40}Ca, ^{208}Pb sono presentati in questa relazione.

Capitolo 1

Equazione del moto

1.1 Soluzione dell'equazione di Schrödinger

L'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo descrive il moto di una particella di massa m in un potenziale $V(\mathbf{r})$

$$H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

con

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \tag{1.2}$$

dove abbiamo indicato con ∇^2 l'operatore laplaciano e con m la massa della particella.
In un problema di diffusione l'energia E può assumere qualsiasi valore positivo.

Considerando la diffusione tra due particelle puntiformi, l'equazione di Schrödinger si presenta come in (1.1) e in (1.2); in questo caso m indica la massa ridotta del sistema ed $\mathbf{r}$ la distanza tra le due particelle.

L'equazione (1.1) è risolubile mediante tecniche numeriche. Limitandosi a considerare un potenziale centrale, cioè tale che $V(\mathbf{r}) = V(r)$ si ottiene un hamiltoniano a simmetria sferica. Adottando un sistema di coordinate polari sferiche $(r, \vartheta\,\varphi)$ è possibile separare le variabili nell'equazione di Schrödinger ottenendo due equazioni differenziali, una per il moto radiale ed una per il moto angolare.

L'espressione di H in coordinate polari sferiche è:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{l}^2}{2mr^2} + V(r) \tag{1.3}$$

Le espressioni esplicite degli operatori differenziali p_r e $\mathbf{l}^2$ sono [Mes99],[Coh77]:

$$p_r \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r \tag{1.4}$$

$$\mathbf{l}^2 \equiv -\frac{\hbar^2}{\sin\vartheta^2}\left[\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{1.5}$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale per il moto angolare sono le armoniche sferiche $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$. A ciascuna coppia di numeri quantici l ed m corrisponde una singola armonica sferica. La soluzione dell'equazione di Schrödinger sarà del tipo:

$$\psi_{lm}(r,\vartheta,\varphi) = R_l(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{1.6}$$

con $R(r)$ soluzione dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine per la parte radiale

$$\left[\frac{p_r^2}{2m} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) - E\right]R_l(r) = 0 \tag{1.7}$$

con

$$p_r^2 \equiv -\hbar^2\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r$$

Ponendo $y_l(r) = rR_l(r)$ l'eq. (1.7) diventa:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + l(l+1)\frac{\hbar^2}{2mr^2} + V(r) - E\right]y_l(r) = 0 \tag{1.8}$$

con la condizione di regolarità nell'origine $y_l(0) = 0$.

1.2 Potenziale costante

1.2.1 Base di autostati di H associata alle onde sferiche

Nel caso di potenziale costante, $V(r) = V_0 = cost$, possiamo riscrivere l'equazione radiale (1.8) come

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\right] y_l = 0 \tag{1.9}$$

Questo è ottenuto moltiplicando per $-\frac{2m}{\hbar^2 k^2}$ l'eq. (1.8) e definendo k e ρ come:

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$
$$\rho = kr$$

Nel caso in questione è sempre verificato che $V_0 < E$ in modo che k sia sempre reale.

La soluzione generale della (1.9) è data dalla combinazione lineare di funzioni la cui espressione analitica è nota: le funzioni di Bessel sferiche $j_l(kr)$ (regolari nell'origine) e le funzioni di Neumann $n_l(kr)$ (irregolari nell'origine con un polo di ordine $l + 1$) [Mes99]. Il comportamento asintotico di queste funzioni è:

$$j_l(kr) \rightarrow \frac{\sin(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} \qquad \text{per} \quad kr \rightarrow \infty \tag{1.10}$$

$$n_l(kr) \rightarrow -\frac{\cos(kr - \frac{l\pi}{2})}{kr} \qquad \text{per} \quad kr \rightarrow \infty \tag{1.11}$$

1.2.2 Base di autostati di H associata alle onde piane

L'onda piana $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ che rappresenta una particella libera con impulso $\hbar\mathbf{k}$ e con energia $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ è una soluzione dell'equazione di Schrödinger con potenziale nullo o costante.

È possibile sviluppare l'onda piana $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ sulla base delle onde sferiche:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta_k, \varphi_k) \tag{1.12}$$

dove abbiamo indicato con ϑ e φ le coordinate angolari di $\mathbf{r}$ e con ϑ_k e φ_k quelle di $\mathbf{k}$. Orientando l'asse z nella direzione individuata da $\mathbf{k}$ si ottiene

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = ikr \cos\vartheta \tag{1.13}$$

Sostituendo la (1.13) nella (1.12) si nota l'indipendenza del primo membro della (1.12) dalla variabile angolare φ. Ne consegue l'indipendenza del secondo membro e per le proprietà delle armoniche sferiche otteniamo:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\vartheta) \tag{1.14}$$

dove abbiamo indicato con $P_l(\cos\vartheta)$ il polinomio di Legendre di ordine l.

1.3 Potenziale centrale: metodo degli sfasamenti

Gli autovalori dell'equazione di Schrödinger sono degeneri nel numero quantico m legato alla proiezione del momento angolare l sull'asse z. Questo siginifica che questi autovalori sono indipendenti da φ. Senza perdere in generalità possiamo sviluppare la funzione d'onda $\psi(r,\vartheta)$ in serie di polinomi di Legendre, ottenendo una somma di onde parziali, ciascuna corrispondente ad un dato valore di l.
Questa espressione verrà usata nel prossimo capitolo.

$$\psi(r,\vartheta) = \sum_l \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos\vartheta) \tag{1.15}$$

Definiamo un potenziale a corto raggio $V(r)$ che è nullo quando la distanza tra le due particelle supera un certo valore, sia R_d. Per $r > R_d$ l'equazione di Schrödinger è identica all'equazione di Schrödinger per la particella libera. Quindi, asintoticamente la soluzione dell'eq. (1.8) per un potenziale a corto raggio si comporta come un'onda piana:

$$y_l(r) \sim a_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) = \frac{a_l'}{k}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \qquad \text{per} \quad r \to \infty \tag{1.16}$$

Il comportamento asintotico della funzione radiale è analogo a quello delle funzioni di Bessel a meno di un fattore δ_l, chiamato *sfasamento*.
Lo *sfasamento* δ_l indica la differenza tra il comportamento asintotico della funzione d'onda che rappresenta una particella libera e quella che rappresenta una particella che ha sperimentato un potenziale a corto raggio.

Capitolo 2

Diffusione elastica

2.1 Generalità sul processo di diffusione

Nei processi di diffusione qui analizzati valgono le seguenti ipotesi:

- il numero P di particelle per unità di volume nel flusso incidente è sufficientemente piccolo da poter trascurare la mutua interazione tra le particelle del fascio;
- la distanza d fra i centri diffusori è sufficientemente grande in modo che la particella possa risolvere due centri vicini e si possano trascurare fenomeni di *diffusione coerente*;
- il bersaglio è sufficientemente sottile da permettere di trascurare fenomeni di *diffusione multipla*.

In queste condizioni la quantità $\sigma(\Omega)$, detta *sezione d'urto differenziale*, è definita come la costante di proporzionalità che lega il numero $\mathscr{N}$ di particelle diffuse per unità di tempo nell'angolo solido $d\Omega$ al prodotto del numero N di centri diffusori per il flusso incidente J

$$\mathscr{N} = JN\sigma(\Omega)d\Omega$$

2.2 Relazione tra l'ampiezza di diffusione e la sezione d'urto

In un processo di diffusione elastica la forma asintotica della funzione d'onda può essere espressa come [Mes99]:

$$\psi(r,\vartheta) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{2.1}$$

La funzione $f(\vartheta)$ è detta *ampiezza di diffusione*. Si può dimostrare che l'ampiezza di diffusione è legata alla sezione d'urto differenziale dalla seguente relazione [Mes99]:

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \mid f(\vartheta) \mid^2 \tag{2.2}$$

Sviluppando la funzione $f(\vartheta)$ sulla base dei polinomi di Legendre otteniamo:

$$f(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos\vartheta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)b_l P_l(\cos\vartheta) \tag{2.3}$$

Secondo gli sviluppi di $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ e di $f(\vartheta)$ riportati in (1.14) e in (2.3), il secondo membro della (2.1) può essere scritto come:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(i^l j_l(kr) + \frac{b_l}{2ik}\frac{e^{ikr}}{r}\right)P_l(\cos\vartheta) \tag{2.4}$$

Utilizzando la (1.10) segue che il comportamento asintotico assume l'espressione:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} \to \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(i^l \frac{\sin(kr-\frac{l\pi}{2})}{kr} + \frac{b_l}{2ik}\frac{e^{ikr}}{r}\right)P_l(\cos\vartheta) \tag{2.5}$$

Poiché

$$\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left((-i)^l e^{ikr} - (i)^l e^{-ikr}\right) \tag{2.6}$$

la (2.5) diventa:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} \to \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[e^{ikr}(1+b_l) - (-1)^l e^{-ikr}\right]P_l(\cos\vartheta) \tag{2.7}$$

Tenendo conto della (1.16), la forma asintotica della (1.15) è

$$\psi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y_l(r)}{r} P_l(\cos\vartheta) \to \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} a'_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\vartheta) \tag{2.8}$$

Sviluppando la (2.8) come abbiamo fatto per la (2.6) otteniamo:

$$\psi(r,\vartheta) \to \frac{1}{2ikr}\left((-i)^l e^{ikr} e^{i\delta_l} - (i)^l e^{ikr} e^{-i\delta_l}\right) \tag{2.9}$$

Imponendo l'uguaglianza della (2.5) e della (2.8) si ottengono le espressioni dei coefficienti a'_l e b_l

$$a'_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l} \tag{2.10}$$

$$b_l = e^{2i\delta_l} - 1 \tag{2.11}$$

Sostituendo la (2.11) nella (2.3) si ottiene:

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos\vartheta) \tag{2.12}$$

da cui, per la (2.2), otteniamo per la sezione d'urto differenziale l'espressione:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos\vartheta) \right|^2 \tag{2.13}$$

La sezione d'urto totale si ottiene dalla (2.13) integrando su tutti gli angoli di diffusione:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{k^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos\vartheta) \right|^2 \tag{2.14}$$

Per la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \tag{2.15}$$

la (2.14) diventa

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta'_l)} \sin(\delta_l) \sin(\delta_{l'}) \frac{\delta_{ll'}}{2l+1} = \tag{2.16}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l) \tag{2.17}$$

Capitolo 3

Diffusione elastica in presenza di un potenziale coulombiano

3.1 Metodo degli sfasamenti

Un caso particolare di potenziale centrale è quello coulombiano. Le tecniche di sviluppo in onde parziali sono applicabili come descritto nel cap. 1 fino all'eq. (1.8). A questo punto è necessario sostituire

$$V(r) \Rightarrow V_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \tag{3.1}$$

dove Z_1 e Z_2 sono il numero di protoni di proiettile e bersaglio ed e è la carica elementare. Moltiplicando per $-\frac{2m}{\hbar^2}$, l'equazione differenziale (1.8) può essere scritta come:

$$\frac{d^2 y_l}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] y_l = 0 \tag{3.2}$$

con

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \gamma = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \qquad v = \frac{\hbar k}{m}$$

Le soluzioni della (3.2) sono particolari funzioni ipergeometriche confluenti, dette *funzioni coulombiane sferiche.*

Le funzioni coulombiane regolari nell'origine si indicano con $F_l(\gamma; kr)$; quelle irregolari con $G_l(\gamma; kr)$. Nel limite $\gamma \to 0$ F_l corrisponde a j_l e G_l ad n_l.

Le forme asintotiche delle funzioni F_l e G_l sono:

$$F_l \to \sin\left(kr - \gamma \ln 2(kr) - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) \qquad \text{per} \quad kr \to \infty \tag{3.3}$$

$$G_l \to \cos\left(kr - \gamma \ln 2(kr) - \frac{l\pi}{2} + \sigma_l\right) \qquad \text{per} \quad kr \to \infty \tag{3.4}$$

Osserviamo che la forma asintotica delle funzioni d'onda in presenza di potenziale coulombiano differisce dalla funzione d'onda di particella libera per un termine $\gamma \ln 2(kr)$ (che dipende dalle cariche Z_1 e Z_2 delle due particelle e dalla loro distanza r) e per un termine σ_l:

$$\sigma_l = \arg \Gamma(l + 1 + i\gamma)$$

3.2 Potenziale coulombiano modificato da un potenziale a corto raggio

Analizziamo cosa avviene quando al potenziale coulombiano V_c, a lungo raggio, si aggiunge un potenziale a corto raggio, come quello nucleare.

$$V(r) = V_c(r) + V'(r)$$

Sviluppando $\psi(r, \vartheta)$ sulla base dei polinomi di Legendre si ottiene:

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) i^l R_l(r) P_l(\cos \vartheta) \tag{3.5}$$

con $R_l(r)$ soluzione dell'equazione differenziale radiale:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} - \frac{2m}{\hbar^2} V' - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R_l(r) = 0 \tag{3.6}$$

Si può dimostrare che la funzione ψ assume la forma asintotica [Mes99]:

$$\psi = \psi_i + \psi_s$$

con

$$\psi_i \to e^{i[kz + \gamma \ln k(r-z)]} \left[1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \dots\right] \qquad \text{per} \quad | r - z | \to \infty \tag{3.7}$$

$$\psi_s \to \frac{1}{r}\exp[i(kr - \gamma \ln 2kr)]f(\vartheta) \qquad \text{per} \quad r \to \infty \tag{3.8}$$

Analogamente alla (2.1) ψ_i rappresenta l'onda incidente e ψ_s l'onda diffusa. L'ampiezza di diffusione $f(\vartheta)$ è data da:

$$f(\vartheta) = f_c(\vartheta) + f'(\vartheta) \tag{3.9}$$

dove

$$f_c(\vartheta) = -\frac{\gamma}{2k\sin^2(\frac{\vartheta}{2})}\exp\left[-i\gamma \ln\left(\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) + 2i\sigma_0\right] \tag{3.10}$$

$$f'(\vartheta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{2i\sigma_l}(e^{2i\delta_l} - 1)P_l(\cos\vartheta) \tag{3.11}$$

Le espressioni (3.10) e (3.11) sono quelle che abbiamo utilizzato per il calcolo numerico delle sezioni d'urto.
Dalla (2.2) otteniamo per la sezione d'urto differenziale l'espressione:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 = |f_c(\vartheta) + f'(\vartheta)|^2 = |f_c(\vartheta)|^2 + 2Re f_c^* f' + |f'(\vartheta)|^2 \tag{3.12}$$

Il primo termine della (3.12) rappresenta la sezione d'urto per la diffusione puramente coulombiana:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_c = |f_c(\vartheta)|^2 = \frac{\gamma}{4k^2\sin^4(\frac{\vartheta}{2})} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \sin^{-4}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{3.13}$$

La (3.13) coincide con la formula di Rutherford ottenuta con considerazioni di tipo classico. Il terzo termine della (3.12) è determinato dal potenziale a corto raggio $V'(r)$. L'eq. (3.12) contiene anche termini di interferenza tra le due ampiezze di diffusione.

Capitolo 4

Codice numerico

In questo capitolo descriviamo brevemente le caratteristiche più rilevanti del codice numerico che abbiamo costruito per il calcolo delle sezioni d'urto.
L'idea di base è quella di un processo di diffusione su un bersaglio di massa infinita. Il sistema di riferimento, del laboratorio, coincide con il centro del nucleo bersaglio.

4.1 Input

L'input del programma è costituito da:

- parametri numerici: valore massimo del raggio di integrazione in r (R_{max}), numero di punti (NPOINT) in cui suddividere l'intervallo di integrazione, numero di punti (NTH) in cui suddividere l'intervallo $[0, \pi]$ (range dell' angolo di diffusione ϑ), numero massimo (LSUM) di onde parziali da sommare;

- parametri del processo in esame: energia del nucleone incidente (ENRG) e tipo di nucleone ($n \rightarrow NUCL = 0$, $p \rightarrow NUCL = 1$);

- parametri del nucleo bersaglio (Z=NUMPRO ed N=NUMNEU);

- parametri del potenziale di Woods-Saxon (V_0, R_0, a) e del potenziale coulombiano (distribuzione puntiforme $\rightarrow$ $IDENS = 0$, distribuzione uniforme $\rightarrow IDENS = 1$, distribuzione di Fermi$\rightarrow IDENS = 2$);

4.2 Algoritmi

Dividendo l'intervallo $[0, R_{max}]$ in $NPOINT$ punti e quello $[0, \pi]$ in NTH punti si ottengono due griglie di punti equispaziati da dr e $d\vartheta$ in cui vengono calcolati i valori di tutte le funzioni.
Il tipo di nucleone coinvolto nella diffusione comporta una scelta tra un potenziale puramente nucleare (per il neutrone) ed un potenziale nucleare con contributo coulombiano (per il protone) a seconda del valore assunto da γ.

$$n \rightarrow \gamma = 0 \qquad p \rightarrow \gamma = \frac{Ze^2}{\hbar v}$$

L'equazione radiale (1.8) è riscritta nella forma

$$u''(r) = w(r)u(r) \tag{4.1}$$

con

$$w(r) = \frac{2m}{\hbar^2}(V(r) - E) + \frac{l(l+1)}{r^2} \tag{4.2}$$

ed è risolta per ogni valore di l mediante l'algoritmo di Numerov [Koo90] secondo la formula iterativa a 3 punti:

$$u_{i+1} = \frac{2u_i - u_{i-1} + (\frac{dr^2}{12})(10w_iu_i + w_{i-1}u_{i-1})}{1 - (\frac{dr^2}{12})w_{i+1}} \tag{4.3}$$

dove abbiamo indicato $u_i = u(r_i)$.
Chiamiamo b la distanza dove le soluzioni dell'eq. (4.1) raggiungono la loro espressione asintotica. Nel nostro caso abbiamo posto $R_{max} = b$.

Imponiamo l'uguaglianza della funzione u_i e della soluzione analitica di particella libera nell'ultimo ($r = b$) e nel penultimo punto ($r = b - dr$) dell'intervallo $[0, b]$.

$$u_l(b) = a_l \sin\left(kb - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) = a_l\left[\sin\left(kb - \frac{l\pi}{2}\right)\cos(\delta_l) + \cos\left(kb - \frac{l\pi}{2}\right)\sin(\delta_l)\right] \tag{4.4}$$

e date le espressioni asintotiche (1.10) e (1.11)

$$u_l(b) = a_l kb[\cos(\delta_l) j_l(kb) - \sin(\delta_l) n_l(kb)] \tag{4.5}$$

Per $r = b - dr$ ci troviamo sempre nella situazione asintotica, quindi:

$$u_l(b - dr) = a_l k(b - dr)[\cos(\delta_l) j_l(k(b - dr)) - \sin(\delta_l) n_l(k(b - dr))] \tag{4.6}$$

Risolvendo il sistema composto dalla (4.5) e dalla (4.6) otteniamo l'espressione dello sfasamento δ_l [Sch87]:

$$\tan(\delta_l) = \frac{(b - dr) j_l(k(b - dr)) u_l(b) - b j_l(kb) u_l(b - dr)}{(b - dr) n_l(k(b - dr)) u_l(b) - b n_l(kb) u_l(b - dr)} \tag{4.7}$$

L'espressione (4.7) è stata utilizzata nel calcolo numerico in presenza del solo potenziale nucleare. Come già visto nel cap. 3 è possibile generalizzare la (4.7) al caso di potenziale coulombiano sostituendo:

$$\begin{aligned} j_l(k(b - dr)) &\Rightarrow \frac{F_l(k(b - dr))}{k(b - dr)} & \qquad j_l(kb) &\Rightarrow \frac{F_l(kb)}{kb} \\ n_l(k(b - dr)) &\Rightarrow \frac{G_l(k(b - dr))}{k(b - dr)} & \qquad n_l(kb) &\Rightarrow \frac{G_l(kb)}{kb} \end{aligned}$$

Capitolo 5

Risultati

In questo capitolo esponiamo i risultati ottenuti con il codice numerico da noi sviluppato.

5.1 Convergenza numerica

Consideriamo la diffusione di soli neutroni con diversa energia iniziale su nuclei di ^{16}O. Rappresentiamo l'interazione nucleare sonda-bersaglio mediante il potenziale di Woods-Saxon:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R_0)/a}}$$

I parametri V_0, R_0, a utilizzati nel calcolo sono [Co85]:

$$^{16}\mathrm{O} \qquad V_0 = 52.50MeV \qquad R_0 = 3.20fm \qquad a = 0.53fm$$

Scegliamo $E = 1MeV$, $E = 10MeV$, $E = 100MeV$ e in ciascun caso determiniamo il numero di onde parziali l_{max} necessario a far convergere la sezione d'urto differenziale.

La Fig. 5.1 illustra il caso di $E = 1MeV$ in scala lineare. Osserviamo il contributo costante per $l_{max} = 0$ pari a $\sim 16fm^2$, la funzione con $l_{max} = 1$ che assume valori inferiori (superiori) a quelli di $l = 0$ nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ ($[\frac{\pi}{2}, \pi]$) e infine la perfetta sovrapposizione tra le onde con $l_{max} = 2$ ed $l_{max} = 3$.

Abbiamo raggiunto la convergenza numerica sommando le prime 4 onde parziali.

La Fig. 5.2 illustra il caso di $E = 10MeV$ in scala logaritmica. Il contributo costante dell'onda s ($l_{max} = 0$) assume il valore ~ -1, l'onda con $l_{max} = 1$ è una funzione monotona decrescente, le onde con $l_{max} \geq 2$ hanno dei minimi. In particolare osserviamo due soli minimi con $l_{max} = 2$ e 3 minimi, di cui il primo molto pronunciato, per $l_{max} = 3$ ed $l_{max} = 4$. Queste ultime due si discostano lievemente una dall'altra in corrispondenza del secondo e del terzo minimo, ma è evidente l'avvenuta convergenza numerica.

Nelle Fig. 5.3, 5.4 mostriamo solo alcune somme parziali relative al caso $E = 100MeV$ rispettivamente in scala lineare e logaritmica.
Nella prima figura è evidenziato l'andamento crescente della sezione d'urto nell'intervallo $[0, 20°]$; nella seconda si analizza la convergenza per angoli $120° \leq \vartheta \leq 80°$.

Concludiamo che all'aumentare dell'energia iniziale della sonda aumenta il numero di onde parziali necessario alla convergenza: $l_{max} = 3$ per $E = 1MeV$, $l_{max} = 4$ per $E = 10MeV$, $l_{max} = 15$ per $E = 100MeV$.
Abbiamo osservato che in presenza di sonde cariche e in processi di diffusione su ^{208}Pb è necessario considerare valori di l_{max} anche pari a 25.

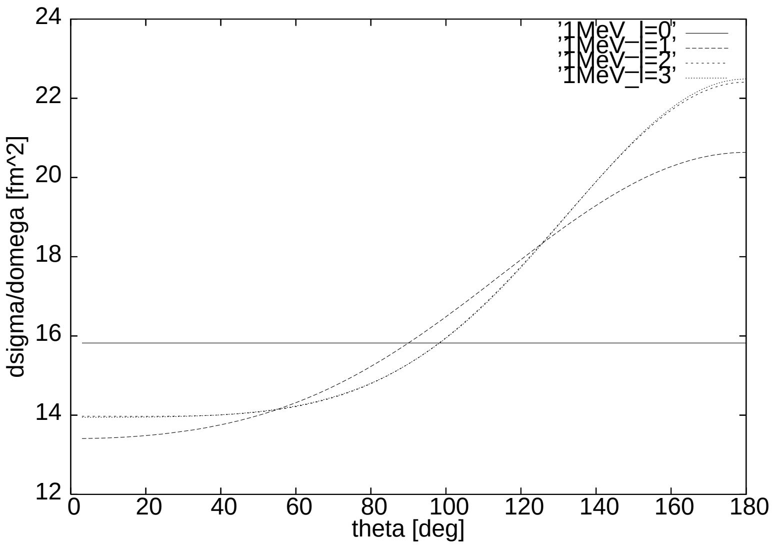

Figura 5.1: Sezione d'urto differenziale per un neutrone con $E = 1MeV$ su ^{16}O. Sono rappresentati i contributi delle onde parziali fino ad $l_{max} = 0$ (linea continua), $l_{max} = 1$ (linea a tratti), $l_{max} = 2$ (linea a tratti brevi), $l_{max} = 3$ (linea a punti).

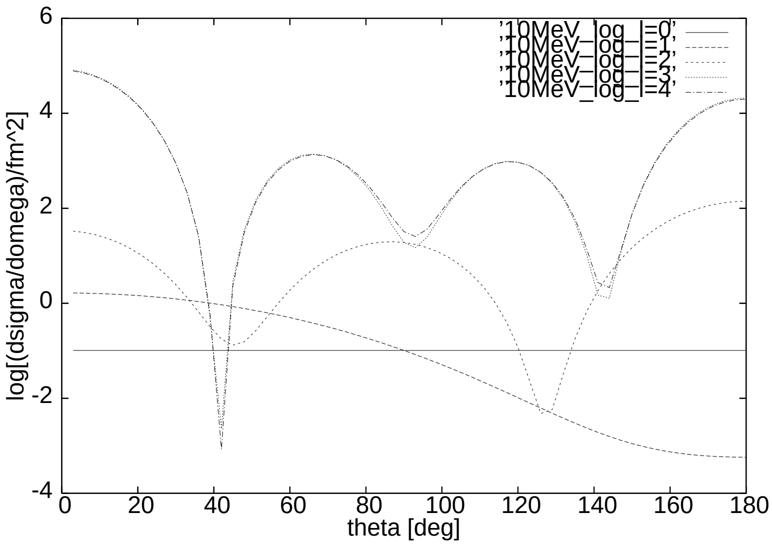

Figura 5.2: Sezione d'urto differenziale in scala logaritmica per un neutrone con $E = 10MeV$ su ^{16}O. Sono rappresentate come in Fig. 5.1 le somme delle onde parziali fino ad $l_{max} = 3$ e il contributo con $l_{max} = 4$ (linea tratto-punto).

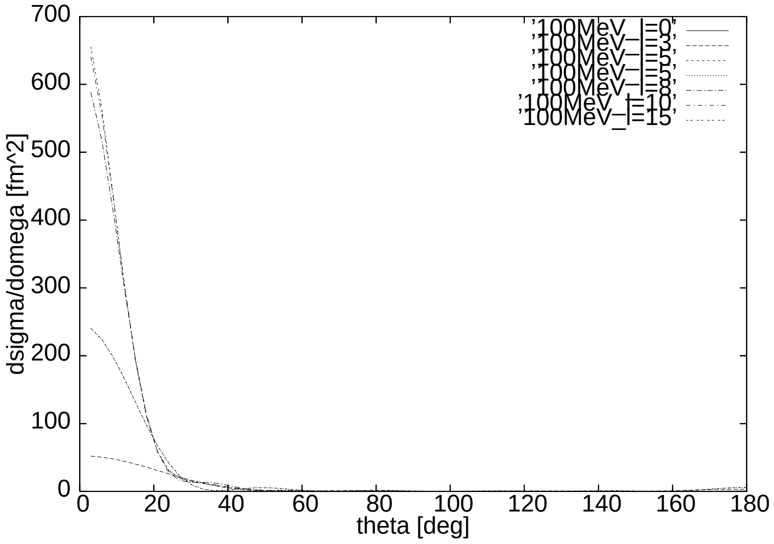

Figura 5.3: Sezione d'urto differenziale per un neutrone con $E = 100MeV$ su ^{16}O. Sono stati disegnati soltanto i contributi con $l_{max} = 0$ (linea continua), $l_{max} = 3$ (linea a tratti), $l_{max} = 5$ (linea a tratti brevi), $l_{max} = 8$ (linea a punti), $l_{max} = 10$ (linea tratto-punto), $l_{max} = 15$ (linea tratto breve-punto).

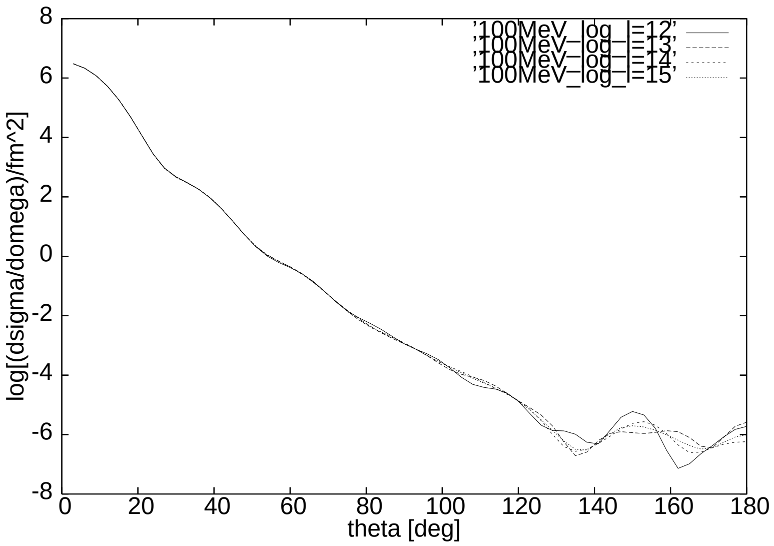

Figura 5.4: Come in Fig. 5.3 ma in scala logaritmica. Sono stati disegnati soltanto i contributi delle onde parziali con $l_{max} = 12, 13, 14, 15$. Si osserva sovrapposizione completa delle 4 onde fino a $\sim 60°$

.

5.2 Confronto di sezioni d'urto differenziali

Ci occupiamo ora della diffusione elastica di neutroni e protoni aventi energie iniziali pari a $1MeV$, $10MeV$ e $100MeV$ su nuclei di ^{16}O, ^{40}Ca e ^{208}Pb.
I valori dei parametri V_0, R_0, a per il ^{40}Ca e il ^{208}Pb sono (rispettivamente [Co88], [Rin78]):

$$^{40}\text{Ca} \qquad V_0 = 57.50MeV \qquad R_0 = 4.10fm \qquad a = 0.53fm$$

$$^{208}\text{Pb} \qquad V_0 = 60.40MeV \qquad R_0 = 7.46fm \qquad a = 0.79fm$$

Presentiamo di seguito 4 grafici per ogni nucleo: il primo grafico mostra i potenziali utilizzati; gli altri 3 grafici, relativi ad $E = 1MeV$, $E = 10MeV$, $E = 100MeV$, mostrano in scala logaritmica le sezioni d'urto differenziali.

In presenza di sonde cariche elettricamente sono stati esaminati i casi di distribuzione di carica puntiforme, uniforme, e di Fermi, per i nuclei considerati e il caso di sola interazione coulombiana tra sonda e bersaglio, trascurando l'interazione nucleare.

5.2.1 Diffusione elastica su ^{16}O

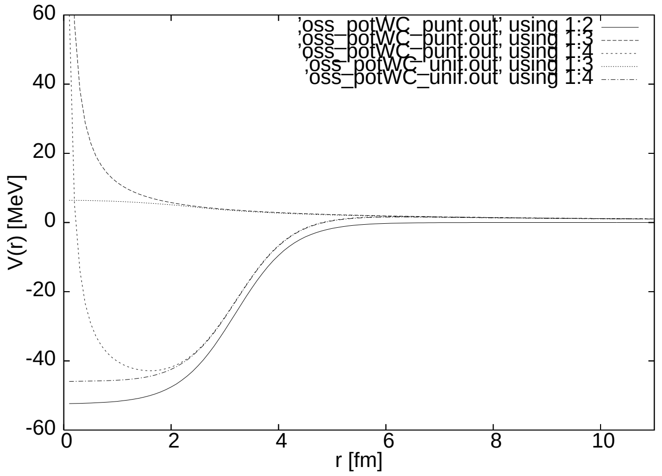

Figura 5.5: Potenziale in funzione della distanza $r(fm)$ per un nucleo di ^{16}O. Si considerano: potenziale di Woods-Saxon (linea continua), potenziale coulombiano generato da una distribuzione puntiforme (linea a tratti), la somma di questi due potenziali (linea a tratti brevi); potenziale coulombiano generato da una distribuzione uniforme (linea a punti) e la somma di quest'ultimo con il potenziale di Woods-Saxon (linea tratto-punto).

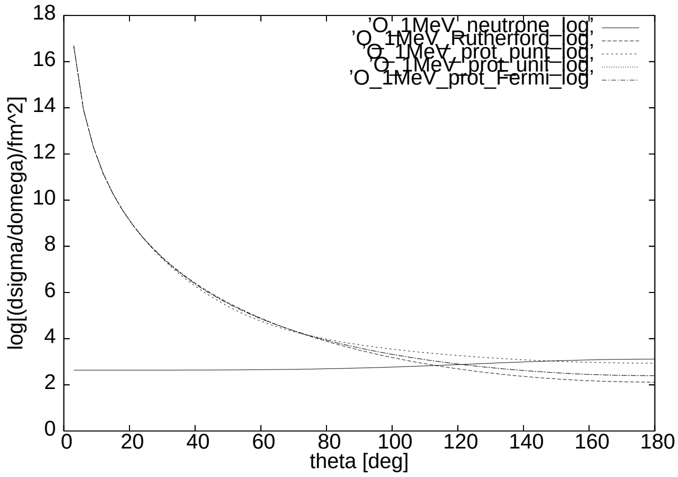

Figura 5.6: Sezione d'urto differenziale per un neutrone (linea continua) ed un protone su ^{16}O con energia iniziale pari a $1MeV$. Per il protone sono rappresentate tre diverse distribuzioni di carica del nucleo: puntiforme (linea a tratto breve), uniforme (linea a punti) e distribuzione di Fermi (linea tratto-punto); protone in assenza di interazione nucleare (linea a tratti).

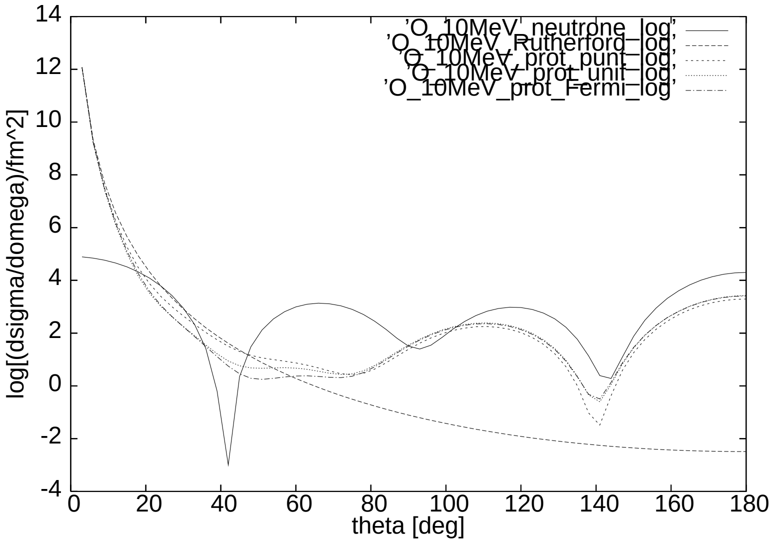

Figura 5.7: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $10 MeV$ su ^{16}O.

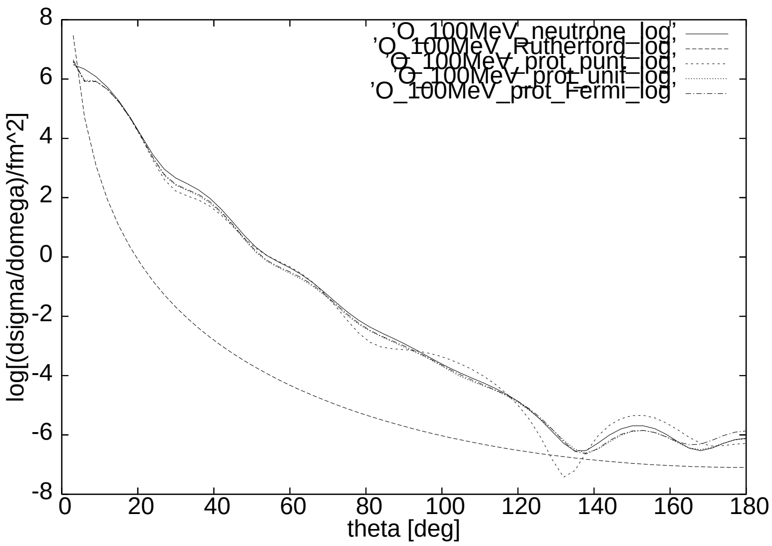

Figura 5.8: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $100 MeV$ su ^{16}O.

5.2.2 Diffusione elastica su ^{40}Ca

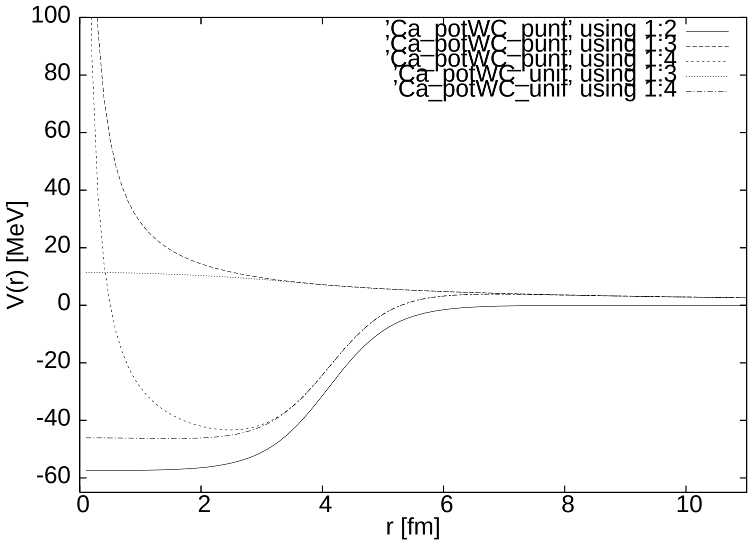

Figura 5.9: Come in Fig.5.5 potenziale in funzione della distanza $r(fm)$ per un nucleo di ^{40}Ca.

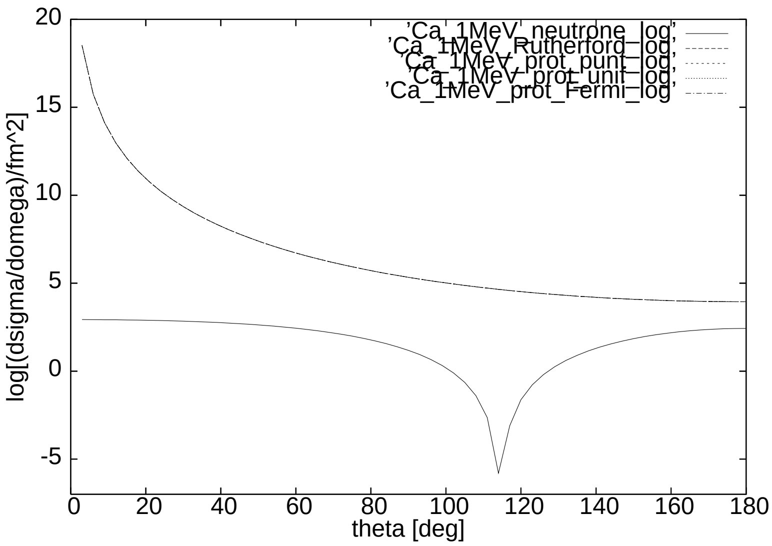

Figura 5.10: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $1MeV$ su ^{40}Ca.

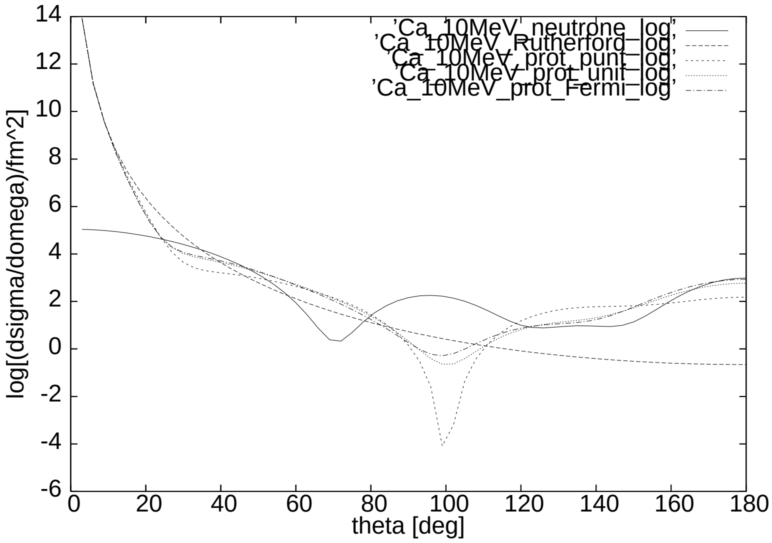

Figura 5.11: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $10MeV$ su ^{40}Ca.

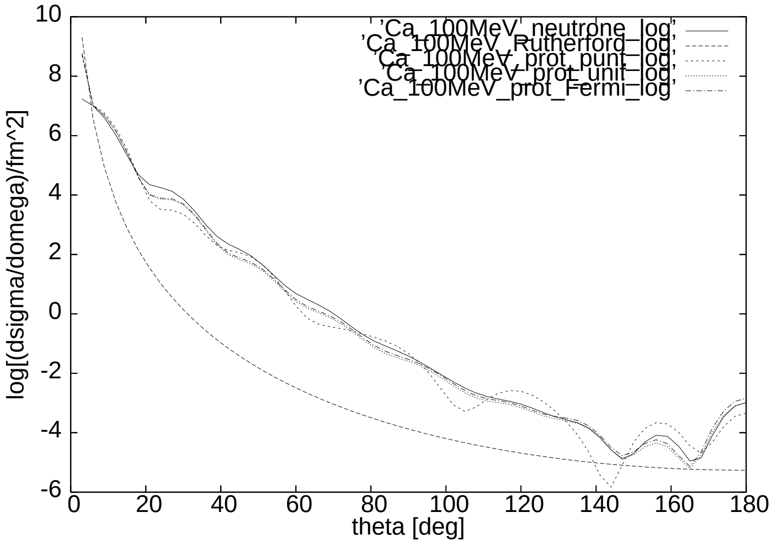

Figura 5.12: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $100MeV$ su ^{40}Ca.

5.2.3 Diffusione elastica su ^{208}Pb

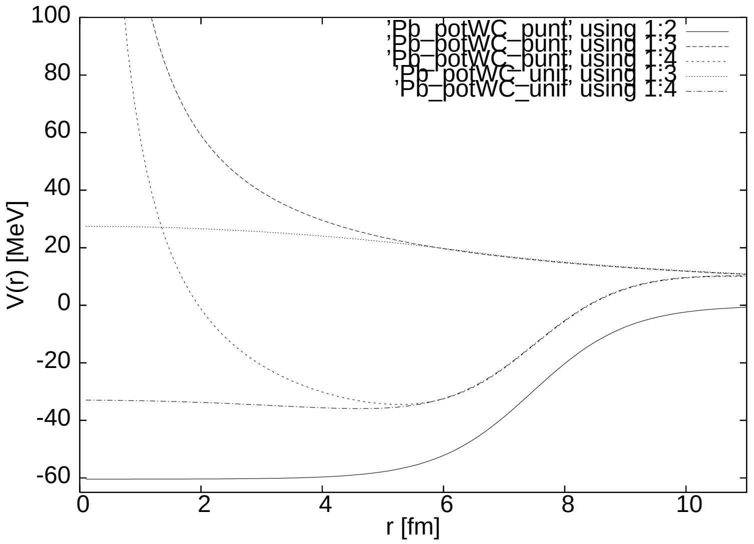

Figura 5.13: Come in Fig. 5.5 potenziale in funzione della distanza $r(fm)$ per un nucleo di ^{208}Pb.

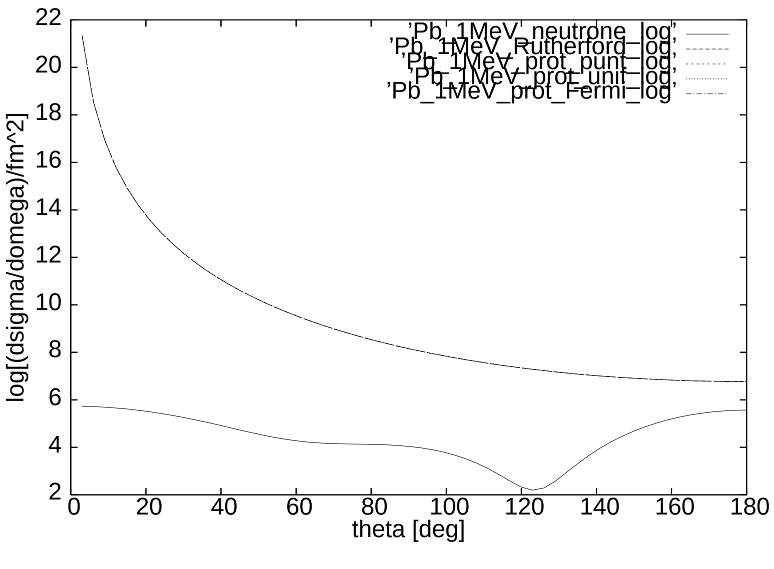

Figura 5.14: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $1 MeV$ su ^{208}Pb.

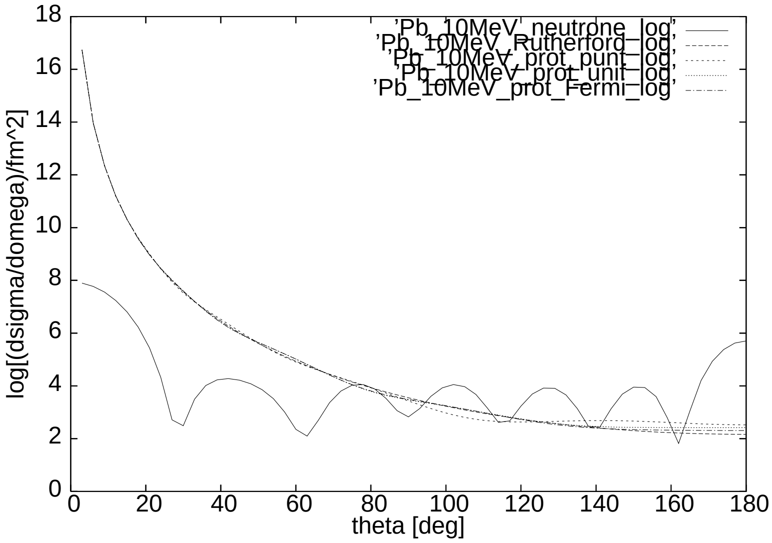

Figura 5.15: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $10 MeV$ su ^{208}Pb.

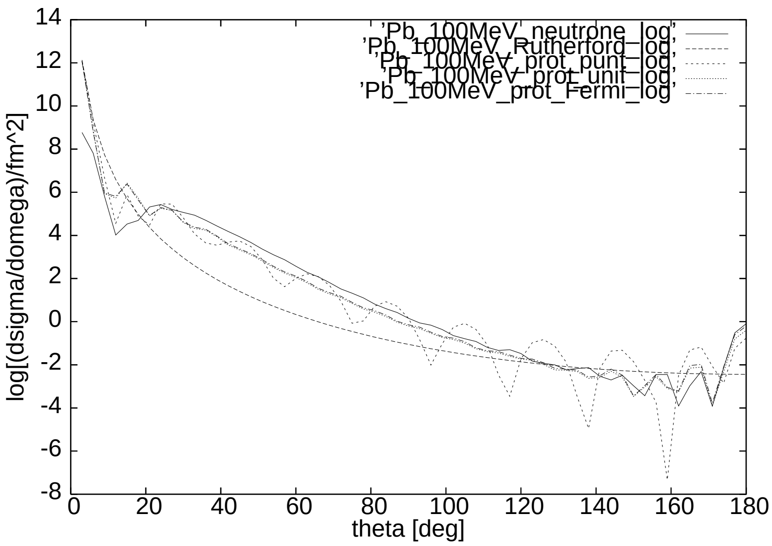

Figura 5.16: Come in Fig. 5.6 sezione d'urto differenziale per un neutrone ed un protone con energia iniziale pari a $100 MeV$ su ^{208}Pb.

Nelle Fig. 5.6, 5.10, 5.14 è rappresentata la sezione d'urto differenziale per i 3 nuclei con sonde di $E = 1MeV$. La curva relativa al neutrone indica la risposta puramente nucleare e si discosta notevolmente dalle altre. Nel caso dell' ^{16}O le curve relative al protone si sovrappongono fino a circa 80°, poi diventano distinguibili; per gli altri 2 nuclei si ha una sola risposta per il protone, indipendentemente dal tipo di distribuzione di carica ipotizzata per il nucleo.
La sovrapposizione della curva relativa al protone in assenza di interazione nucleare alle altre conferma che a basse energie domina l'interazione coulombiana sonda-bersaglio.

Le Fig. 5.8, 5.12, 5.16 sono relative ad $E = 100MeV$. In questo caso è la curva relativa alla diffusione del protone in assenza di interazione nucleare (diffusione puramente coulombiana) a discostarsi notevolmente dalle altre, mentre la risposta del neutrone è sovrapposta a quelle del protone.
Ad energie di $100MeV$ la capacità risolutiva della sonda è tale da essere sensibile all'interazione nucleare.

Ad $E = 10MeV$ con nuclei di ^{16}O e ^{40}Ca (Fig. 5.7, 5.11) la situazione è intermedia tra le due già analizzate. L'interazione coulombiana è dominante nei processi di forward scattering, cioè fino ad angoli di diffusione di circa 20°; per grandi angoli ($\gtrsim 90°$ per ^{16}O e $\gtrsim 120°$ per il ^{40}Ca) la risposta del protone ha lo stesso profilo di quella del neutrone ma è più bassa. Nella parte centrale i grafici relativi ad $E = 10MeV$ sono ricchi di strutture.

Nel caso del ^{208}Pb (Fig. 5.15) è invece l'interazione coulombiana che domina il processo di diffusione. Ciò è dovuto all'intenso campo elettromagnetico del ^{208}Pb.

5.3 Conclusioni

I risultati presentati mostrano che, aumentando l'energia del proiettile, onde parziali con momento angolare l sempre più grande diventano importanti per la descrizione del processo.

L'interazione coulombiana domina il processo di diffusione ad energie di $1MeV$. Le differenze tra sezioni d'urto ottenute ipotizzando la sorgente del campo elettrostatico diffusa o puntiforme sono apprezzabili. Non si notano rilevanti differenze tra le due distribuzioni di carica da noi utilizzate: sfera uniforme e distribuzione di Fermi.

Per protoni di $10MeV$ la presenza dell'interazione nucleare diventa significativa. Per piccoli valori dell'angolo di diffusione la sezione d'urto coulombiana domina il processo, ma poi il termine nucleare diventa importante. Considerando che l'angolo di diffusione è legato al momento trasferito, e quindi al potere risolutivo della sonda, la presenza dell'interazione nucleare diventa rilevante con l'aumentare del potere risolutivo. Questa è la ragione per cui la sezione d'urto di protoni da $100MeV$ è dominata dall'interazione nucleare.

Per poter fare un confronto con i dati sperimentali è necessario considerare anche il ruolo dei canali di eccitazione anelastica. Questo implica una non conservazione del flusso di particelle perché alcune di queste non diffondono elasticamente ma anelasticamente. Per tener conto di questo fatto in maniera semplice si inserisce un termine immaginario nel potenziale di diffusione. Nell'ambito del formalismo da noi usato questo non implica nessun problema di principio.

Appendice A

Listato Fortran

In questa appendice inseriamo, per completezza, un input e il listato delle parti del codice scritte dal candidato.

A.1 cross.inp

```
val di rmax        npoint         num  punti da 0 a PI (NTH)
11.D0               110                         60
val max di l per somma sui mom ang (LSUM)
30
energia proiettile (MeV)         sonda(0=neutr,1=prot)
100.0                                  1
Z nucleo                 N nucleo
82                         126
Vzero(MeV)   Rpot(fm)     Apot(fm)    Idens(0=punt,1=unif,2=Fermi)
60.40          7.46          0.79                1
```

A.2 cross.f (MAIN)

```
      PROGRAM CROSS_SECTION
      IMPLICIT REAL*8 (A-B,D-H,O-Z)
      IMPLICIT COMPLEX *16 (C)
      PARAMETER (NDIM=1500,NTHETA=180,LMAX=100,NPX=3000)
      DIMENSION TH(0:NTHETA),PL(0:LMAX,NTHETA),Y(LMAX+1)
```

```
      DIMENSION DELTA (0:LMAX), SIGMAT(0:NTHETA)
      DIMENSION SIGMAL(0:LMAX), CSIGMAL(0:LMAX)
      DIMENSION CFSUM(0:NTHETA),CFTHETA(0:LMAX,NTHETA)
      DIMENSION CFCOUL(0:NTHETA),RUTH(0:NTHETA),SIGMAC(0:LMAX,NTHETA)
      DIMENSION WW(NDIM), UU(NDIM), VV(NDIM)
C
      COMMON/NUMBER/ZERO,HALF,ONE,TWO
      COMMON/CONSTM/PI,PIRAD,PI4,UPI4,SQ4PI,USQ4PI
      COMMON/CONSTF/HBC,ALPHA,E2
      COMMON/PRODAT/APMASS,GEPROT,GMPROT
      COMMON/NEUDAT/ANMASS,GENEUT,GMNEUT
      COMMON/PIODAT/APIMASS,FSEAG,FPION,FDELTA,FPISQR
C
      COMMON/RRDATA/RR(NPX),RMAX,DR,NPOINT
      COMMON/CHARGE/NUMAA,NUMPRO,SIG
      COMMON/CPOT/VVPOT(NPX)
      COMMON/OPTION/IDENS,mom

      CALL CONSTFIS
       open (unit=5, file='cross.inp', status='old')
           read (5,89)
            read (5,*) RMAX,NPOINT,NTH
            read (5,89)
            read (5,*) LSUM
            write (6,*)'  Lmax=', LSUM
            read (5,89)
            read (5,*) ENRG, NUCL
            write (6,*) 'energia(Mev)=', ENRG,'  tipo di sonda', NUCL
            read(5,89)
            read (5,*) NUMPRO,NUMNEU
            write (6,*) 'Z=','    N=',NUMPRO,NUMNEU
            read (5,89)
            read (5,*) Vzer, Rpot, Apot, Idens
            write (6,*)'V0=',Vzer, '    R=', Rpot, '  a=',Apot
        close (unit=5)
C
      SIG=1.0
      NUMAA=NUMPRO+NUMNEU
      IF (NPOINT.GT.NDIM) THEN
        STOP
      ENDIF
      IF (NTH.GT.NTHETA)THEN
        STOP
```

```
      ENDIF
      IF (LSUM.GT.LMAX) THEN
        STOP
      ENDIF
      IF (NUCL.EQ.0) THEN
        REDM=ANMASS
        AK=((2.D0*REDM*ENRG)**0.5)/HBC
        ETA=0.0
        GAMMA=0.0
        ELSEIF (NUCL.EQ.1) THEN
          REDM=APMASS
          AK=((2.D0*REDM*ENRG)**0.5)/HBC
          GAMMA=(ALPHA*NUMPRO*REDM)/(HBC*AK)
        ELSE
        STOP
      ENDIF
C
      DR=RMAX/FLOAT(NPOINT)
      DO I=1,NPOINT
          RR(I)=I*DR
      ENDDO
         CALL POTENTIAL
      IF (NUCL.EQ.0) THEN
          DO I=1,NPOINT
          VV(I)=POT(Vzer,Rpot,Apot,RR(I))
          ENDDO
      ELSEIF (NUCL.EQ.1) THEN
         DO I=1,NPOINT
         VV(I)=POT(Vzer,Rpot,Apot,RR(I))+VVPOT(I)
         ENDDO
      ELSE
          STOP
      ENDIF
C
      DO L=0,LSUM
            DO I=2,NPOINT
                    WW(I)=(2.D0*REDM*(VV(I)-ENRG))/(HBC*HBC)+
     &              (FLOAT(L)*FLOAT(L+1))/(RR(I)**2)
       ENDDO
         UU(1)=1.D0
         UU(2)=1.97103855
        CALL NUMEROV(UU,WW,DR,NPOINT,NDIM)
           X1=AK*RR(NPOINT-1)
```

```
           X2=AK*RR(NPOINT)
        CALL COULMB(X1,GAMMA,L,FL,FL1,GL,GL1,SIGMA)
              FLX1=FL/X1
              GLX1=GL/X1
              SIGMAL(L)=SIGMA
        CALL COULMB(X2,GAMMA,L,FL,FL1,GL,GL1,SIGMA)
              FLX2=FL/X2
              GLX2=GL/X2
           A1=(RMAX-DR)*FLX1*UU(NPOINT)-RMAX*FLX2*UU(NPOINT-1)
           A2=(RMAX-DR)*GLX1*UU(NPOINT)-RMAX*GLX2*UU(NPOINT-1)
           DELTA(L)=ATAN(A1/A2)
      ENDDO
C
       DTHETA=PI/FLOAT(NTH)
       Ci=CMPLX(0.0, 1.0)
       DO IA=1,NTH
            TH(IA)=IA*DTHETA
       CFCOUL(IA)=-(GAMMA*EXP(-Ci*GAMMA*(LOG((SIN(TH(IA)/2.0))**2))+2.0*
     &      Ci*SIGMAL(0)))/(2.0*AK*(SIN(TH(IA)/2.0))**2)
            RUTH(IA)=LOG(CFCOUL(IA)*CONJG(CFCOUL(IA)))
       ENDDO
C
       DO IA=1,NTH
         TH(IA)=IA*DTHETA
         XI=COS(TH(IA))
         CFSUM(IA)=CFCOUL(IA)
         CALL LEP(Y,XI,LSUM+1)
C
             DO L=0,LSUM
               PL(L,IA)=Y(L+1)
               CFTHETA(L,IA)=(0.5D0*(2*L+1)*EXP(2*Ci*SIGMAL(L))*
     &   (EXP(2*Ci*DELTA(L))-1)*PL(L,IA))/(Ci*AK)
               CFSUM(IA)=CFSUM(IA)+CFTHETA(L,IA)
               SIGMAC(L,IA)=CFSUM(IA)*CONJG(CFSUM(IA))
             ENDDO
        ENDDO
C
          open (unit=11, file='results.out', status='unknown')
          open (unit=9, file='resultslog.out', status='unknown')
           DO L=0,LSUM
             write (11,*)'#----------------',L
             write (9,*)'#----------------',L
               DO IA=1,NTH
```

```
                   write (11,*), TH(IA)/PI*180,SIGMAC(L,IA)
                   write (9,*), TH(IA)/PI*180,LOG(SIGMAC(L,IA))
               ENDDO
            ENDDO
          close (unit=11)
          close (unit=9)
       STOP
89    format(1x)
       END
C------------------------------------------------
      FUNCTION POT(Vzer,Rpot,Apot,Rvec)
C------------------------------------------------

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

      POT=-Vzer/(1.D0+exp((Rvec-Rpot)/Apot))

      RETURN
      END
C---------------------------------------------------------
      SUBROUTINE NUMEROV (UU,WW,DR,NPOINT,NDIM)
C---------------------------------------------------------
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION UU(NDIM), WW(NDIM)

      DO I=2,NPOINT-1

       UU(I+1)=(2.D0*UU(I)-UU(I-1)+(DR*DR/12.D0)*(10.D0*WW(I)*UU(I)
     &   +WW(I-1)*UU(I-1)))/(1.D0-(DR*DR/12.D0)*WW(I+1))

      ENDDO
C
       RETURN
       END
```

Bibliografia

[Co85] G.Co', S.Krewald, *Nucl. Phys. A* **433** (1985), 392.

[Co88] G.Co', K.F.Quader, R.D.Smith and J.Wanbach, *Nucl. Phys. A* **485** (1988), 61

[Coh77] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, "Quantum mechanics", Wiley, New York, 1977.

[Koo90] S.Koonin, D.Meredith, "Computational Physics", Addison Wesley, New York, 1990

[Mes99] A.Messiah, "Quantum mechanics", Dover, New York, 1999

[Rin78] G.A.Rinker, J.Speth, *Nucl. Phys. A* **306** (1978), 360

[Sch87] E.W.Schmid, G.Spitz, W.Lösch, "Theoretical Physics on the Personal Computer", Springer, Berlin, 1987.