UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.
DIPARTIMENTO DI FISICA

Tesi di Dottorato

Interazione Neutrino-Nucleo

Tutore:
Prof. Giampaolo Co'

Dottorando:
Dott. Antonio Botrugno

XVI CICLO

Conosco le leggi del mondo
e te ne farò dono,
e guarirai da ogni malinconia...

Abstract

The major subject of this thesis is to calculate the inclusive cross sections for inelastic charge current and neutral current neutrino and antineutrino-nucleus scattering above the nucleon emission threshold. Calculations have been performed within the frameworks of Mean field, CRPA and a phenomenological model that take into account the re-scattering between the emitted nucleon and the rest nucleus. The CRPA equations are solved by resorting to a technique based on Fourier-Bessel expansion. The same models are also applied to evaluate photo-absorption and electron scattering cross section, in order to estimate the limits of the prediction power of the models. The formalism has been applied to some nuclei having both the theoretical and the experimental interest, i.e. ^{12}C, ^{16}O and ^{208}Pb. A summary has also been included in the final section.

In questo lavoro di tesi ho calcolto la sezione d'urto inclusiva per processi di diffusione di neutrino e antineutrino sul nucleo, mediati sia dalla corrente debole carica che da quella neutra e che avvengono con emissione di un nucleone. Sono stati utilizzati modelli nucleari con diverso grado di sofisticazione come il modello a campo medio, la CRPA, e un modello fenomenologico che permette di considerare l'effetto della re-interazione tra il nucleone emesso e il nucleo residuo. Le equazioni CRPA sono state risolte mediante una tecnica basata sullo sviluppo in Fourier-Bessel delle stesse. Ho presentato una discussione sulla capacità predittiva del modello, applicando lo stesso formalismo al calcolo di processi di fotoassorbimento e di diffusione di elettroni, ciò al fine di rimediare alla scarsità di dati sperimentali riguardanti il neutrino. Il formalismo è stato poi applicato al calcolo della sezione d'urto di nuclei con interesse sperimentale e teorico, come ^{12}C, ^{16}O and ^{208}Pb. Ho incluso un riassunto del lavoro nella parte finale dell'opera.

Indice

Capitolo 1

INTRODUZIONE

1.1 Il neutrino

L'esistenza del neutrino fu postulata da W. Pauli nel 1930. Egli concepì l'idea di una particella priva di massa e di carica elettrica nel disperato tentativo di salvaguardare il principio di conservazione del momento e dell'energia nei processi di decadimento beta. In precedenza Chadwick aveva misurato lo spettro energetico dell'elettrone emesso in un decadimento beta e aveva trovato, con enorme sorpresa, uno spettro continuo. Ciò risultava inatteso, poiché per una transizione tra due stati nucleari ad energia definita, la conservazione del quadrimomento avrebbe dovuto determinare l'energia dell'elettrone emesso; era atteso uno spettro discreto. La presenza di una terza particella coinvolta nel decadimento, il neutrino, fu la soluzione all'enigma.

Dal tempo dell'ipotesi di Pauli, molte scoperte sperimentali e modelli teorici si sono susseguiti, il neutrino è rimasto sempre al centro del dibattito nella comunità scientifica. Nel 1934 Fermi costruisce la teoria del decadimento debole includendo il neutrino e ottenendo un ottimo accordo con i risultati sperimentali. Nel 1953 Cowan e Reines annunciano la scoperta del neutrino elettronico. Nel 1957 l'esperimento di C.S. Wu dimostra la violazione di parità dell'interazione debole mostrando che i neutrini prodotti in un processo debole sono solo con elicità positiva (sinistrorsi) mentre gli antineutrini solo con elicità negativa (destrorsi). Nel 1961 Schwartz e Lederman rivelano il neutrino muonico nei processi di decadimento del muone. Nel 1968 per la prima volta si osservano i neutrini che sono prodotti nelle reazioni termonucleari solari, e si trova un deficit di circa due terzi rispetto al flusso atteso in base al modello solare standard (SSM) [Bah01]: è l'inizio del problema dei neutrini solari. Pochi anni dopo, in maniera analoga, si osserva un deficit di neutrini atmosferici prodotti dall'impatto dei raggi cosmici sull'atmosfera terrestre. Solo nel 1978 si osserva per la prima volta il neutrino della particella tau, dando conferma sperimentale all'attuale quadro teorico che prevede tre famiglie di neutrini associate alle tre famiglie leptoniche. Negli ultimi anni diviene sempre più credibile l'ipotesi che i neutrini siano particelle massive e che i loro autostati di massa siano sovrapposizioni di autostati dell'interazione debole. Ciò produce un effetto di oscillazione che risolve il problema del deficit di flusso di neutrini solari e atmosferici. Recenti esperimenti al Sudbury Neutrino Observatory (SNO) hanno mostrato una forte evidenza del fenomeno di oscillazione [Ahm02], stabilendo che il flusso totale osservato dei neutrini solari è in accordo con quello dei neutrini elettronici prodotti in base al SSM.

Tuttavia, numerose questioni sono ancora irrisolte o solo parzialmente risolte. L'evidenza dell'oscillazione del neutrino trovata da SNO ha rilanciato il dibattito su un'esatta determinazione della massa dei neutrini e dei loro angoli di mixing. Inoltre, non è ancora chiuso il dibattito su un possibile momento magnetico non nullo del neutrino, ne si sa se il neutrino è una particella di Dirac o di Majorana. Nonostante il Modello Standard si sia rivelato solidissimo nella descrizione dei fenomeni microscopici della realtà, il neutrino non trova una collocazione naturale all'interno del modello standard minimale; per la prima volta sembra necessario dover guardare oltre il modello standard.

Oltre alla determinazione delle sue proprietà intrinseche, l'importanza del neutrino è accresciuta dal ruolo che esso svolge in alcuni importanti processi fisici. Nelle reazioni solari che avvengono nel core della nostra stella sono prodotti neutrini elettronici che re-interagiscono con la materia solare, quindi è necessaria una accurata conoscenza del processo di interazione per descrivere la dinamica solare e la nucleosintesi degli elementi. Durante l'esplosione di una supernova il 99 % dell'energia gravitazionale è rilasciata in neutrini e antineutrini dei tre flavor in un tempo relativamente breve (10 sec.). Questi costituiscono un'ottima possibilità di osservare ed indagare il fenomeno dell'esplosione, e svolgono anche un ruolo fondamentale nella descrizione quantitativa del processo. Inoltre, i neutrini sono uno dei candidati alla costituzione della materia oscura, e nonostante la loro piccola massa, il grande quantitativo di neutrini presenti nell'universo influisce significativamente sulla determinazione della sua massa totale contribuendo a stabilire la natura inflazionaria o meno del nostro universo. Infine, lo studio dell'interazione tra neutrino e nucleo fornisce indicazioni utili per la realizzazioni dei rivelatori di neutrini di nuova generazione.

1.2 Il nucleo

Tra i vari modi di indagare un sistema fisico, quello della diffusione di sonde con differenti caratteristiche cinematiche è sicuramente il più efficace. Il neutrino risulta la sonda ideale per indagare la struttura del nucleo atomico, perché a differenza di altre sonde, interagisce solo per mezzo dell'interazione debole. Ciò semplifica la trattazione teorica rispetto ai processi di diffusione con sonde adroniche o elettromagnetiche. La piccola costante di accoppiamento dell'interazione debole ($G = 1.16639$ 10^{-11} MeV^{-2}) permette al neutrino di interagire con il nucleo senza disturbare la

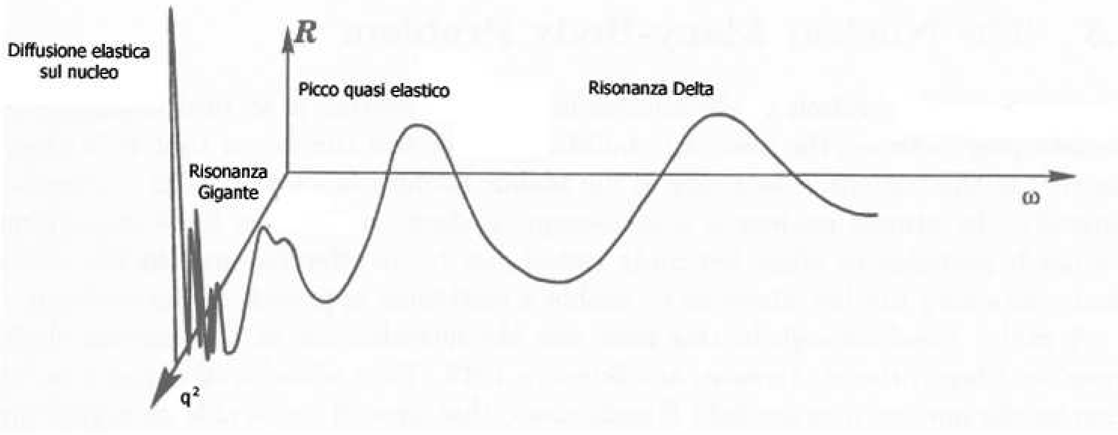

Figura 1.1: Rappresentazione schematica della risposta nucleare al variare dell'energia trasferita al sistema. Le risonanze presenti sono discusse nel testo.

struttura del suo stato iniziale. In questo modo il primo ordine dell'approssimazione di Born descrive in maniera adeguata il processo. Tuttavia, a causa della piccola costante di accoppiamento, le sezioni d'urto risultano notevolmente più piccole rispetto a quelle ottenute con altre sonde, e quindi le difficoltà sperimentali crescono.

La figura 1.1 mostra qualitativamente la risposta nucleare al variare dell'energia trasferita ω nei processi di diffusione su bersagli nucleari. Il primo picco corrisponde alla diffusione elastica sul nucleo, il picco si trova in corrispondenza di $\omega = |\mathbf{q}^2|/2M$, con $\mathbf{q}$ momento trasferito ed M massa del nucleo. Per energie trasferite inferiori all'energia di soglia di emissione nucleonica solo transizioni tra stati nucleari legati sono possibili, quindi lo spettro è caratterizzato da picchi stretti e marcati. Ad energie più alte, al di sopra della soglia di emissione nucleonica, lo spettro è continuo e presenta comunque alcuni picchi più allargati interpretati come transizioni di singola particella. Per ω compreso tra 20 e $30MeV$ si ha la regione delle risonanze giganti caratterizzata da un picco piuttosto allargato, tale risposta è dovuta a eccitazioni di tipo collettivo del nucleo in cui tutti i nucleoni partecipano all'eccitazione in maniera correlata, come in un moto vibrazionale. Ad energie ancora più alte si ha la regione del picco quasi elastico corrispondente alla diffusione elastica del proiettile sui singoli nucleoni, il picco si trova ad $\omega = |\mathbf{q}^2|/2m + \zeta$, con $\mathbf{q}$ momento trasferito ed m massa del nucleone, ζ è un fattore di correzione negativo dovuto all'energia di legame del nucleone. Il picco si presenta allargato a causa del moto dei nucleoni.

Per energie trasferite superiori a $300MeV$ si eccitano i gradi di libertà interni del nucleone, l'urto diventa quindi anelastico sul nucleone, il primo picco che si incontra in questa regione è la risonanza Δ. Ad energie ancora maggiori si ha la regione detta degli urti profondamente anelastici.

Quasi un secolo è passato dal 1911 anno in cui Ruterford introdusse il concetto di nucleo atomico dall'analisi dei processi di diffusione di particelle alfa su lamine di oro, tuttavia il problema della descrizione del nucleo non è stato ancora definitivamente risolto.

L'approccio standard alla fisica nucleare (SNPA) nasce dalla constatazione che l'energia cinetica tipica dei nucleoni ($E \cong 40MeV$) permette di trascurare gli effetti dovuti alla loro struttura interna. Tale approccio consiste nel considerare il nucleo come costituito da A fermioni puntiformi tenuti insieme dalla loro mutua interazione. Tuttavia la descrizione in termini di A nucleoni interagenti risulta comunque intrinsecamente difficile. Sebbene dal punto di vista teorico il problema sia ben definito dalla teoria quantistica, l'elevato numero di componenti del nucleo (e quindi di gradi di libertà) non permette un'esatta soluzione del problema. Solo per nuclei leggeri ($A < 10$) sono state elaborate tecniche di soluzione esatta per le equazioni del sistema a molti corpi [Pub97]. Per nuclei più pesanti la soluzione esatta richiede capacità computazionali che vanno ben oltre quelle attualmente disponibili. D'altra parte il numero di costituenti è anche troppo piccolo per permettere un'adeguata descrizione statistica del nucleo come avviene in analoghi sistemi a molti corpi in fisica della materia. L'approccio al problema risultato migliore è l'utilizzo di modelli effettivi, l'idea fondamentale consiste nel sostituire l'hamiltoniana e la funzione d'onda del sistema con analoghe effettive ma matematicamente più semplici da trattare, in modo da riprodurre al meglio le grandezze osservabili del nucleo e le probabilità di transizione nei processi di interazione; in questo modo ci si aspetta di comprendere le caratteristiche principali del sistema. Nessuno dei modelli fin qui sviluppati permette una descrizione completa del nucleo che sia applicabile in ogni situazioni fisica, così di volta in volta si deve scegliere un modello in base a ciò che si vuole descrivere e alle energie in gioco. Ogni modello descrive aspetti differenti di quella che è la struttura del nucleo.

Una grande svolta nella descrizione della struttura nucleare si ebbe nel 1949 con l'introduzione del modello a campo medio. L'ipotesi fondamentale consiste nel trattare i nucleoni come particelle non interagenti ma tenute insieme dalla presenza di un potenziale medio locale, in completa analogia con quanto avviene per gli elettroni atomici. La differenza sostanziale è che nel caso degli elettroni esiste realmente un potenziale esterno generato dai protoni del nucleo, e la mutua interazione tra elettroni risulta solo una correzione, mentre nel caso dei nucleoni il potenziale è proprio generato dalla loro mutua interazione. Sebbene questo modello non rispecchi la realtà è una adeguata approssimazione del fenomeno, perché il libero cammino medio dei nucleoni nel nucleo è più grande della loro distanza tipica. Il potenziale medio può essere introdotto in maniera fenomenologica, grande utilizzo è stato fatto del potenziale di Wood-Saxon più un termine spin-orbita (derivante dalla trattazione relativistica del moto dei nucleoni). In alternativa, il potenziale può essere derivato teoricamente dall'effetto medio delle interazioni tra i nucleoni, con l'obiettivo di istituire una derivazione microscopica del modello. In questa ottica, partendo dall'interazione nucleone-nucleone si risolvono le equazioni Hartree-Fock con tecniche ricorsive, in modo da giungere ad una soluzione per le funzioni d'onda nucleoniche e per il potenziale medio che siano tra loro consistenti.

Il modello a campo medio ha riscosso numerosi successi, in particolare l'introduzione del termine spin-orbita nel potenziale medio ha permesso di spiegare le grosse discontinuità presenti nell'energia di legame del nucleo in corrispondenza di nuclei con un numero di neutroni o protoni pari a 2,8,20,28,50,82,126. Il limite più grande di questo modello è sicuramente l'incapacità di descrivere moti collettivi del nucleo in cui più nucleoni partecipano coerentemente all'eccitazione. Sulla scia dei successi e nel tentativo di colmare questa lacuna, tecniche più sofisticate sono state elaborate sulla base del IPM. Dal punto di vista teorico si reintroduce la parte di hamiltoniana a due corpi trascurata nell'hamiltoniana di campo medio e detta interazione residua, e si utilizzano delle funzioni d'onda nucleari scritte usando opportune combinazioni delle soluzione del IPM. Tra queste, l'approssimazione Tamm-Dancoff (TDA) consiste nel descrive lo stato nucleare come combinazione lineare di accoppiamenti particella-buca su uno stato fondamentale uguale a quello dell'IPM. La TDA ha problemi di autoconsistenza e i suoi risultati non sono in pieno accordo con i dati sperimentali. Un modello più sofisticato è la Random Phase Approximation (RPA) che descrive lo stato eccitato come combinazione lineare di accoppiamenti del tipo particella-buca e buca-particella su uno stato fondamentale in cui sono già presenti correlazioni di tipo particella-buca.

Negli ultimi anni si assiste al tentativo di proporre un approccio alternativo al SNPA, si cerca di estendere l'applicazione delle teorie di campo a fenomeni con momenti trasferiti tipici della fisica nucleare. Questo approccio ha il vantaggio di derivare le leggi che governano la materia a livello nucleare da quelle dei costituenti fondamentali. Tale approccio è noto con il nome di teoria di campo effettiva (EFT) ed è stato recentemente applicato anche al calcolo della sezione d'urto neutrino-nucleo [Kub03].

1.3 Contributo allo studio del processo neutrino-nucleo

In questi ultimi anni sono stati effettuati un gran numero di lavori sull'interazione tra il neutrino e il nucleo. Sono stati utilizzati numerosi modelli nucleari, il modello a gas di Fermi relativistico [Smi72], il modello a Shell [Hay00] e il modello RPA con varie interazioni residue e diverse tecniche risolutive per le equazioni RPA. In

[Jac99, Jac02] le equazioni RPA sono risolte con un approccio basato sulla funzione di Green, mentre in [Kol92, Kol95] con un approccio basato sullo sviluppo in Fourier-Bessel delle equazioni. Nel primo caso il calcolo per processi CC è estrapolato dal risultato per processi NC, tale tecnica, basata sull'ipotesi di simmetria di isospin del nucleo, ha validità solo per nuclei leggeri. Anche nel secondo caso il calcolo è stato effettuato solo per processi NC, ed il risultato per processi CC estrapolato da questi.

In questo lavoro estendo l'applicazione dell'approccio basato sullo sviluppo in Fourier-Bessel delle equazioni RPA al caso di processi CC, al fine di calcolare la sezione d'urto di processi CC su nuclei pesanti. Inoltre, utilizzo un modello basato sui lavori di [Co88, Smi88] (FSI) che permette di tener conto in maniera fenomenologica di effetti dovuti a correlazioni nucleoniche di ordine superiore a quelle di tipo $1p-1h$ utilizzate nel modello RPA. Questo modello è stato applicato a processi di diffusione di elettroni nella regione del picco quasi elastico. Qui l'applicazione è estesa ai neutrini nella regione delle risonanze giganti.

1.4 Piano dell'opera

- Nel Capitolo 2 presento la formula utilizzata per il calcolo della sezione d'urto neutrino-nucleo e la sua derivazione in maniera indipendente dal modello nucleare. La sezione d'urto è derivata in termini di sviluppo in multipoli della risposta nucleare, inoltre è discussa in dettaglio l'espressione della corrente debole nucleonica e la riduzione non relativistica della stessa. Infine, è derivata la sezione d'urto di diffusione di elettroni dal nucleo partendo da quella di neutrini.

- Nel Capitolo 3 presento i modelli utilizzati per descrivere gli elementi di matrice della risposta nucleare: il modello a campo medio, l'RPA e un modello fenomenologico per la descrizione degli effetti dovuti a correlazioni di ordine superiore a quelle utilizzate nell'RPA. Sono mostrati i dettagli della derivazione delle funzioni d'onda di singola particella utilizzando un potenziale medio di Wood-Saxon. Particolare risalto è stato dato alla soluzione delle equazioni RPA per mezzo di una tecnica basata sullo sviluppo in serie di Fourier-Bessel delle equazioni. Questa tecnica è stata sviluppata in modo da poter utilizzare anche un'interazione residua a range finito.

- Nel Capitolo 4 discuto in dettaglio la scelta degli ingredienti necessari per il calcolo della sezione d'urto di neutrino su ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb: i parametri del potenziale medio utilizzati per il calcolo delle funzioni d'onda di singola particella, l'interazione residua per il calcolo delle ampiezze nell'RPA e i parametri della funzione di convoluzione utilizzata nel modello FSI. Presento inoltre il confronto tra alcuni risultati ottenuti con queste parametrizzazioni e i dati sperimentali per le sezioni d'urto di fotoassorbimento e di diffusione di elettroni, al fine di mostrare le capacità predittive e i limiti dei modelli utilizzati.

- Nel Capitolo 5 mostro una dettagliata analisi delle caratteristiche della sezione d'urto indipendenti da nucleo bersaglio. Tra queste, l'analisi multipolare dei vari termini in cui è scomposta la risposta nucleare, la dipendenza angolare della sezione d'urto, il confronto con la sezione d'urto di diffusione di elettroni, le differenze tra neutrino ed antineutrino. Inoltre, mostro un confronto dei risultati ottenuti con il modello RPA, il modello a campo medio e il modello a gas di Fermi in un ampio intervallo energetico, al fine di guidare la scelta del modello più adatto in particolari situazioni energetiche.

- Nel Capitolo 6 mostro i risultati ottenuti per la sezione d'urto integrata sull'angolo di diffusione θ e quella totale per processi NC e CC su ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb. I motivi di interesse per questi nuclei sono principalmente legati allo studio di fenomeni astrofisici e allo studio del fenomeno di oscillazione del neutrino.

Capitolo 2

PROCESSI DEBOLI SEMILEPTONICI NEI NUCLEI

In questo capitolo descriverò il formalismo generale utilizzato per il calcolo della sezione d'urto nei processi di interazione tra il neutrino e il nucleo. L'interazione debole è responsabile dei processi neutrino-nucleo, ed è ben descritta dalla teoria di Glashow-Weinberg-Salam (GWS) basata sulla simmetria dei gruppi di gauge $SU(2)$x$U(1)$. Questa teoria descrive con successo numerosi processi regolati dall'interazione elettrodebole nell'ambito della fisica delle particelle elementari: processi puramente leptonici, processi semileptonici, ed anche processi non leptonici. In questo lavoro ipotizzerò che i nucleoni siano i costituenti fondamentali del nucleo e che la GWS, costruita e verificata nell'ambito della fisica delle alte energie, rimanga valida alle energie tipiche della fisica nucleare e per nucleoni legati. Tale ipotesi non costituisce un aspetto limitativo del lavoro, ma al contrario ne accresce interesse ed importanza collocandolo in un settore di intersezione tra fisica delle particelle elementari e fisica nucleare. Numerosi sono i vantaggi di una tale collocazione. Primo, l'applicazione delle leggi fondamentali della natura a processi di fisica non elementare permette la costruzione di una visione coerente dei fenomeni fisici. Secondo, la presenza simultanea delle interazioni forte, debole ed elettromagnetica può far luce sulle caratteristiche delle interazioni fondamentali. Terzo, la presenza di un sistema a molti corpi permette lo studio di transizioni o effetti vietati nei processi di diffusione di particelle elementari. Inoltre, è possibile far luce e verificare nuove idee sulla struttura dei sistemi a molti corpi. Non è un caso, infatti, che importanti progressi nella comprensione dell'interazione debole si siano sviluppati nell'ambito della fisica nucleare, come ad esempio, il decadimento beta o la struttura $V-A$ dell'interazione debole necessaria a descrivere la violazione di parità nei processi deboli.

La scoperta dell'oscillazione del neutrino ha portato ad una revisione delle idee fondamentali su cui si basa la descrizione dei leptoni, non mi è chiaro se e in che modo ciò possa influenzare il risultato finale di questo lavoro. Tuttavia, il corto raggio d'azione dell'interazione debole sembra scongiurare gli effetti dovuti all'influenza del

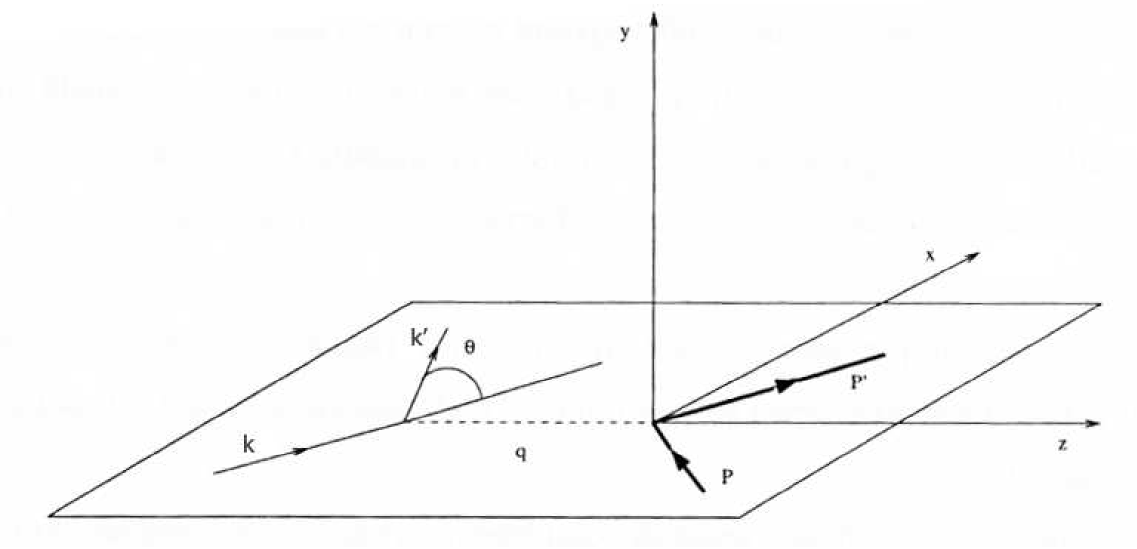

Figura 2.1: Cinematica del processo neutrino nucleo. Il sistema di riferimento adottato è discusso nel testo.

fenomeno di oscillazione, inoltre nei processi di interazione il neutrino deve comunque essere considerato in un autostato dell'interazione debole. In questo lavoro userò la teoria del modello standard minimale per la descrizione dei leptoni.

2.1 I processi

É possibile effettuare una trattazione unificata dei processi semileptonici nei nuclei descrivendo in un unico formalismo la diffusione inelastica di neutrini e anti-neutrini, i decadimenti β, i processi β inverso, le catture leptoniche. In questo lavoro l'interesse è focalizzato nei seguenti processi:

• processi con scambio di corrente carica (β inverso)

$$\nu_l + {}^A_Z X \rightarrow l^- + {}^{A}_{Z+1}Y^* \tag{2.1}$$
$$\bar{\nu}_l + {}^A_Z X \rightarrow l^+ + {}^{A}_{Z-1}Y^* \tag{2.2}$$

• processi con scambio di corrente neutra (diffusione di neutrini)

$$\nu_l + {}^A_Z X \rightarrow \nu_l + {}^A_Z X^* \tag{2.3}$$
$$\bar{\nu}_l + {}^A_Z X \rightarrow \bar{\nu}_l + {}^A_Z X^* \tag{2.4}$$

dove $l = e, \tau, \mu$ rappresenta le tre famiglie leptoniche ed i processi avvengono con conservazione del numero leptonico famiglia per famiglia. Per energie trasferite ω al di sotto della soglia di emissione nucleonica, solo stati legati discreti del nucleo possono essere eccitati. Per energie trasferite ω che superano la soglia di emissione, il nucleo può decadere in un nucleo residuo più altri frammenti adronici. La trattazione in questo lavoro è limitata a processi in cui un singolo nucleone è emesso dal nucleo e il suo stato nel continuo non viene osservato. Ciò significa che la sezione d'urto calcolata non terrà conto del particolare stato del nucleone nel continuo ma includerà tutti i suoi possibili stati (processo semi-inclusivo). Comunque, tutti i risultati ottenuti in questo capitolo possono essere applicati per la descrizione di un ampio numero di processi: l'espressione della sezione d'urto è identica sia per processi con eccitazioni discrete che per processi semi-inclusivi in cui i frammenti non vengono osservati. Nel formalismo qui utilizzato, le differenze tra i vari processi scaturiscono dalle diverse funzione d'onda utilizzate per descrivere lo stato finale del nucleo.

I processi β^+ inverso e β^- inverso provocano una variazione dell'isospin totale del nucleo rispettivamente pari a $+1$ e -1 e avvengono per mezzo dello scambio dei bosoni vettori carichi $W^+ \, W^-$. Per questo motivo sono detti processi con scambio di corrente carica (CC). I processi di diffusione di neutrini ed antineutrini avvengono senza variazione dell'isospin del nucleo e per mezzo dello scambio di un bosone vettore neutro Z^0. Sono detti processi con scambio di corrente neutra (NC).

La cinematica del processo è schematizzata in Fig. 2.1. Ho usato le seguenti notazioni in unità naturali ($\hbar = c = 1$) per il quadrinpulso dei leptoni k e del nucleo P.

$$k = (\varepsilon, \mathbf{k}) \qquad\qquad k' = (\varepsilon', \mathbf{k}') \tag{2.5}$$

$$P = (E, \mathbf{P}) \qquad\qquad P' = (E', \mathbf{P}') \tag{2.6}$$

Il prodotto tra quadrivettori è espresso convenzionalmente dalla formula $a_\mu b^\mu = ab - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Nel sistema di riferimento del laboratorio ho fissato le coordinate cartesiane $(\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ in modo che la direzione del versore $\mathbf{e_z}$ coincida con la direzione del momento trasferito $\mathbf{q}$, la direzione del versore $\mathbf{e_y}$ coincida con la direzione di $\mathbf{P} \times \mathbf{P}'$ e che $\mathbf{e_x}$ sia nel piano di diffusione del leptone. Nel sistema di riferimento del laboratorio in cui il nucleo è a riposo si ha $E = M$ e $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, dove M è la massa del nucleo. Ho indicato con θ l'angolo di diffusione del leptone e con q il quadrimomento trasferito:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = |\mathbf{k}| \, |\mathbf{k}'| \cos \theta \tag{2.7}$$

$$q \equiv (\omega, \mathbf{q}) = k - k' \equiv (\varepsilon - \varepsilon', \mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{2.8}$$

per la conservazione del quadrimomento $E' - E = \omega$ e $\mathbf{P}' - \mathbf{P} = \mathbf{q}$, tuttavia poiché $M \gg |\mathbf{q}|$ il rinculo del nucleo sarà trascurato.

Per il calcolo della sezione d'urto si lavora con grandezze matematiche appartenenti al campo complesso e che godono di determinate simmetrie, per questo motivo,

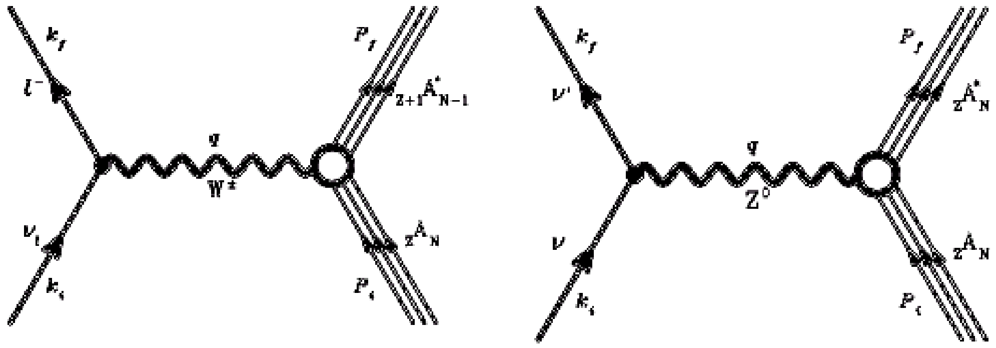

Figura 2.2: Diagrammi di Feymann del primo ordine per processi CC (a sinistra) ed NC (a destra). La descrizione dei processi mediante lo scambio di un solo bosone vettore fornisce un risultato molto accurato per il calcolo della probabilità di transizione.

è utile introdurre anche un sistema di cordinate sferiche $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$ legato al sistema di cordinate cartesiane $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ dalle relazioni (vedi appendice D.3):

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y\right) \tag{2.10}$$

e quindi con $\mathbf{e}_3$ parallelo a $\mathbf{q}$.

2.2 Hamiltoniana dell'interazione debole

Dato il piccolo valore della costante di accoppiamento dell'interazione debole, il primo ordine della teoria perturbativa fornisce un risultato molto accurato per il calcolo della probabilità di transizione. L'espressione generale della sezione d'urto è ricavata nell'ambito dell'approssimazione di Born delle onde piane (PWBA). I processi CC e NC sono descritti mediante lo scambio di un solo bosone vettore come mostrato nei diagrammi di Feymann in Fig. 2.2. La probabilità di transizione è proporzionale al modulo quadro dell'ampiezza di transizione S_{fi} :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle l_f(k')\ \ N_f(P')\,|H_{int}|\, l_i(k)\ \ N_i(P)\rangle = \\ &= \int dx\, \langle l_f(k')\ \ N_f(P')\,|\mathcal{H}_{int}(x)|\, l_i(k)\ \ N_i(P)\rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

dove $\mathcal{H}_{int}(x)$ è la densità di Hamiltoniana dell'interazione nello spazio-tempo a quattro dimensioni, $x = (t, \mathbf{r})$, $|l_{i,f}\rangle$ ed $|N_{i,f}\rangle$ indicano gli stati iniziale e finale del leptone e del nucleo. Per processi a basse energie, con momenti trasferiti molto più piccoli della massa del bosone scambiato, la consueta struttura corrente-propagatore-corrente per il calcolo del diagramma si riduce alla forma corrente-corrente tipica di un'interazione di contatto (Fig. 2.3), come nella teoria di Fermi del decadimento beta. Il propagatore per una particella di massa M_B e spin 1 [Hal84]

$$\frac{i\left(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_B^2\right)}{q^2 - M_B^2} \quad \text{per } M_B^2 \ll q_\mu^2 \text{ si riduce a } \quad \frac{i g^{\mu\nu}}{M_B^2} \tag{2.12}$$

e la densità di Hamiltonina assume la forma:

$$\mathcal{H}_{int}(x) = \begin{cases} \frac{iG}{\sqrt{2}}\, j_\mu(x) \widetilde{J}^\mu(x) & \textit{per processi NC} \\ \frac{iG\cos\theta_C}{\sqrt{2}}\, j_\mu(x) \widetilde{J}^\mu(x) & \textit{per processi CC} \end{cases} \tag{2.13}$$

dove $G = 1.16639\ 10^{-11}\ MeV^{-2}$ è la costante di Fermi, θ_C è l'angolo di mixing di Cabibbo ($\cos\theta_C = 0.9742$), il $\sqrt{2}$ è inserito per convenzione, j_μ è l'operatore di corrente del vertice leptonico, mentre $\widetilde{J}^\mu$ è l'operatore della corrente nucleare. In alcuni testi compare un termine di fase diverso nella 2.13, ma il risultato finale è indipendente dalla fase. Si noti che nell'ambito del modello elettrodebole si ha $G/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$. Nei processi CC la costante di accoppiamento è moltiplicata per $(\cos\theta_C)$ in modo da tener conto dell'effetto di mixing tra i quarks componenti del nucleone.

Considerando i leptoni particelle di Dirac ed usando la rappresentazione di Heisenberg per l'operatore $\widetilde{J}^\mu$ si può separare la variabile temporale da quelle spaziali. Si ottiene per l'ampiezza di transizione:

$$S_{fi} = 2\pi\delta\left(\omega + E - E'\right)\ \frac{G}{\sqrt{2}} l_\mu\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}', s, s'\right) \widetilde{J}^\mu(\mathbf{q}) \tag{2.14}$$

con

$$l_\mu\left(\mathbf{k}, \mathbf{k}', s, s'\right) = \overline{u}\left(\mathbf{k}', s'\right)\ j_\mu(0)\ \ u(\mathbf{k}, s) \tag{2.15}$$

$$\widetilde{J}^\mu(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} \left\langle N_f(\mathbf{p}') \ \middle| \widetilde{J}^\mu(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \middle| \ N_f(\mathbf{p}) \right\rangle \tag{2.16}$$

$u(\mathbf{k}, s)$ è il bi-spinore di Dirac, s lo spin del leptone. La δ di Dirac deriva dall'integrazione sul tempo t ed esprime la conservazione dell'energia nel processo. Nei successivi paragrafi mostrerò come trattare separatamente il tensore leptonico e quello hadronico.

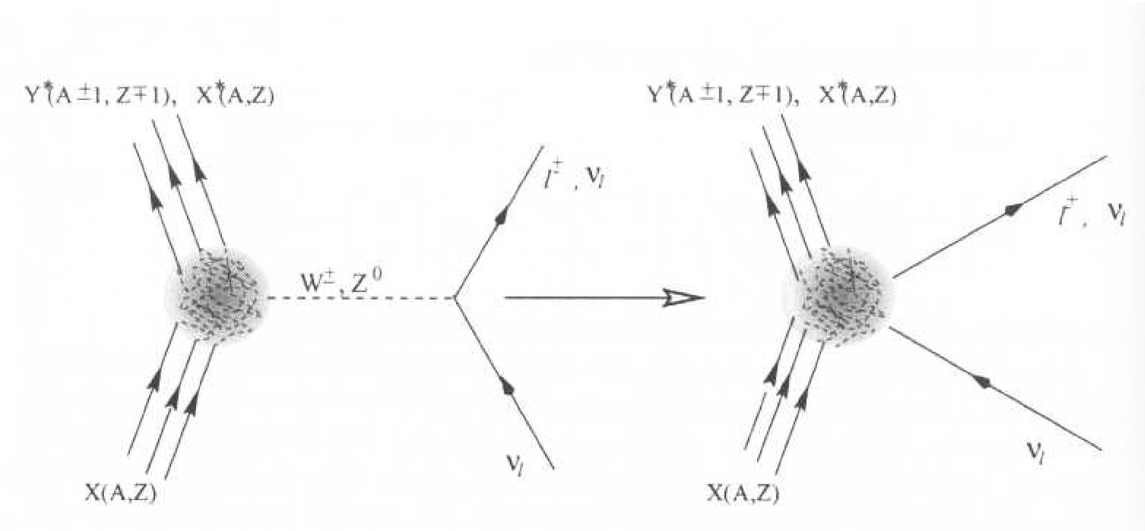

Figura 2.3: Rappresentazione schematica dell'interazione neutrino-nucleo. Nella figura a sinistra è illustrata la visione del processo d'interazione debole mediante lo scambio di bosoni vettori intermedi. A destra la visione nel limite di bassi momenti trasferiti, in cui i due vertici si riducono ad un unico vertice e il processo può essere descritto mediante un'interazione di contatto.

2.3 Corrente leptonica

Seguendo la teoria di GWS per l'interazione elettrodebole la corrente leptonica è data nel caso di corrente neutra:

$$j^0_\mu(x) = \sum_{l=e,\mu,\tau} \overline{\Psi}_{\nu_l}(x)\ \gamma_\mu (1-\gamma_5)\, \Psi_{\nu_l}(x) \tag{2.17}$$

e nel caso di corrente carica:

$$j^-_\mu(x) = \sum_{l=e,\mu,\tau} \overline{\Psi}_{\nu_l}(x)\ \gamma_\mu (1-\gamma_5)\, \Psi_l(x) \tag{2.18}$$

e il suo hermitiano coniugato j^+_μ.

Nell'espressione precedente $\Psi_l(x)$ sono le soluzioni dell'equazione di Dirac per particella libera con la normalizzazione covariante a 2ϵ particelle per unità di volume V:

$$\Psi_l(x) = e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}\ u(\mathbf{k},s) = \ e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}\sqrt{\frac{\varepsilon+m_l}{V}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{\varepsilon+m_l}\chi_s\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

χ_s sono gli spinori di Pauli.

Le espressioni 2.17 e 2.18 della corrente derivano dal fatto che i propagatori dell'interazione debole si accoppiano solo con le componenti ad elicità sinistrorsa dei neutrini, quindi è necessario includere l'operatore di proiezione dell'elicità $\frac{1-\gamma_5}{2}$ nell'espressione della corrente. Si noti che l'espressione $\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_5$ ha la tipica struttura V-A dell'interazione debole. Nelle 2.17 e 2.18 la struttura identica della corrente è conseguenza dell'universalità dell'interazione debole per i neutrini delle tre diverse famiglie leptoniche. Per convenzione il fattore 1/2 dell'operatore di proiezione è assorbito dalla costante di accoppiamento; alcuni testi usano al posto di $1-\gamma_5$ il termine $\frac{1-\gamma_5}{2}$ nelle 2.17 e 2.18 e il valore $4G/\sqrt{2}$ nell'espressione dell'hamiltoniana di interazione 2.13 [Hal84].

Nella sezione d'urto si deve calcolare la somma sugli stati di spin del leptone incidente ed uscente. Anche se esistono solo neutrini sinistrorsi ed antineutrini destrorsi la presenza dell'operatore di proiezione $(1-\gamma_5)/2$ permette di effettuare una somma su tutti gli stati di spin senza modificare il risultato finale.

$$\begin{aligned}
&\sum_{s,s'} l_\alpha(\mathbf{k},s,\mathbf{k}',s')\, l^*_\beta(\mathbf{k},s,\mathbf{k}',s') = \\
&= \sum_{s,s'} \left[\overline{u}_f(\mathbf{k}',s')\ \gamma_\mu(1-\gamma_5)\ u_i(\mathbf{k},s)\right]\left[u_f(\mathbf{k}',s')\ \gamma_\mu(1-\gamma_5)\ \overline{u}_i(\mathbf{k},s)\right]^* = \\
&= Tr\ \left[(\not{k}'+m_f)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\not{k}'+m_i)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\right] = \\
&= \frac{8}{V^2}\left[k'_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}) + k'_\beta k_\alpha \mp i\varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta}\ k'^\mu k^\rho\right] \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

nell'ultima espressione $\varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta}$ è il tensore di Levi-Civita (Appendice D), il segno meno si riferisce alla corrente di leptoni, il segno più a quella di antileptoni. I primi tre termini costituiscono la parte simmetrica del tensore, l'ultimo è manifestamente antisimmetrico per le proprietà di $\varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta}$. Per l'espressione della parte spaziale del tensore leptonico ho usato il sistema di riferimento di versori sferici $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$ definito nelle 2.9-2.10. Nel calcolo ho usato i teoremi sulle tracce (Appendice D) e l'ipotesi di massa nulla dei neutrini. I dettagli del calcolo sono riportati in Appendice A dove si mostra anche il risultato con la normalizzazione non covariante ad 1 particella per unità di volume V per gli spinori di Dirac e il motivo per cui le differenti normalizzazioni non cambiano il risultato finale.

2.4 Corrente adronica

2.4.1 Sviluppo in multipoli

Nello studio dei processi 2.1-2.4 farò l'ipotesi che il nucleo compia una transizione tra stati con momento angolare e parità definiti, quindi, per il calcolo dell'elemento di matrice nucleare, è utile sviluppare l'operatore che descrive la risposta nucleare

$$\widetilde{J}^{\mu}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} \left\langle \psi_{N_f} \middle| \widetilde{J}^{\mu}(\mathbf{r}) \middle| \psi_{N_i} \right\rangle = \left\langle \psi_{N_f} \middle| \int d\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} \widetilde{J}^{\mu}(\mathbf{r}) \middle| \psi_{N_i} \right\rangle \tag{2.21}$$

in termini di sviluppo in multipoli. A questo scopo si sviluppa l'onda piana presente nella 2.21 sulla base delle armoniche sferiche (Appendice D.4). Per l'operatore

$$J^{\mu}(\mathbf{q}) = \left(J^0(\mathbf{q}),\ \mathbf{J}(\mathbf{q})\right) = \int d\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} \widetilde{J}^{\mu}(\mathbf{r}) \tag{2.22}$$

si ottiene, per la componente temporale ($\mu = 0$)

$$J^0(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} \widetilde{J}^0(\mathbf{r}) = \sqrt{4\pi} \sum_{J=0}^{\infty} i^J\ \sqrt{2J+1}\ \mathcal{C}_J(\mathbf{q}) \tag{2.23}$$

e usando il sistema di riferimento di versori sferici $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$ definito nelle 2.9-2.10 per la componente spaziale ($\mu = \pm 1, 3$)

$$J^{\eta}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\ e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}}\ \mathbf{e}_{\eta} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) =$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{2\pi} \sum_{J=1}^{\infty} i^J\ \sqrt{2J+1}\ \left[\mathcal{E}_{J,\eta}(\mathbf{q}) + \gamma \mathcal{M}_{J,\eta}(\mathbf{q})\right] & \eta = \pm 1 \\ -\sqrt{4\pi} \sum_{J=0}^{\infty} i^J\ \sqrt{2J+1}\ \mathcal{L}_J(\mathbf{q}) & \eta = 3 \end{cases} \tag{2.24}$$

Nelle equazioni precedenti sono state utilizzate le seguenti espressioni:

$$\mathcal{C}_J(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \left[j_J(\kappa r)\, Y_J^0(\Omega_r)\right] \widetilde{J}^0(\mathbf{r}) \tag{2.25}$$

$$\mathcal{L}_J(\mathbf{q}) = \frac{i}{\kappa} \int d\mathbf{r} \left[\vec{\nabla}\left(j_J(\kappa r)\, Y_J^0(\Omega_r)\right)\right] \cdot \widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \tag{2.26}$$

$$\mathcal{E}_{J,\eta}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\kappa} \int d\mathbf{r} \left[\vec{\nabla} \times \left(j_J(\kappa r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{\eta}_{J,J}(\Omega_r)\right)\right] \cdot \widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \tag{2.27}$$

$$\mathcal{M}_{J,\eta}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \left[j_J(\kappa r)\, \vec{\mathcal{Y}}^{\eta}_{J,J}(\Omega_r)\right] \cdot \widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \tag{2.28}$$

che rappresentano rispettivamente gli operatori multipolari *Coulombiano*, *Longitudinale*, *Trasversale Elettrico*, *Trasversale Magnetico*. Queste quantità sono state scritte usando le funzioni sferiche di Bessel $j_J(\kappa r)$, le armoniche sferiche $Y_J^M(\Omega_r)$ e le armoniche sferiche vettoriali $\vec{\mathcal{Y}}^M_{J,J}(\Omega_r)$ (Appendice D.3), con $\kappa = |\mathbf{q}|$, $r = |\mathbf{r}|$, $\Omega_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Le parti angolari di questi operatori sono quindi tensori sferici irriducibili.

In pratica lo sviluppo in multipoli permette di scrivere $J^{\mu}(\mathbf{q})$ come $\sum_J O^{\mu}_J(\mathbf{q})$ dove $O^{\mu}_J(\mathbf{q})$ è espresso in funzione degli operatori nelle 2.25 - 2.28.

Nella sezione d'urto si deve calcolare la somma sulla terza componente del momento angolare M del nucleo nello stato iniziale e finale.

$$\sum_{M_i \; M_f} \left| l_{\mu} \left\langle J_f \; M_f \left| \sum_J O^{\mu}_J(\mathbf{q}) \right| J_i \; M_i \right\rangle \right|^2 = \sum_J \frac{1}{2J+1} \left| l_{\mu} \langle J_f \; \| O^{\mu}_J(\mathbf{q}) \| \; J_i \; \rangle \right|^2 \quad (2.29)$$

dove ho utilizzato il teorema di Wigner-Eckart [Edm57]. L'integrazione sulle variabili angolari della funzione d'onda nucleari sono analiticamente espresse dal valore dell'elemento di matrice ridotta $\langle J_f \; \| O^{\mu}_J(\mathbf{q}) \| \; J_i \; \rangle$. I dettagli del calcolo sono riportati in Appendice D.

2.4.2 Corrente debole nucleonica

Farò l'ipotesi che il bosone vettore scambiato interagisca singolarmente con gli A nucleoni costituenti del nucleo bersaglio. In questa ipotesi l'operatore di corrente nucleare è dato dalla somma dei contributi delle correnti nucleoniche [1]:

$$\widetilde{J}_{\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,A} J_{\mu}(\mathbf{r}_i) \; \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.30)$$

dove la coordinata $\mathbf{r}_i$ indica la posizione dell'i-esimo nucleone. Con questa ipotesi gli integrali sulla coordinata $\mathbf{r}$ nucleare nelle 2.25 - 2.28 possono essere immediatamente calcolati e la soluzione è scritta in funzione delle cordinate nucleoniche.

Ipotizzando che l'operatore $J^{\mu}(\mathbf{r})$ agisca quasi elasticamente sui singoli nucleoni, trascurando le mutue interazioni tra i nucleoni e la presenza di correnti di scambio mesonico, si può assegnare all'operatore $J^{\mu}(\mathbf{r})$ la stessa forma operatoriale della corrente debole nucleonica tra nucleoni liberi. In pratica, gli effetti relativi alla presenza dell'interazione forte che lega il sistema a molti corpi sono descritti unicamente dalle funzioni nucleari usate nel calcolo.

Analogamente alla corrente leptonica, la corrente nucleonica debole di nucleoni liberi è composta da una parte vettoriale e una assiale. In principio si dovrebbe derivare la forma della corrente partendo dalla composizione in termini di quarks e gluoni del nucleone e sfruttando le regole della cromodinamica quantistica (QCD). Tuttavia, la natura non perturbativa della QCD non permette una tale derivazione. In questo lavoro userò un modello effettivo per la determinazione della corrente nucleonica. Sotto ipotesi di simmetria molto generali è possibile assegnare la seguente espressione all'operatore J_{μ} nello spazio dei momenti:

[1] Questa ipotesi è spesso chiamata approssimazione degli impulsi, tuttavia lo stesso nome è assegnato all'ipotesi che nella matrice nucleare un singolo nucleone compie una transizione tra stati differenti mentre gli altri A-1 rimangono nello stato iniziale come puri spettatori del processo [Far78]. Per quanto collegate le due ipotesi sono distinte.

$$J_\mu\left(q\right)=J_\mu^V\left(q\right)+J_\mu^A\left(q\right) \tag{2.31}$$

dove per processi (CC) si ha:

$$J_\mu^V\left(q\right)=\left(F_V^{\pm}\gamma_\mu+\frac{i}{2m}F_M^{\pm}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right)\tau_{\pm} \tag{2.32}$$

$$J_\mu^A\left(q\right)=\left(F_A^{\pm}\gamma_\mu+\frac{1}{2m}F_P^{\pm}q_\mu\right)\tau_{\pm} \tag{2.33}$$

e per procesi (NC):

$$J_\mu^V\left(q\right)=\left(F_V^{0}\gamma_\mu+\frac{i}{2m}F_M^{0}\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right)\tau_{3} \tag{2.34}$$

$$J_\mu^A\left(q\right)=\left(F_A^{0}\gamma_\mu+\frac{1}{2m}F_P^{0}q_\mu\right)\tau_{3} \tag{2.35}$$

Gli indici V ed A indicano la separazione in parte vettoriale e assiale, τ è l'operatore di isospin della transizione, m la massa dei nucleoni coinvolti nella transizione, nei processi CC la massa m è la media tra la massa di protone e quella di neutrone. L'espressione dell'operatore di corrente nucleonica in termini di fattori di forma F_x sta ad indicare la presenza di una struttura interna dei nucleoni. I fattori di forma sono funzioni reali e dipendono dal quadrimomento trasferito q, inoltre dipendono dall'isospin della transizione τ, ciò rispecchia la dipendenza dalla diversa composizione in termini di quarks dei nucleoni coinvolti nella transizione. La loro parametrizzazione è determinata dal confronto con i dati sperimentali, una discussione sui fattori di forma nucleonici sarà fatta in dettaglio nel paragrafo 2.4.4. La corrente nucleonica si ottiene calcolando l'elemento di matrice di questi operatori tra funzioni d'onda di nucleoni liberi, soluzioni dell'equazione di Dirac.

Nel seguito del paragrafo esporrò le motivazioni teoriche che conducono alla forma usata nelle 2.32-2.35. La struttura della parte vettoriale della corrente nucleonica debole coincide con quella della corrente nucleonica elettromagnetica (che è composta solo dalla parte vettoriale), solo i fattori di forma sono diversi. Distinguerò quindi i fattori di forma in elettromagnetici, deboli vettoriali e deboli assiali. La corrente nucleonica vettoriale (sia debole vettoriale che elettromagnetica) deve essere composta da operatori vettoriali invarianti di Lorentz allo scopo di garantire l'invarianza della corrente per trasformazioni di Lorentz. I soli operatori che soddisfano tale condizione sono:

$$\gamma_\mu\ ;\ \left(p'-p\right)^\nu\sigma_{\mu\nu}\ ;\ \left(p'-p\right)_\mu\ ;\ \left(p'+p\right)_\mu \tag{2.36}$$

di cui solo tre sono indipendenti. Segue che l'espressione più generale possibile per l'operatore della corrente vettoriale soddisfacente i requisiti discussi sopra è:

$$J_\mu^V\left(q\right)=F_V(q^2)\gamma_\mu+\frac{i}{2m}F_M(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu+\frac{1}{2m}F_S(q^2)q_\mu \tag{2.37}$$

dove m è la massa del nucleone. Le funzioni F_i devono essere scalari di Lorentz e quindi possono dipendere solo dagli scalari di Lorentz p'^2, p^2,q^2, ma poiché $p'^2 = p^2 = M^2$ la variazione delle F_i è solo sulla variabile q^2. La conservazione della parte vettoriale della corrente (CVC):

$$\partial^\mu J^V_\mu(q) = iq^\mu J^V_\mu(q) = 0 \tag{2.38}$$

implica che F_S sia costantemente nullo. Infatti combinando la 2.37 con la 2.38 si ottiene:

$$\overline{u}(\mathbf{p}') \left[F_V(q^2) q^\mu \gamma_\mu + \frac{i}{2m} F_M(q^2) q^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu + q^\mu q_\mu F_S(q^2) \right] u(\mathbf{p}) = 0 \tag{2.39}$$

dove il termine che moltiplica F_V si annulla perché gli spinori $u(\mathbf{p})$ e $\overline{u}(\mathbf{p}')$ soddisfano l'equazione di Dirac

$$\overline{u}(\mathbf{p}') q^\mu \gamma_\mu \; u(\mathbf{p}) = \overline{u}(\mathbf{p}')[\gamma_\mu p'^\mu - \gamma_\mu p^\mu] \; u(\mathbf{p}) = \overline{u}(\mathbf{p}')[m - m] \; u(\mathbf{p}) = 0$$

Il termine che moltiplica F_M si annulla per l'antisimmetria del tensore $\sigma_{\mu v}$

$$q^\mu \sigma_{\mu\nu} q^\nu = \frac{i}{2} q^\mu [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu] q^\nu = i[q^2 - q^2] = 0$$

quindi, poiché in generale $q^\mu q_\mu \neq 0$, affinchè sia soddisfatta la 2.39 deve essere $F_S = 0$.

Il fatto che F_S sia nullo può essere dimostrato anche senza utilizzare la conservazione della parte vettoriale della corrente. La condizione di invarianza per coniugazione di carica impone che F_V ed F_M siano reali ed F_S puramente immaginario. L'invarianza per inversione temporale impone che tutte le F_i siano reali. Combinando i due risultati si trova $F_S = 0$.

In maniera analoga, la corrente nucleonica assiale deve essere composta da operatori di tipo vettore-assiale invarianti di Lorentz, i soli operatori che godono di questa proprietà sono gli analoghi di quelli nella 2.36 moltiplicati per γ_5. L'espressione più generale possibile per la parte assiale della corrente è:

$$J^A_\mu(q) = \left[F_A(q^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2m} F_T(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu + q_\mu F_P(q^2) \right] \gamma_5 \tag{2.40}$$

Le condizioni di invarianza per coniugazione di carica impongono che F_A ed F_P siano reali ed F_T puramente immaginario. L'invarianza per inversione temporale impone che tutte le F_i siano reali. Combinando i due risultati si trova $F_T = 0$. Per i motivi appena esposti, la corrente associata ai fattori $F_S = 0$ e $F_T = 0$ è anche detta corrente di seconda classe.

2.4.3 Riduzione non relativistica della corrente nucleonica

In questo lavoro si fa uso di modelli nucleari non relativistici. Poiché l'energia cinetica tipica dei nucleoni all'interno del nucleo è dell'ordine dei 40 MeV l'uso di modelli relativistici porta a correzioni solitamente trascurabili. Tuttavia, nei processi di interesse per questo lavoro, il nucleone nel continuo può acquistare un energia cinetica di qualche centinaia di MeV, ci si aspetta che le correzione relativistiche nella regione del picco quasielastico non siano completamente trascurabili [Ama99].

Per poter calcolare gli elementi di matrice della parte adronica della corrente è necessario usare un'espressione non relativistica degli operatori. Il metodo di Foldy-Wouthuysen (Appendice B) per la riduzione non relativistica degli operatori consiste nello sviluppare le funzioni d'onda di particella libera soluzioni dell'equazione di Dirac in potenze di $|\mathbf{p}|/m$ essendo $\mathbf{p}$ ed m rispettivamente il momento e la massa del nucleone. Al primo ordine in $|\mathbf{p}|/m$ per le 2.32 - 2.35 si ottengono le seguenti espressioni:

$$J_0^V(q) = F_V^\alpha \tau_\alpha \tag{2.41}$$

$$\mathbf{J}^V(q) = \left(\frac{F_V^\alpha}{2m}(2\mathbf{p}+\mathbf{q}) + \frac{F_V^\alpha + F_M^\alpha}{2m} i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q} \right) \tau_\alpha \tag{2.42}$$

$$J_0^A(q) = \left(\frac{F_A^\alpha}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot (2\mathbf{p}+\mathbf{q}) - \frac{\omega}{4m^2} F_P^\alpha \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \right) \tau_\alpha \tag{2.43}$$

$$\mathbf{J}^A(q) = F_A^\alpha \boldsymbol{\sigma} \tau_\alpha \tag{2.44}$$

dove per comodità di notazione ho omesso la dipendenza dal quadrimomento dei fattori di forma e l'indice α vale $\pm$ per processi con correnti cariche e 3 per processi con corrente neutra, l'operatore di spin $\boldsymbol{\sigma}$ è scritto in funzione delle matrici di Pauli (Appendice D.1). In appendice B sono presenti i dettagli del calcolo fino al secondo ordine e sono discusse alcune ambiguità nel procedimento di riduzione. La componente temporale e spaziale della corrente vettoriale sono rispettivamente di ordine zero ed uno nello sviluppo in $|\mathbf{p}|/m$, l'ordine è invertito per le componenti della corrente assiale. Pur non essendo propriamente al secondo ordine in $|\mathbf{p}|/m$, il secondo addendo della 2.43 è trascurabile per $\omega \ll m$. I due addendi nella 2.42 rappresentano gli usuali termini di convezione e magnetizzazione della corrente vettoriale. Nello spazio delle coordinate, gli operatori 2.41-2.44 possono essere riscritti come:

$$J_0^V(\mathbf{r}) = F_V^\alpha \tau_\alpha \tag{2.45}$$

$$\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \left(-i\frac{F_V^\alpha}{2m}(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}) - \frac{F_V^\alpha + F_M^\alpha}{2m}\boldsymbol{\sigma}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right)\tau_\alpha \tag{2.46}$$

$$J_0^A(\mathbf{r}) = \left(-i\frac{F_A^\alpha}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}) - i\frac{\omega}{4m^2}F_P^\alpha\boldsymbol{\sigma}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right)\tau_\alpha \tag{2.47}$$

$$\mathbf{J}^A(\mathbf{r}) = F_A^\alpha\boldsymbol{\sigma}\tau_\alpha \tag{2.48}$$

L'operatore $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}$ agisce a destra su vettori ket, mentre l'$\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}$ agisce a sinistra su vettori bra, l'indice α identifica l'isospin della transizione.

Combinando le 2.45 - 2.48 con le 2.25 - 2.28 e la 2.30 otteniamo:

$$\mathcal{C}_J^V(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A} F_V^\alpha\ M_J(\mathbf{r}_i) \tag{2.49}$$

$$\mathcal{C}_J^A(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A}\left(-\frac{iF_A^\alpha}{2m}\ M_J(\mathbf{r}_i)\boldsymbol{\sigma}\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i)\ - \frac{i\omega}{4m^2}F_P^\alpha\ M_J(\mathbf{r}_i)\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i\right) \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_J^V(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A}\Bigg(&\frac{F_V^\alpha}{2m}\frac{1}{\widehat{J}}(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J-1,J}(\mathbf{r}_i) - \sqrt{J}\mathbf{M}_{J+1,J}(\mathbf{r}_i))\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i)\\ &-\frac{F_V^\alpha + F_M^\alpha}{2m}\frac{i}{\widehat{J}}(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J-1,J}(\mathbf{r}_i) - \sqrt{J}\mathbf{M}_{J+1,J}(\mathbf{r_i}))\cdot\boldsymbol{\sigma}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i\Bigg)\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\mathcal{E}_J^A(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A}\left(F_A^\alpha\frac{i}{\widehat{J}}(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J-1,J}(\mathbf{r}_i) - \sqrt{J}\mathbf{M}_{J+1,J}(\mathbf{r}_i))\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_J^V(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A}\Bigg(&-\frac{iF_V^\alpha}{2m}\mathbf{M}_{J,J}(\mathbf{r}_i)\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i)\\ &-\frac{F_V^\alpha + F_M^\alpha}{2m}\mathbf{M}_{J,J}(\mathbf{r}_i)\cdot\boldsymbol{\sigma}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i\Bigg)\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\mathcal{M}_J^A(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A} F_A^\alpha\ \mathbf{M}_{J,J}(\mathbf{r}_i)\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_J^V(\mathbf{q}) &= \sum_{i=1,A}\left(\frac{F_V^\alpha}{2m}\frac{1}{\widehat{J}}(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J+1,J}(\mathbf{r}_i)+\sqrt{J}\mathbf{M}_{J-1,J}(\mathbf{r}_i))\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i-\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i)\right.\\ &\left.-\frac{F_V^\alpha+F_M^\alpha}{2m}\frac{i}{\widehat{J}}(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J+1,J}(\mathbf{r}_i)+\sqrt{J}\mathbf{M}_{J-1,J}(\mathbf{r_i}))\cdot\boldsymbol{\sigma}\wedge\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_i\right) \quad (2.55)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_J^A(\mathbf{q}) = \sum_{i=1,A}\left(F_A^\alpha\frac{i}{\widehat{J}}(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J+1,J}(\mathbf{r}_i)+\sqrt{J}\mathbf{M}_{J-1,J}(\mathbf{r}_i))\cdot\boldsymbol{\sigma}\right) \quad (2.56)$$

Per comodità di notazione ho omesso l'operatora di isospin τ_α, $\mathbf{r_i}$ è la coordinata del i-esimo nucleone, $\widehat{J}=\sqrt{2J+1}$. Sono inoltre state definite le seguenti funzioni:

$$\mathbf{M}_{J',J}(\mathbf{r}) = j_J(\kappa r)\,\vec{\mathcal{Y}}_{J,J'}(\Omega_r) \quad (2.57)$$

$$M_J(\mathbf{r}) = j_J(\kappa r)\,Y_J(\Omega_r) \quad (2.58)$$

con $Y_J(\Omega_r)$ e $\vec{\mathcal{Y}}_{J,J'}(\Omega_r)$ che rappresentano rispettivamente le armoniche sferiche e le armoniche sferiche vettoriali in cui ho omesso l'indice M della terza componente del momento angolare. Nel calcolo degli elementi di matrice ridotta tale indice è ininfluente (vedi la 2.29). Per le considerazioni fatte in precedenza, si devono calcolare gli elementi di matrice ridotta di questi otto operatori tra funzioni d'onda nucleari. Il teorema di Wigner-Eckart permette di valutare analiticamente l'integrale sulle coordinate angolari degli operatori, il risultato è riportato in appendice C.

Per modelli nucleari in cui l'eccitazione del nucleo è descritta per mezzo di eccitazioni di singola particella, solo un termine della sommatoria $\sum_{i=1,A}$ dà contributo non nullo al calcolo dell'elemento di matrice. Tale situazione fisica è proprio il caso di interesse in questo lavoro.

2.4.4 Fattori di forma

Le espressioni della corrente debole nucleonica neutra (2.32 - 2.33) e carica (2.34 - 2.35) contengono delle funzioni reali F_i che sono state introdotte per parametrizzare l'effetto della struttura dei nucleoni in termini di quarks interagenti. Il nome di questi fattori di forma dipende dalle proprietà dell'operatore a cui vengono moltiplicati: vettoriale F_V, magnetico F_M, assiale F_A, pseudoscalare F_P. L'espressione dei fattori di forma è ricavata sperimentalmente, ma l'elevato numero di parametri impone l'utilizzo di considerazione teoriche per ridurre il numero di parametri liberi.

- Nei processi con scambio di corrente carica i fattori della parte vettoriale della corrente F_V ed F_M sono scritti in funzione dei fattori di forma della corrente nucleonica elettromagnetica. La relazione è stabilita dall'ipotesi avanzata da Feynmann e

Gell-Mann che le correnti cariche deboli e quella elettromagnetica formino un tripletto di isospin, questa ipotesi è solitamente chiamata 'estensione della conservazione della corrente vettoriale'. Si ottiene:

$$F_V^{\pm} = \frac{G_E^p - G_E^n - t(G_M^p - G_M^n)}{1-t} \tag{2.59}$$

$$F_M^{\pm} = \frac{G_M^p - G_M^n - G_E^p + G_E^n}{1-t} \tag{2.60}$$

dove ho omesso la dipendenza da q^2 dei fattori di forma, G_x^{pn} sono i fattori di forma di Sachs per protoni e neutroni, $t = q^2/4m^2$; Nell'approssimazione in cui $q^2 \ll 4m^2$ si ottiene

$$F_V^{\pm} = G_E^p - G_E^n \tag{2.61}$$

$$F_M^{\pm} = G_M^p - G_M^n - G_E^p + G_E^n \tag{2.62}$$

Anche nei processi con scambio di corrente neutra i fattori della parte vettoriale della corrente sono scritti in funzione dei fattori di forma della corrente nucleonica elettromagnetica. La relazione viene dal modo di derivazione della corrente debole neutra. Con l'approssimazione $q^2 \ll 4m^2$ si ottiene:

$$F_V^{0,p} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) G_E^p - G_E^n\right] \tag{2.63}$$

$$F_V^{0,n} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) G_E^n - G_E^p\right] \tag{2.64}$$

$$F_M^{0,p} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) (G_M^p - G_E^p) - (G_M^n - G_E^n)\right] \tag{2.65}$$

$$F_M^{0,p} = \frac{1}{2}\left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) (G_M^n - G_E^n) - (G_M^p - G_E^p)\right] \tag{2.66}$$

dove θ_W è l'angolo di Weinberg.

I fattori di forma di Sachs sono determinati empiricamente mediante lo studio dei processi di diffusione di sonde elettromagnetiche su bersagli nucleonici. Per la determinazione dei fattori si usa la consueta tecnica di separazione di Rosenbluth [Arr03] o una tecnica più recente che sfrutta fasci polarizzati [Jon00]. Si trova che l'andamento dominante è quello di dipolo:

$$G_E^p\left(q^2\right) = G\left(q^2\right) \qquad G_E^n\left(q^2\right) = 0 \tag{2.67}$$

$$G_M^p\left(q^2\right) = \mu_p G\left(q^2\right) \qquad G_M^n\left(q^2\right) = \mu_n G\left(q^2\right) \tag{2.68}$$

con

$$G\left(q^2\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{M_V^2}\right)^2} \qquad \text{con} \quad M_V^2 = 710\ MeV^2$$

dove μ_p e μ_n sono i momenti magnetici del protone e del neutrone in unità di magnetoni nucleonici. Sebbene siano state sviluppate numerose correzioni a questo andamento [Ama99] al fine di riprodurre al meglio i dati sperimentali, in questo lavoro un'accurata determinazione dei fattori di forma vettoriali non è necessaria, perché la sezione d'urto neutrino-nucleo è dominata dalla parte assiale della corrente. Tuttavia, essi sono importanti per un'esatta determinazione sperimentale dei fattori di forma assiali dallo studio dei processi neutrino-nucleone [Bud03].

- Più rilevanti ai fini del calcolo della sezione d'urto neutrino-nucleo sono i fattori di forma della parte assiale della corrente. Il fattore F_A è determinato sperimentalmente dallo studio di processi di diffusione elastica di neutrini su nucleoni. A bassi momenti trasferiti può anche essere determinato dallo studio di processi di elettroproduzione di pioni o dal decadimento beta. A bassi momenti trasferiti, i dati sperimentali sono ben riprodotti da un andamento di dipolo in analogia a quanto avviene con i fattori di Sachs:

$$F_A(q^2) = \frac{F_A(0)}{(1 - \frac{q^2}{M_A^2})^2} \tag{2.69}$$

dove i parametri $F_A(0)$ e M_A sono detti rispettivamente carica assiale e massa assiale di dipolo e sono determinati empiricamente. I valori aggiornati più comunemente usati sono $F_A(0) = -1.267$, $M_A = 1001 \pm 20 MeV$ determinato da processi di diffusione di neutrini e $M_A = 1014 \pm 16 MeV$ determinato da processi di elettroproduzione di pioni [Bud03].

Il fattore F_P moltiplica un operatore di corrente collegato al tipo di corrente adronica generata dallo scambio di pioni. Dall'ipotesi di conservazione parziale della corrente assiale (PCAC) segue che il termine di corrente legato ad F_P deriva unicamente dallo scambio di un singolo pione, da ciò segue la relazione di Goldberger-Treiman [Wal75]:

$$F_P(q^2) = \frac{4m^2 F_A(0)}{m_\pi^2 - q^2} \tag{2.70}$$

dove m_π è la massa del pione. Il alcuni testi compare $2m$ al posto di $4m^2$ ciò dipende dal modo in cui è scritta la 2.35, qui ho preferito salvaguardare l'adimensionalità dei fattori di forma.

2.5 Sezione d'urto

Il processo in esame consiste in un neutrino incidente con quadrimomento k diffuso inelasticamente da un nucleo con energia e momento $(E_i, \mathbf{P_i})$, la cinematica e le notazioni usate sono quele presentate nel paragrafo 2.1 . A causa del corto raggio d'azione dell'interazione debole, l'approssimazione di Born delle onde piane risulta adeguata a descrivere accuratamente il processo. Tuttavia, nel caso di processi

CC, il leptone carico uscente interagisce con il nucleo mediante l'interazione elettromagnetica, terrò in conto di questo effetto moltiplicando la sezione d'urto per una funzione di correzione effettiva detta funzione di Fermi. Nell'approssimazione di Born i leptoni sono trattati come onde piane, usando la regola d'oro di Fermi per il calcolo della sezione d'urto si ottiene:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{\Psi}\ \rho\left(\mathbf{k}'\right) \tag{2.71}$$

dove $\rho\left(\mathbf{k}'\right)$ è la densità degli stati finali, Ψ il flusso dei neutrini incidenti (il numero di particelle del fascio passanti attraverso l'unità di area nell'unità di tempo). Per il principio di indeterminazione di Heisenberg ogni particella occupa nello spazio delle fasi un volume pari a $(2\pi)^3$ in unità naturali ($\hbar = c = 1$). Usando la normalizzazione covariante a 2ε particelle nell'unità di volume V, ricordando che neutrini ed antineutrini sono naturalmente polarizzati e trascurando il rinculo del nucleo, si ottiene per processi inclusivi nel sistema di riferimento del laboratorio:

$$\rho\left(\mathbf{k}'\right) = \begin{cases} \frac{V}{2\varepsilon'\ (2\pi)^3} d\mathbf{k}' & \text{per processi NC} \\ \frac{V}{\varepsilon'\ (2\pi)^3} d\mathbf{k}' & \text{per processi CC} \end{cases} \tag{2.72}$$

$$\Psi = \frac{2\,|k|}{V} \tag{2.73}$$

La densità degli stati finali nei processi CC è il doppio rispetto a quella dei processi NC perché il leptone uscente non è naturalmente polarizzato. Dai risultati precedenti si ottiene:

$$d^2\sigma = |S_{fi}|^2\ \frac{V^2}{(2\pi)^3}\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon}\ d\omega\ d\Omega \qquad \text{per processi NC} \tag{2.74}$$

$$d^2\sigma = |S_{fi}|^2\ \frac{V^2}{(2\pi)^3}\frac{|\mathbf{k}'|}{2\varepsilon}\ d\omega\ d\Omega \qquad \text{per processi CC} \tag{2.75}$$

da questo risultato si può passare a quello ottenuto con una normalizzazione ad una particella per unità di volume semplicemente moltiplicando per $4\varepsilon\varepsilon'$, comunque il risultato finale non dipende dalla normalizzazione (vedi discussione in appendice A). Combinando le 2.74 - 2.75 con la 2.14 per la sezione d'urto doppio differenziale si ottiene:

$$\frac{d^2\sigma(\theta,\omega)}{d\omega\ d(\cos\theta)} = \frac{G^2}{2\pi}\frac{V^2}{8}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{1}{2J_i+1}\sum_{ss'}\sum_{m_i m_f}\sum_{ph}\left|l_\mu\left(\mathbf{k},\mathbf{k}'\right)\widetilde{J}^\mu\left(\mathbf{q}\right)\right|^2 \tag{2.76}$$

$$\frac{d^2\sigma(\theta,\omega)}{d\omega\ d(\cos\theta)} = \frac{(G\cos\theta_C)^2}{2\pi}\frac{V^2}{8}\frac{2\,|\mathbf{k}'|}{\varepsilon}\frac{1}{2J_i+1}F(Z',\varepsilon')\sum_{ss'}\sum_{m_i m_f}\sum_{ph}\left|l_\mu\left(\mathbf{k},\mathbf{k}'\right)\widetilde{J}^\mu\left(\mathbf{q}\right)\right|^2 \tag{2.77}$$

dove ho integrato sull'angolo azimutale ϕ ($d\Omega = 2\pi d(\cos\theta)$), ho incluso la somma sugli stati finali e la media sugli stati iniziali per lo spin del neutrino (ss') e la terza componente del momento angolare del nucleo ($m_i m_f$). Il fattore $2J_i + 1$ è la degenerazioni della terza componente del momento angolare dello stato iniziale. Poiché tratterò soltanto nuclei che nello stato iniziale hanno simmetria sferica allora $J_i = 0$. La sommatoria su ph è tipica di un processo inclusivo ed indica la somma su tutti gli stati del nucleo prodotto compatibili con un'energia di eccitazione pari all'energia trasferita ω. In alcuni testi il fattore $V^2/8$ non compare esplicitamente perché si semplifica con il fattore $8/V^2$ del termine leptonico 2.20. In questo lavoro il fattore $8/V^2$ è inglobato nell'ampiezza di transizione.

Nei processi CC il leptone carico uscente interagisce elettromagneticamente con il nucleo residuo. L'utilizzo dell'onda piana nella 2.20 non descrive correttamente la situazione fisica, l'onda piana dovrebbe essere sostituita dalla funzione d'onda di una particella nel campo Coulombiano del nucleo residuo. Si tiene conto di questo effetto introducendo nella sezione d'urto una funzione correttiva $F(Z', \varepsilon')$ detta funzione di Fermi [Pov98]:

$$F(Z', \varepsilon') = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \qquad \text{con} \qquad \eta = \mp \frac{Z'\alpha}{\sqrt{1 - \frac{m_l^2}{\varepsilon'^2}}} \tag{2.78}$$

$\mp$ si riferisce a leptoni uscenti $l^\pm$, α è la costante di struttura fine, Z' la carica del nucleo residuo.

L'effetto trascurato del rinculo del nucleo provoca delle modifiche all'espressione della sezione d'urto, in particolare l'espressione usata per la densità degli stati finali 2.72 non è corretta. Anche in questo caso si può tener conto dell'effetto introducendo una funzione correttiva nella sezione d'urto, tuttavia è noto che l'effetto è trascurabile [Wal75]. L'effetto del rinculo del nucleo negli elementi di matrice nucleari è trascurato, i modelli nucleari qui usati (Capitolo 3) non contemplano un possibile moto traslazionale del nucleo.

Per molte applicazioni la direzione del leptone uscente non è rilevante, la sezione d'urto doppio differenziale nelle 2.76-2.77 può essere integrata in θ, si ottiene:

$$\frac{d\sigma(\omega)}{d\omega} = \int_0^\pi \frac{d^2\sigma(\theta,\omega)}{d\omega\; d(\cos\theta)} \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 \frac{d^2\sigma(\theta,\omega)}{d\omega\; d(\cos\theta)} d(\cos\theta) \tag{2.79}$$

La sezione d'urto totale funzione della sola energia del neutrino incidente è data da

$$\sigma(\varepsilon_i) = \int_{\omega_s}^{\varepsilon_i - m_f} \frac{d\sigma(\omega)}{d\omega} d\omega$$

Il limite superiormente dall'intervallo d'integrazione è determinato dalla condizione di conservazione dell'energia: $\omega = \varepsilon_i - m_f$ e produzione di un leptone a riposo per processi CC, $\omega < \varepsilon_i$ per processi NC. Il limite inferiore dell'intervallo d'integrazione è invece una condizione derivante dai modelli utilizzati in questo lavoro, l'energia minima necessaria per l'emissione di un nucleone dipende dal livello energetico dell'ultimo stato di singola particella occupato. In molte applicazioni il flusso di neutrini incidenti non è monoenergetico, allo scopo di determinare il numero di eventi nel rivelatore è necessario effettuare una convoluzione tra $\sigma(\varepsilon_i)$ e la funzione di distribuzione energetica del flusso.

Combinando le 2.23-2.24 con la 2.14 ed usando la 2.29 si ottiene per la probabilità di transizione:

$$\sum_{ss' M_i M_f} \left| l_\mu \left(\mathbf{k}, \mathbf{k}'\right) \widetilde{J}^\mu \left(\mathbf{q}\right) \right|^2 =$$

$$= 4\pi \sum_{J=0} \left| l_0 \left\langle J_f \left\| \mathcal{C}_J \right\| J_i \right\rangle + l_3 \left\langle J_f \left\| \mathcal{L}_J \right\| J_i \right\rangle \right|^2 + 2\pi \sum_{J=1} \sum_{\eta=\pm 1} \left| l_\gamma \left\langle J_f \left\| \mathcal{E}_J - \eta \mathcal{M}_J \right\| J_i \right\rangle \right|^2$$

$$= 4\pi \sum_{J=0} \sigma_L^J + 2\pi \sum_{J=1} \sigma_T^J \tag{2.80}$$

il contributo della parte di carica e longitudinale della corrente è dato da

$$\sigma_C^J = L_0 \left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{C}_J^A \right\| J_i \right\rangle \right|^2 + L_3 \left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{L}_J^A \right\| J_i \right\rangle \right|^2 + L_S \left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{C}_J^V \right\| J_i \right\rangle \right|^2$$
$$+ 2 L_{03} \, \mathrm{Re} \left(\left\langle J_f \left\| \mathcal{C}_J^A \right\| J_i \right\rangle \; \left\langle J_f \left\| \mathcal{L}_J^A \right\| J_i \right\rangle^* \right) \tag{2.81}$$

il contributo della parte trasversale

$$\sigma_T^J = L_+ \left(\left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{E}_J^V \right\| J_i \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{M}_J^V \right\| J_i \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{E}_J^A \right\| J_i \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle J_f \left\| \mathcal{M}_J^A \right\| J_i \right\rangle \right|^2 \right)$$
$$- 2 L_- \, \mathrm{Re} \left(\left\langle J_f \left\| \mathcal{E}_J^V \right\| J_i \right\rangle \left\langle J_f \left\| \mathcal{M}_J^A \right\| J_i \right\rangle^* + \left\langle J_f \left\| \mathcal{E}_J^A \right\| J_i \right\rangle \left\langle J_f \left\| \mathcal{M}_J^V \right\| J_i \right\rangle^* \right) \tag{2.82}$$

nelle precedenti equazioni ho usato la 2.29 e la conservazione della parte vettoriale della corrente (CVC) $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ [Wal75] che permette di fissare la seguente relazione tra gli operatore di Coulomb e longitudinale vettoriale:

$$\left\langle J_f \left\| \mathcal{C}_J^V \right\| J_i \right\rangle = \frac{|\mathbf{q}|}{\omega} \left\langle J_f \left\| \mathcal{L}_J^V \right\| J_i \right\rangle \tag{2.83}$$

Nello scrivere la 2.80 ho sfruttato il fatto che non c'è interferenza tra i termini trasversali che compaiono nella 2.82 e quelli longitudinali e coulombiani che compaiono nella 2.81 poiché i primi hanno $m = \gamma = \pm 1$ mentre gli altri $m = \gamma = 0$. Inoltre ho anche considerato che non vi è interferenza tra operatori con multipolarità differenti. Le multiplarità degli operatori sono riportate in tabella 2.1. Da quanto detto segue che gli unici termini di interferenza non nulli sono tra gli operatori $\mathcal{C}_J^A$ e $\mathcal{L}_J^A$, tra $\mathcal{M}_J^V$ e $\mathcal{E}_J^A$, tra $\mathcal{E}_J^V$ e $\mathcal{M}_J^A$ e tra $\mathcal{C}_J^V$ e $\mathcal{L}_J^V$, per quest'ultimo il termine di interferenza non compare esplicitamente nella 2.81 ma solo nel coefficiente leptonico L_S perché ho sfruttando la 2.83.

$P = (-)^J$	(Parità naturale)	$\mathcal{C}_J^V$	$\mathcal{L}_J^V$	$\mathcal{E}_J^V$	$\mathcal{M}_J^A$
$P = (-)^{J+1}$	(Parità non naturale)	$\mathcal{C}_J^A$	$\mathcal{L}_J^A$	$\mathcal{E}_J^A$	$\mathcal{M}_J^V$

Tabella 2.1: Parità degli operatori multipolari. Per ogni operatore la componente vettoriale e quella assiale hanno parità opposte.

I termini trasversali non contribuiscono alle transizioni con $J = 0$, in particolare stati eccitazioni di tipo 0^+ sono eccitati solo da operatori vettoriali (C_J^V e L_J^V), mentre stati di tipo 0^- solo da operatori assiali (C_J^A e L_J^A). Da ciò segue che l'interazione debole è in grado di eccitare il nucleo in uno stato 0^- mentre l'interazione elettromagnetica non può farlo poiché è priva della parte assiale della corrente.

	espressione generale
L_0	$\varepsilon\varepsilon' + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'$
L_3	$2\left(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{q}}\right)\left(\mathbf{k}'\cdot\hat{\mathbf{q}}\right) + \varepsilon\varepsilon' - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'$
L_{03}	$\hat{\mathbf{q}}\cdot\left(\varepsilon'\mathbf{k}+\varepsilon\mathbf{k}'\right)$
L_+	$2\left(\varepsilon\varepsilon' - \left(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{q}}\right)\left(\mathbf{k}'\cdot\hat{\mathbf{q}}\right)\right)$
L_-	$\pm 2\hat{\mathbf{q}}\cdot\left(\varepsilon'\mathbf{k}-\varepsilon\mathbf{k}'\right)$
$L_S = L_0 + 2\frac{\omega}{\lvert\mathbf{q}\rvert}L_{03} - 2\frac{\omega^2}{\lvert\mathbf{q}\rvert^2}L_3$	

Tabella 2.2: Espressione generale dei termini leptonici che compaiono nelle 2.81 2.82 calcolati usando la 2.20.

Il valore dei fattori leptonici L_x presenti nelle 2.81-2.82 è stato calcolato in accordo con la 2.20 e dipende dal tipo di processo considerato. Il risultato generale valevole per ogni processo semileptonico che coinvolge i neutrini è riportato in Tab. 2.2. I risultati relativi ai processi NC e CC sono riportati in Tab. 2.3 e sono stati ottenuti imponendo rispettivamente ($m_i = 0$ $m_f = 0$) e ($m_i = 0$ $m_f = m$). Il dettaglio dei calcoli è riportato in appendice A.

	processi NC	processi CC
L_0	$2\varepsilon\varepsilon' \cos^2 \frac{\theta}{2}$	$\frac{(\varepsilon+\varepsilon')^2-m^2-\lvert\mathbf{q}\rvert^2}{2}$
L_3	$2\varepsilon\varepsilon' \frac{\omega^2}{\lvert\mathbf{q}\rvert^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$	$\frac{\left(\varepsilon'^2-\varepsilon^2+m^2\right)^2}{2\lvert\mathbf{q}\rvert^2} - \frac{\omega^2}{2} + \frac{m^2}{2}$
L_{03}	$2\varepsilon\varepsilon' \frac{\omega}{\lvert\mathbf{q}\rvert} \cos^2 \frac{\theta}{2}$	$\frac{(\varepsilon+\varepsilon')\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2+m^2\right)-\omega\lvert\mathbf{q}\rvert^2}{2\lvert\mathbf{q}\rvert}$
L_+	$2\varepsilon\varepsilon' \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon\varepsilon'(1-\cos\theta)}{\lvert\mathbf{q}\rvert^2} (1-\cos\theta)$	$2\varepsilon\varepsilon' - \frac{\left(\varepsilon'^2-\varepsilon^2+m^2\right)^2-\lvert\mathbf{q}\rvert^4}{2\lvert\mathbf{q}\rvert^2}$
L_-	$\pm 2\varepsilon\varepsilon' \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\lvert\mathbf{q}\rvert} (1-\cos\theta)$	$\pm \frac{(\varepsilon+\varepsilon')\lvert\mathbf{q}\rvert^2-\omega\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2+m^2\right)}{\lvert\mathbf{q}\rvert}$
$L_S = L_0 + 2\frac{\omega}{\lvert\mathbf{q}\rvert}L_{03} - 2\frac{\omega^2}{\lvert\mathbf{q}\rvert^2}L_3$		

Tabella 2.3: Espressione dei termini leptonici che compaiono nelle 2.81 2.82 nel caso di processi NC e CC. Anche se non appare immediato il risultato NC corrisponde al limite per $m \to 0$ del risultato CC.

Dall'analisi della dipendenza angolare dei fattori leptonici (vedi tab. 2.4) è chiaro che per $\theta \to 0$ gli operatori di Coulomb e longitudinali sono dominanti, per $\theta \to \pi$ sono dominanti gli operatori trasversali (elettrici e magnetici). In particolare nei processi NC per $\theta = 0$ contribuiscono solo gli operatori di coulomb e longitudinali, mentre per $\theta = \pi$ contribuiscono solo quelli trasversali. Queste considerazioni possono essere combinate con quanto riportato nel paragrafo 2.4.3 sull'ordine degli operatori nello sviluppo in $\lvert\mathbf{p}\rvert/m$, segue che per diffusione in avanti il termine dominante è il longitudinale vettoriale mentre per diffusione all'indietro i due trasversali assiali.

Nei processi NC la sola differenza tra diffusione di neutrino e diffusione di antineutrino è nei termini leptonici. In particolare solo L_- cambia il suo segno (+ per neutrini, - per antineutrini). Nei processi CC cambia anche l'isospin totale del nucleo quindi cambiano anche gli elementi di matrice ridotta di tutti gli operatori.

2.6 Sezione d'urto di diffusione di elettroni

Il formalismo per il calcolo della sezione d'urto descritto nei precedenti paragrafi può essere applicato anche al calcolo della sezione d'urto di diffusione di elettroni. In regime ultrarelativistico ($m_e = 0$) la cinematica del processo (e, e') è uguale a quella dei processi NC di neutrini. Si può dedurre la sezione d'urto per processi (e, e') usando i seguenti accorgimenti:

- Eliminare i termini assiali della corrente. La corrente elettromagnetica è puramente vettoriale.
- Sostituire i fattori di forma F_V ed F_M con quelli elettromagnetici. La struttura

	processi NC		processi CC	
	$\theta \to 0$	$\theta \to \pi$	$\theta \to 0$	$\theta \to \pi$
$L_0\ L_3\ L_{03}$	$2\varepsilon\varepsilon'$	0	$\varepsilon\varepsilon'\left(1+\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon'^2}}\right)$	$\varepsilon\varepsilon'\left(1-\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon'^2}}\right)$
L_+	0	$4\varepsilon\varepsilon'$	$2\varepsilon\varepsilon'\left(1-\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon'^2}}\right)$	$2\varepsilon\varepsilon'\left(1+\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon'^2}}\right)$
L_-	0	$\pm 4\varepsilon\varepsilon'$	$\pm 2\varepsilon\varepsilon'\left(1-\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon'^2}}\right)$	$\pm 2\varepsilon\varepsilon'\left(1+\sqrt{1-\frac{m^2}{\varepsilon'^2}}\right)$

Tabella 2.4: Comportamento dei coefficienti leptonici nei limiti di diffusione in avanti ($\theta \to 0$) e all'indietro ($\theta \to \pi$) per processi NC e CC. I temini leptonici trasversali sono dominanti per $\theta \to \pi$, quelli longitudinali per $\theta \to 0$. I risultati per i processi NC corrispondono a quelli dei processi CC nel limite della massa del leptone usciente $m = 0$.

della corrente elettromagnetica è uguale a quella della parte vettoriale della corrente debole ma il valore dei fattori di forma è diverso.

- Includere un fattore 1/4 nella sezione d'urto. Gli elettroni non sono naturalmente polarizzati come i neutrini. Nel calcolare i termini derivanti dalla corrente leptonica (2.20), l'operatore di proiezione $(1-\gamma_5)$ deve essere eliminato. Nel calcolo, si sfrutta la relazione $(1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5)$. Il termine leptonico derivante dalla presenza di γ_5 ha un contributo non nullo solo in L_- che essendo moltiplicato a termini di interferenza tra parte assiale e vettoriale non compare nei processi (e, e'), rimane invece il fattore 2, quindi è necessario includere un fattore 1/2 nella sezione d'urto. Inoltre, la media sugli stati iniziali dello spin dell'elettrone impone l'inclusione di un altro fattore 1/2.
- Sostituire la costante di accoppiamento per lo scambio di un bosone Z_0 con quella di un fotone virtuale.

$$\left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2 \to \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 = \frac{\pi^2\alpha^2}{\varepsilon^2\varepsilon'^2 \sin^4(\theta/2)} \tag{2.84}$$

Usando questi accorgimenti dalla sezione d'urto neutrino-nucleo si ottiene:

$$\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{8\varepsilon^2\varepsilon'^2 \sin^4(\theta/2)} \left[4\pi L_s \sum_{J=0} \left|\left\langle J_f \left\| \mathcal{C}_J^V \right\| J_i \right\rangle\right|^2 + \right.$$

$$+2\pi L_{+}\sum_{J=1}\left(\left|\left\langle J_f\left\|\mathcal{E}_J^V\right\|J_i\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle J_f\left\|\mathcal{M}_J^V\right\|J_i\right\rangle\right|^2\right)\Bigg]$$

$$= 4\pi\sigma_M\left[\frac{q^2-\omega^2}{q^2}\sum_{J=0}\left|\left\langle J_f\left\|\mathcal{C}_J^V\right\|J_i\right\rangle\right|^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{q^2-\omega^2}{2q^2}+\tan^2(\theta/2)\right)\sum_{J=1}\left(\left|\left\langle J_f\left\|\mathcal{E}_J^V\right\|J_i\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle J_f\left\|\mathcal{M}_J^V\right\|J_i\right\rangle\right|^2\right)\right] \tag{2.85}$$

dove

$$\sigma_M=\frac{\alpha^2\cos^2(\theta/2)}{4\varepsilon^2\sin^4(\theta/2)} \tag{2.86}$$

è la sezione d'urto di Mott. Il risultato così ottenuto corrisponde esattamente all'espressine della sezione d'urto per diffusione di elettroni riportata in [For66]. Si noti che in [For66] il fattore 4π è incluso nelle risposte nucleari.

Capitolo 3

MODELLI NUCLEARI

Il formalismo sviluppato nel precedente capitolo ha permesso di scrivere l'espressione della sezione d'urto dei processi 2.1-2.4 in maniera indipendente dal modello nucleare. Le uniche ipotesi fin qui fatte sono che il nucleo compia una transizione tra stati con parità e momento angolare definito, e che sia possibile scrivere l'elemento di matrice della transizione nucleare come somma di elementi di matrice di transizione dei singoli nucleoni costituenti (2.30).

Per calcolare gli elementi di matrice presenti nella 2.80 è necessario definire l'espressione della funzione d'onda e quindi scegliere un opportuno modello nucleare. In questo capitolo presenterò i modelli utilizzati per il calcolo delle risposte nucleari. L'utilizzo di più modelli è dettato dall'intenzione di descrivere l'interazione neutrino-nucleo in un ampio intervallo energetico. Un modello a particelle indipendenti (Paragrafo 3.1) descrive adeguatamente le risposte nucleari nella regione del picco quasi elastico. Nella regione delle risonanze giganti, gli effetti dovuti a moti collettivi diventano importanti ed è necessario l'utilizzo di modelli che permettano di descrivere tali eccitazioni. In questo lavoro ho utilizzato la Random Phase Approximation (RPA) (Paragrafo 3.2) che descrive lo stato eccitato con correlazioni di tipo $1p-1h$ ed un modello fenomenologico (Paragrafo 3.3) che include correlazioni di ordine superiore.

Particolarmente rilevante è l'estenzione del modello RPA al continuo (CRPA) che è stata ampiamente utilizzata in processi di diffusione di elettroni, da dove è noto che il modello è in grado di ben descrivere le risposte nucleari nella regione delle risonanze giganti. Le equazioni CRPA sono state risolte con una tecnica basata sullo sviluppo in serie di Fourier-Bessel. Questa tecnica è stata originariamente sviluppata per includere interazioni residue a zero range [Har82]. Al fine di ben descrivere le risposte nucleari anche nella regione del picco quasi-elastico con il modello CRPA, la tecnica risolutiva è stata successivamente modificata per permette l'inclusione di interazioni residue a range finito [Co88]. In questo lavoro, il formalismo è stato ulteriormente sviluppato per permetterne l'applicazione a processi con cambio carica.

3.1 Il Modello a campo medio

3.1.1 Ipotesi del modello

Nell'ambito della teoria quantistica non relativistica, il nucleo è descritto dall'hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1}^{A} T_i + \sum_{i<j} V_{i,j} + \sum_{i<j<k} V_{i,j,k} \tag{3.1}$$

dove T_i è l'energia cinetica dell'i-esimo nucleone, $V_{i,j}$ il potenziale di interazione forte tra due nucleoni, $V_{i,j,k}$ l'interazione a tre corpi, $(i) = (\mathbf{r}_i, s_i, t_i)$ rappresenta le coordinate spaziali, lo spin e l'isospin dell'i-esimo nucleone. Nella 3.1 ho esplicitato anche un'interazione a tre corpi che è solitamente introdotta per descrivere correzioni dovute alla struttura interna dei nucleoni, è noto che tale interazioni ha un ruolo meno importante di quella a due corpi. In questo lavoro le interazioni a tre corpi saranno trascurate. Il principio di esclusione di Pauli impone inoltre che la funzione d'onda nucleare $\Psi(1, ..., A)$ sia antisimmetrica per lo scambio di due particelle. Il metodo di descrizione derivante dalle suddette prescrizioni è solitamente chiamato approccio standard alla fisica nucleare (SNPA).

L'ipotesi fondamentale del modello a campo medio consiste nel sostituire la 3.1 con:

$$H_0 = \sum_{i=1}^{A} h_i = \sum_{i=1}^{A} \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right) \tag{3.2}$$

ciò significa che l'interazione tra i nucleoni espressa da $\sum_{i<j} V(i,j)$ nella 3.1 è sostituita da un campo stazionario locale con potenziale $U(\mathbf{r})$ che descrive l'effetto medio esercitato sull'i-esimo nucleone da parte degli altri $A-1$ nucleoni. Una tale ipotesi è giustificata teoricamente dal piccolo cammino libero medio dei nucleoni nel nucleo rispetto alle dimensioni del nucleo stesso [Rin80] e dalle osservazioni sperimentali delle energie di legame nucleoniche che manifestano una chiara analogia con quanto osservato nel caso degli elettroni atomici. Da questa ipotesi segue che le funzioni d'onda nucleare $\Psi(1, ..., A)$ sono espresse da determinanti di Slater di funzioni d'onda di singola particella soluzioni dell'equazione:

$$h_i \phi_k(i) = \varepsilon_k \phi_k(i) \tag{3.3}$$

In questo lavoro l'interesse è limitato a nuclei doppio magici, questi hanno simmetria sferica e possono essere descritti da un potenziale medio con analoga simmetria. Per un potenziale centrale, dipendente cioè dalla sola coordinata radiale ($V(\mathbf{r}) = V(r)$), motivi di simmetria impongono che le $\phi_i(i)$ siano autostati simultanei dell'energia, momento angolare orbitale, spin, momento angolare totale e sua proiezione sull'asse z. Le funzioni d'onda risultano quindi ben caratterizzate dai numeri quantici l, s, j, m e dal valore dell'energia. La 3.3 ammette soluzioni della forma:

$$\phi_i(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r)\mathcal{Y}_{ljm}(\Omega_i) \tag{3.4}$$

dove la parte angolare e di spin è costituita dalle armoniche sferiche di spin (Appendice E):

$$\mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) = \sum_{\nu s_z} \langle l\mu s s_z | jm\rangle \, Y_{l\mu}(\Omega)\, \chi_{s_z} \tag{3.5}$$

qui $Y_{l\mu}(\Omega_i)$ sono le armoniche sferiche, χ_{s_z} gli spinori di Pauli, s_z la proiezione dello spin sull'asse z. La parte radiale $R_{nlj}(r_i)$ è soluzione dell'equazione radiale di Schordinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dr^2} - \frac{l\,(l+1)}{r^2}\right) + U\,(r) - \varepsilon_{nlj}\right] rR_{nlj}(r) = 0 \tag{3.6}$$

dove l'indice n detto numero quantico principale indica il valore dell'energia per stati legati. Il potenziale utilizzato in questo lavoro ha la seguente espressione:

$$U\,(r) = U_C(r) + U_{SO}(r) + U_{Coul}\,(r) \tag{3.7}$$

con

$$U_C(r) = \frac{V}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \tag{3.8}$$

$$U_{SO}(r) = \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{V_S}{1 + e^{\frac{r-R_S}{a_S}}}\right) \mathbf{l}\cdot\mathbf{s} \tag{3.9}$$

$$U_{Coul}\,(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{2R_c}\left(3 - \left(\frac{r}{R_c}\right)\right) & \text{per} \quad r \leq R_c \\ \frac{(Z-1)e^2}{2r} & \text{per} \quad r > R_c \end{cases} \tag{3.10}$$

dove U_C è la parte centrale di potenziale detta di Wood-Saxon, V, R, A sono rispettivamente la sua profondità, il raggio e la diffusività, U_{SO} è il termine di spin-orbita con m_π massa del pione, U_{Coul} è il termine di Coulomb che tiene conto della repulsione elettromagnetica tra protoni, la sua espressione è quella del potenziale generato da una sfera uniformemente carica di raggio R_c e carica totale $Z - 1$.

Lo stesso potenziale è stato utilizzato per generare le funzioni d'onda di stati legati e nel continuo. I valori dei parametri usati nel potenziale saranno discussi nel prossimo capitolo.

3.1.2 Descrizione dello stato nucleare

Per descrivere lo stato del nucleo è comodo utilizzare il formalismo detto della rappresentazione dei numeri di occupazione (RNO) [Rin80]. Nel modello a particelle indipendenti lo stato fondamentale del nucleo è quello in cui i nucleoni occupano tutti gli stati di singola particella al di sotto del livello di Fermi. La funzione d'onda nucleare espressa dal corrispondente determinante di Slater si indica con $|\Phi_0\rangle$. Uno stato eccitato è descritto dalla presenza di uno o più nucleoni in stati al di sopra del livello di Fermi (stati particella) e della contemporanea assenza di uno o più nucleoni negli stati al di sotto del livello di Fermi (stati buca). Il passaggio di un solo nucleone al di sopra del livello di Fermi provoca una eccitazione nucleare di tipo una particella un buco (1p-1h). Un tale stato eccitato si indica con:

$$|\Phi_{J,M}\rangle = a_p^+ a_h |\Phi_0\rangle \tag{3.11}$$

dove a^+, a sono rispettivamente l'operatore di creazione e distruzione degli stati, p ed h indicano stati buca e stati particella e sottointendono l'insieme dei numeri quantici che caratterizzano gli stati di singola particella:

$$p = \{\varepsilon_p, j_p, m_p, l_p, s\} \tag{3.12}$$

L'energia di eccitazione dello stato è data da $\omega = \varepsilon_p - \varepsilon_h$. Il momento angolare e la parità dello stato nucleare dipendono unicamente dall'accoppiamento buca-particella dell'eccitazione. In questo lavoro considero nuclei pari-pari a doppia shell chiusa, in questa particolare situazione si ha che:

- lo stato fondamentale dei nuclei è caratterizzato da $J = 0$ e $\pi = 1$ (0^+)
- gli stati eccitati di singola particelle hanno J e π determinati soltato dagli stati particella e buca coinvolti nell'eccitazione. Dalla conservazione del momento angolare e della parità si hanno le seguenti regole di selezione:

$$|j_p - j_h| \ < \ J < |j_p + j_h| \tag{3.13}$$

$$\pi \ = \ (-1)^{l_p + l_h} \tag{3.14}$$

Nell'ipotesi di campo medio l'hamiltoniana che descrive la struttura nucleare è un operatore ad un corpo (3.2), inoltre in questo lavoro l'uso dell'IA (2.30) permette di scrivere anche gli operatori che descrivono le transizioni tra stati nucleari (2.49-2.56) nei termini di operatori ad un corpo. Nel formalismo RNO un generico operatore ad un corpo dipendente dalle coordinate dei nucleoni $O = \sum_i o_i$ si indica con:

$$O_{J,M} = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | o_{J,M} | \beta \rangle \, a_\alpha^+ a_\beta \tag{3.15}$$

L'elemento di matrice che descrive una eccitazione di tipo 1p-1h diventa:

$$\langle \Phi_{J,M} | O_{J,M} | \Phi_0 \rangle = \left\langle \Phi_0 \left| a_h^+ a_p \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | o_{J,M} | \beta \rangle \, a_\alpha^+ a_\beta \right| \Phi_0 \right\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | o_{J,M} | \beta \rangle \delta_{\alpha p} \delta_{\beta h} = \langle p | o_{J,M} | h \rangle \tag{3.16}$$

dove ho sfruttato le proprietà degli operatori a_p^+, a_h. Questa equazione mostra che nelle ipotesi qui utilizzate il calcolo degli elementi di matrice nucleare si riduce al calcolo degli elementi di matrice di singola particella. Nel paragrafo 2.4.1 l'applicazione del teorema di Wigner-Eckart ha permesso di scrivere gli elementi di matrice nucleare in funzione degli elementi di matrice ridotta, per questi ultimi si ottiene:

$$\langle \Psi_{J,M} \| O_J \| \Psi_0 \rangle = \langle p \| o_J \| h \rangle = \int dr R_p^*(r) \langle j_p \| o_J \| j_h \rangle R_h(r) \tag{3.17}$$

Ricordo che in questo lavoro l'interesse è limitato a processi di eccitazione con emissione di un nucleone, quindi lo stato di particella nelle eccitazioni 1p-1h è nel continuo.

3.1.3 Considerazioni

L'ipotesi fondamentale del modello a campo medio 3.2 introduce il centro del potenziale come un punto privilegiato dello spazio, ciò impedisce di descrivere il moto traslazionale del nucleo e di fatto riduce il numero di gradi di libertà spaziali del sistema da $3A$ a $3A-3$. Gli elementi di matrice nucleare calcolati con questo modello si riferiscono alla situazione fisica di un nucleo privo di moto traslazionale. Comunque, nei processi di interesse in questo lavoro, il rinculo del nucleo può essere trascurato perché l'energia trasferita è molto minore della massa del nucleo.

Un limite più rilevante nei modelli a particella indipendente riguarda l'incapacità di descrivere eccitazioni di tipo collettivo del nucleo, cioè stati in cui più nucleoni partecipano in maniera correlata all'eccitazione come nel caso di effetti di pairing, moti vibrazionali o rotazionali. Molte tecniche sono state sviluppate per introdurre correlazioni tra stati di singola particella, tra queste la più accreditata è la Random Phase Approximation che sarà descritta nel prossimo paragrafo.

3.2 Continuum Random Phase Approximation

3.2.1 Ipotesi del modello RPA

L'idea alla base del modello RPA consiste nel utilizzare l'Hamiltoniana 3.1 senza il termine a tre corpi

$$H = \sum_{i=1}^{A} -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i<j}^{A} V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) \tag{3.18}$$

e sviluppare la funzione d'onda nucleare $\Psi(1, .., A)$ sulla base dei determinanti di Slater di funzioni d'onda di singola particella soluzioni dell'hamiltoniana H_0 scritta nella 3.2. Ciò non introduce alcuna ipotesi poiché l'insieme dei determinanti di Slater è una base completa per la funzione d'onda nucleare [Row70]:

$$\Psi(1,..,A) = \sum_{ph} C_{ph}\Phi_{1p-1h}\,(1,...,A) + \sum_{php'h'} C_{php'h'}\Phi_{2p-2h}\,(1,...,A) + ... \tag{3.19}$$

La diagonalizzazione dell'hamiltoniana 3.18 sulla nuova base è un problema di difficile soluzione a causa della grandezza della matrice stessa. L'ipotesi fondamentale del modello RPA è di considerare solo i termini di tipo $1p-1h$. In questo lavoro gli effetti relativi ai termini di tipo $2p-2h$ e più in generale ai termini di tipo $np-nh$ saranno inclusi in seguito (Capitolo 3.3) in maniera fenomenologica.

L'ipotesi su esposta corrisponde a descrivere lo stato ecitato nucleare come combinazione lineare di eccitazioni particella-buca e buca-particella

$$|\Psi_{J,M}\rangle = Q^{+}_{J,M}\,|\Psi_{0,0}\rangle \tag{3.20}$$

con

$$Q^{+}_{J,M} = \sum_{ph} X^{J,\omega}_{ph} a^{+}_{p} a_{h} + Y^{J,\omega}_{ph} a^{+}_{h} a_{p} \tag{3.21}$$

dove $X^{J,\omega}_{ph}$, $Y^{J,\omega}_{ph}$ dette ampiezze di transizione, rappresentano il peso di un'eccitazione di singola particella nello stato eccitato nucleare. L'operatore di eccitazione $Q^{+}_{J,M}$ è composto sia da operatori di creazione di coppie particella-buca ($a^{+}_{p}a_{h}$), sia da operatori di distruzione di coppie particella-buca ($a^{+}_{h}a_{p}$). Questi ultimi impongono che lo stato fondamentale dell'RPA $|\Psi_{0,0}\rangle$ contenga già eccitazioni di tipo particella-buca e quindi sia diverso da quello del modello a campo medio. Le coppie $p-h$ utilizzate nella 3.21 per la descrizione dello stato eccitato nucleare con momento angolare e parità definiti (J^P) sono determinate in base alle regole di selezione 3.13 e 3.14. Le funzioni d'onda di singola particella utilizzate sono le stesse ottenute con il modello a campo medio discusso nel paragrafo precedente. Le ampiezze $X^{J,\omega}_{ph}$, $Y^{J,\omega}_{ph}$ che rappresentano il peso di una transizione di singola particella nell'eccitazione collettiva del nucleo, possono essere determinate risolvendo le equazioni RPA:

$$(\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega)\,X^{J,\omega}_{ph} + \sum_{p'h'}\left[v_{php'h'}X^{J,\omega}_{p'h'} + u_{php'h'}Y^{J,\omega}_{p'h'}\right] \;=\; 0 \tag{3.22}$$

$$(\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega)\,Y^{J,\omega}_{ph} + \sum_{p'h'}\left[v^{*}_{php'h'}Y^{J,\omega}_{p'h'} + u^{*}_{php'h'}X^{J,\omega}_{p'h'}\right] \;=\; 0 \tag{3.23}$$

L'interazione residua nucleone-nucleone compare esclusivamente nei coefficienti u e v composti da un termine diretto ed uno di scambio (detto di Pauli):

$$v_{php'h'} \;=\; \langle ph\,|V|\,p'h'\rangle - \langle ph\,|V|\,h'p'\rangle \tag{3.24}$$

$$u_{php'h'} \;=\; \langle pp'\,|V|\,hh'\rangle - \langle pp'\,|V|\,h'h\rangle \tag{3.25}$$

dove l'elemento di matrice a due corpi è dato da:

$$\langle pp' \left| V \right| hh' \rangle = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \left(\phi^*_p(\mathbf{r}_1) \phi^*_{p'}(\mathbf{r}_2) V \left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \right) \phi_h(\mathbf{r}_1) \phi_h(\mathbf{r}_2) \right)$$

Nelle equazioni precedenti ϵ_p ed ϵ_h sono le energie di singola particella, ω l'energia di eccitazione e $V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right)$ l'interazione nucleone-nucleone.

Le $(3.22 - 3.23)$ possono essere ricavate utilizzando approcci diversi. Uno di questi consiste nell'utilizzare il metodo della linearizzazione delle equazioni del moto [Row70] e l'approssimazione quasi bosonica che permette di calcolare il valore di aspettazione di alcuni operatori utilizzando lo stato fondamentale del modello IPM al posto di $|\Psi_0\rangle$. Un altro metodo si basa sulla soluzione dell'eq. di Dyson e l'utilizzo della funzione di Green a due corpi [Fet71]. Un altro ancora sfrutta le equazioni della teoria Hartree-Fock dipendente dal tempo [Rin80].

Le equazioni RPA costituiscono un sistema lineare omogeneo nelle incognite X^J_{ph}, Y^J_{ph}
Le ampiezze sono normalizzate in modo che

$$\sum_{ph} \left(X^J_{ph} \right)^2 + \left(Y^J_{ph} \right)^2 = 1 \tag{3.26}$$

Nel caso in cui $V(r_1, r_2)$ tende a zero le soluzioni RPA tendono a quelle del modello a campo medio, infatti per $V(r_1, r_2) = 0$ si ottiene:

$$X^J_{ph} = 1 \tag{3.27}$$
$$Y^J_{ph} = 0 \tag{3.28}$$

Come nel modello a campo medio anche nel modello RPA, l'elemento di matrice nucleare che descrive la transizione si riduce al calcolo di elementi di matrice di singola particella. In maniera analoga a quanto fatto per la 3.17 e considerando l'accoppiamento dei momenti angolari, si ottiene per la matrice ridotta della transizione nucleare nel modello RPA:

$$\left\langle \Psi^{RPA}_{J,M} \left\| O_J \right\| \Psi_0 \right\rangle = \sum_{ph} X^{J,\omega}_{ph} \left\langle p \left\| o_J \right\| h \right\rangle + (-)^{J+j_p-j_h} Y^{J,\omega}_{ph} \left\langle h \left\| o_J \right\| p \right\rangle \tag{3.29}$$

3.2.2 Estensione delle equazioni RPA al continuo

L'estensione del formalismo tipico del modello RPA al caso in cui un nucleone viene emesso dal nucleo prende il nome di Continuum Random Phase Approximation (CRPA). Nel caso in cui lo stato particelle è nel continuo l'operatore $Q^+_{J,M}$ ha la forma:

$$Q^{+}_{J,M}=\sum_{ph}^{disc}\left(X^{J,\omega}_{ph}a^{+}_{p}a_{h}+Y^{J,\omega}_{ph}a^{+}_{h}a_{p}\right)+\sum_{ph}^{cont}\int_{0}^{\infty}d\varepsilon_{p}\left(X^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_{p}\right)a^{+}_{p}a_{h}+Y^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_{p}\right)a^{+}_{h}a_{p}\right) \tag{3.30}$$

la prima sommatoria corrisponde alle eccitazioni di tipo discreto in cui ε_p assume valori discreti minori di zero, la seconda alle eccitazioni nel continuo in cui ε_p è maggiore di zero. Le equazioni CRPA per il calcolo delle ampiezze hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_p-\varepsilon_h-\omega\right)X^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)+\sum_{p'h'}\left[v_{php'h'}X^{J,\omega}_{p'h'}+u_{php'h'}Y^{J,\omega}_{p'h'}\right]+\\+&\sum_{p'h'}\int_{0}^{\infty}d\varepsilon_{p'}\left[v_{php'h'}\left(\varepsilon_p,\varepsilon_{p'}\right)X^{J,\omega}_{p'h'}\left(\varepsilon_{p'}\right)+u_{php'h'}\left(\varepsilon_p,\varepsilon_{p'}\right)Y^{J,\omega}_{p'h'}\left(\varepsilon_{p'}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}&\left(\varepsilon_p-\varepsilon_h-\omega\right)Y^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)+\sum_{p'h'}\left[v^{*}_{php'h'}Y^{J,\omega}_{p'h'}+u^{*}_{php'h'}X^{J,\omega}_{p'h'}\right]+\\+&\sum_{p'h'}\int_{0}^{\infty}d\varepsilon_{p'}\left[v^{*}_{php'h'}\left(\varepsilon_p,\varepsilon_{p'}\right)Y^{J,\omega}_{p'h'}\left(\varepsilon_{p'}\right)+u^{*}_{php'h'}\left(\varepsilon_p,\varepsilon_{p'}\right)X^{J,\omega}_{p'h'}\left(\varepsilon_{p'}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{3.32}$$

che può essere facilmente ottenuta mediante un'estenzione delle equazioni del caso discreto (3.22-3.23).

Risulta opportuno ridefinire le $X^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)$ e $Y^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)$ nel seguente modo:

$$X^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)=A_{p_0h_0,ph}+P\frac{\widetilde{X}^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)}{\varepsilon_p-\varepsilon_h-\omega} \tag{3.33}$$

$$Y^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)=\frac{\widetilde{Y}^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)}{\varepsilon_p-\varepsilon_h+\omega} \tag{3.34}$$

La funzione $X^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)$ ha un polo in $\epsilon_p=\omega-\epsilon_h$, P rappresenta il suo valore principale di Cauchy. La funzione $Y_{ph}\left(\varepsilon_p\right)$ non ha poli perché $\varepsilon_p-\varepsilon_h$ ed ω sono quantità positive. Si ipotizza inoltre che (vedi [Blo66])

$$A_{p_0h_0,ph}=\delta_{p_0h_0,ph} \tag{3.35}$$

questa ipotesi è dovuta alla necessità di imporre un comportamento asintotico per la funzione d'onda nucleare che includa la presenza di un nucleone nel continuo e di un buco nel nucleo residuo in stati di singola particella ben definiti. Dalle relazioni precedenti risulta evidente che le incognite $X^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)$, $Y^{J,\omega}_{ph}\left(\varepsilon_p\right)$, $X^{J,\omega}_{ph}$ e

$Y_{ph}^{J,\omega}$ delle equazioni CRPA dipendono non solo dall'indice della coppia ph ma anche da quello dalla coppia p_0h_0 detto canale elastico dell'eccitazione, in seguito questa dipendenza sarà esplicitamente indicata. L'indice p_0h_0 è assente nelle equazioni RPA nel discreto.

Inserendo le 3.33 3.34 e l'ipotesi 3.35 nelle 3.31 3.32 si ottiene:

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_{ph}^{p_0h_0,J,\omega}\left(\varepsilon_p\right) &+ \sum_{p'h'}^{disc}\left[v_{php'h'}X_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}+u_{php'h'}Y_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}\right]+\\
&+ \sum_{p'h'}^{cont}\int_0^\infty d\varepsilon_p\left[v_{php'h'}P\frac{\widetilde{X}_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}\left(\varepsilon_{p'}\right)}{\varepsilon_{p'}-\varepsilon_{h'}-\omega}+u_{php'h'}\frac{\widetilde{Y}_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}\left(\varepsilon_{p'}\right)}{\varepsilon_{p'}-\varepsilon_{h'}-\omega}\right]=\\
&= -v_{php_0h_0}\delta\left(\varepsilon_{p_0}-\varepsilon_{h_0}-\omega\right) \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_{ph}^{p_0h_0,J,\omega}\left(\varepsilon_p\right) &+ \sum_{p'h'}^{disc}\left[v^*_{php'h'}Y_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}+u^*_{php'h'}X_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}\right]+\\
&+ \sum_{p'h'}^{cont}\int_0^\infty d\varepsilon_p\left[v^*_{php'h'}P\frac{\widetilde{Y}_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}\left(\varepsilon_{p'}\right)}{\varepsilon_{p'}-\varepsilon_{h'}-\omega}+u^*_{php'h'}\frac{\widetilde{X}_{p'h'}^{p_0h_0,J,\omega}\left(\varepsilon_{p'}\right)}{\varepsilon_{p'}-\varepsilon_{h'}-\omega}\right]=\\
&= -u^*_{php_0h_0}\delta\left(\varepsilon_{p_0}-\varepsilon_{h_0}-\omega\right) \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Per ω maggiore della soglia di emissione nucleonica le 3.36, 3.37 costituiscono un sistema non omogeneo di $2N$ equazioni dove N è il numero di coppie ph. Il sistema va risolto n volte dove n è il numero delle coppie p_0h_0 con lo stato particella p_0 nel continuo, cioè con $\epsilon_{p_0}-\epsilon_{h_0}<\omega$.

Per ω minore della soglia di emissione nucleonica $A_{p_0h_0,ph}=0$ e le 3.36, 3.37 si riducono alle equazioni RPA (3.22-3.23) che ammettono soluzioni solo per uno spettro discreto di valori di ω.

Per poter risolvere le equazioni è necessario specificare l'espressione dell'interazione nucleone-nucleone e calcolare gli elementi di matrice $v_{php'h'}$ e $u_{php'h'}$ espressi nelle 3.24-3.25. Si ipotizza un'interazione della forma:

$$\begin{aligned}
V^{ph}\left(1,2\right) &= f\left(r_{12}\right)+f'\left(r_{12}\right)\boldsymbol{\tau}\left(1\right)\cdot\boldsymbol{\tau}\left(2\right)\\
&\quad +g\left(r_{12}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(1\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\left(2\right)+g'\left(r_{12}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(1\right)\cdot\boldsymbol{\sigma}\left(2\right)\boldsymbol{\tau}\left(1\right)\cdot\boldsymbol{\tau}\left(2\right) \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\tau}$ rappresentano operatori di spin ed isospin di singola particella. Il termine tensoriale dell'interazione nucleone-nucleone è stato trascurato. Le funzioni f, f', g e g' sono parametri scalari, una discussione dettagliata sul valore di questi parametri sarà fatta nel prossimo capitolo. Nel caso di processi CC i termini proporzionali ad f e g sono nulli, perchè il processo avviene senza variazione di isospin. Mediante una trasformata di Fourier si ottiene l'espressione dell'interazione nello spazio dei momenti:

$$\begin{aligned} V^{ph}(q) &= F(q) + F'(q)\,\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2) \\ &\quad + G(q)\,\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2) + G'(q)\,\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)\,\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2) \end{aligned} \tag{3.39}$$

dove q è il modulo del momento relativo dei due nucleoni che coincide con il modulo del momento trasferito.

Per il calcolo di $u_{php'h'}$ e $v_{php'h'}$ è necessario valutare gli elementi di matrice a due corpi degli operatori che compaiono nella 3.39. I termini di scambio sono stati trascurati, si terrà conto del loro contributo in maniera fenomenologica variando i parametri dell'interazione. Per un'interazione di contatto le funzioni scalari $F(q)$, $F'(q)$, $G(q)$ e $G'(q)$ si riducono ad una costante.

Esistono varie tecniche di soluzione per le equazioni CRPA, in questo lavoro è stata utilizzata una tecnica basata sullo sviluppo in serie di Fourier-Bessel [Har82] a cui accennerò brevemente.
Definendo una funzioni densità scalare ρ^{T,p_0h_0} ed una di spin σ^{T,p_0h_0}:

$$\begin{aligned} \rho^{T,p_0h_0}(r) = \sum_{p'h'} \frac{\langle j_{p'} \| Y_J \| j_{h'} \rangle}{2J+1} \int d\varepsilon_{p'}\, R^*_{p'}(r)\, R_{h'}(r) \,\cdot \\ \cdot \left[\frac{\widetilde{X}^{p_0h_0,J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'})}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} - \omega} + (-)^J \frac{\widetilde{Y}^{p_0h_0,J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'})}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} + \omega} \right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{T,p_0h_0}(r) = \sum_{p'h'} \frac{\langle j_{p'} \| (Y_l \times \sigma)^J \| j_{h'} \rangle}{2J+1} \int d\varepsilon_{p'}\, R^*_{p'}(r)\, R_{h'}(r) \,\cdot \\ \cdot \left[\frac{\widetilde{X}^{p_0h_0,J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'})}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} - \omega} + (-)^{l+1} \frac{\widetilde{Y}^{p_0h_0,J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'})}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} + \omega} \right] \end{aligned} \tag{3.41}$$

e inserendo formalmente le $\widetilde{X}^{p_0h_0,J,\omega}_{ph}$ e $\widetilde{Y}^{p_0h_0,J,\omega}_{ph}$ ottenute dalle equazioni 3.36 3.37, il sistema di equazioni CRPA si riduce al seguente sistema di equazioni integrali:

$$\begin{aligned} &\rho^{T,p_0h_0}(r) = \\ = \; & \frac{2}{\pi} \int dq\; q^2 \left[F(q) \int dr_1 r_1^2\; j_J(qr_1)\, G^{J,\omega}(r,r_1) \int dr_2\; r_2^2\; j_J(qr_2)\, \rho^{T,p_0h_0}(r_2) \right. \\ & \left. -G(q) \sum_l \int dr_1 r_1^2 j_l(qr_1)\, H^{J,\omega}_l(r,r_1) \int dr_2\; r_2^2\; j_l(qr_2)\, \sigma^{T,p_0h_0}_l(r_2) \right] \\ & -I^{p_0h_0}_\rho \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$
\begin{aligned}
& \sigma_l^{T,p_0h_0}(r) \\
= \; & \frac{2}{\pi}\int dq\; q^2 \left[F(q) \int dr_1 r_1^2 \; j_J(qr_1)\, H_l^{J,\omega}(r,r_1) \int dr_2 \; r_2^2 \; j_J(qr_2)\, \rho^{T,p_0h_0}(r_2) \right. \\
& \left. - G(q) \sum_{l'} \int dr_1 r_1^2 j_{l'}(qr_1)\, U_{l,l'}^{J,\omega}(r,r_1) \int dr_2 \; r_2^2 \; j_{l'}(qr_2)\, \sigma_l^{T,p_0h_0}(r_2) \right] \\
& - I_{\sigma,l}^{p_0h_0}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

e analoghe espressioni per i termini dipendenti dall'operatore di isospin proporzionali a $F'(q)$ e $G'(q)$.

Nelle precedenti equazioni sono state definite le funzioni:

$$
G^{J,\omega}(r,r_1) = \sum_{ph} \int d\varepsilon_p \left(P \frac{C_{ph,l}(r,\varepsilon_p)\, C_{ph,J}(r_1,\varepsilon_p)}{\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega} + \frac{C_{ph,l}(r,\varepsilon_p)\, C_{ph,J}(r_1,\varepsilon_p)}{\varepsilon_p - \varepsilon_h + \omega} \right)
\tag{3.44}
$$

$$
H_l^{J,\omega}(r,r_1) = \sum_{ph} \int d\varepsilon_p \left(P \frac{C_{ph,l}(r,\varepsilon_p)\, F_{ph,l}^J(r_1,\varepsilon_p)}{\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega} + (-)^{J+l+1} \frac{C_{ph,l}(r,\varepsilon_p)\, F_{ph,J}^J(r_1,\varepsilon_p)}{\varepsilon_p - \varepsilon_h + \omega} \right)
\tag{3.45}
$$

$$
U_{l,l'}^{J,\omega}(r,r_1) = \sum_{ph} \int d\varepsilon_p \left(P \frac{F_{ph,l}^J(r,\varepsilon_p)\, F_{ph,l'}^J(r_1,\varepsilon_p)}{\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega} + (-)^{l+l'} \frac{F_{ph,l}^J(r,\varepsilon_p)\, F_{ph,l'}^J(r_1,\varepsilon_p)}{\varepsilon_p - \varepsilon_h + \omega} \right)
\tag{3.46}
$$

e le funzioni contenenti l'interazione

$$
I_\rho^{p_0h_0} = \sum_{p'h'} C_{p'h',J}(r,\varepsilon_{p'}) \sum_{p''h''} \left(\frac{v_{p'h'p''h''}}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} - \omega} + (-)^J \frac{u^*_{p'h'p''h''}}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} + \omega} \right) A_{p''h''p_0h_0}
\tag{3.47}
$$

$$
I_{\sigma,l}^{p_0h_0} = \sum_{p'h'} F_{p'h',l}^J(r,\varepsilon_{p'}) \sum_{p''h''} \left(\frac{v_{p'h'p''h''}}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} - \omega} + (-)^{l+1} \frac{u^*_{p'h'p''h''}}{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'} + \omega} \right) A_{p''h''p_0h_0}
\tag{3.48}
$$

con

$$
C_{ph,l}(r,\varepsilon_p) = \frac{R_p(r,\varepsilon_p)\, R_h(r)}{2J+1} \langle j_{p'} \| Y_l \| j_{h'} \rangle
\tag{3.49}
$$

$$
F_{ph,l}^J(r,\varepsilon_p) = \frac{R_p(r,\varepsilon_p)\, R_h(r)}{2J+1} \left\langle j_{p'} \left\| (Y_l \times \sigma)^J \right\| j_{h'} \right\rangle
\tag{3.50}
$$

Nel caso di un'interazione di contatto le funzioni $F(q)$ e $G(q)$ sono delle costanti. In questo caso, sfruttando le proprietà di ortogonalità delle funzioni sferiche di Bessel, il sistema di equazioni 3.42 - 3.43 si riduce al seguente sistema:

$$\begin{aligned} \rho^{T,p_0h_0}(r) = & - F\int dr_1 r_1^2 G^{J,\omega}(r,r_1)\,\rho^{T,p_0h_0}(r_1) \\ & - G\sum_l \int dr_1 r_1^2 H_l^{J,\omega}(r,r_1)\,\sigma_l^{T,p_0h_0}(r_1) - I_\rho^{p_0h_0} \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{T,p_0h_0}(r) = & - F\int dr_1 r_1^2 H_l^{J,\omega}(r,r_1)\,\rho^{T,p_0h_0}(r_1) \\ & - G\sum_{l'} \int dr_1 r_1^2 U_{l,l'}^{J,\omega}(r,r_1)\,\sigma_{l'}^{T,p_0h_0}(r_1) - I_\sigma^{p_0h_0} \end{aligned} \tag{3.52}$$

Allo scopo di determinare le ampiezze $\widetilde{X}_{ph}^{p_0h_0,J,\omega}$ e $\widetilde{X}_{ph}^{p_0h_0,J,\omega}$ è conveniente risolvere il sistema 3.42-3.43 sviluppando le equazioni in serie di Fourier-Bessel [Har82]. Tutti i termini del sistema di equazioni 3.42-3.43 sono sviluppati su una base di funzioni di Fourier-Bessel, i dettagli della tecnica dello sviluppo sono mostrati in appendice D. Le funzioni densità 3.40 e 3.41 sono quindi riscritte in funzione dei loro coefficienti dello sviluppo:

$$\rho^{T,p_0h_0}(r) = \sum_{\mu=1}^{M} A_\mu^{p_0h_0} j_J(q_\mu r) \tag{3.53}$$

$$\sigma_l^{T,p_0h_0}(r) = \sum_{\mu=1}^{M} B_\mu^{p_0h_0,l} j_J(q_\mu r) \tag{3.54}$$

dove q_μ sono valori legati agli zeri delle funzioni di Bessel ed M è il numero di termini dello sviluppo che assicura la stabilità del risultato. Con questo sviluppo il sistema di equazioni integrali 3.42,3.43 si trasforma in un sistema di equazioni algebriche agli autovalori per i coefficienti $A_\mu^{p_0h_0}$ e $B_\mu^{p_0h_0}$:

$$A_\mu^{p,p_0h_0} = -\sum_{\nu\eta}\Big(G_{\mu\eta}^{p,J,\omega} T_{\eta\nu}^{p,p} A_\nu^{p,p_0h_0} + G_{\mu\eta}^{p,J,\omega} T_{\eta\nu}^{p,n} A_\nu^{n,p_0h_0} + \tag{3.55}$$

$$+\sum_l H_{\mu\eta}^{p,J,l} S_{\eta\nu}^{pp} B_\nu^{p,p_0h_0,l} + \sum_l H_{\mu\eta}^{p,J,l} S_{\eta\nu}^{pn} B_\nu^{n,p_0h_0,l}\Big) - Q_\mu^{p,p_0h_0} \tag{3.56}$$

$$A_\mu^{n,p_0h_0} = -\sum_{\nu\eta}\Big(G_{\mu\eta}^{n,J,\omega} T_{\eta\nu}^{n,p} A_\nu^{p,p_0h_0} + G_{\mu\eta}^{n,J,\omega} T_{\eta\nu}^{n,n} A_\nu^{n,p_0h_0} + \tag{3.57}$$

$$+\sum_l H_{\mu\eta}^{n,J,l} S_{\eta\nu}^{np} B_\nu^{p,p_0h_0,l} + \sum_l H_{\mu\eta}^{p,J,l} S_{\eta\nu}^{nn} B_\nu^{n,p_0h_0,l}\Big) - Q_\mu^{n,p_0h_0} \tag{3.58}$$

$$B_{\mu}^{p,p_0h_0,l} = -\sum_{\nu\eta}\left(H_{\mu\eta}^{p,J,l}T_{\eta\nu}^{p,p}A_{\nu}^{p,p_0h_0} + H_{\mu\eta}^{p,J,l}T_{\eta\nu}^{p,n}A_{\nu}^{n,p_0h_0} + \right. \tag{3.59}$$

$$\left. + \sum_{l'}U_{\mu\eta}^{p,J,l,l'}S_{\eta\nu}^{pp}B_{\nu}^{p,p_0h_0,l} + \sum_{l'}U_{\mu\eta}^{p,J,l,l'}S_{\eta\nu}^{pn}B_{\nu}^{n,p_0h_0,l}\right) - W_{\mu}^{p,p_0h_0,l} \tag{3.60}$$

$$B_{\mu}^{n,p_0h_0,l} = -\sum_{\nu\eta}\left(H_{\mu\eta}^{p,J,l}T_{\eta\nu}^{n,p}A_{\nu}^{n,p_0h_0} + H_{\mu\eta}^{n,J,l}T_{\eta\nu}^{n,n}A_{\nu}^{n,p_0h_0} + \right. \tag{3.61}$$

$$\left. + \sum_{l'}U_{\mu\eta}^{n,J,l,l'}S_{\eta\nu}^{np}B_{\nu}^{n,p_0h_0,l} + \sum_{l'}U_{\mu\eta}^{n,J,l,l'}S_{\eta\nu}^{nn}B_{\nu}^{n,p_0h_0,l}\right) - W_{\mu}^{p,p_0h_0,l} \tag{3.62}$$

dove è stata esplicitata la dipendenza dall'isospin dei termini che contengono l'interazione, e sono state definite le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} T_{\eta\mu} &= \int dr\ r^2 j_J\left(q_\eta r\right) f\left(r\right) j_J\left(q_\mu r\right) \\ S_{\eta\mu} &= \int dr\ r^2 j_J\left(q_\eta r\right) g\left(r\right) j_J\left(q_\mu r\right) \end{aligned}$$

mentre Q_{μ}^{p,p_0h_0} e $W_{\mu}^{p,p_0h_0,l}$ sono i coefficienti dello sviluppo delle funzioni $I_{\rho}^{p_0h_0}$ e $I_{\sigma,l}^{p_0h_0}$.

Distinguendo i casi di parità naturale $l = J$ da quelli di parità non naturale $l = J \pm 1$ è possibile semplificare le precedenti espressioni. I risultati scritti in forma matriciale sono:

$$\begin{bmatrix} Q^{p,p_0h_0} \\ Q^{n,p_0h_0} \\ W^{p,p_0h_0,J} \\ W^{n,p_0h_0,J} \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} G^{p,J}T^{pp}+1 & G^{p,J}T^{pn} & H^{p,J,J}S^{pp} & H^{p,J,J}S^{pn} \\ G^{n,J}T^{np} & G^{n,J}T^{nn}+1 & H_J^{n,J}S^{np} & H_J^{n,J}S^{nn} \\ H_J^{p,J}T^{pp} & H_J^{p,J}T^{pn} & U_{J,J}^{p,J}S^{pp}+1 & U_{J,J}^{p,J}S^{pn} \\ H_J^{n,J}T^{np} & H_J^{n,J}T^{nn} & U_{J,J}^{p,J}S^{np} & U_{J,J}^{n,J}S^{nn}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{p,p_0h_0} \\ A^{n,p_0h_0} \\ B^{p,p_0h_0} \\ B^{n,p_0h_0} \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

per parità naturale, e

$$\begin{bmatrix} W^{p,p_0h_0,J+1} \\ W^{n,p_0h_0,J+1} \\ W^{p,p_0h_0,J-1} \\ W^{n,p_0h_0,J-1} \end{bmatrix} =$$

$$
= - \begin{bmatrix} U^{p,J}_{J+1,J+1}S^{pp}+1 & U^{p,J}_{J+1,J+1}S^{pn} & U^{p,J}_{J+1,J-1}S^{pp} & U^{p,J}_{J+1,J-1}S^{pn} \\ U^{n,J}_{J+1,J+1}S^{np} & U^{n,J,}_{J+1,J+1}S^{nn}+1 & U^{n,J}_{J+1,J-1}S^{np} & U^{n,J}_{J+1,J-1}S^{nn} \\ U^{p,J}_{J-1,J+1}S^{pp} & U^{p,J}_{J-1,J+1}S^{pn} & U^{p,J}_{J-1,J-1}S^{pp}+1 & U^{p,J}_{J-1,J-1}S^{pn} \\ U^{n,J}_{J-1,J+1}S^{np} & U^{n,J}_{J-1,J+1}S^{nn} & U^{p,J}_{J-1,J-1}S^{np} & U^{n,J}_{J-1,J-1}S^{nn}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^{p,p_0h_0} \\ B^{n,p_0h_0} \\ B^{p,p_0h_0} \\ B^{n,p_0h_0} \end{bmatrix} \tag{3.64}
$$

per parità non naturale.

Dai coefficienti dello sviluppo si ricostruiscono i valori delle ampiezze $X^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)$ e $Y^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)$ usando le formule 3.40-3.41 e 3.53-3.54.

La normalizzazione delle $X^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)$ e $Y^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)$ è fissata nel seguente modo:

$$
|\Psi_{p_0h_0}\rangle = \sum_{ph} R_{ph,p_0h_0} |\Psi_{p_0h_0}\rangle \tag{3.65}
$$

con

$$
R_{ph,p_0h_0} = e^{-i\delta_{p_0h_0}} \left[I + i\pi \widetilde{X}^{p_0h_0,J,\omega}_{ph} \right]^{-1}_{ph,p_0h_0} \tag{3.66}
$$

da cui segue per il calcolo della sezione d'urto:

$$
\sigma \sim \sum_{p_0h_0} \left| \left\langle \Psi^{RPA}_{J,M,p_0h_0} \left| O_J \right| \Psi_{0,0} \right\rangle \right|^2 =
$$

$$
= \sum_{ph,p'h'} \left\langle \Psi^{RPA}_{J,M,p_0h_0} \left| O_J \right| \Psi_{0,0} \right\rangle \left(\sum_{p_0h_0} R_{p_0h_0,ph} R^{\dagger}_{p_0h_0,p'h'} \right) \left\langle \Psi^{RPA}_{J,M,p_0h_0} \left| O_J \right| \Psi_{0,0} \right\rangle \tag{3.67}
$$

e utilizzando la 3.66 si ottiene:

$$
\sum_{p_0h_0} R_{p_0h_0,ph} R^{\dagger}_{p_0h_0,p'h'} = \left[I + \pi^2 \widetilde{X}^{p_0h_0,J,\omega}_{ph} \widetilde{X}^{p'h'}_{p_0h_0,J,\omega} \right]^{-1}_{ph,p'h'}
$$

dove I rappresenta la matrice unità, p_0h_0 i canali elastici aperti della transizione. Nei processi NC è necessario effettuare la normalizzazione in maniera separata per canali elastici aperti di protone e di neutrone. Ciò è conseguenza del diverso comportamento asintotico delle rispettive funzioni d'onda, dovuto alla repulsione coulombiana tra protoni. Nel calcolo dell'ultima espressione ho sfruttato le proprietà di simmetria delle $X^{p_0h_0,J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)$ rispetto allo scambio degli indici delle transizioni:

$$
X^{p'h',J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p) = X^{ph,J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'}) \tag{3.68}
$$

Con considerazioni analoghe a quanto fatto per la 3.17 si ottiene per la matrice ridotta della transizione nucleare, in accoppiamento angolare:

$$\left\langle \Psi^{RPA}_{J,M,p_0h_0} \left\| O_J \right\| \Psi_0 \right\rangle =$$

$$= \sum_{ph} X^{p_0h_0,J,\omega}_{ph} \left\langle p \left\| o_J \right\| h \right\rangle + (-)^{J+j_p-j_h} \, Y^{p_0h_0,J,\omega}_{ph} \left\langle h \left\| o_J \right\| p \right\rangle \tag{3.69}$$

$$+ \int d\varepsilon_p \sum_{ph} X^{p_0h_0,J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p) \left\langle p \left\| o_J \right\| h \right\rangle + (-)^{J+j_p-j_h} \, Y^{p_0h_0,J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p) \left\langle h \left\| o_J \right\| p \right\rangle$$

In questo lavoro lo spazio delle configurazioni per gli stati di singola particella è limitato a tutti gli stati discreti del nucleo più gli stati nel continuo con $\epsilon_p < 400MeV$. In linea di principio l'integrazione in $d\epsilon_p$ deve essere eseguita fino all'infinito, ma ciò comporterebbe il calcolo di infinite funzioni d'onda di singola particelle. Per questo motivo lo spazio delle configurazioni è stato limitato considerando solo gli stati particella nel continuo con energia $\epsilon_p < 400MeV$. Questo limite è sufficiente per descrivere la risposta nucleare fino alla regione del picco quasi elastico. Tuttavia, la necessità di introdurre un valore massimo per le energie nel continuo rimane uno dei principali limiti di questo metodo risolutivo. Un esatto trattamento del continuo può essere effettuato utilizzando una tecnica basata sull'utilizzo di funzioni di Green che risolve le equazioni CRPA nello spazio delle coordinate [Jac99]. Un altro limite di questa tecnica è l'impossibilità di includere i termini di scambio dell'interazione residua.

3.3 Final State Interaction

Nel modello RPA si tiene in conto in maniera parziale dell'effetto dovuto alla reinterazione tra il nucleone emesso e il nucleo residuo . Esistono varie tecniche per descrivere questo effetto solitamente chiamato 'Final State Interaction' (FSI). In questo lavoro ho utilizzato un modello ispirato ai lavori nei riferimenti [Co88, Smi88] che riproduce adeguatamente le risposte elettromagnetiche nella regione del picco quasi elastico. Qui, ne estendo l'applicazione alla regione delle risonanze giganti.

L'ipotesi fondamentale del modello RPA consiste nel considerare lo stato nucleare composto solo da correlazioni di tipo $1p-1h$. La presenza di eccitazioni di ordine superiore, come ad esempio $2p-2h$, sono trascurate. Nel modello FSI si stima l'effetto delle correlazioni di tipo $2p-2h$ senza effettuare un calcolo microscopico esatto, ma in maniera fenomenologica. L'idea fondamentale è di considerare la possibilità di correlazioni di tipo $2p-2h$ solo in stati intermedi del processo, in modo che nello stato finale il nucleo abbia comunque una sola particella nel continuo.

La risposta nucleare di un generico operatore O può essere scritta nel seguente modo [Fet71]:

$$S\left(|\mathbf{q}|,\omega\right) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left\langle \Phi_0 \left| O^{\dagger} G\left(\omega\right) O \right| \Phi_0 \right\rangle \tag{3.70}$$

dove il propagatore $G(\omega)$ ha la forma

$$G\left(\omega\right) = \frac{1}{\omega - H + i\eta} - \frac{1}{\omega + H + i\eta} \tag{3.71}$$

qui H è l'Hamiltoniana nucleare scritta nella 3.18 e $|\Phi_0\rangle$ lo stato fondamentale del sistema. Inserendo un insieme completo di autostati $|\Phi_n\rangle$ dell'hamiltoniana H in 3.70 si ottiene la nota espressione:

$$S\left(|\,\mathbf{q}\,|,\omega\right) = \sum_n \left|\langle \Phi_n \left| O \right| \Phi_0 \rangle\right|^2 \delta(\omega - E_n + E_0) \tag{3.72}$$

L'idea fondamentale del modello è quella di separare lo spazio di Hilbert degli stati nucleari in due sottospazi complementari, uno contenente gli stati RPA (le eccitazioni di tipo $1p-1h$) che sarà indicato con $\mathcal{H}^{RPA}$, e l'altro gli stati complementari (le correlazioni di tipo $np-nh$ con $n>1$).

Introducendo gli operatori di proiezione P sul sottospazio $\mathcal{H}^{RPA}$ e $Q = 1 - P$ sul suo complementare, si può definire un'hamiltoniana effettiva del sistema composta da due termini:

$$H_{eff}(\omega) = PHP - PHQ\frac{1}{\omega - QHQ + i\eta}QHP \tag{3.73}$$

dove il primo termine PHP è l'hamiltoniana del modello RPA:

$$PHP\;P\left|\Psi\right\rangle = H^{RPA}\left|n\right\rangle = E_n^{RPA}\left|n\right\rangle \tag{3.74}$$

mentre PHQ è la parte di hamiltoniana che descrive l'accoppiamento tra i termini di tipo $1p-1h$ e quelli di tipo $2p-2h$. Accoppiamenti tra termini di ordine superiore sono stati trascurati.

In questo modo, considerando solo il primo termine dell'hamiltoniana, si ottiene la risposta nucleare del modello RPA:

$$S^{RPA}\left(|\mathbf{q}|\,,\omega\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_n \left|\langle n \left| O \right| \Phi_0 \rangle\right|^2 \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega + E_n^{RPA} + i\eta} - \frac{1}{\omega - E_n^{RPA} + i\eta}\right] \tag{3.75}$$

Considerando l'intera hamiltoniana 3.73 si ottiene invece:

$$\begin{aligned} S^{2p-2h}\left(|\mathbf{q}|\,,\omega\right) = -\frac{1}{\pi}\sum_n \left|\langle n \left| O \right| \Phi_0 \rangle\right|^2 \quad & \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega + E_n^{RPA} - \Sigma_{n,n'}\left(\omega\right) + i\eta} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\omega - E_n^{RPA} + \Sigma_{n,n'}\left(\omega\right) + i\eta}\right] \end{aligned} \tag{3.76}$$

con

$$\Sigma_{n,n'}(\omega) = \left\langle n \left| HQ \frac{1}{\omega - QHQ + i\eta} QH \right| n' \right\rangle \tag{3.77}$$

dove ho indicato con n l'indice degli stati del modello RPA, E_n^{RPA} la loro energia.

Facendo alcune ipotesi è possibile stabilire una semplice relazione tra le risposte nelle 3.75 e 3.76. Si può ipotizzare che l'effetto delle eccitazioni di tipo $2p-2h$ sia indipendente dal particolare stato nucleare. Si noti che questa ipotesi è sicuramente valida nella regione del picco quasi elastico, poichè ad alte energie trasferite, la densità degli stati di tipo $1p-1h$ è molto grande. Nella regione delle risonanze giganti una tale assunzione deve essere valutata fenomenologicamente. Con questa ipotesi, è possibile effettuare una media sugli stati per $\Sigma_{n,n'}$:

$$\sum_n \frac{\langle n \left|\Sigma_{n,n'}(\omega)\right| n'\rangle}{\langle n|n'\rangle} = \Sigma(\omega) \equiv \Delta(\omega) - i\frac{\Gamma(\omega)}{2} \tag{3.78}$$

ciò permette di sostituire la matrice $\Sigma_{n,n'}$ con una funzione complessa $\Sigma(\omega)$. Le funzioni $\Delta(\omega)$ e $\Gamma(\omega)$ sono reali.

Sostituendo la funzione $\Sigma(\omega)$ nella 3.76 si ottiene:

$$S^{2p-2h}(\mathbf{q},\omega) = \sum_n \left|\langle \Phi_n \left|O\right| n\rangle\right|^2 \left[\rho(\varepsilon_n,\omega) + \rho(\varepsilon_n,-\omega)\right] \tag{3.79}$$

dove ho definito la densità degli stati come:

$$\rho(\varepsilon,\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(\omega)}{(\varepsilon-\omega-\Delta(\omega))^2 + \frac{1}{4}\Gamma(\omega)^2} \tag{3.80}$$

La funzione $\Gamma(\omega)$ è legata all'ampiezza della funzione d'onda di singola particella per transizioni di tipo $1p-1h$. La funzione $\Delta(\omega)$ è collegata a questa dalla relazione di dispersione:

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Gamma(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{3.81}$$

Si dovrebbe determinare l'espressione di $\Gamma(\omega)$ mediante un calcolo microscopico, in questo lavoro, $\Gamma(\omega)$ è determinata empiricamente. Seguendo [Co88] scrivo $\Delta(\omega)$ come media sulle energie dell'ampiezza $\gamma(\epsilon)$ di funzioni d'onda di stati buca e particella:

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d\epsilon \left[\gamma(\epsilon+\omega) + \gamma(\epsilon-\omega)\right] \tag{3.82}$$

L'ampiezza $\gamma(\omega)$ delle funzioni d'onda è stata scritta come:

$$\gamma(\epsilon) = A\left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+B^2}\right)\left(\frac{C^2}{\epsilon^2+C^2}\right) \tag{3.83}$$

in [Mah85] le costanti A, B e C sono state fissate in modo da riprodurre il valore dell'integrale della parte immaginaria del potenziale ottico che riproduce i dati dei processi di diffusione nucleone-nucleone. La parametrizzazione adottata in [Mah85] descrive adeguatmente il fenomeno nella regione del picco quasi elastico. In questo lavoro, al fine di descrivere il processo in un intervallo energetico più ampio, ho sostituito le costatnti con funzioni di ω, il loro valore sarà discusso nel prossimo capitolo.

In conclusione si può affermare che è possibile tener conto di effetti dovuti a correlazioni di tipo $2p-2h$ mediante una convoluzione della risposta nucleare con la funzione ρ

$$S^{2p-2h}(|\mathbf{q}|,\omega) = \int_0^\infty dE \;\; S^{RPA}(|\mathbf{q}|,E)\,[\rho(E,\omega)+\rho(E,-\omega)] \tag{3.84}$$

Nel calcolo ho inoltre tenuto conto di una correzione dovuta alla non località del campo medio. In [Mah82] si mostra che è possibile tenere in conto di questo effetto in maniera fenomenologica introducendo una massa effettiva m^* per i nucleoni e riscrivendo la risposta nucleare come:

$$S_{m^*}(|\mathbf{q}|,\omega) = \frac{m^*}{m} S_m\left(|\mathbf{q}|, \frac{m^*}{m}\omega\right) \;. \tag{3.85}$$

m^* è quindi un ulteriore parametro del modello il cui valore sarà discusso nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

CAPACITÀ PREDITTIVA DEL MODELLO

In questo capitolo presenterò gli ingredienti numerici necessari per il calcolo della sezione d'urto. La scelta dei parametri per la descrizione del processo è un aspetto rilevante del calcolo poiché spesso influisce significativamente sul risultato finale. La conoscenza dell'interazione debole e quella della struttura nucleare acquisita nell'ambito di altri fenomeni fisici, fornisce una linea guida nella scelta dei parametri per la descrizione del processo neutrino-nucleo. In questo modo è possibile restringere il campo di variabilità dei parametri liberi del modello, e quindi diminuire l'incertezza sul risultato finale.

La struttura dell'interazione debole è stata descritta nel paragrafo 2.4.2, l'incertezza è principalmente legata all'errore sperimentale nella determinazione del fattore di forma assiale F_A. Questo è stato parametrizzato con un andamento di dipolo e i suoi parametri M_A e $F_A(0)$ sono stati fissati per descrivere al meglio la diffusione di neutrini su nucleoni e i processi di elettroproduzione di pioni. Nel prossimo capitolo discuterò la sensibilità della sezione d'urto neutrino-nucleone al variare di questi parametri nell'intervallo dell'errore sperimentale.

Più complessa è la descrizione della struttura nucleare in termini di nucleoni interagenti. I valori dei parametri sono fissati in modo che il modello nucleare sia in grado di descrivere alcuni osservabili come le energie degli stati eccitati, il raggio e la densità nucleare, i livelli energetici di singola particella dedotti sperimentalmente. Inoltre, mostrerò in che modo queste parametrizzazioni descrivono le sezioni d'urto per processi di fotoassorbimento e diffusione di elettroni, confrontando i risultati con quelli sperimentali quando questi ultimi sono disponibili. Il confronto con i dati sperimentali di fotoassorbimento e diffusione di elettroni è il modo migliore per valutare la capacità predittiva dei modelli utilizzati e rimediare alla scarsità di dati sperimentali relativi al processo neutrino-nucleo. La discussione sulla capacità predittiva dei modelli è l'altro aspetto importante di questo capitolo.

Gli ingredienti necessari nel modello a campo medio sono le funzioni d'onda e le energie di singola particella, questi dipendono dal valore dei parametri del potenziale medio. Nel modello RPA oltre alle funzioni d'onda di singola particella si deve stabilire il valore dei parametri dell'interazione particella-buca. Nel caso del modello fenomenologico usato per descrivere gli effetti dovuti a correlazioni di tipo $np - nh$ e descritto nel capitolo 3.3 si devono aggiungere i valori dei parametri della funzione di convoluzione (3.84). In seguito discuterò in dettaglio la scelta del valore numerico per questi elementi nel caso dei nuclei di interesse in questo lavoro: ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb. Anche se, come è noto, il nucleo ^{12}C non è doppio magico e quindi non soddisfa pienamente le condizioni di simmetria sferica sulle quali si basa il formalismo.

4.1 Funzioni d'onda di singola particella

Le funzioni d'onda di singola particella sono state generate risolvendo l'equazione di Schordinger con il potenziale medio centrale scritto nella 3.7 e che riporto qui per comodità di lettura:

$$U(r) = U_C(r) + U_{SO}(r) + U_{Coul}(r) \tag{4.1}$$

con

$$U_C(r) = \frac{V}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \tag{4.2}$$

$$U_{SO}(r) = \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{V_S}{1 + e^{\frac{r-R_s}{a_s}}}\right) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \tag{4.3}$$

$$U_{Coul}(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{2R_c}\left(3 - \left(\frac{r}{R_c}\right)\right) & \text{per} \quad r \leq R_c \\ \frac{(Z-1)e^2}{2r} & \text{per} \quad r > R_c \end{cases} \tag{4.4}$$

Il potenziale è l'unico elemento necessario a descrivere il nucleo nel modello a campo medio. Per i tre nuclei di interesse in questo lavoro i parametri del potenziale utilizzati sono riportati in Tab. 4.1.

Si noti che ad eccezione del piombo è stato utilizzato lo stesso valore per a e a_s e per R, R_s e R_c. La stessa parametrizzazione è stata utilizzata per calcolare le funzioni d'onda di stati discreti e di stati nel continuo. I parametri sono stati scelti in modo da riprodurre al meglio le energie di singola particella intorno alla superficie di Fermi (vedi Tab. 4.2). Questi riproducono anche la densità di carica dei nuclei dedotta sperimentalmente (vedi Fig. 4.1). Inoltre, nel caso del piombo, i parametri riproducono anche la differenza $\langle r^2 \rangle_n^{1/2} - \langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ calcolata con un modello Hartree-Fock [Rin78, Neg75].

		V (MeV)	a (fm)	R (fm)	V_S (MeV)	a_s (fm)	R_s (fm)	R_c (fm)
^{12}C	p	-55.00	0.50	2.95	-4.00	0.50	2.95	2.95
	n	-55.00	0.50	2.95	-5.50	0.50	2.95	–
^{16}O	p	-52.50	0.53	3.2	-7.00	0.53	3.20	3.20
	n	-52.50	0.53	3.2	-6.54	0.53	3.20	–
^{208}Pb	p	-60.40	0.79	7.46	-6.754	0.59	7.20	7.4062
	n	-44.32	0.66	7.46	-6.0844	0.66	6.96	–

Tabella 4.1: Parametri del potenziale di Wood-Saxon utilizzati nel calcolo per ^{12}C ^{16}O e ^{208}Pb.

Per il nucleo ^{16}O i parametri sono gli stessi usati in [Co85]. Per il ^{208}Pb sono quelli usati in [Rin78]. In Tab. 4.2 mostro il confronto tra i livelli energetici di singola particella intorno alla superficie di Fermi calcolati con un modello a campo medio usando la parametrizzazione suddetta e quelli sperimentali dedotti dalle tavole degli isotopi [Led78]. Per il piombo i valori calcolati sono molto vicini a quelli sperimentali mentre per l'ossigeno presentano una maggiore differenza. Nel caso del carbonio solo l'energia dell'$1p_{3/2}$ è in ottimo accordo con i dati sperimentali.

Nel calcolo degli elementi di matrice della transizione e nel calcolo RPA, il valore dell'energia dello stato buca calcolato è stato sostituito da quello dedotto sperimentalmente.

Si noti che le energie degli ultimi stati buca nucleonici corrispondono all'energia di soglia per l'emissione degli stessi nei rispettivi nuclei. Nei processi NC e β^+ inverso, per eccitare il nucleo nel continuo l'energia trasferita ω deve essere superiore a 15.96 MeV, 12.11 MeV e 8.00 MeV rispettivamente per ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb. Nel processo β^- inverso l'energia trasferita ω deve essere superiore a 18.72 MeV, 16.63 MeV e 7.30 MeV per gli stessi nuclei.

Nelle Fig. 4.1 mostro il confronto tra la distribuzione di carica radiale sperimentale [Dej87] e quella calcolata con il modello a campo medio e il potenziale di Wood-Saxon per i tre nuclei di interesse in questo lavoro. Le distribuzioni sono molto simili ad eccezione della regione degli r prossimi allo zero, in particolare nel ^{12}C l'accordo è ottimo.

I risultati fin qui mostrati dimostrano che il modello a campo medio con le parametrizzazioni in Tab. 4.1 descrive adeguatamente alcuni aspetti della struttura nucleare. Tuttavia fallisce nel descrivere la risposta nucleare nella regione delle risonanze giganti e nel determinare l'energia di legame degli stati eccitati di tipo collettivo come ad esempio lo stato eccitato (3^-) dei nuclei.

Nella Fig. 4.3 mostro il confronto tra la sezione d'urto di fotoassorbimento calcolata con il modello a campo medio (linea punteggiata) e i dati sperimentali nella regione delle risonanze giganti. Appare evidente che il modello non è in grado

	stati di protoni			*stati di neutroni*		
		W.S.	*Sper.*		*W.S.*	*Sper.*
^{12}C	$1s_{1/2}$ (h)	-30.91	-25.23	$1s_{1/2}$ (h)	-34.05	-30.04
	$1p_{3/2}$ (h)	-15.75	-15.96	$1p_{3/2}$ (h)	-18.92	-18.72
	$1p_{1/2}$ (p)	-12.35	-1.94	$1p_{1/2}$ (p)	-15.06	-4.96
^{16}O	$1p_{3/2}$ (h)	-16.91	-18.44	$1p_{3/2}$ (h)	-20.52	-21.81
	$1p_{1/2}$ (h)	-12.74	-12.11	$1p_{1/2}$ (h)	-16.63	-15.65
	$1d_{5/2}$ (p)	-3.76	-0.60	$1d_{5/2}$ (p)	-6.84	-4.14
^{208}Pb	$2d_{3/2}$ (h)	-8.63	$-$	$2f_{5/2}$ (h)	-7.94	$-$
	$1h_{11/2}$ (h)	-8.35	-8.35	$3p_{3/2}$ (h)	-7.77	-7.80
	$3s_{1/2}$ (h)	-8.08	-8.00	$3p_{1/2}$ (h)	-7.05	-7.30
	$1h_{9/2}$ (p)	-4.27	-3.798	$2g_{9/2}$ (p)	-3.02	-3.93

Tabella 4.2: Livelli energetici degli stati intorno alla superficie di Fermi per ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb. Le energie sono in MeV, h e p indicano rispettivamente stati buca e stati particella.

di descrivere ne la posizione dei picchi ne la loro forma, inoltre sottostima fortemente la sezione d'urto totale come si vede confrontando i dati nella prima e nell'ultima colonna della Tab. 4.7.

Nel modello a campo medio il primo stato eccitato si ottiene per mezzo di una transizione di singola particella tra l'ultimo stato buca e il primo stato particella. Le informazioni riportate in Tab. 4.2 aiutano a determinare le caratteristiche dello stato eccitato. Nel caso dell'ossigeno la transizione tra gli stati $1p_{1/2}$ e $1d_{5/2}$ determina stati eccitati con $J^\pi = 2^-, 3^-$ e con un'energia di eccitazione pari a $\epsilon_{1d_{1/2}} - \epsilon_{1p_{1/2}} \cong 10MeV$ sia per protoni che per neutroni, mentre sperimentalmente si ha uno stato 3^- con $\omega = 6.13MeV$.

Nel caso del piombo si ha una transizione tra gli stati $3s_{1/2}$ e $1h_{9/2}$ per stati protonici, e $3p_{1/2}$ e $2g_{9/2}$ per stati neutronici, che corrispondono a stati eccitati $J^\pi = 4^-, 5^-$ con energia $\omega \cong 4MeV$ mentre sperimentalmente si ha uno stato 3^- con $\omega = 2.61MeV$.

Nel caso del carbonio la transizione tra gli stati $1p_{3/2}$ e $1p_{1/2}$ determina uno stato $J^\pi = 1^-, 2^-$ con $\omega \cong 3.5MeV$ mentre sperimentalmente si ha un 3^- con $\omega = 9.64MeV$.

In pratica solo nell'ossigeno si riesce a descrivere il corretto momento angolare e la parità dello stato eccitato ma senza riuscire a giustificarne l'energia. Tale insuccesso porta a concludere che la risonanza gigante e lo stato 3^- sono fenomeni di tipo collettivo.

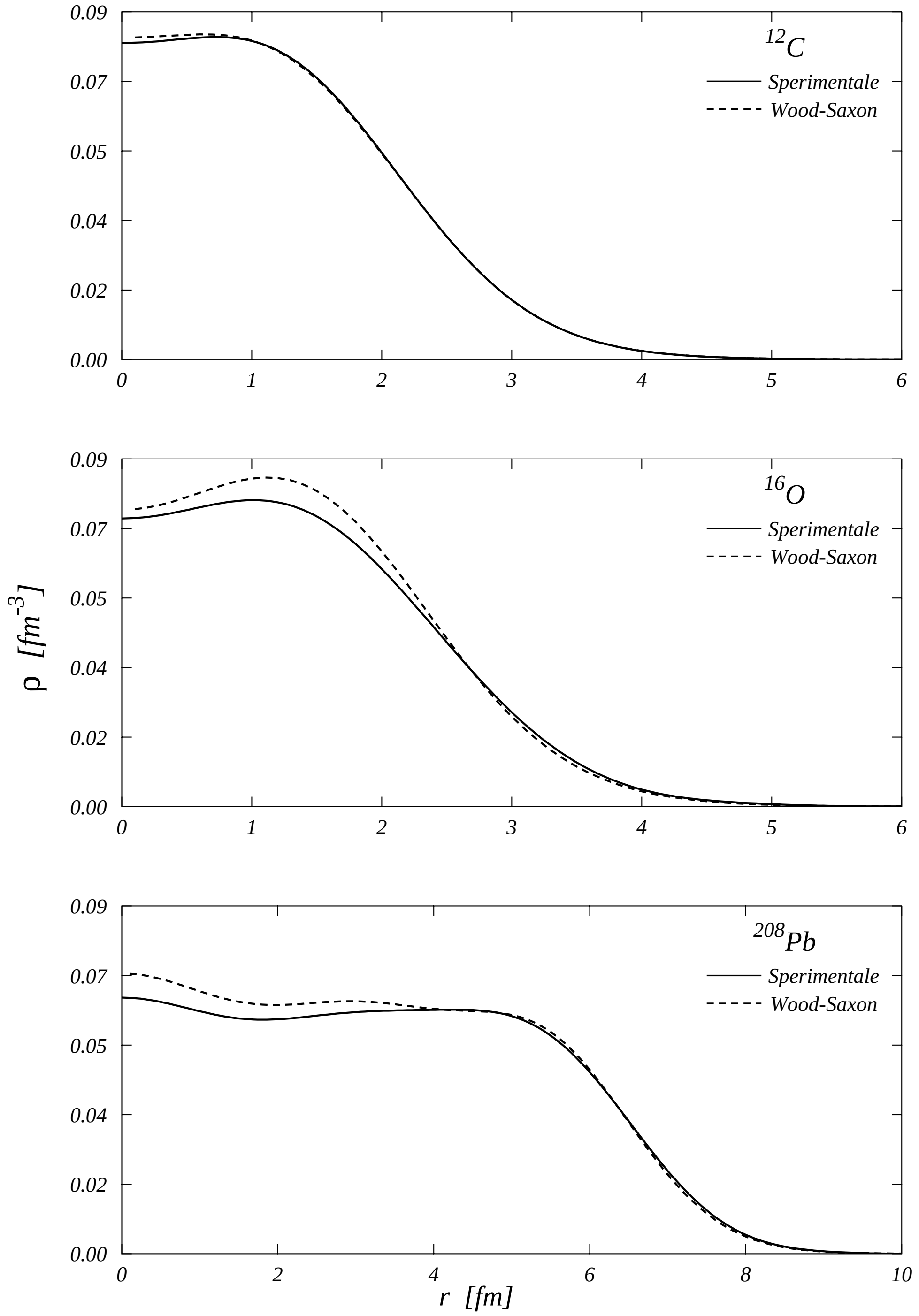

Figura 4.1: Confronto tra densità di carica sperimentali [Dej87] e quelle ottenuta con il modello a campo medio per ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb

4.2 Interazione residua

La scelta dell'interazione per la coppia particella-buca è l'ingrediente necessario al calcolo degli elementi di matrice scritti nelle 3.24-3.25 e quindi influisce sul valore delle ampiezze X e Y dell'RPA.

Per momenti trasferiti tipici della regione del picco quasi-elastico è necessaria una raffinata risoluzione spaziale dell'interazione per descrivere adeguatamente il processo, ciò corrisponde all'utilizzo di un'interazione a range finito. Tuttavia le interazioni a range finito provocano un aumento considerevole della complessità del calcolo legato alla stima dei termini di scambio dell'interazione. Questo problema non si presenta per processi a bassi momenti trasferiti dove un'alta risoluzione spaziale non è necessaria, e quindi anche un'interazione di contatto (a zero-range) descrive adeguatamente il processo. Per un'interazione di contatto i termini di scambio non esistono. Da quanto detto ci si aspetta che nella regione delle risonanze giganti sia sufficiente l'utilizzo di interazioni di contatto, mentre nella regione del picco quasi-elastico sia necessario usare un'interazione a range finito.

In questo lavoro sono state utilizzate due interazioni effettive particella-buca, una di contatto tipo Landau-Migdal (LM) [Mig67], ed una a range finito del tipo potenziale di polarizzazione (PP) [Ald78], per quest'ultima l'effetto dei termini di scambio è stato incluso fenomenologicamente nei suoi parametri [Pin88]. La forma comune alle due interazioni nello spazio dei momenti è del tipo:

$$\begin{aligned} V^{ph}_{1,2}(k,\rho) &= C_0\,[F(k,\rho) + F'(k,\rho)\,\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2) \\ &\quad + G(k)\,\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2) + G'(k)\,\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)\,\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2)] \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\tau}$ rappresentano gli operatori di spin ed isospin di singola particella. I parametri dipendono dal modulo del momento relativo dei due nucleoni che corrisponde al modulo del momento trasferito $k = |\mathbf{q}|$. I paramerti F ed $F^{'}$ hanno anche una dipendenza dalla densità nucleare del tipo:

$$F\left(k, \rho\left(r\right)\right) = F^{est}\left(k\right) + \left(F^{int}\left(k\right) - F^{ext}\left(k\right)\right)\rho^{\alpha}\left(r\right) \tag{4.6}$$

ed un'analoga espressione per $F^{'}$. La densità $\rho\left(r\right)$ utilizzata nel calcolo è data da

$$\rho\left(r\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(r - R\right)/a} \tag{4.7}$$

dove $F^{int}\left(k\right)$ ed $F^{ext}\left(k\right)$ sono detti rispettivamente parametri interni ed esterni di Landau, R ed a sono il raggio e la diffusività scelti in modo da avere una densità simile a quella del nucleo in questione, α indica in che modo i parametri di Landau dipendono dalla densità.

- La natura zero range della LM implica che sia costante in k. I valori dei parametri utilizzati in questo lavoro sono riportati in Tab. 4.3 e corrispondono a quelli utilizzati in [Rin78]. I parametri sono stati fissati in modo da riprodurre

F^{est}	F^{int}	F'^{est}	F'^{int}	G	G'
-2.45	0.20	1.50	1.50	0.55	0.70

Tabella 4.3: Termini dell'interazione nucleone-nucleone tipo LM. I parametri sono adimensionali.

alcuni osservabili come le energie di eccitazione, le probabilità di transizione di stati collettivi in nuclei pari-pari e i momenti elettromagnetici nella regione del ^{208}Pb. La costante Nell'ambito della teoria di Migdal dei liquidi fermionici $C_0 = 302 MeV fm^3$. In questo lavoro l'interazione residua sarà moltiplicata per un fattore di riduzione $\mathcal{R}$. Nel caso dell'ossigeno e del piombo $\mathcal{R}$ è stato fissato in modo da riprodurre il valore sperimentale dell'energia del primo stato eccitato 3^- dei nuclei rispettivamente a 6.13 MeV e 2.63 MeV, nel caso del carbonio per riprodurre al meglio la probabilità di fotoassorbimento sperimentale. Nella Tab. 4.4 riporto i valori dei parametri dell'interazione LM che variano con il nucleo: i parametri della densità R, a, α e il fattore di riduzione $\mathcal{R}$. Si noti che mentre nel caso dell'ossigeno e del piombo le funzioni F e F' dipendono linearmente dalla densità ρ nel caso del carbonio dipendono da $\rho^{1/3}$.

	^{12}C	^{16}O	^{208}Pb
$\mathcal{R}$	0.60	0.84	1.08
α	1/3	1	1
R	3.00	2.71	7.50
a	0.50	0.60	0.60

Tabella 4.4: Parametri della densità e fattore di riduzione $\mathcal{R}$ usati nel caso dell'interazione LM. Il parametro R è in fm, a in fm^{-1}, α e $\mathcal{R}$ sono adimensionali

- Il potenziale di polarizzazione è a range finito quindi i parametri F e G non sono costanti nello spazio degli impulsi, in Fig. 4.2 riporto l'andamento in k dei parametri dell'interazione PP, essi corrispondono a quelli utilizzati in [Pin88]. I parametri sono stati fissati in modo da riprodurre alcuni dati empirici di materia nucleare come il modulo di compressione K a cui è legato il parametro $F(k)$, l'energia di simmetria a cui è legato $F'(k)$. Anche nel caso del potenziale di polarizzazione ho rinormalizzato l'interazione variando $\mathcal{R}$ in modo da riprodurre l'energia del primo stato eccitato dei nuclei. Nella Tab. 4.5 riporto i valori dei parametri dell'interazione PP che variano con il nucleo. Si noti che per le due interazioni sono stati utilizzati gli stessi parametri che descrivono la funzione densità e che, ad eccezione del piombo, questi sono diversi dai parametri R ed a usati nel potenziale di Wood-Saxon. Nel calcolo il termine di scambio è stato trascurato, ma in [Pin88] è stato dimostrato che il trattamento fenomenologico dei termini di scambio è soddisfacente.

	^{12}C	^{16}O	^{208}Pb
$\mathcal{R}$	0.60	1.02	0.75
α	1/3	1	1
R	3.00	2.71	7.50
a	0.50	0.60	0.60

Tabella 4.5: Parametri della densità e fattore di riduzione $\mathcal{R}$ usati nel caso dell'interazione LM. Il parametro R è in fm, a in fm^{-1}, α e $\mathcal{R}$ sono adimensionali

Nella Tab. 4.6 riporto le energie del primo stato eccitato 3^- dell'ossigeno e del piombo. La prima colonna si riferisce al risultato sperimentale dedotto dalla tavola degli isotopi [Led78], le altre al calcolo RPA con le interazioni LM e PP originali e quelle rinormalizzate usando il valore $\mathcal{R}$ riportato nelle Tab. 4.4-4.5. Le interazioni rinormalizzate riproducono ottimamente l'energia di eccitazione. Nel caso delle interazioni originali, per il piombo non è stata trovata nessuna soluzione al di sotto della soglia di emissione nucleonica. Anche per il carbonio sia le interazioni originali che quelle rinormalizzate non riproducono nessuno stato eccitato 3^- al di sotto dell'energia di soglia per l'emissione nucleonica.

	$Sper.$	LM	LM_{rin}	PP	PP_{rin}
^{16}O	6.13	11.0	6.18	10.27	6.32
^{208}Pb	2.63	–	2.65	–	2.65

Tabella 4.6: Energie di eccitazione (in MeV) degli stati 3^- in ^{16}O e ^{208}Pb

Una volta fissati i parametri dell'interazione in modo da ben riprodurre l'energia di eccitazione del primo stato 3^-, è interessante vedere come il modello descrive l'altro fenomeno collettivo cioè la risonanza gigante. In Fig.4.3 mostro il confronto tra i dati sperimentali e quelli calcolati per la sezione d'urto di fotoassorbimento nella regione della risonanza gigante. La linea continua e quella tratteggiata si riferiscono rispettivamente all'utilizzo dell'interazione LM e PP. Per ^{16}O la posizione del picco è ben riprodotta sia dal calcolo con LM che da quello con PP, ma la sua altezza è sovrastimata di un fattore superiore a due. Meno chiaro è il confronto negli altri nuclei dove, soprattutto per ^{208}Pb, il calcolo riproduce molte più risonanze di quelle presenti sperimentalmente. Nella figura è anche riportato il risultato ottenuto con il modello a campo medio (linea punteggiata) che come già detto appare completamente inadeguato a descrivere il fenomeno. In Tab.4.7 si può anche vedere il confronto tra la sezione d'urto integrata in ω per l'interazione LM e i dati sperimentali. Nel caso dei dati sperimentali l'integrale è stato effettuato fino al valore massimo dei dati disponibili, cioè $40 MeV$ per ^{16}O e ^{12}C, $60 MeV$ per il ^{208}Pb, inoltre nell'integrazione l'incertezza sui dati sperimentali è stata trascurata. Dai risultati è chiaro che l'eccitazione di dipolo fornisce il contributo dominante alla sezione d'urto. Si può notare che il calcolo RPA fornisce un risultato notevolmente più basso del risultato sperimentale.

Il confronto, fin qui effettuato, con la sezione d'urto di fotoassorbimento ha una validità limitata, a causa del fatto che la sezione d'urto è principalmente determinata dal contributo di dipolo elettrico e che il valore del momento trasferito è uguale all'energia trasferita del fotone (in unità naturali). Per una più completa verifica della capacità predittiva del modello mostro il confronto tra i risultati e i dati sperimentali per processi di diffusione di elettroni su ^{12}C. In questo caso, la natura del processo permette di effettuare il confronto con una maggiore varietà di situazioni cinematiche, queste hanno anche il vantaggio di essere simili a quelle dei processi neutrino-nucleo. Inoltre è possibile vedere il confronto anche nella regione del picco quasi elastico. Nelle figure 4.4, 4.5 e 4.6 i dati sperimentali sono stati presi da [Bar83] e i risultati sono ordinati per energie ϵ crescenti dell'elettrone incidente. In fig. 4.7 i dati sono presi da [Lei63]. La linea tratteggiata si riferisce al calcolo RPA con l'interazione LM. A basse energie i risultati mostrano la presenza di picchi molto marcati che non sono presenti nei dati sperimentali. A più alte energie il picco allargato della risonanza gigante si trova sempre ad energie ω inferiori rispetto a quelle dei dati sperimentali.

Dai risultati fin qui mostrati è evidente che, nonostante il modello RPA abbia notevolmente migliorato le previsioni del modello a campo medio, non è in grado di riprodurre allo stesso tempo due fenomeni collettivi come l'energia di eccitazione del primo stato eccitato 3^- e la risonanza gigante. Lo stato 3^- è sensibile ai termini isoscalari dell'interazione mentre la risonanza gigante di dipolo a quelli isovettoriali. L'interazione residua è attrattiva nel primo canale e repulsiva nel secondo. Si possono modificare i parametri dell'interazione per migliorare l'accordo con gli esperimenti come fatto in [Bub90], ma questa difficoltà è una caratteristica intrinseca del modello RPA e può essere superata considerando le correlazioni di ordine superiore a quelle di tipo $1p - 1h$ [Bro79].

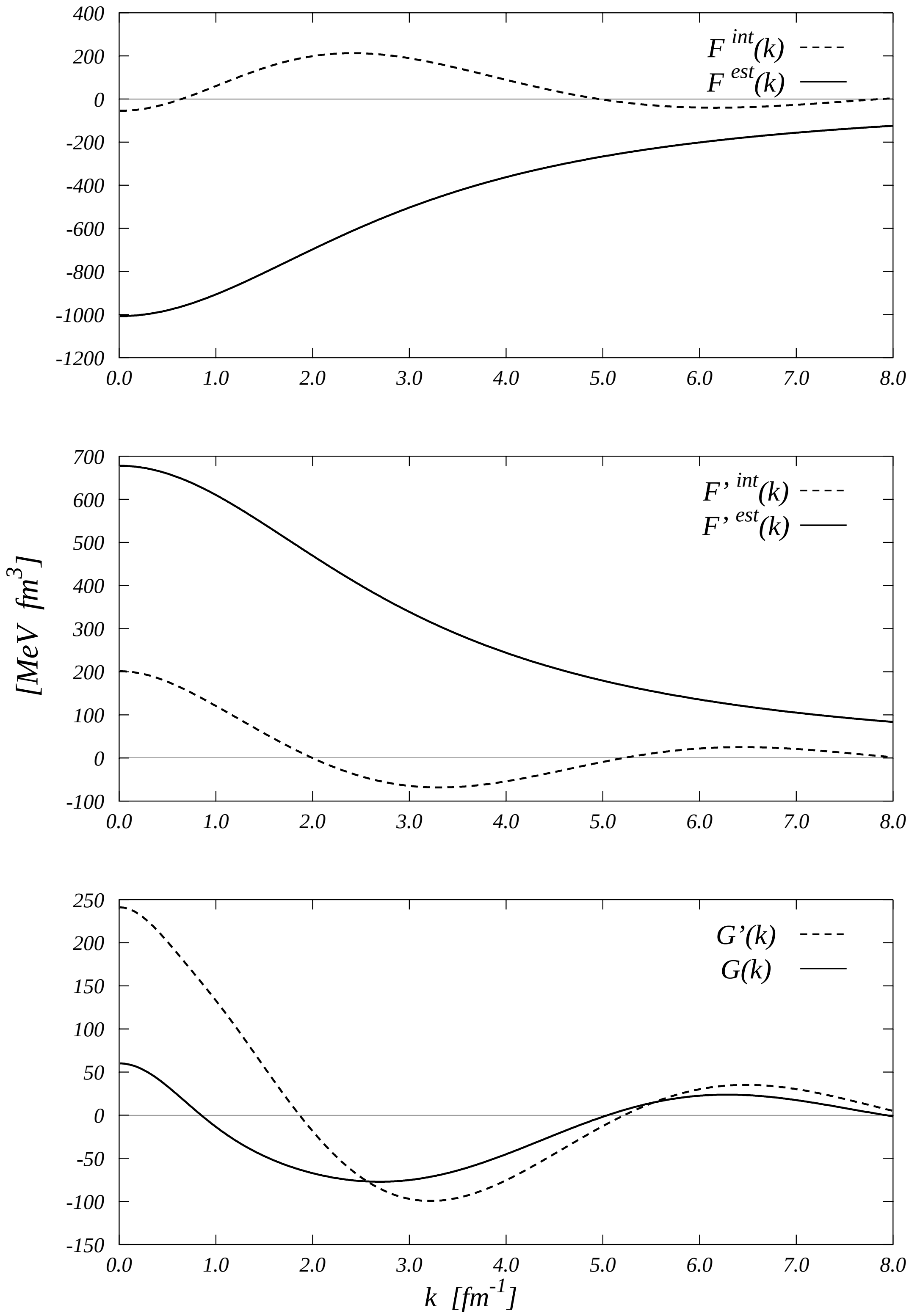

Figura 4.2: Termini dell'interazione PP in funzione del momento trasferito k dei nucleoni interagenti.

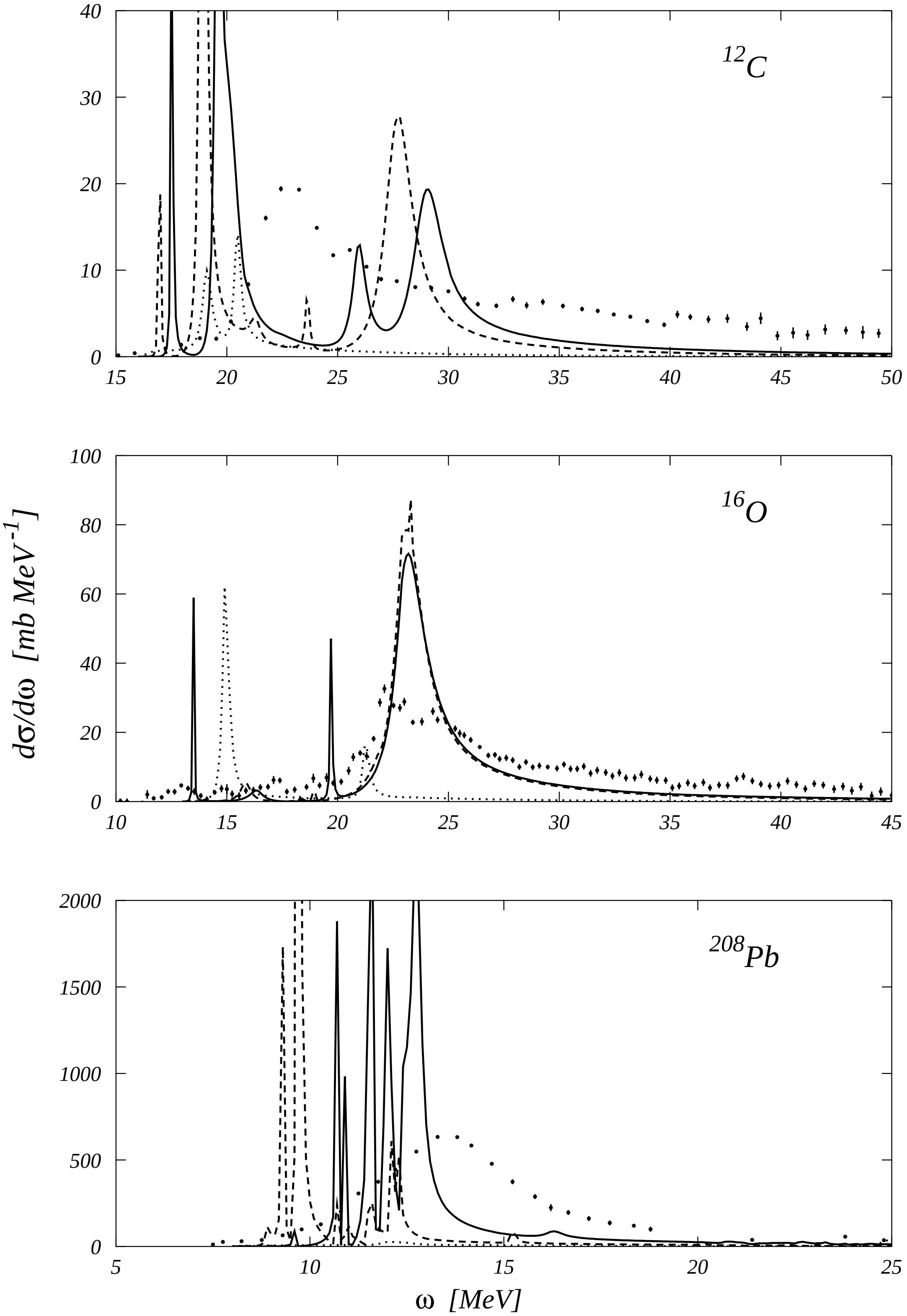

Figura 4.3: Sezione d'urto di fotoassorbimento per ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb. La linea continua si riferisce al calcolo RPA con l'interazione LM, quella tratteggiata con l'interazione PP. La linea punteggiata si riferisce al risultato ottenuto con il modello a campo medio. I dati sperimentali sono stati presi da [Ahr75].

4.3 Funzione di convoluzione

Nel paragrafo 3.3 ho mostrato come l'effetto di correlazioni di ordine superiore al primo possa essere calcolato in maniera fenomenologica mediante la convoluzione delle risposte nucleari con una funzione $\rho(\Gamma(\omega), \Delta(\omega))$ espressa nella 3.80 e con

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} d\epsilon\,[\gamma(\epsilon+\omega)+\gamma(\epsilon-\omega)] \tag{4.8}$$

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\Gamma(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{4.9}$$

e

$$\gamma(\epsilon) = A\left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+B^2}\right)\left(\frac{C^2}{\epsilon^2+C^2}\right) \tag{4.10}$$

Risulta difficile aggiustare i parametri per riprodurre al meglio i dati sperimentali sia per la presenza di ben tre parametri liberi sia perchè questi influiscono in maniera molto simile sul risultato finale. Ad esempio, all'aumentare del parametro A si ottiene l'effetto di un allargamento dei picchi e di uno spostamento di questi verso ω minori. All'aumentare di B si ottiene l'effetto opposto, i picchi diventano più stretti e si spostano verso ω più grandi. Spesso con valori diversi dei parametri si ottiene lo stesso risultato finale. La parametrizzazione, $A = 11$ $B = 20MeV$ e $C = 110MeV$ riproduce adeguatamente i risultati per vari nuclei nella regione del picco quasi elastico, come mostrato in [Ama94], ma non è adeguata nella regione delle risonanze giganti. Per rimediare a questo problema ho considerato i parametri A, B, e C dipendenti dall'energia fissando valori costanti nelle regioni $\omega < 10MeV$ e $\omega > 40MeV$ e ho calcolato il valore dei parametri nella regione $10MeV < \omega < 40MeV$ mediante un interpolazione lineare tra i valori agli estremi dell'intervallo. Ho usato $m^* = 0.85$, questo valore riproduce adeguatamente la risposta nucleare nella regione del picco quasi elastico [Pin88], ho mantenuto lo stesso valore anche nella regione a basse energie. I valori dei parametri utilizzati in questo lavoro per la funzione $\gamma(\epsilon)$ sono riportati in Tab. 4.8. Si noti che ho cercato di mantenere la stessa parametrizzazione di [Ama94] nella regione degli $\omega > 40MeV$, ciò è stato possibile ad eccezione dell'^{16}O dove questa parametrizzazione provoca uno spostamento del picco verso ω più grandi nella sezione d'urto di fotoassorbimento peggiorando la previsione del modello RPA che già riproduce esattamente la posizione del picco (vedi Fig.4.3). Per mantenere la stessa parametrizzazione nell'^{16}O e ben riprodurre i dati di fotoassorbimento si deve cambiare il parametro $\mathcal{R}$ della LM, ma ciò impedisce di riprodurre l'energia di eccitazione dello stato 3^-. Ho eseguito il calcolo della convoluzione solo sui risultati RPA ottenuti con la LM. Per il C^{12} i parametri sono stati scelti in modo da riprodurre al meglio la sezione d'urto di fotoassorbimento e di diffusione di elettroni. Nel caso dell'^{16}O e del ^{208}Pb non sono disponibili dati della sezione d'urto di elettroni nella regione della risonanza gigante, ho potuto sfruttare

	J^P	CM	LM	FSI	Sper.
^{12}C	σ [mb]	33.92	157.37	145.12	241.36
	1^-	25.55	147.97	135.96	-
	2^+	7.93	8.93	8.75	-
	3^-	0.44	0.47	0.41	-
^{16}O	σ [mb]	49.24	254.14	222.33	345.8
	1^-	37.22	239.54	208.86	-
	2^+	11.38	13.98	12.87	-
	3^-	0.64	0.62	0.60	-
^{208}Pb	σ [mb]	1216.24	3121.2	3012.0	3713.0
	1^-	961.12	2923.1	2827.9	-
	2^+	238.29	185.3	172.2	-
	3^-	16.83	12.8	11.9	-

Tabella 4.7: Sezione d'urto totale di fotoassorbimento calcolata con il modello a campo medio, il modello RPA con la LM, e il modello FSI, nell'ultima colonna i dati sperimentali presi da [Ahr75].

solo i dati della sezione d'urto di fotoassorbimento. I risultati sono riportati nelle Fig. 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7, mentre per la sezione d'urto di fotoassorbimento sono riportati in Fig.4.8. In entrambi i casi è riportato il risultato con il calcolo RPA e l'interazione LM (linea tratteggiata) e lo stesso risultato dopo la convoluzione (linea continua). L'applicazione del modello FSI risolve proprio i difetti della previsione del modello RPA, ammorbidisce la curva elimando i picchi e sposta l'area della curva verso ω maggiori.

Gli ultimi confronti sono il risultato principale del capitolo e mostrano che nel caso del modello FSI l'accordo con i dati sperimentali è sicuramente migliore di quello del modello RPA. Sebbene ciò indichi un discreto successo dei modelli nella descrizione dei suddetti fenomeni fisici, non è affatto scontata un'analoga capacità predittiva nei processi neutrino-nucleo. I limiti del confronto riguardano le già discusse differenti caratteristiche cinematiche del processo di fotoassorbimento e di quello neutrino-nucleo, e il diverso comportamento della sezione d'urto di diffusione di elettroni. Come mostrerò in dettaglio nel prossimo capitolo le differenze principali sono tre. Nel caso del neutrino la sezione d'urto è dominata dagli operatori assiali, nel caso dell'elettrone gli operatori assiali non esistono. Inoltre, la sezione d'urto di neutrino cresce al crescere dell'energia del neutrino incidente e dell'angolo di diffusione, mentre quella dell'elettrone decresce al crescere dell'energia dell'elettrone incidente e dell'angolo di diffusione.

	$\varepsilon < 10\ MeV$			$\varepsilon > 40\ MeV$		
	A	B	C	A	B	C
^{12}C	6	100	60	11	20	110
^{16}O	85	130	110	60	110	110
^{208}Pb	6	30	110	11	20	110

Tabella 4.8: Parametri per la funzione $\gamma(\epsilon)$ del modello FSI. I parametri B e C sono in MeV, A è adimensionale. Nella regione $10MeV < \omega < 40MeV$ è stata eseguita un interpolazione lineare tra i valori agli estremi dell'intervallo.

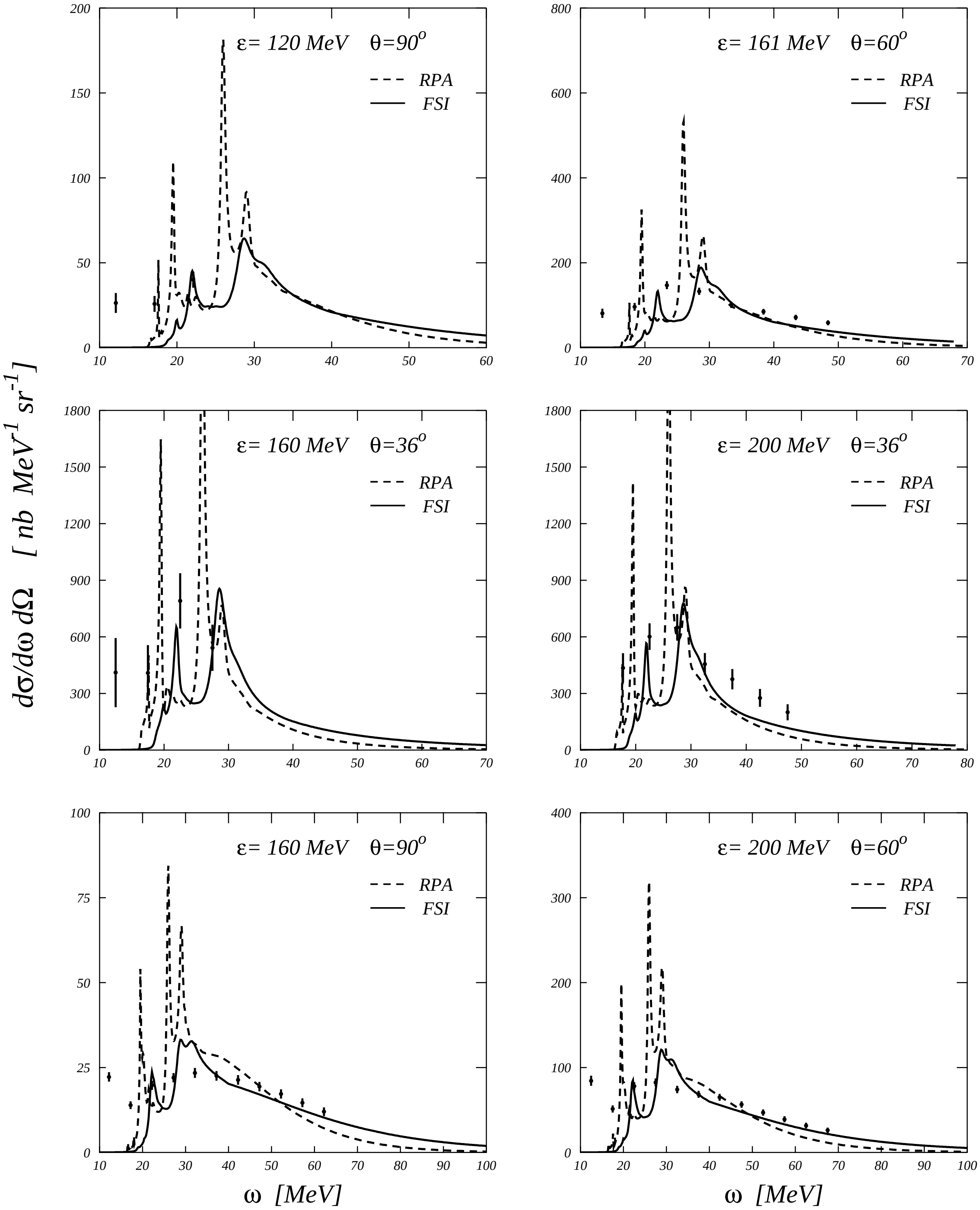

Figura 4.4: Sezione d'urto doppio differenziale di diffusione di elettroni su ^{12}C. Confronto tra il calcolo RPA con interazione LM e quello FSI. I dati sperimentali sono presi da [Bar83].

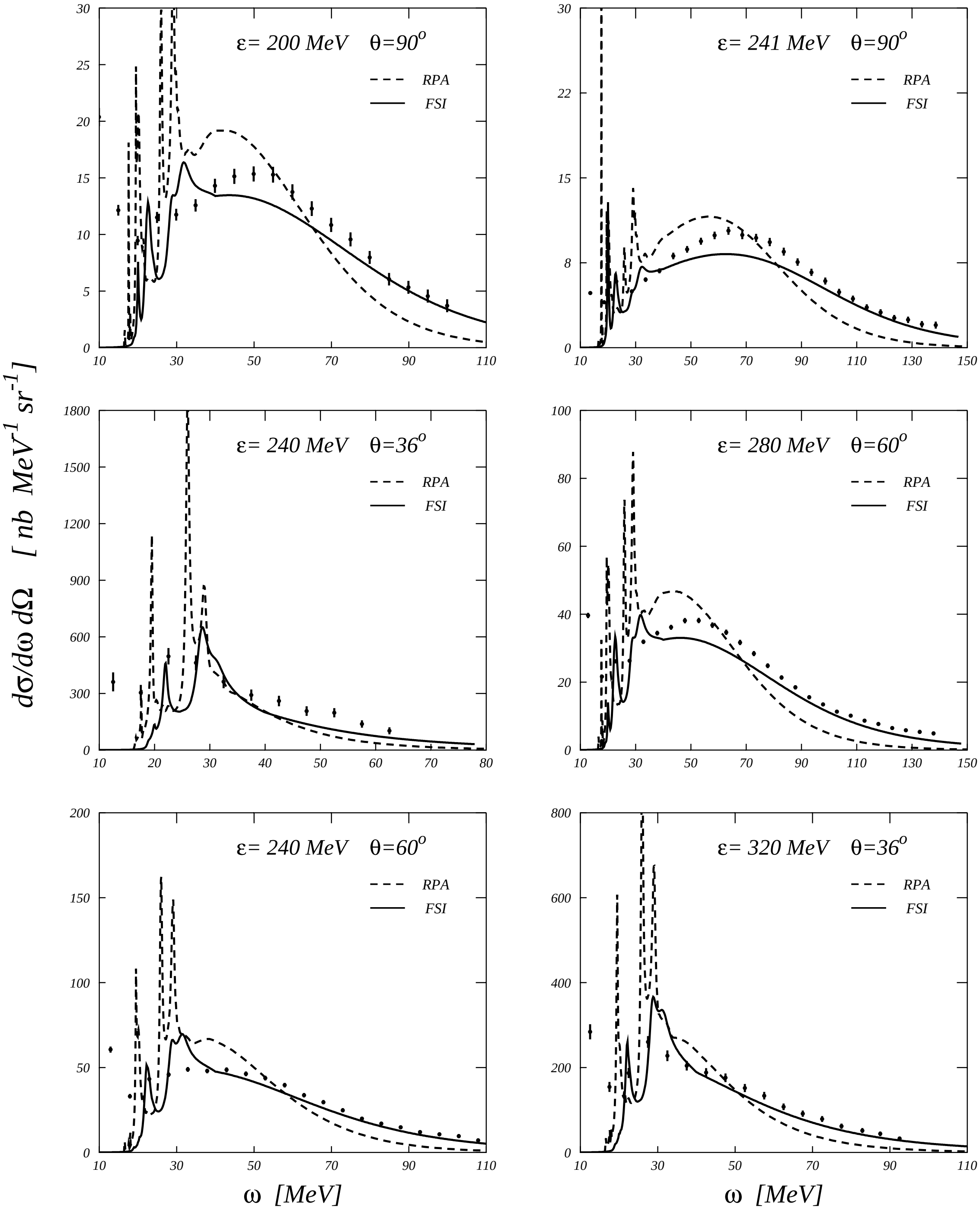

Figura 4.5: Sezione d'urto doppio differenziale di diffusione di elettroni su ^{12}C. Confronto tra il calcolo RPA con interazione LM e quello FSI. I dati sperimentali sono presi da [Bar83].

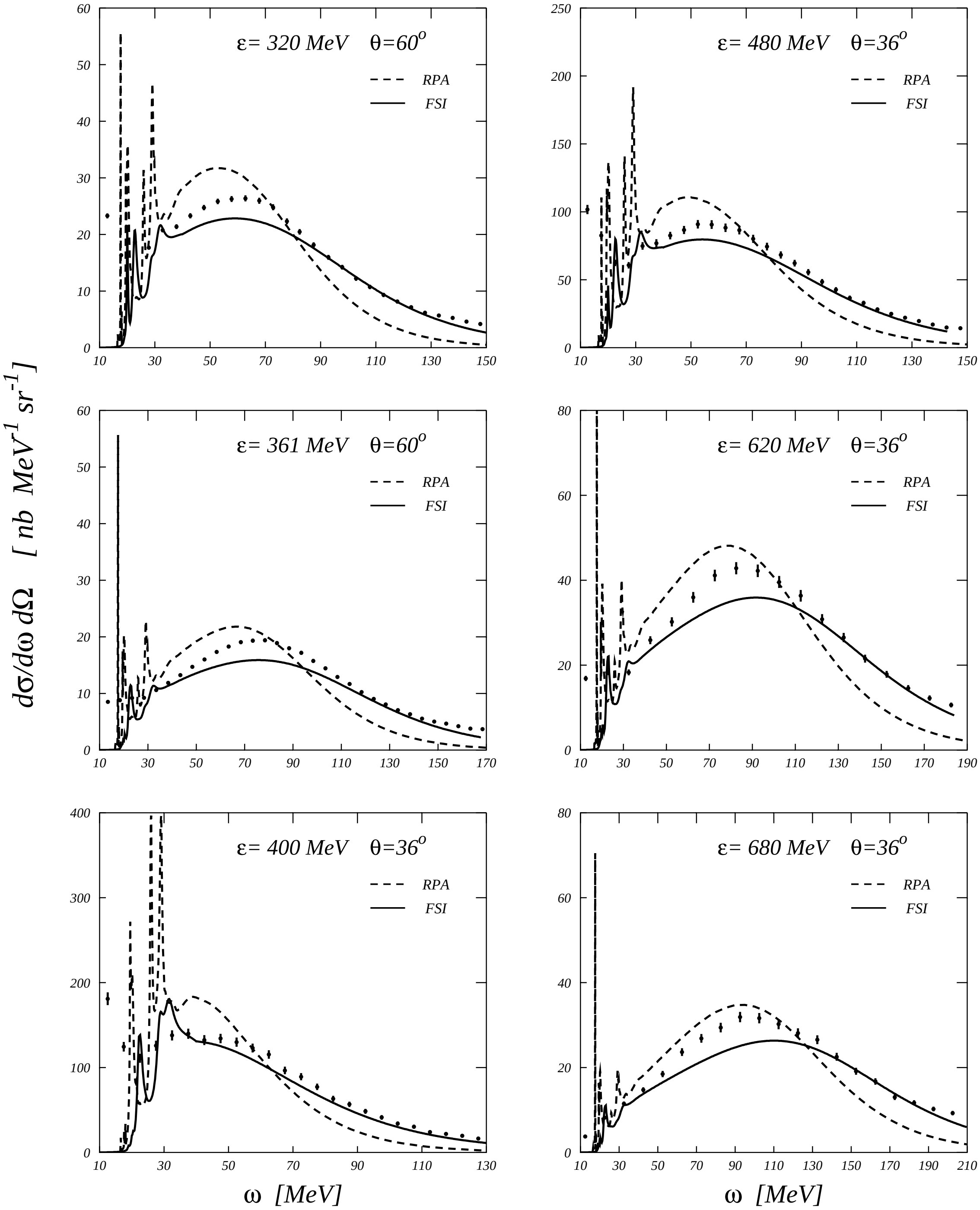

Figura 4.6: Sezione d'urto doppio differenziale di diffusione di elettroni su ^{12}C. Confronto tra il calcolo RPA con interazione LM e quello FSI. I dati sperimentali sono presi da [Bar83].

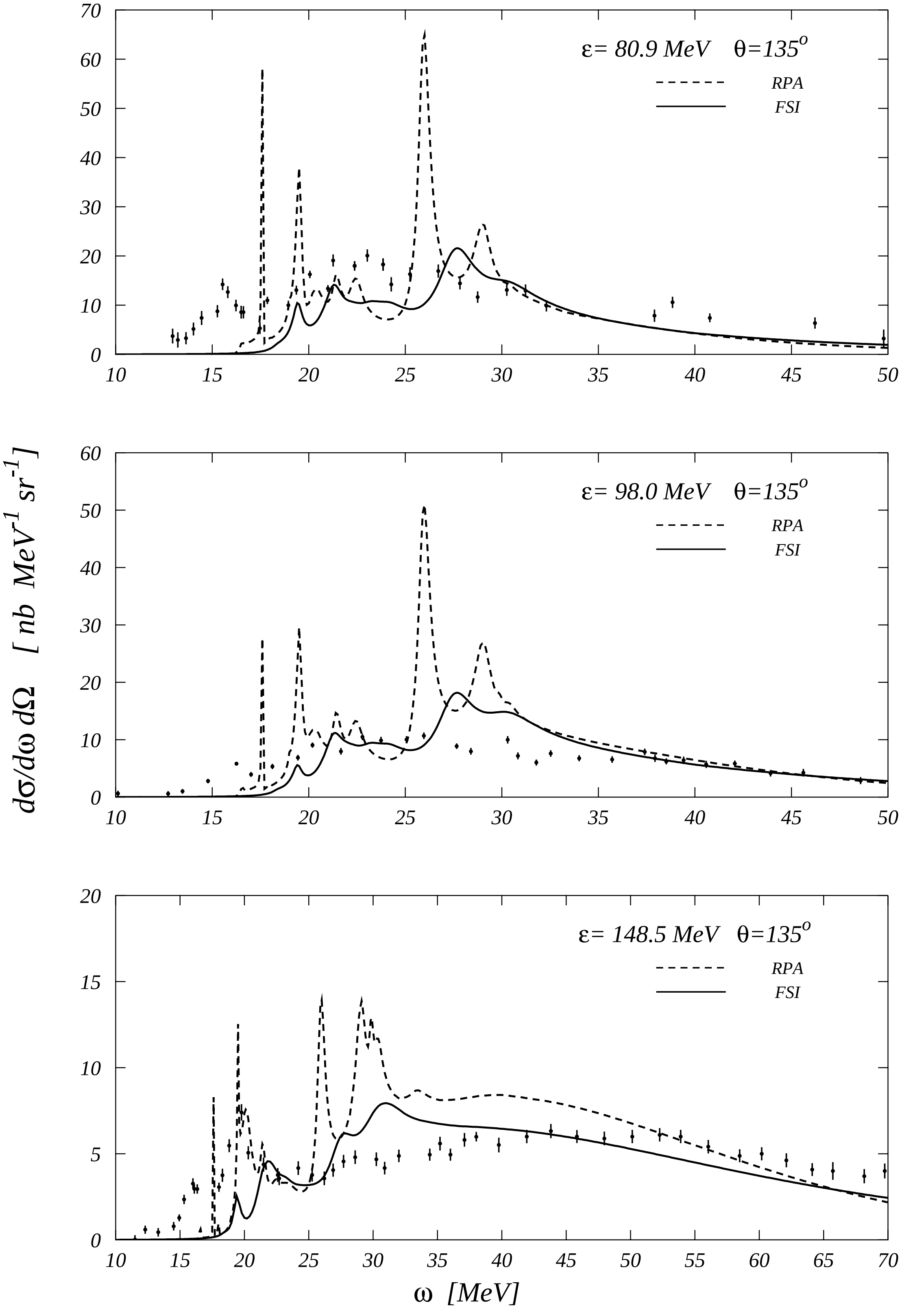

Figura 4.7: Sezione d'urto doppio differenziale di diffusione di elettroni su ^{12}C. Confronto tra il calcolo RPA con interazione LM e quello FSI. I dati sperimentali sono presi da [Kol97].

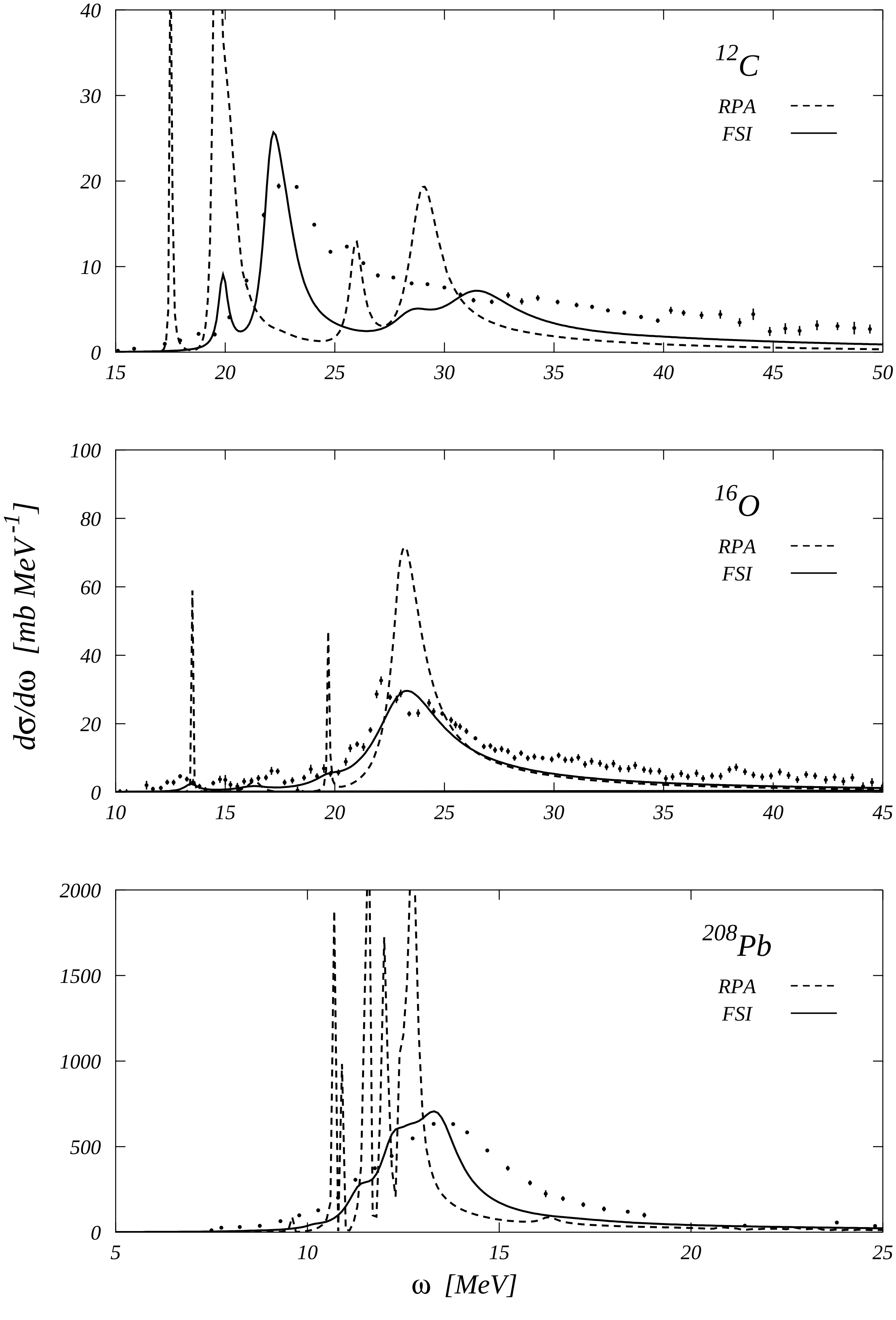

Figura 4.8: Sezione d'urto di fotoassorbimento per ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb. Confronto tra il calcolo RPA con interazione LM e quello FSI.

Capitolo 5

CARATTERISTICHE GENERALI DEL PROCESSO

In questo capitolo presenterò le principali caratteristiche del processo di interazione neutrino-nucleo. Un'analisi dettagliata della sezione d'urto permette una maggiore comprensione del fenomeno fisico. La conoscenza degli aspetti dominanti della sezione d'urto permette di raffinare la descrizione teorica degli stessi ed ottenere quindi previsioni più precise. Sarà analizzata la dipendenza angolare della sezione d'urto e la sua dipendenza dall'energia del neutrino incidente. Mostrerò poi la differenza tra diffusione di neutrino ed antineutrino, e la sensibilità della sezione d'urto alle incertezze sperimentali della corrente nucleonica. Tutte queste informazioni sono di grande interesse anche in campo sperimentale perché utili per la rivelazione di neutrini e per la progettazione dei nuovi rivelatori. Inoltre, mostrerò il confronto tra RPA e campo medio nella regione energetica che va dalla soglia del continuo fino al picco quasi elastico. Sebbene alcune caratteristiche dipendono dal nucleo bersaglio, qui riporterò solo quelle comuni a tutti i nuclei e mostrerò prevalentemente risultati relativi all'^{16}O. Un'analisi sistematica dei risultati per processi NC e CC su ^{12}C, ^{16}O e ^{208}Pb sarà presentata nel capitolo successivo.

5.1 Risposta Nucleare

Nel capitolo 2 ho mostrato come la risposta nucleare possa essere scritta in funzione di otto operatori multipolari, quattro assiali e quattro vettoriali. Con l'utilizzo della CVC (2.83) i quattro vettoriali si riducono a tre. La risposta nucleare $R(\omega, |\mathbf{q}|(\omega,\theta))$ dipende dall'energia trasferita e dal modulo del momento trasferito. Tuttavia nel calcolo della sezione d'urto è preferibile utilizzare θ e non $|\mathbf{q}|$ per fissare la cinematica del processo.

Gli operatori C_V, E_V e M_A sono a parità naturale ($P = (-)^J$), ciò significa che le transizioni ph che contribuiscono al calcolo di questi operatori hanno $l_p +$

$l_h + J$ pari. Gli operatori C_A, L_A, E_A e M_V sono invece a parità non naturale ($P = (-)^{J+1}$) e le transizione *ph* che contribuiscono al calcolo di questi operatori hanno $l_p + l_h + J$ dispari. La parità opposta degli operatori assiali rispetto a quelli vettoriali rispecchia l'analogo comportamento della corrente nucleonica e deriva dalla presenza della matrice γ_5 nella corrente assiale. Avendo in comune le transizioni di singola particella, le risposte degli operatori con la stessa parità presentano le stesse risonanze, diverse da quelle degli operatori con parità differente. Questa analogia nella forma della risposta è particolarmente evidente per le coppie di operatori $E_A - M_V$ e $E_V - M_A$, che presentano andamenti molto simili poiché hanno una struttura operatoriale con alcuni termini in comune. In particolare l'E_A è costituito da un termine uguale a quello della parte di convezione del M_V, mentre l'M_A è costituito dallo stesso operatore della parte di magnetizzazione dell'E_A.

Nelle figure 5.1 e 5.2 mostro le risposte nucleari dei principali operatori nel caso dei processi NC su ^{16}O per $\theta = 30^o$ e rispettivamente $\varepsilon_\nu = 30MeV$ e $\varepsilon_\nu = 300MeV$. La linea continua si riferisce al calcolo RPA con l'interazione LM, quella tratteggiata con l'interazione PP, quella punteggiata al modello a campo medio. Il termine C_A è stato omesso perché il suo contributo è trascurabile. Come si può vedere nonostante l'andamento simile degli operatori con la stessa parità, gli operatori assiali (sulla sinistra) sono più grandi di quelli vettoriali (sulla destra) indipendentemente dal modello nucleare utilizzato per il calcolo. La differenza è particolarmente accentuata tra E_A e M_V. Il motivo di tale comportamento è il diverso ordine degli operatori in termini di $|\mathbf{q}|/m$ come scaturisce dalla riduzione non relativistica della corrente nucleonica. Gli operatori C_V, E_A e M_A sono di ordine zero rispetto a $|\mathbf{q}|/m$ come anche L_V, mentre C_A, L_A, E_V e M_V sono di ordine uno. Gli operatori assiali hanno ordine opposto a quello degli operatori vettoriali, ciò è dovuto alla presenza della matrice γ_5 nella corrente assiale che inverte il contributo della parte superiore ed inferiore degli spinori di Dirac nella riduzione non relativistica della corrente nucleonica. La differenza tra termini assiali e vettoriali diminuisce al crescere di $|\mathbf{q}|/m$ e cioè al crescere dell'energia del neutrino incidente (come si può vedere confrontando le figure 5.1 e 5.2) e dell'angolo di diffusione.

Un altro elemento che influisce il calcolo degli operatori sono i fattori di forma della corrente nucleonica. Questi sono descritti con un andamento di dipolo, ma nella regione delle risonanze giganti possono essere considerati costanti (per $\varepsilon_\nu < 50MeV$ la variazione dei fattori di forma è inferiore all'1%). Ad esempio nel caso dei processi NC il fattore F_V presenta una accentuata asimmetria tra protoni e neutroni, si trova che $|F_V^p/F_V^n| \cong 0.01$. Ciò implica che le transizioni di protone danno un contributo trascurabile al calcolo del'operatore C_V, che quindi, pur essendo l'unico operatore vettoriale di ordine zero, contribuisce alla sezione d'urto in maniera inferiore a quella degli operatori assiali. Gli altri fattori di forma non presentano una tale asimmetria.

Nelle figure 5.3 e 5.4 mostro i contributi dei multipoli alle risposte nucleari degli operatori trasversali calcolate con un modello RPA e l'interazione LM per processi NC su ^{16}O con $\varepsilon_\nu = 40MeV$ e rispettivamente $\theta = 30^o$ e $\theta = 150^o$. La linea continua

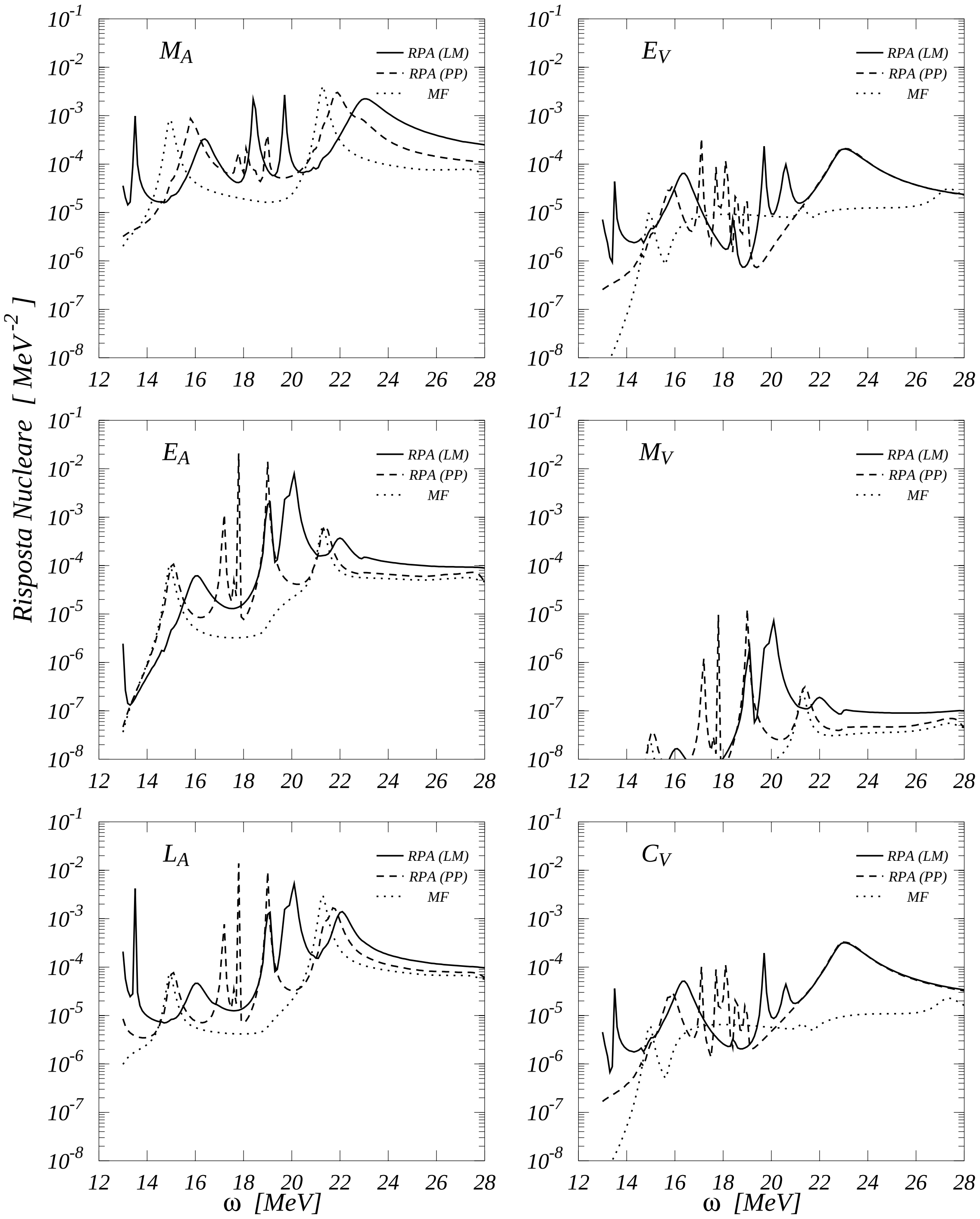

Figura 5.1: Risposte degli operatori multipolari per processi NC con $\varepsilon_\nu = 30 MeV$ e $\theta = 30^o$ calcolate con il modello a campo medio (linea punteggiata) il modello RPA e le interazioni LM (linea continua) e PP (linea trattegiata)

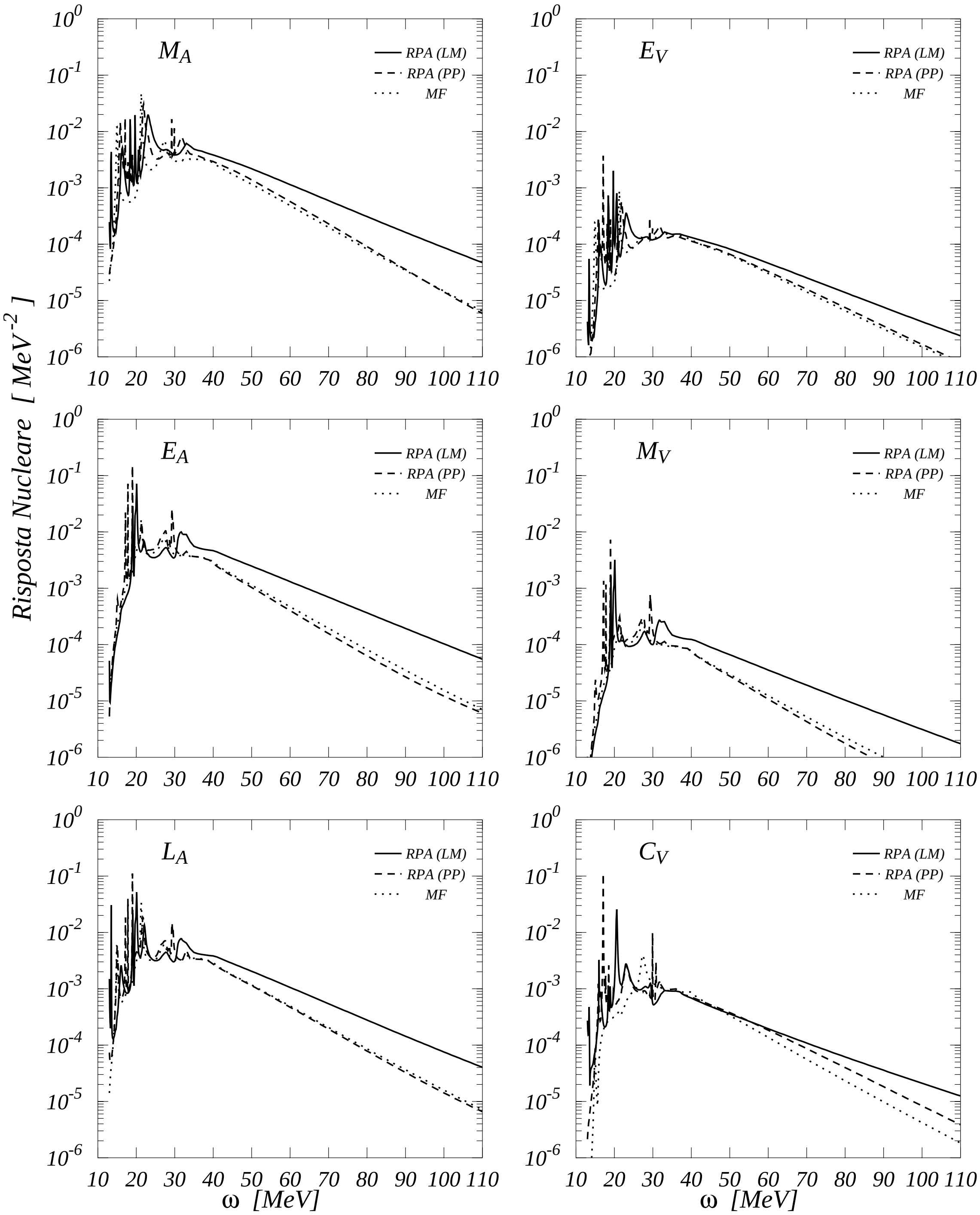

Figura 5.2: Risposte degli operatori multipolari per processi NC con $\varepsilon_\nu = 300 MeV$ e $\theta = 30^o$ calcolate con il modello a campo medio (linea punteggiata) il modello RPA e le interazioni LM (linea continua) e PP (linea trattegiata)

si riferisce alla risposta totale ottenuta sommando i contributi dei multipoli con $J < 4$. Si nota come a basse energie del neutrino incidente le transizioni con parità negativa sono dominati, indipendentemente dall'angolo di diffusione. In particolare quelli a parità naturale (M_A e E_V) sono dominati dall'1^- mentre quelli a parità non naturale (E_A e M_V) dal 2^-. Le principali risonanze della struttura nucleare sono quindi dovute a transizioni con multipolarità 1^- o 2^-, solo in particolari condizione cinematiche ($\theta \to 0^o$) è possibile osservare qualche risonanza dovuta allo 0^-.

Le risposte nucleari nella regione degli ($\omega < 40MeV$) crescono al crescere di θ lasciando inalterata la loro forma, come si può osservare dal confronto tra la Fig. 5.3 e la Fig. 5.4 (come si vedrà tale caratteristica non è rispettata nella regione degli ($\omega > 40MeV$)). Le risposte nucleari crescono anche al crescere dell'energia del neutrino incidente mantenendo invariata la posizione delle risonanze, come si può osservare dal confronto della Fig. 5.3 con la Fig. 5.1.

Nelle figure 5.5 e 5.6 mostro lo stesso risultato delle figure precedenti ma con $\varepsilon_\nu = 120MeV$. Nella regione dei picchi ($\omega < 40MeV$) M_A e E_V sono dominati dal multipolo 1^- mentre E_A e M_V da quello 2^-. A differenza del caso precedente, nella regione dell $\omega > 40MeV$ altre multipolarità contribuiscono alla sezione d'urto.

Ovviamente al crescere dell'energia sono necessari più termini dello sviluppo in multipoli per raggiungere la convergenza, perché aumenta il momento trasferito nel processo. Tale caratteristica tuttavia dipende dal nucleo. Si può avere una stima del J trasferito nel processo usando la relazione $J \cong |\mathbf{q}|\, R$, dove R è il raggio nucleare. Nell'^{16}O ho trovato che per $\varepsilon_\nu < 40MeV$ il contributo di $J = 4$ è inferiore all 1% in tutte le risposte nucleari e per ogni θ, per $\varepsilon_\nu < 120$ e $\varepsilon_\nu < 200$ lo stesso risultato si ottiene rispettivamente con $J = 6$ e $J = 8$. Faccio notare inoltre che la convergenza è più rapida per θ piccoli come si può osservare dal confronto delle figure 5.5 e 5.6. Analoghi risultati si ottengono per il ^{12}C. Un altro aspetto che vorrei far notare è il diverso andamento delle risposte nucleari al variare di θ nella regione degli ($\omega < 40MeV$) rispetto a quello degli ($\omega > 40MeV$).

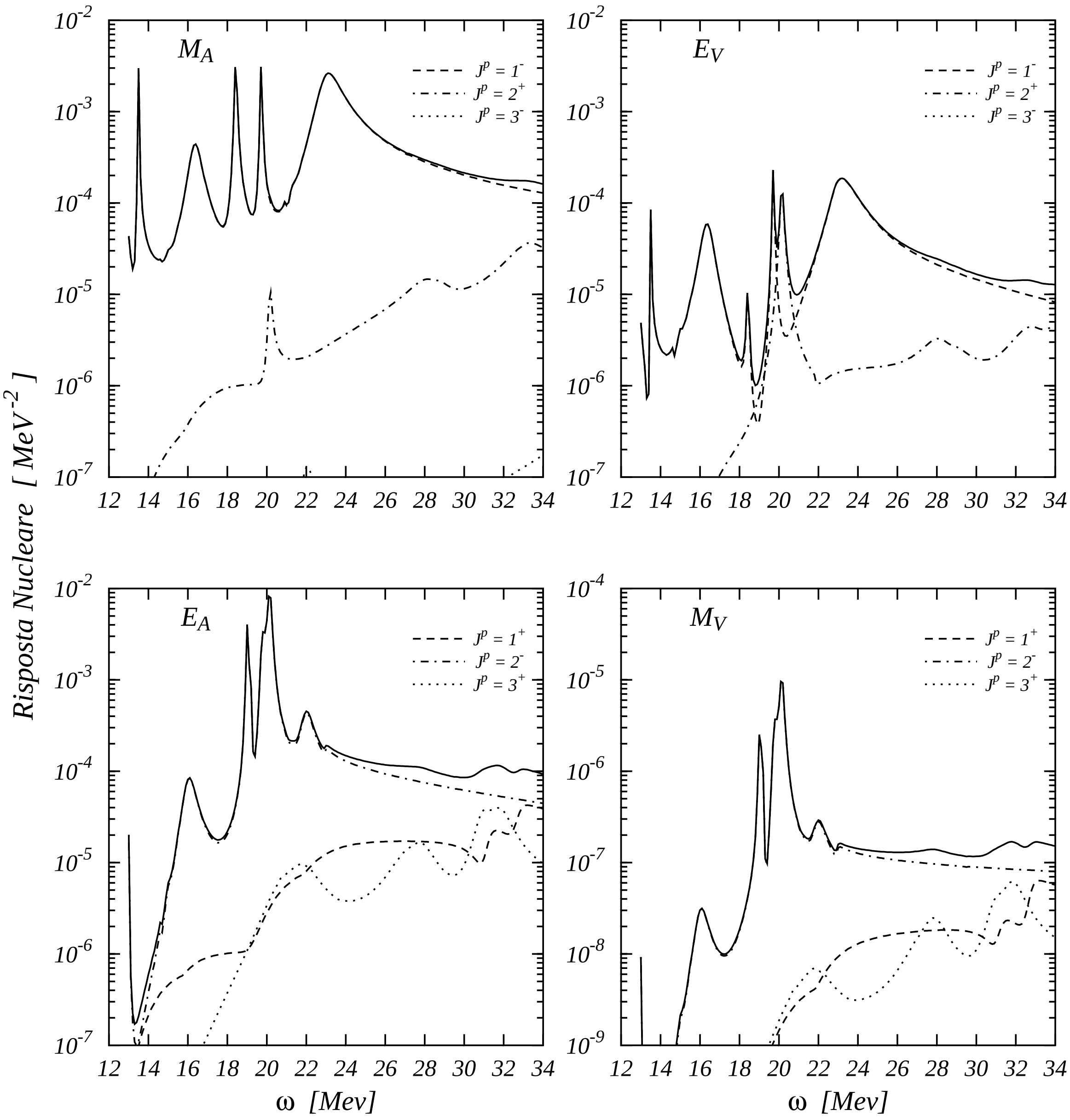

Figura 5.3: Risposta nucleare degli operatori trasversali per processi NC con $\varepsilon_\nu = 40 MeV$ e $\theta = 30^o$ calcolate con il modello RPA e l'interazione LM. La linea continua si riferisce alla risposta sommata su tutti i multipoli con $J < 5$, le altre linee al contributo dei singoli multipoli.

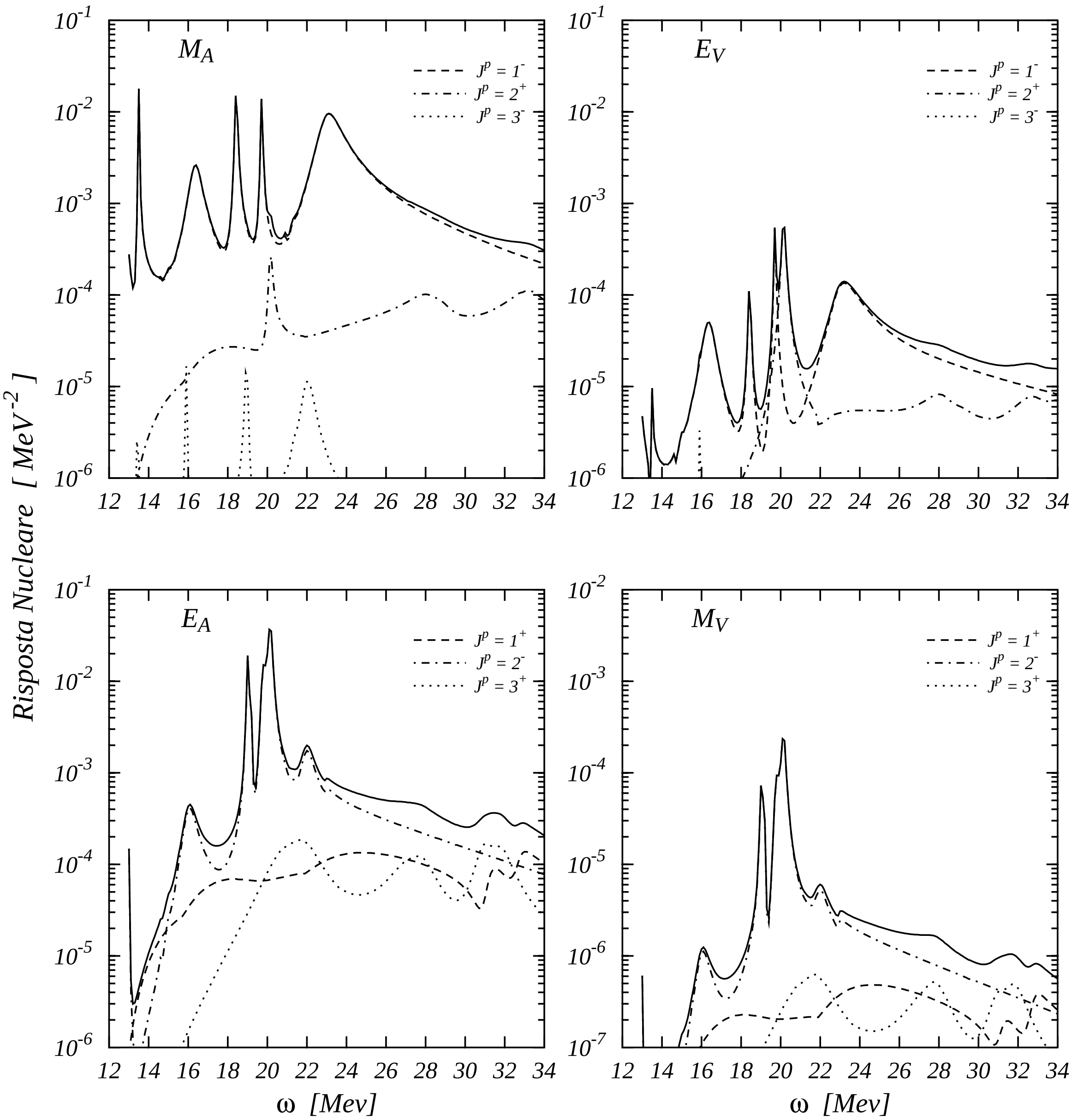

Figura 5.4: Risposta nucleare degli operatori trasversali per processi NC con $\varepsilon_\nu = 40 MeV$ e $\theta = 150^o$ calcolate con il modello RPA e l'interazione LM. La linea continua si riferisce alla risposta sommata su tutti i multipoli con $J < 5$, le altre linee al contributo dei singoli multipoli.

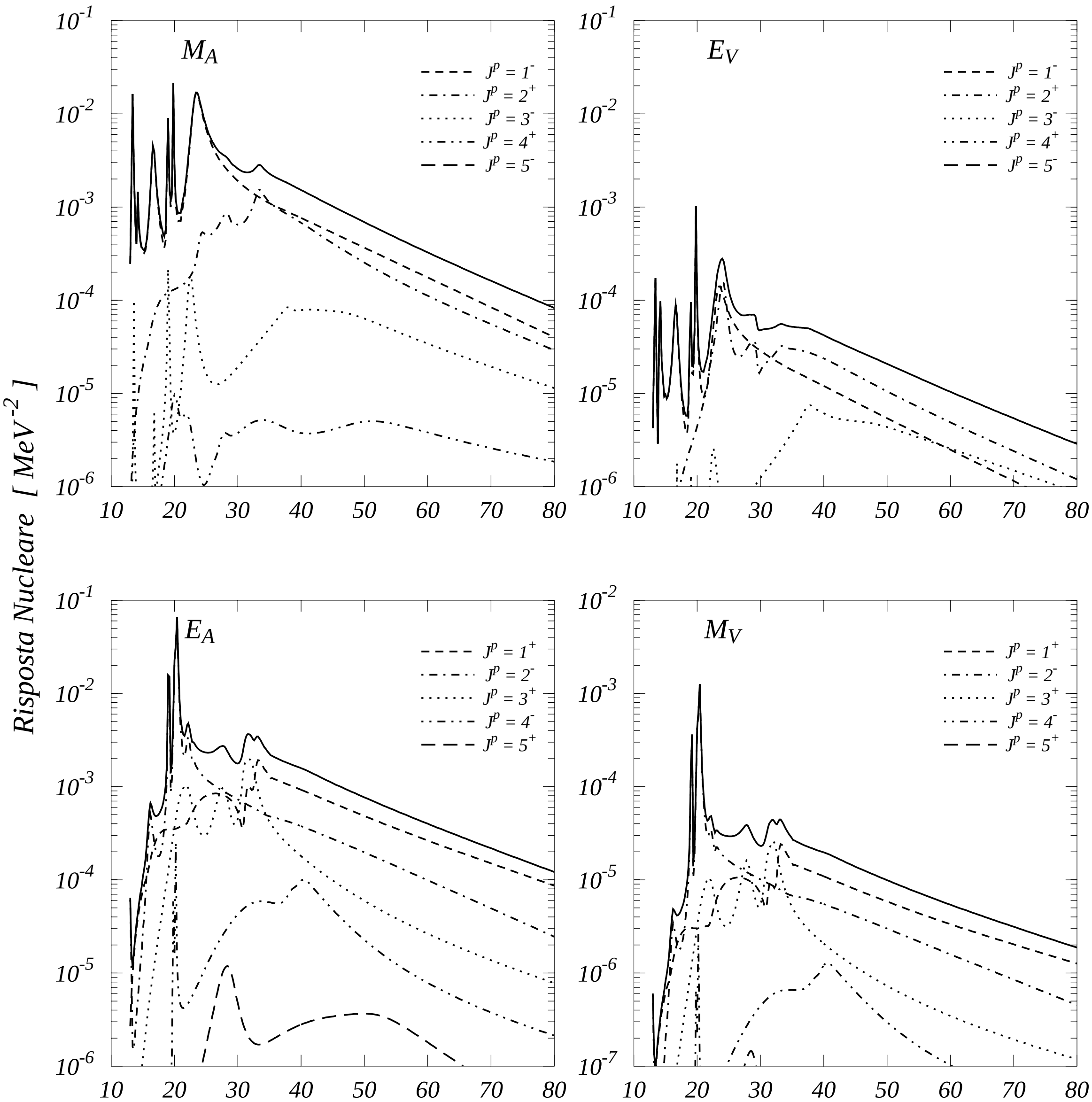

Figura 5.5: Risposta nucleare degli operatori trasversali per processi NC con $\varepsilon_\nu = 120 MeV$ e $\theta = 30^o$ calcolate con il modello RPA e l'interazione LM. La linea continua si riferisce alla risposta sommata su tutti i multipoli con $J < 7$, le altre linee al contributo dei singoli multipoli.

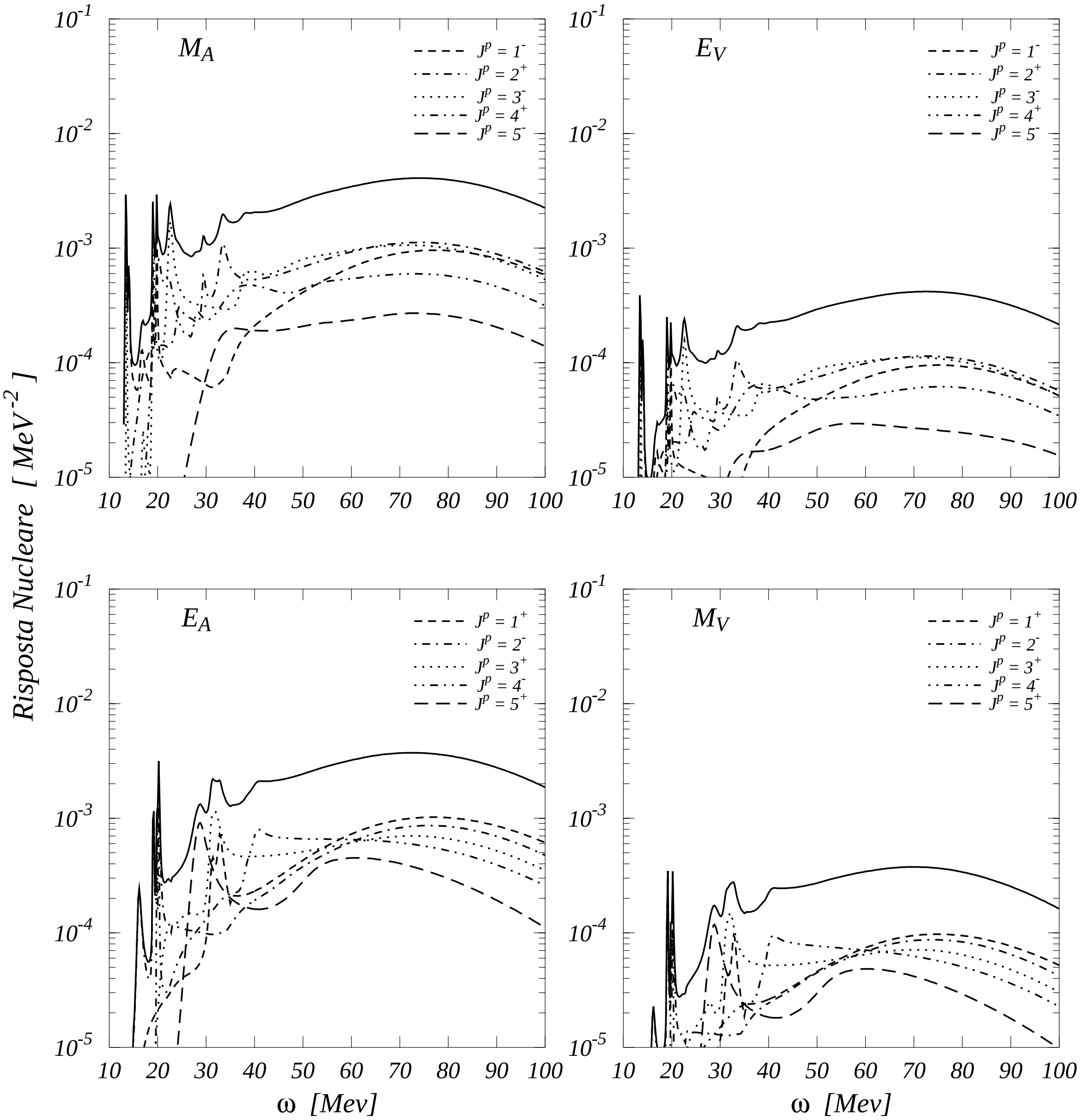

Figura 5.6: Risposta nucleare degli operatori trasversali per processi NC con $\varepsilon_\nu = 120 MeV$ e $\theta = 150^o$ calcolate con il modello RPA e l'interazione LM. La linea continua si riferisce alla risposta sommata su tutti i multipoli con $J < 7$, le altre linee al contributo dei singoli multipoli.

5.2 Sezione d'urto

Per comprendere come le caratteristiche delle risposte nucleari influenzino la sezione d'urto è necessario considerare anche il comportamento dei termini leptonici. La Tab. 2.4 riassume il loro andamento in funzione di θ. Per $\theta \to 0^o$ i termini leptonici che moltiplicano gli operatori di carica e longitudinali (C_A, C_V e L_A) sono dominanti, mentre per $\theta \to 180^o$ sono dominanti quelli che moltiplicano gli operatori trasversali (E_A, E_V, M_A, M_V). In pratica comunque solo per $\theta < 20^o$ i termini C_V e L_A diventano competitivi, in tutti gli altri casi la sezione d'urto è dominata dai termini trasversali.

Tutti gli operatori trasversali sono moltiplicati dallo stesso fattore leptonico, e poiché gli operatori assiali sono sempre più grandi dei rispettivi vettoriali, segue che la sezione d'urto è dominata dalla risposta degli operatori E_A e M_A.

Nelle figure 5.7 e 5.8 mostro il contributo dei vari operatori alla sezione d'urto nel caso della diffusione di neutrino su ^{16}O al variare dell'angolo θ rispettivamente per $\varepsilon_\nu = 40MeV$ e $\varepsilon_\nu = 120MeV$. La linea continua si riferisce alla sezione d'urto, le altre al contributo dovuto ai termini L_A , L_V, trasversale assiale $(M_A + E_A)$ e trasversale vettoriale $(M_V + E_V)$. La somma dei contributi non è uguale alla sezione d'urto perché manca il termine di interferenza tra i termini trasversale assiale e trasversale vettoriale.

A conferma di quanto appena detto, si può osservare come le risonanze presenti nella sezione d'urto siano proprio quelle degli operatori E_A e M_A, dovute quindi a transizioni 1^- e 2^-. Dai grafici è evidente che in qualunque situazione cinematica la sezione d'urto è dominata dai termini assiali, in particolare solo per basse ε_ν e per bassi θ il termine L_A è competitivo, in tutti gli altri casi la componente trasversale assiale è dominante. Ho osservato che nella sezione d'urto integrata in θ il contributo della corrente vettoriale è sempre inferiore al 5%.

Nei grafici è inoltre possibile osservare come il contributo dei termini trasversali cresce al crescere di θ mentre quello dei termini longitudinali decresce, ciò è conseguenza dell'analogo andamento dei fattori leptoni che li moltiplicano.

Nelle figure 5.9 e 5.10 mostro la sezione d'urto di diffusione di neutrino su ^{16}O al variare dell'angolo di diffusione e dell'energia del neutrino incidente. Le figure mettono in evidenza che la sezione d'urto è maggiore per diffusione all'indietro. Ciò è sicuramente vero in tutto l'intervallo di ω per $\varepsilon_\nu < 120MeV$. Il motivo di tale andamento è dovuto al contemporaneo verificarsi di due condizioni, gli operatori trasversali sono dominanti e crescono con θ e i termini leptonici che li moltiplicano sono proprio quelli dominanti per $\theta \to 180^o$. Per $\varepsilon_\nu > 120MeV$ il comportamento è più complicato, la sezione d'urto cresce al crescere di θ nella regione ad alti ω e decresce a bassi ω. Questo comportamento rispecchia l'analogo comportamento delle risposte degli operatori trasversali ed è dovuto al fatto che l'intervallo di variabilità del momento trasferito al variare di θ cresce al diminuire di ω. Ad esempio, nel caso di processi NC per $\varepsilon_\nu = 400MeV$ e $\omega = 50MeV$ il modulo del momento trasferito vale $200 MeV/c$ per $\theta = 30^o$ e $725 MeV/c$ per $\theta = 150^o$. In generale per processi NC, si ottiene

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{2\varepsilon_i \left(1 - \cos\theta\right)\left(\varepsilon_i - \omega\right) + \omega^2}$$

dove ε_i è l'energia del neutrino incidente, e quindi $|\mathbf{q}|$ varia nell'intervallo $[\omega, 2\varepsilon_i - \omega]$ al variare di θ con ω fissato. Per processi CC si ottiene invece

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{2\varepsilon_i \left(1 - \cos\theta\right)\left(\varepsilon_i - \omega - m_l\right) + \left(\omega + m_l\right)^2}$$

dove m_l è la massa del leptone uscente, quindi $|\mathbf{q}|$ varia nell'intervallo $[\omega + m_l, 2\varepsilon_i - \omega + m_l]$ al variare di θ. Sia nei processi CC che in quelli NC l'intervallo di variabilità di $|\mathbf{q}|$ al variare di θ è più ampio a bassi ω e cresce con ε_i.

Nella figura 5.11 mostro la sezione d'urto integrata in θ per i processi (ν, ν') e (ν_e, e^-) su ^{16}O al variare dell'energia del neutrino incidente. Si può notare che sia per processi CC che per processi NC la sezione d'urto cresce al crescere dell'energia del neutrino incidente. Il motivo è principalmente dovuto alla crescita dei termini leptonici. In generale, escludendo le risposte nucleari, la sezione d'urto ha un andamento proporzionale a $(\varepsilon_i - \omega)^2$.

Si noti che la posizione delle risonanze è diversa nei processi NC e CC, ciò è dovuto alle diverse coppie particella-buca che contribuiscono alla transizione. Una situazione analoga si presenta tra i processi CC con neutrini e quelli con antineutrini, mentre nei processi NC con neutrini ed antineutrini le transizioni particella-buca sono le stesse e le risonanze si trovano ad uguali valori di ω.

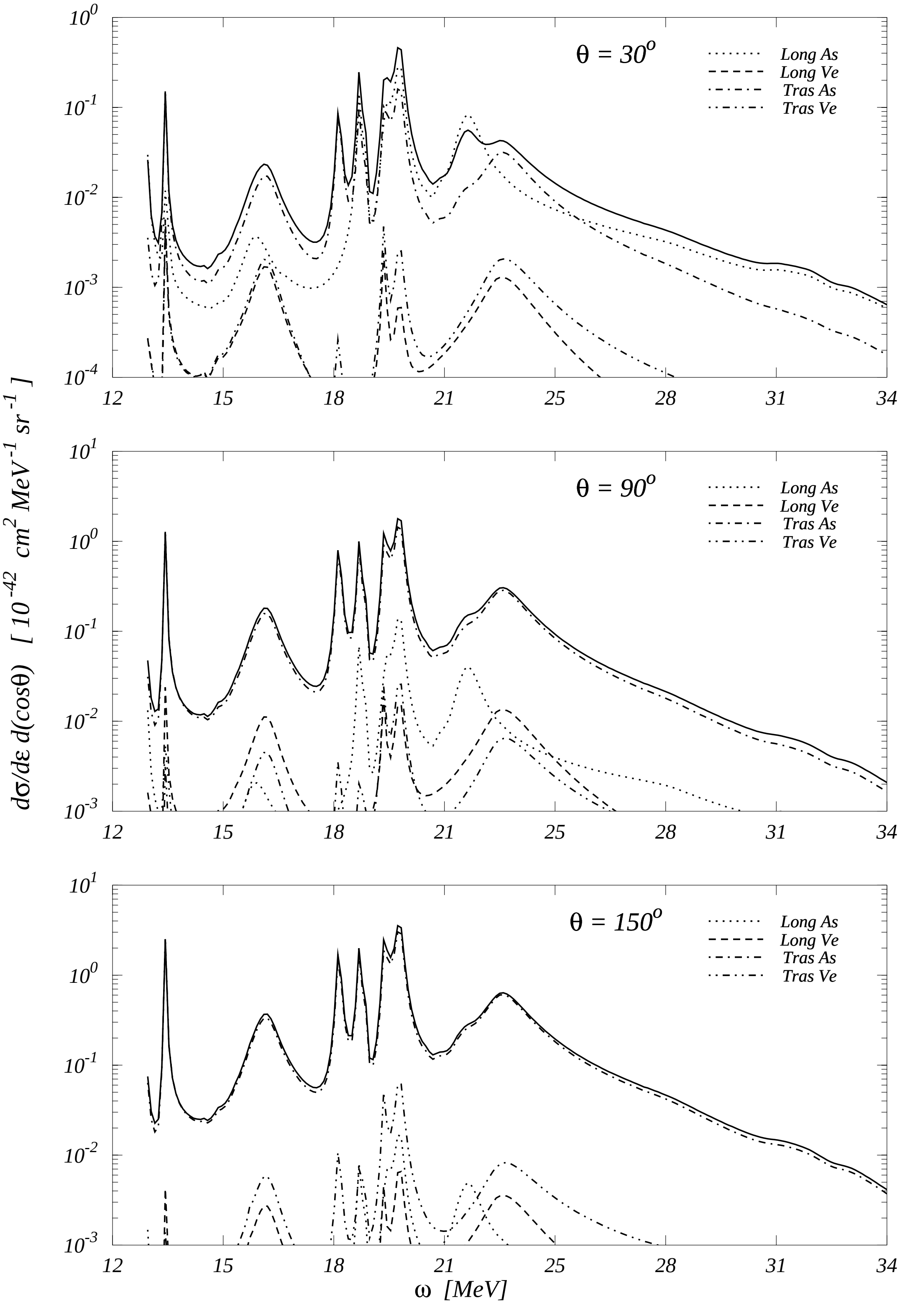

Figura 5.7: Contributo degli operatori multipolari alla sezione d'urto del processo di diffusione di neutrini su ^{16}O con $\varepsilon_\nu = 40 MeV$ calcolata con un modello RPA e l'interazione LM per vari angoli di diffusione. La linea continua si riferisce alla sezione d'urto le altre ai singoli contributi degli operatori. I termini di interferenza non sono stati graficati.

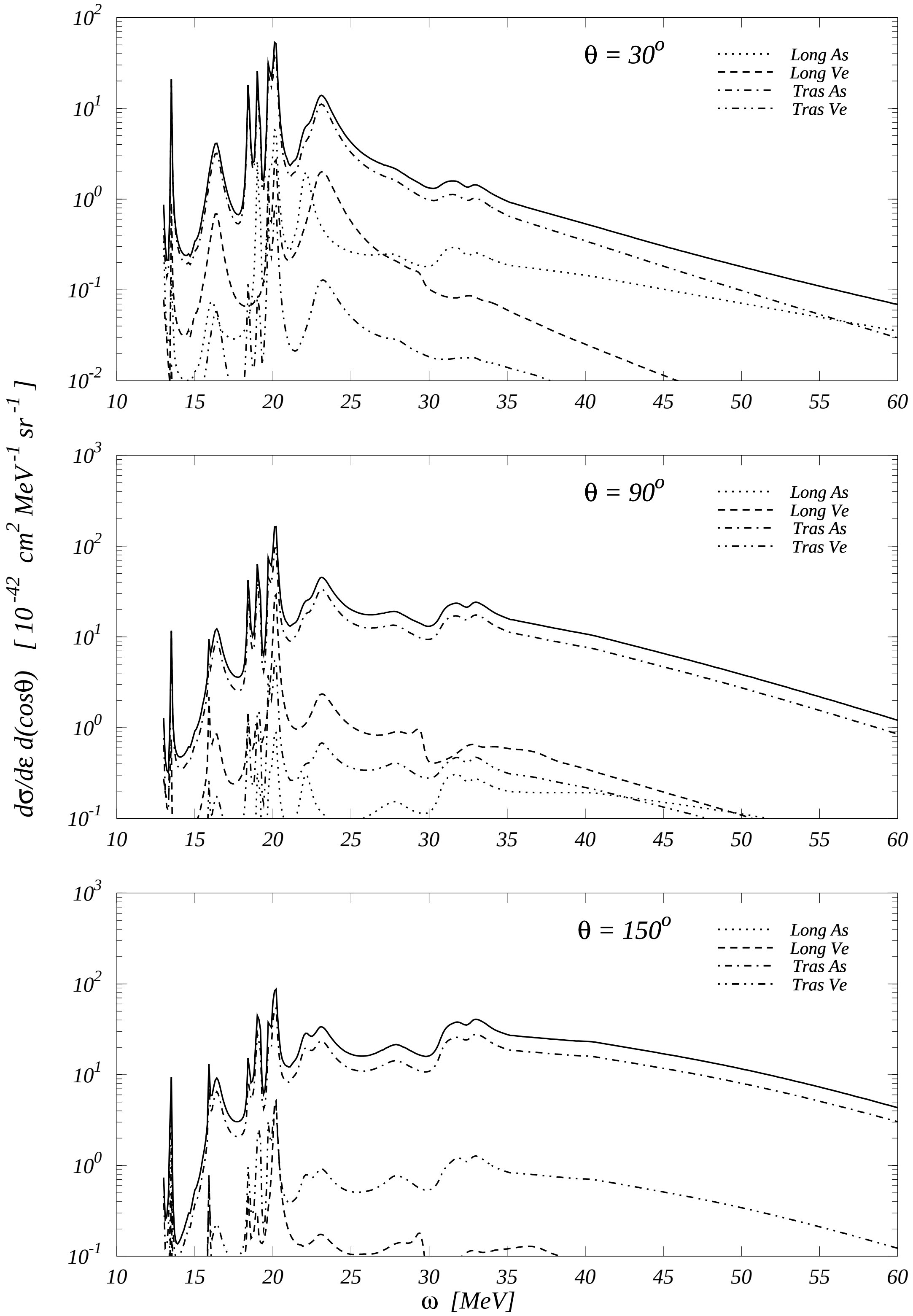

Figura 5.8: Contributo degli operatori multipolari alla sezione d'urto del processo di diffusione di neutrini su ^{16}O con $\varepsilon_\nu = 120 MeV$ calcolata con un modello RPA e l'interazione LM per vari angoli di diffusione. La linea continua si riferisce alla sezione d'urto le altre ai singoli contributi degli operatori. I termini di interferenza non sono stati graficati.

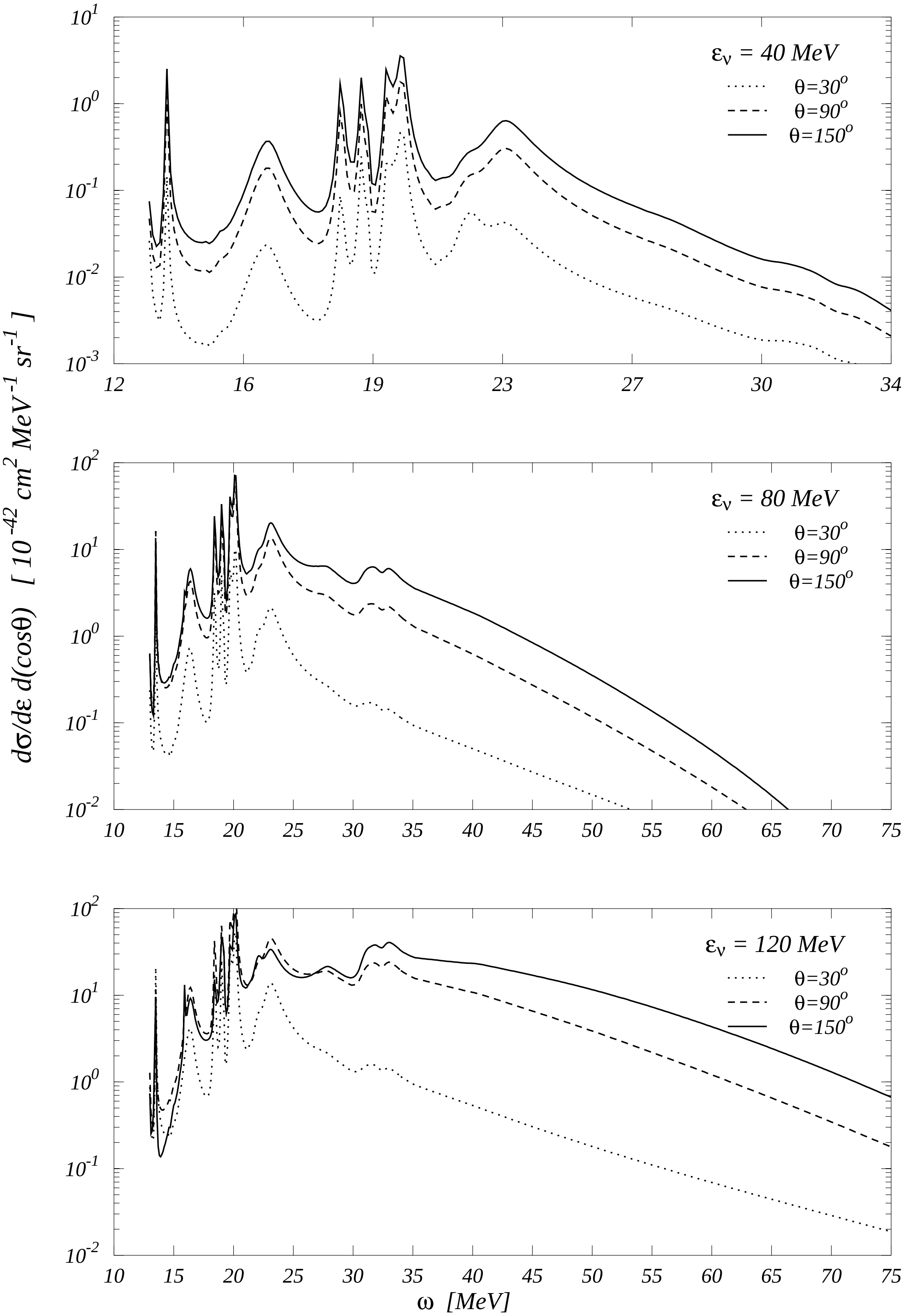

Figura 5.9: Sezione d'urto del processo di diffusione di neutrini su ${}^{16}O$ calcolata con un modello RPA e l'interazione LM per vari angoli di diffusione e per varie energie del neutrino incidente.

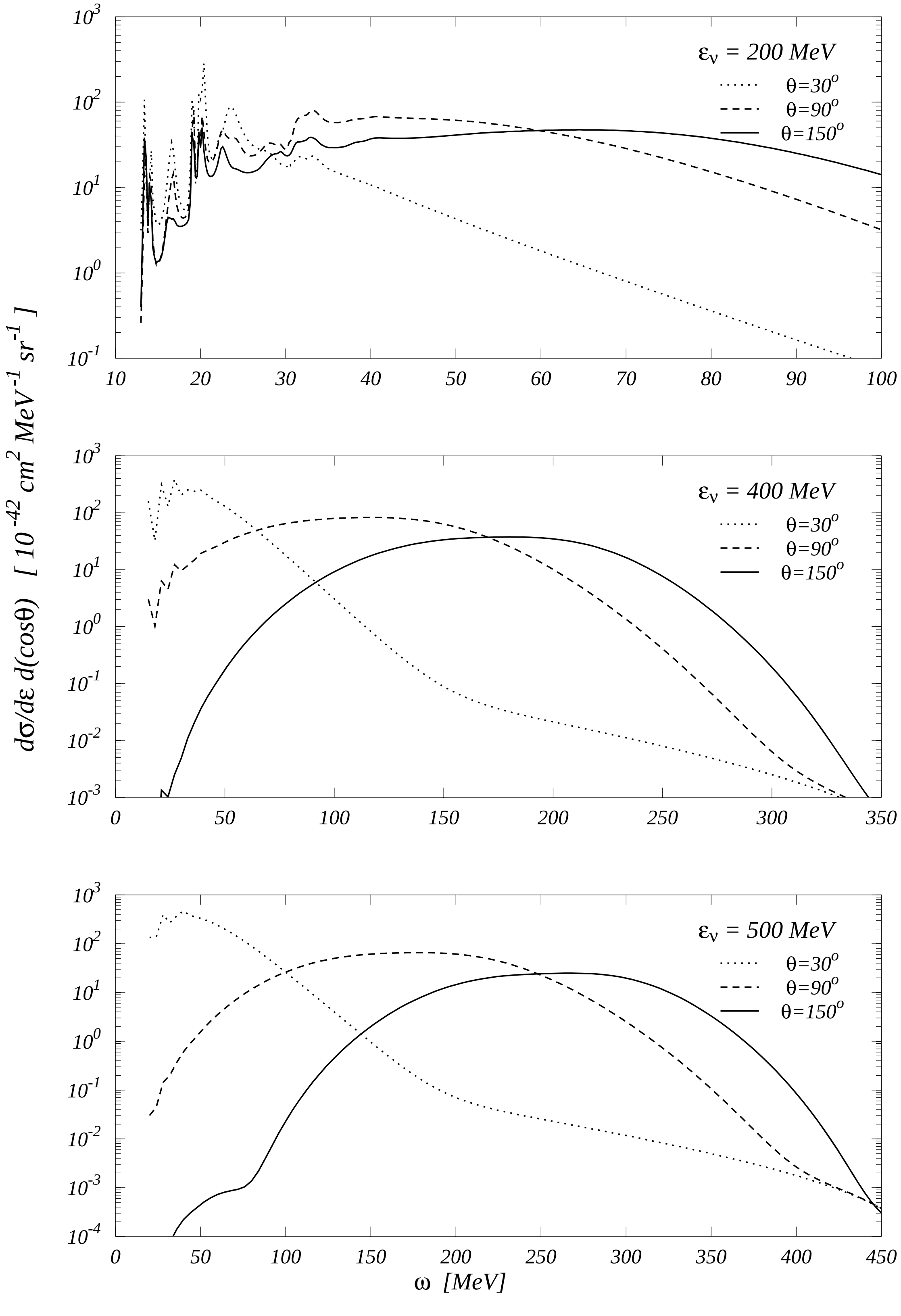

Figura 5.10: Sezione d'urto del processo di diffusione di neutrini su ^{16}O calcolata con un modello RPA e l'interazione LM per vari angoli di diffusione e per varie energie del neutrino incidente.

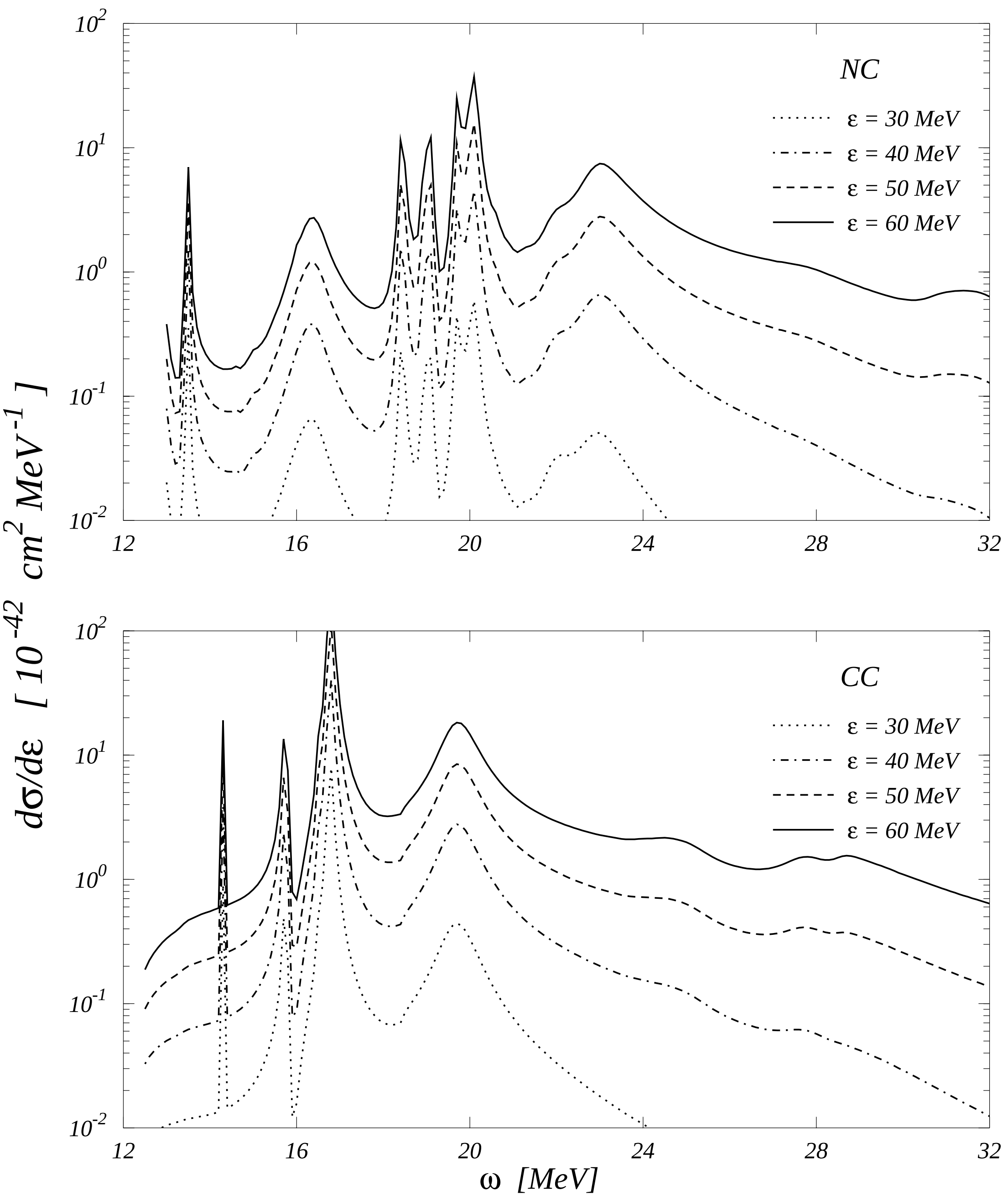

Figura 5.11: Sezione d'urto integrata in θ per processi (ν, ν') sopra, e (ν_e, e^-) sotto, su ^{16}O calcolate con il modello RPA e l'interazione LM al variare dell'energia del neutrino incidente.

5.3 Confronto con la sezione d'urto di elettroni

Ci sono alcune caratteristiche della sezione d'urto neutrino nucleo che sono profondamente diverse da quelle della sezione d'urto di diffusione di elettroni. Tra queste, le più importanti riguardano l'andamento in θ e in ε_i delle sezioni d'urto. La figura 5.12 aiuta a comprendere le differenze. Nella parte superiore della figura mostro la sezione d'urto per diffusione di elettroni su ^{16}O per $\varepsilon_i = 40 MeV$ e $\varepsilon_i = 400 MeV$ e per $\theta = 30^o$ e $\theta = 150^o$, nella parte inferiore gli stessi risultati per diffusione di neutrini. I risultati a $\varepsilon_i = 40 MeV$ sono stati ottenuti con il modello RPA e l'interazione LM, quelli a $\varepsilon_i = 400 MeV$ con il modello a campo medio. I grafici mostrano due importanti differenze delle sezioni d'urto.

Al crescere di θ la sezione d'urto di elettroni diminuisce mentre quella di neutrino aumenta. Il comportamento in θ della sezione d'urto di neutrino è stato discusso nel precedente capitolo, il motivo di un tale andamento è dovuto al fatto che gli operatori trasversali sono dominanti e che questi sono moltiplicati per fattori leptonici che crescono al crescere di θ. Nel caso degli elettroni l'unico operatore di ordine zero in $|\mathbf{q}|/m$ è C_V che quindi è l'operatore dominante. Questo è moltiplicato per fattori leptonici che decrescono al crescere di θ.

Un'altra differenza è che la sezione d'urto di elettroni diminuisce anche al crescere di ε_i mentre quella di neutrino aumenta. In entrambi i casi i fattori leptonici crescano linearmente in ε_i, ma il motivo di questa differenza risiede nella diversa costante di accoppiamento. Nel caso dell'elettrone l'interazione avviene per scambio di un fotone virtuale e l'accoppiamento con il vertice leptonico produce un termine proporzionale a ε_i^{-2} (vedi 2.84). Mentre nel caso dello scambio di un bosone vettore Z^0 o $W^{\pm}$ e nell'ipotesi $q \ll M_B$, l'accoppiamento produce un termine indipendente da ε_i.

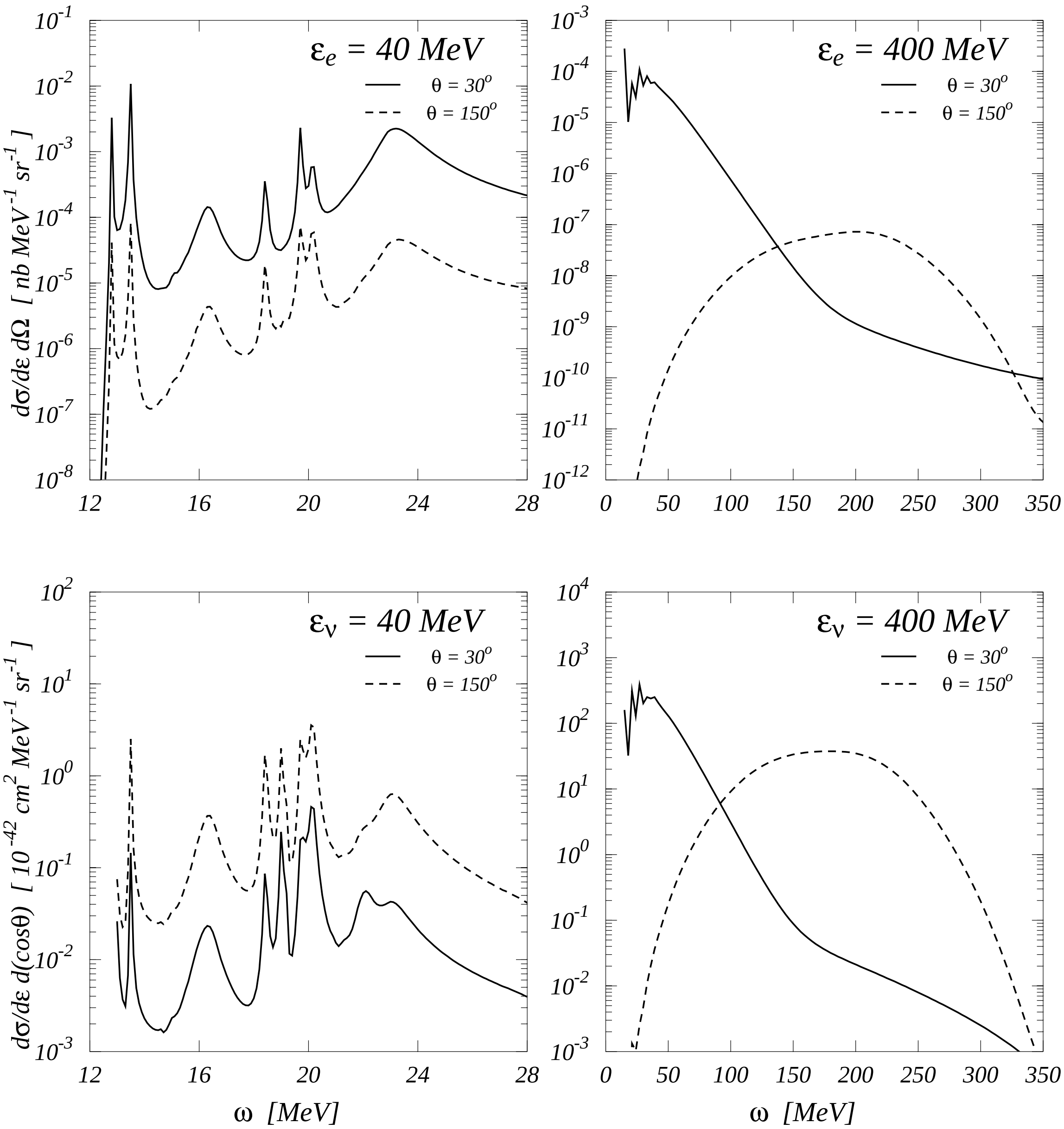

Figura 5.12: Sezione d'urto doppio differenziale per diffusione di elettroni (sopra) e neutrini (sotto) su $^{1}6O$ calcolata per varie energie ed angoli di diffusione. I risultati relativi a $\varepsilon = 40MeV$ sono stati ottenuti con il modello RPA e l'interazione LM, quelli relativi a $\varepsilon = 400MeV$ con il modello a campo medio.

5.4 Neutrino ed antineutrino

Nel caso di processi NC la differenza tra la sezione d'urto di neutrino e quella di antineutrino è determinata dal cambiamento di segno del termine di interferenza. Nel caso dei processi CC cambiano anche le risposte nucleari, perché cambia l'isospin della transizione, e cambia anche la correzione dovuta all'interazione del leptone uscente con il campo coulombiano del nucleo, perché cambia la carica del leptone uscente. Nei processi NC la forma e i picchi della sezione d'urto non cambia perché le risposte nucleari sono le stesse, ma la sezione d'urto di neutrino è solitamente più grande di quella di antineutrino. Per $\varepsilon_\nu < 40MeV$ le differenze sono sempre inferiori al 15%. Nelle figure 5.13 e 5.14 mostro il confronto tra la sezione d'urto di neutrino e antineutrino in processi di diffusione su ^{16}O al variare dell'energia del neutrino incidente e dell'angolo di diffusione. Si può notare che la differenza cresce sia al crescere di θ sia al crescere di ε_ν.

In figura 5.15 mostro lo stesso confronto delle figure precedenti, ma per la sezione d'urto integrata in θ con $\varepsilon = 80MeV$, $\varepsilon = 200MeV$, $\varepsilon = 400MeV$.

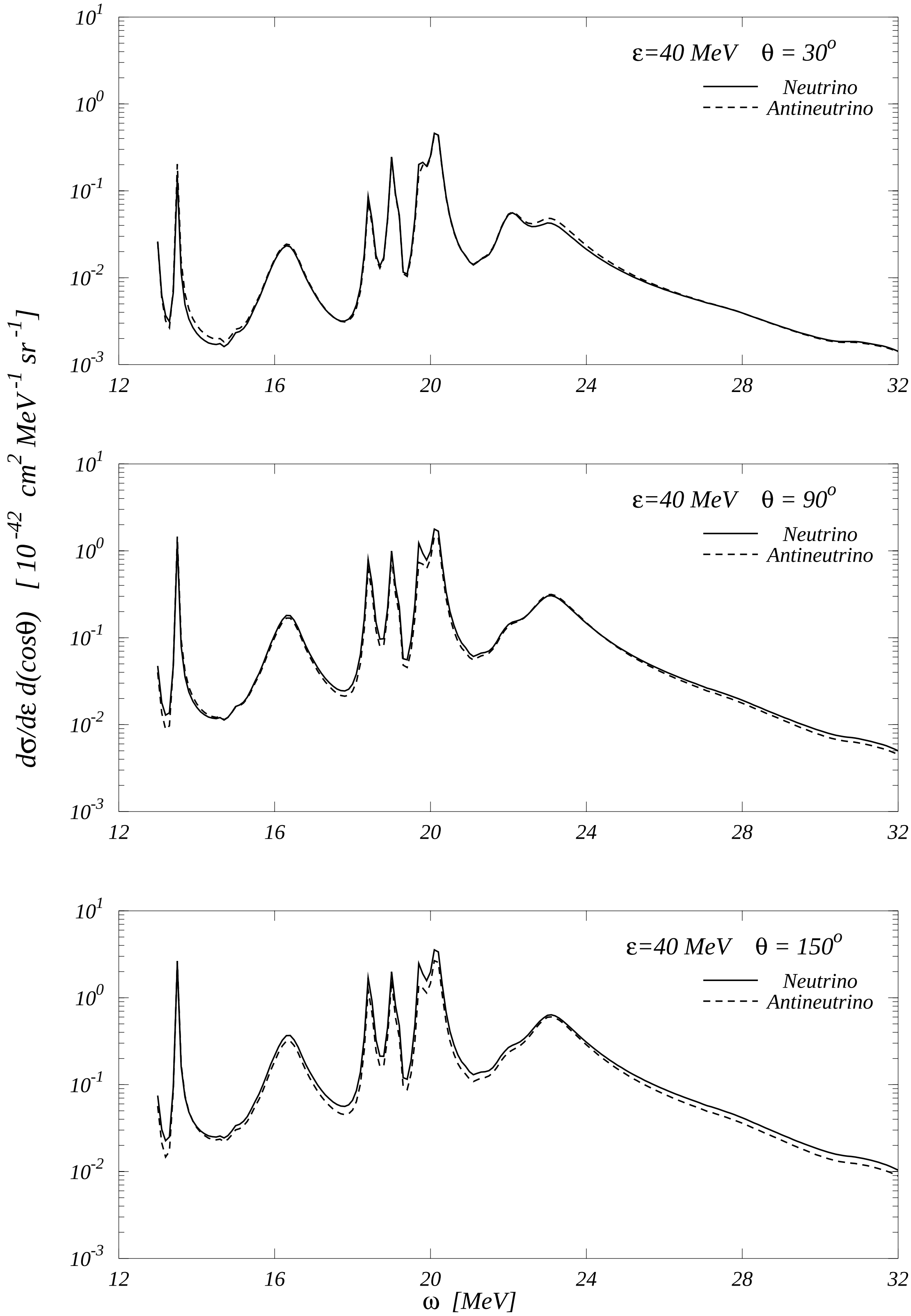

Figura 5.13: Sezione d'urto doppio differenziale per diffusione di neutrini ed antineutrini su ^{16}O calcolata con il modello RPA e l'interazione LM per varie energie ed angoli di diffusione.

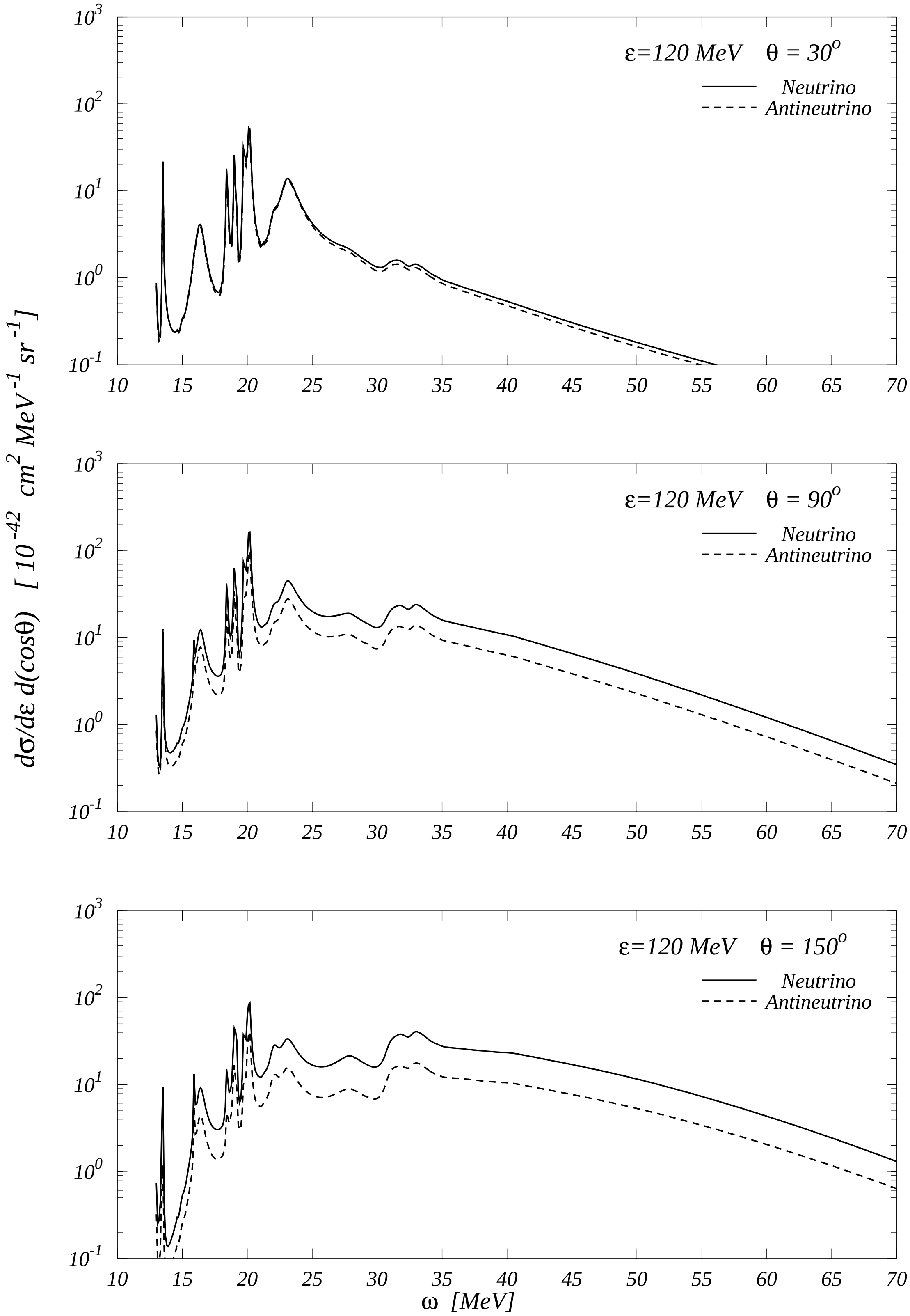

Figura 5.14: Sezione d'urto doppio differenziale per diffusione di neutrini ed antineutrini su ${}^{16}O$ calcolata con il modello RPA e l'interazione LM per varie energie ed angoli di diffusione.

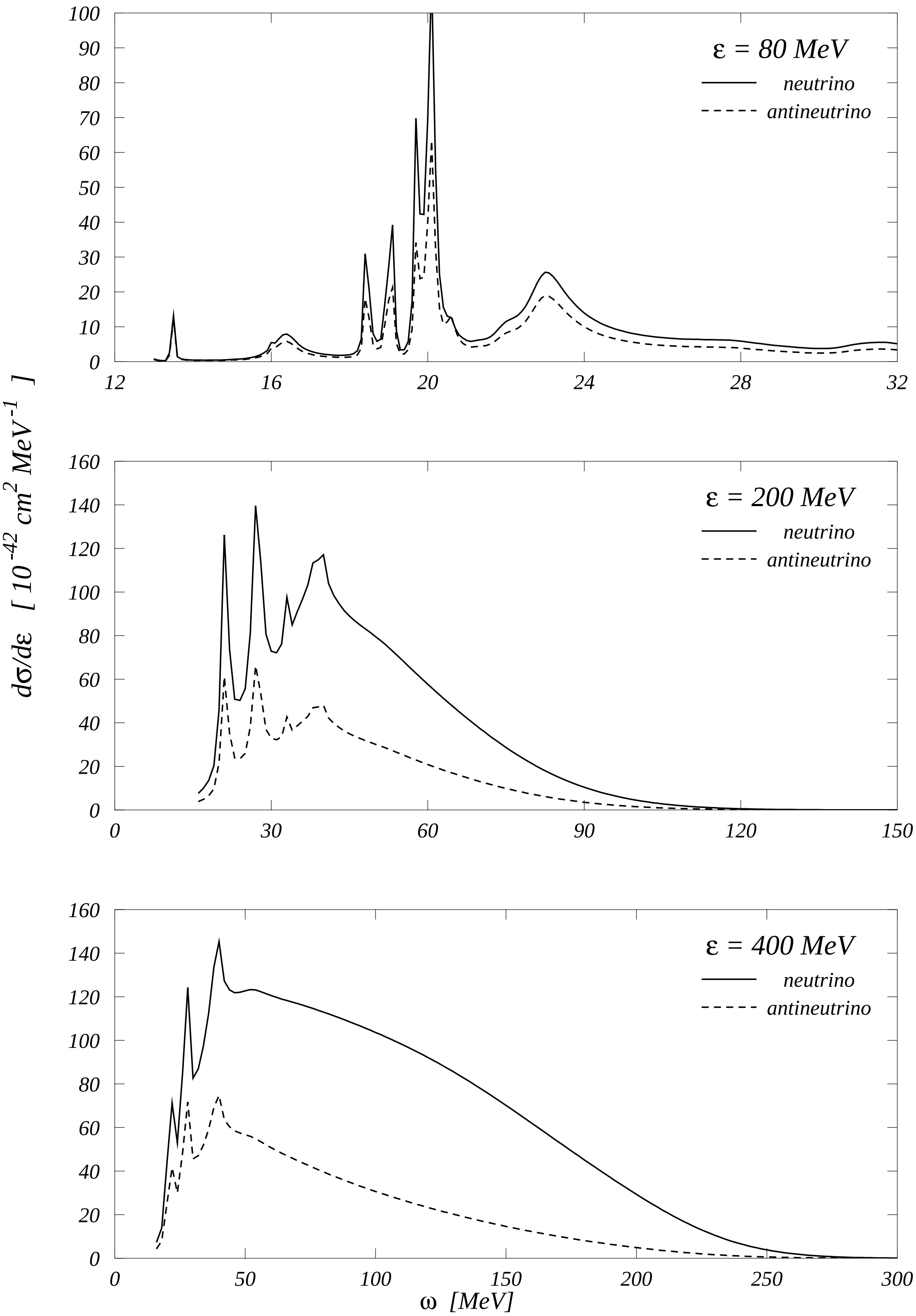

Figura 5.15: Sezione d'urto integrata in θ per diffusione di neutrini ed antineutrini su ^{16}O per varie energie. Per $\varepsilon = 80MeV$ il risultato è stato ottenuto con il modello RPA e l'interazione LM, per $\varepsilon = 200MeV$ e $\varepsilon = 400MeV$ con il modello a campo medio.

5.5 Sensibilità alla corrente nucleonica

L'incertezza sull'espressione della corrente debole nucleonica è dovuta principalmente alla determinazione dei fattori di forma. Le incertezze della parte vettoriale della corrente sono ininfluenti poiché la sezione d'urto è dominata dalla parte assiale della corrente. Il più importante elemento di incertezza è la massa assiale del fattore di forma F_A parametrizzato con un andamento di dipolo.

Dallo studio di processi di elettroproduzione di pioni si è trovato $F(0) = -1.267$ e $M_A = 1014 \pm 16 MeV$ con un incertezza del 3% sulla determinazione di M_A. Il fattore F_A moltiplica tutti i termini assiali ciò implica che la sezione d'urto può essere considerata quasi proporzionale a F_A^2. Come l'incertezza di M_A influisce sulla sezione d'urto dipende principalmente dal quadrimomento trasferito. Dalla 2.69 si deduce che l'incertezza è maggiore per energie maggiori.

Nella parte superiore della figura 5.16 mostro la sezione d'urto doppio differenziale per diffusione di neutrini su ^{16}O per $\theta = 150^o$ e rispettivamente $\varepsilon_\nu = 40 MeV$ e $\varepsilon_\nu = 400 MeV$. Si può vedere che a basse energie la sezione d'urto è insensibile ad una variazione del 3% del valore della massa assiale. Per $\varepsilon_\nu = 400 MeV$ ed alti angoli di diffusione si trovano variazioni fino al 7%. A bassi angoli di diffusione l'effetto è minore perché diminuisce il valore del momento trasferito. Nelle figure in basso mostro le sezioni d'urto integrate in θ dello stesso processo per $\varepsilon_\nu = 400 MeV$ e $\varepsilon_\nu = 600 MeV$. Nella sezione d'urto integrata la differenza diminuisce al 3% come effetto della media delle differenze ad alti e a bassi valori di θ. Si può concludere che nella regione delle risonanze giganti la sezione d'urto non subisce variazioni al variare di M_A all'interno dell'indeterminazione sperimentale, mentre nella regione del picco, una variazione dell'1% di M_A comporta un'analoga variazione percentuale della sezione d'urto integrale. Un risultato analogo vale per processi CC.

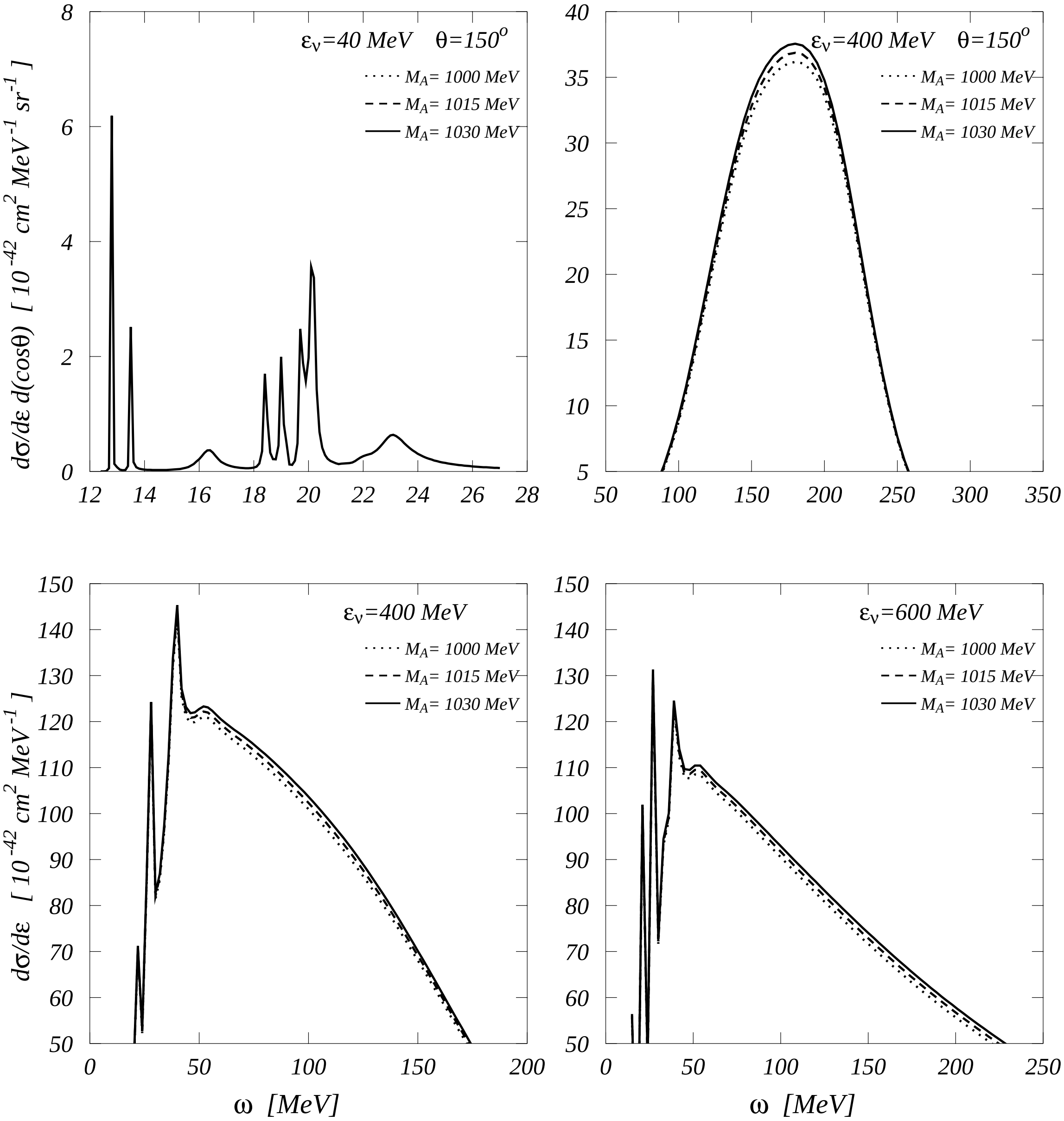

Figura 5.16: Sezione d'urto doppio differenziale (sopra) e integrata in θ (sotto) per diffusione di neutrini su ^{16}O calcolata con il modello RPA e l'interazione LM nel caso di $\varepsilon = 40 MeV$, con il modello a campo medio negli altri casi. Nel primo grafico in alto a sinistra la differenza dovuta alle diverse parametrizzazioni non è osservabile.

5.6 Confronto tra modelli

Risulta molto interessante confrontare il risultato ottenuto con diversi modelli nucleari all'interno dell'intervallo energetico tipico della fisica nucleare. L'aspetto fondamentale dal punto di vista teorico è che solo il modello RPA è in grado di descrivere adeguatamente la risposta nucleare in tutto l'intervallo energetico, riproducendo le risonanze dovute ad eccitazioni di singola particella, la risonanza gigante e il picco quasi elastico. Tuttavia l'utilizzo di modelli meno sofisticati ha i suoi vantaggi che sono legati principalmente all'economia del calcolo. Ma per stabilire quando conviene applicare un determinato modello si deve conoscere bene il suo limite di applicabilità.

In fig. 5.17 mostro il risultato per la sezione d'urto doppio differenziale del processo (ν_μ, μ^-) su ^{16}O per $\theta = 40^o$ e diverse energie del neutrino incidente. Oltre ai risultati ottenuti con il modello a campo medio e il modello RPA riporto il risultato ottenuto con il modello a Gas di Fermi relativistico (FG) usato in [Smi72]. Il modello FG tratta il nucleo come un sistema infinito, il campo di validità del modello è quindi limitato alle situazioni in cui gli effetti di superficie sono trascurabili. Una discussione sulla validità del modello FG per descrivere la risposta nucleare nel picco quasi-elastico può essere trovata in [Ama94]. Nel terzo grafico della Fig. 5.17 si nota che nella regione del picco quasi elastico tutti i modelli riproducono risultati molto simili con l'unica eccezione del calcolo RPA con l'utilizzo dell'interazione LM. Il motivo di tale discostamento è dovuto alla natura dell'interazione. Ad elevate energie il processo è molto sensibile ai dettagli dell'interazione residua quindi l'utilizzo di un'interazione costante nello spazio dei momenti non risulta adeguata. Molto confortante è invece il risultato dell'interazione PP che sebbene sia stata aggiustata per riprodurre fenomeni a bassa energia mantiene una buona capacità predittiva anche nel picco quasi elastico. Nel secondo grafico della figura riporto gli stessi risultati ma ad energia più bassa. Si nota che già per energie del neutrino incidente di $300MeV$, e quindi per una regione di energie trasferite fino a $100MeV$, il modello FG si discosta fortemente dagli altri. Mentre l'utilizzo del modello RPA e del modello a campo medio producono risultati simili. Ad energie ancora più basse anche il modello a campo medio risulta inadeguato perché incapace di descrivere l'effetto della risonanza gigante. Come si vede nel primo grafico della Fig. 5.17 solo il calcolo RPA è in grado di descrivere un'ampia risonanza per ω compreso tra $24MeV$ e $28MeV$, mentre il modello a campo medio si limita a descrivere picchi molto stretti dovuti ad eccitazioni di singola particella.

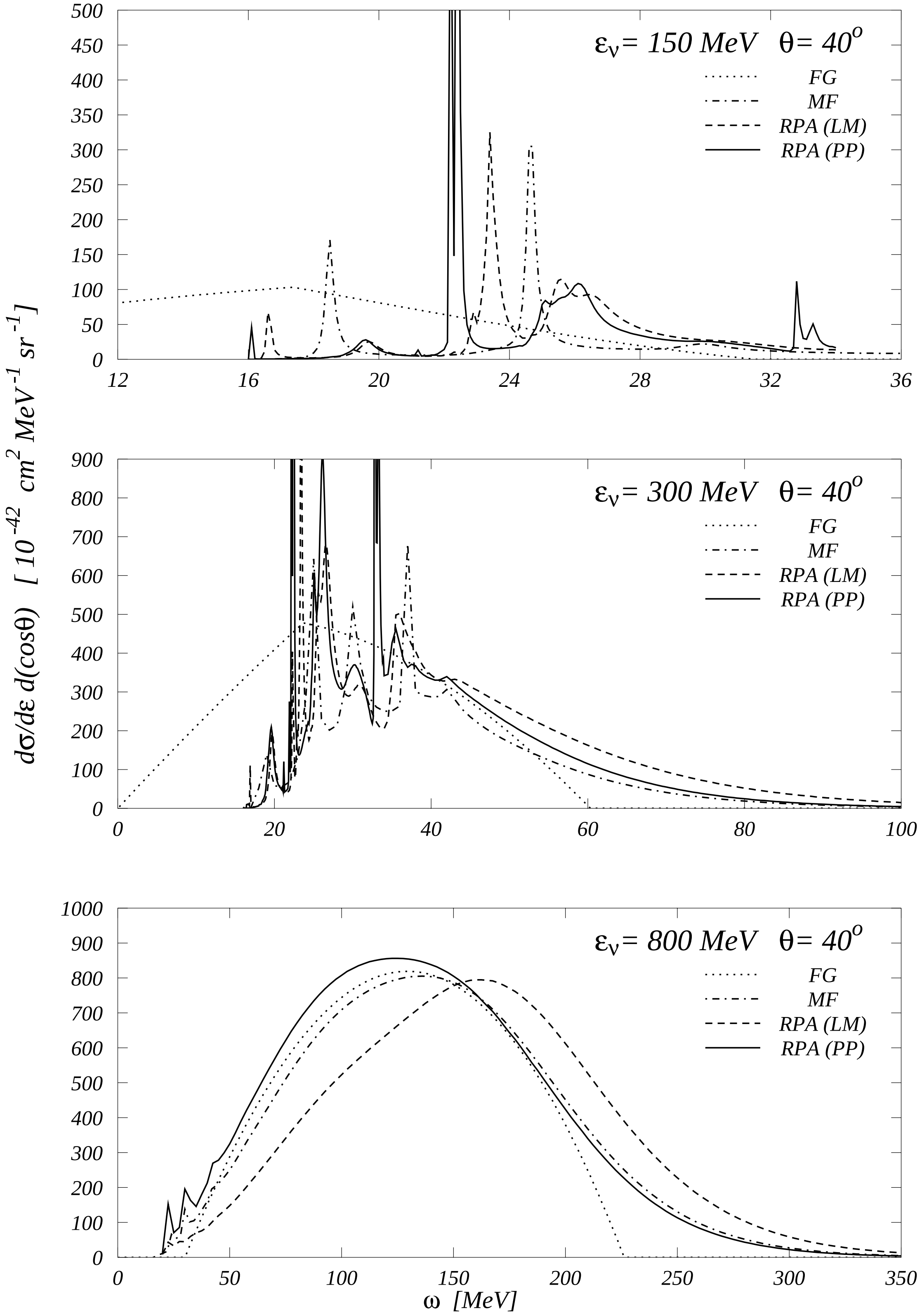

Figura 5.17: Sezione d'urto doppio differenziale del processo (ν_μ, μ^-) su ^{16}O per $\theta = 40^o$ e diverse energie del neutrino incidente calcolato con il modello RPA e l'interazione PP (linea continua) e LM (linea tratteggiata) il modello a campo medio (tratti e punti) e il modello a Gas di Fermi (linea punteggiata)

Capitolo 6

RISULTATI

6.1 Il nucleo ^{16}O

L'ultimo stato di singola particella occupato nello stato fondamentale dell'^{16}O è l'$1p_{1/2}$ sia per protoni che per neutroni. Questi stati sono completamente occupati ed il nucleo è a simmetria sferica. La semplicità della sua struttura nucleare rende l'^{16}O ideale per l'applicazione del formalismo sviluppato in questo lavoro. Inoltre, a differenza di altri nuclei doppio magici, il suo basso numero di massa rende il calcolo meno elaborato. L'energia di soglia per l'emissione nucleonica corrisponde all'energia di singola particella degli ultimi stati occupati, $16.63MeV$ per protoni e $12.11MeV$ per neutroni. Focalizzerò l'attenzione sui risultati con $\varepsilon_i < 80MeV$ perché questa è la naturale applicazione di modelli sofisticati come l'RPA.

In Fig. 6.1 mostro la sezione d'urto di diffusione di neutrini integrata sull'angolo di diffusione θ per diverse energie del neutrino incidente e calcolata con il modello a campo medio, quello RPA con le interazioni LM e PP, e quello FSI sulla base del calcolo RPA e l'interazione LM. Le risonanze presenti sono dovute all'1^- e al 2^- (vedi discussione del capitolo precedente), ma l'aspetto importante è il diverso comportamento del calcolo RPA e di quello FSI. L'effetto dovuto a correlazioni di ordine superiore a $1p-1h$ è quello di spostare la probabilità di transizione ad energie più alte abbassando e livellando la sezione d'urto nella regione delle risonanze. Di conseguenza parte dell'ampiezza di transizione si sposta nella regione cinematicamente proibita ($\omega > \epsilon_i - m_l$) e quindi la sezione d'urto totale diminuisce.

A conferma di quanto appena detto nella Fig. 6.2 mostro la sezione d'urto totale del processo in funzione dell'energia del leptone incidente. La parte superiore si riferisce alla diffusione di neutrini quella inferiore agli antineutrini. Si nota come il calcolo FSI sia sistematicamente più basso di quello RPA con l'interazione LM. La differenza tra il calcolo RPA e quello FSI è più piccola della differenza tra MF ed RPA, ciò suggerisce che gli effetti dovuti a correlazioni di tipo $1p-1h$ sono dominanti in questa regione energetica. A differenza di quanto avviene nella sezione d'urto differenziale, la correzione dovuta al calcolo FSI rientra nell'intervallo di variabilità del risultato finale dovuto all'incertezza sulla determinazione dell'interazione residua.

Nella Fig. 6.3 mostro la sezione d'urto differenziale per il processo $^{16}O(\nu_e, e^-)^{16}F^*$ e nella Fig. 6.4 quella totale per i processi $^{16}O(\nu_e, e^-)^{16}F^*$ e $^{16}O(\overline{\nu}_e, e^+)^{16}N^*$. Analogamente nella figura 6.5 mostro la sezione d'urto differenziale per il processo $^{16}O(\nu_\mu, \mu^-)^{16}F^*$ e nella Fig. 6.6 quella totale per i processi $^{16}O(\nu_\mu, \mu^-)^{16}F^*$ e $^{16}O(\overline{\nu}_\mu, \mu^+)^{16}N$. Si può notare che valgono le stesse considerazioni fatte nel caso dei processo NC. Inoltre, sia per processi CC che per quelli NC, il calcolo RPA riproduce in maniera evidente la risonanza gigante per ω compreso tra 25 e 30 MeV, tale risultato si discosta da quello ottenuto in [Jac99] dove la risonanza gigante appare frammentata. In entrambi i casi comunque la risonanza gigante è descritta dalla transizione 1^- dell'operatore magnetico assiale (vedi discussione su operatori e multipolarità del capitolo precedente).

Oltre al grande interesse teorico, l'^{16}O ha anche un grande interesse sperimentale. L'ossigeno è presente nei rivelatori Cherenkov ad acqua come Super-Kamiokande. Sebbene la principale reazione in acqua sia $\overline{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$, la presenza di un grande quantitativo di ossigeno permette di stimare anche il risultato dei processi CC $^{16}O(\nu_e, e^-)^{16}F^*$ e $^{16}O(\overline{\nu}_e, e^+)^{16}N^*$ [Hax87]. Inoltre, la conoscenza della sezione d'urto di neutrino su ^{16}O risulta di fondamentale importanza nei modelli che descrivono il meccanismo di esplosione di una supernova. Per descrivere l'effetto dell'interazione neutrino nucleo in questo processo è necessario effettuare una convoluzione tra la sezione d'urto totale e la distribuzione energetica dei neutrini prodotti durante l'esplosione della supernova.

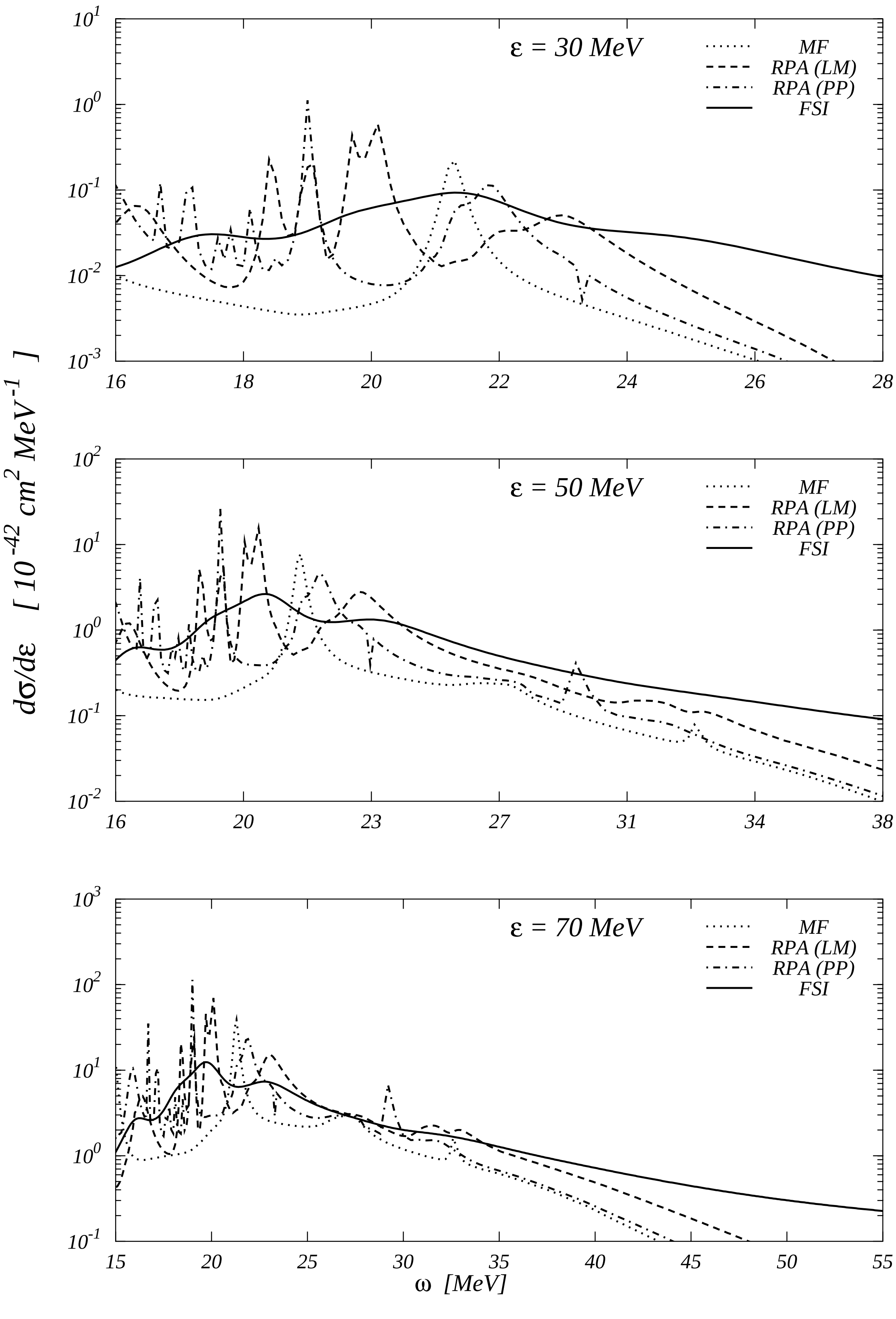

Figura 6.1: Sezione d'urto differenziale del processo $^{16}O(\nu,\nu')^{16}O^{*}$ per diversi valori dell'energia ε del neutrino incidente.

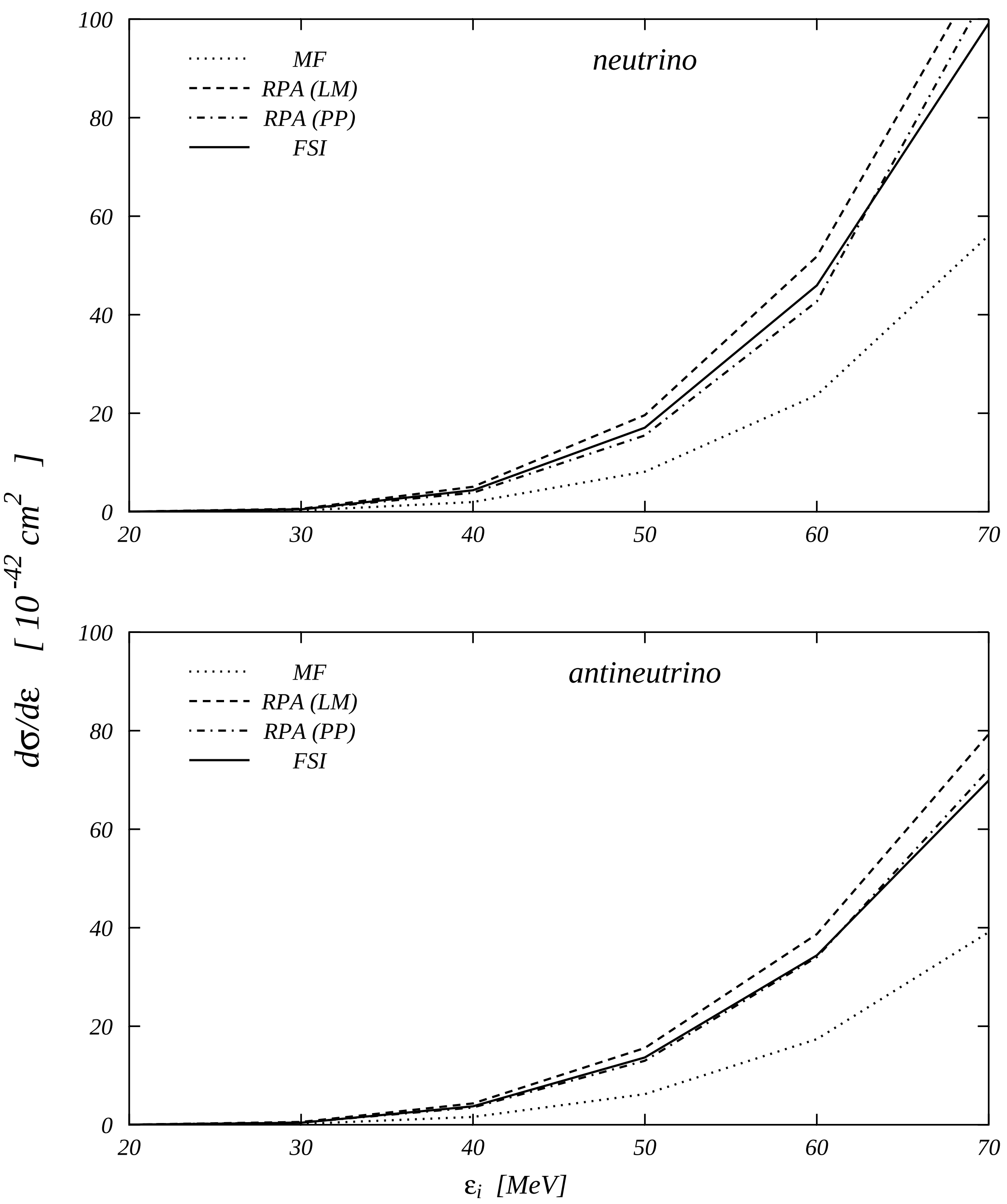

Figura 6.2: Sezione d'urto totale del processo $^{16}O(\nu,\nu')^{16}O^{*}$ (sopra) e $^{16}O(\overline{\nu},\overline{\nu}')^{16}O^{*}$ (sotto).

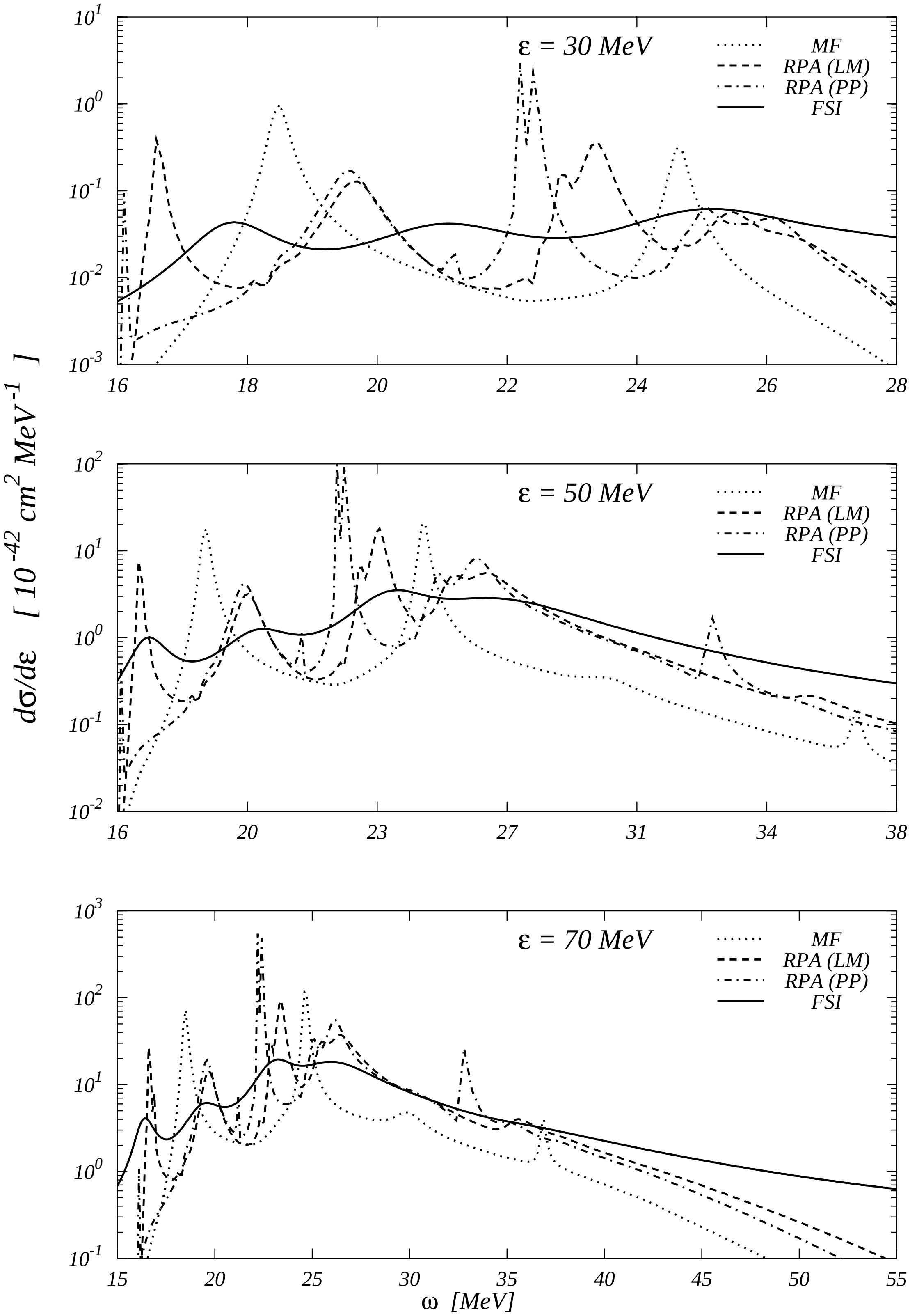

Figura 6.3: Sezione d'urto differenziale del processo $^{16}O(\nu_e, e^-)^{16}F^*$ per diversi valori dell'energia ε del neutrino incidente.

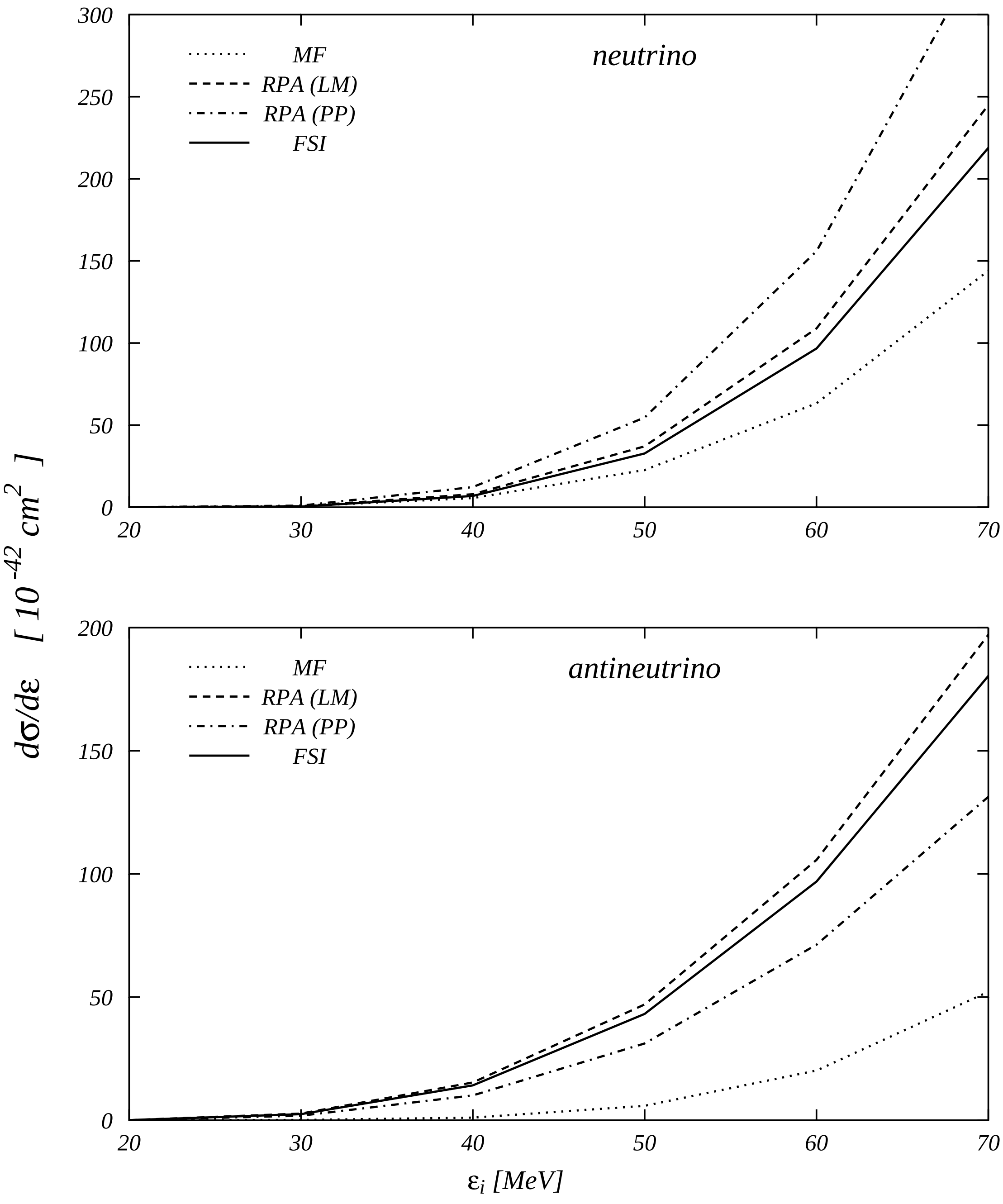

Figura 6.4: Sezione d'urto totale del processo $^{16}O(\nu_e, e^-)^{16}F^*$ (sopra) e $^{16}O(\overline{\nu}_e, e^+)^{16}N^*$ (sotto).

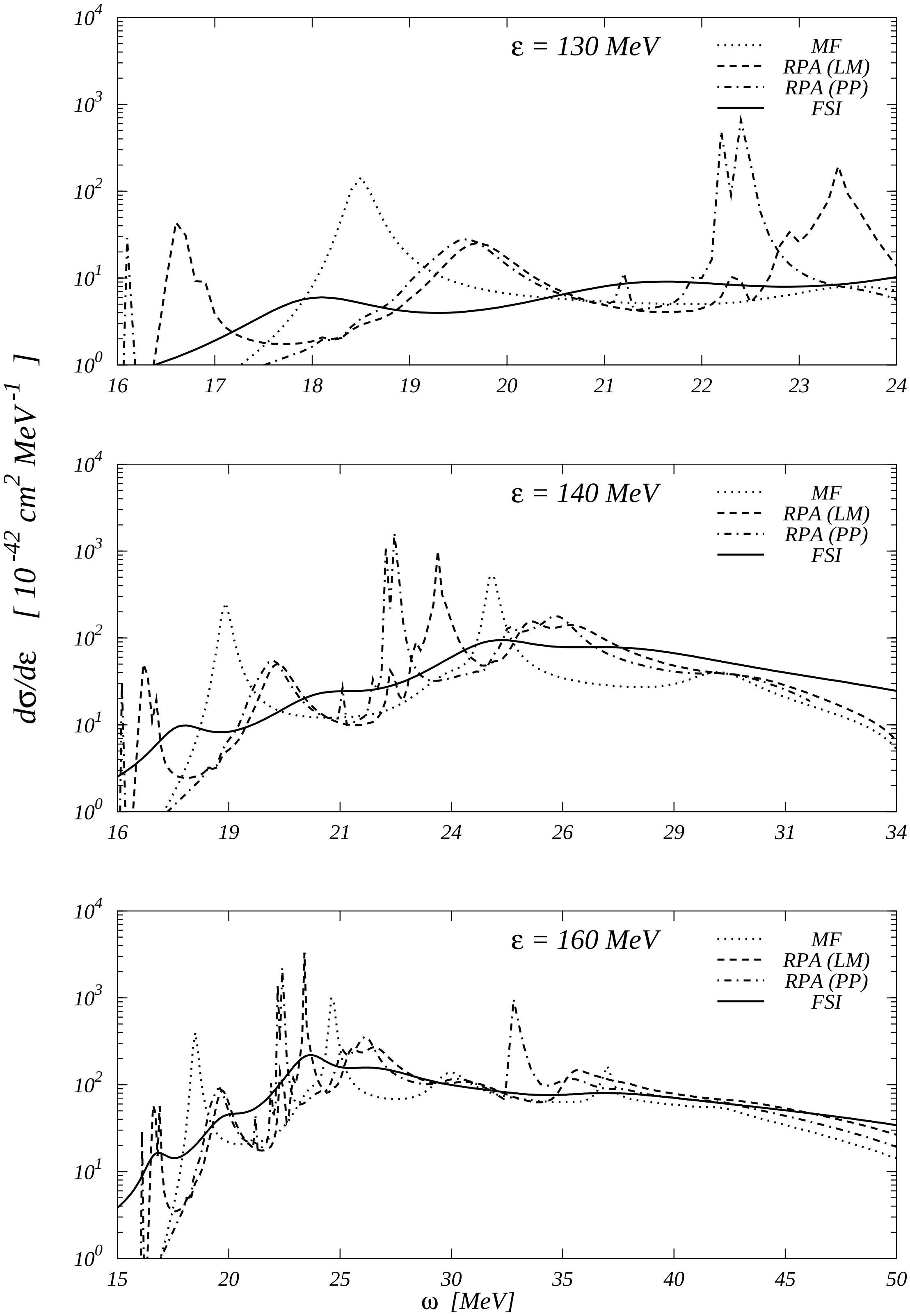

Figura 6.5: Sezione d'urto differenziale del processo $^{16}O(\nu_\mu, \mu^-)^{16}F^*$ per diversi valori dell'energia ε del neutrino incidente.

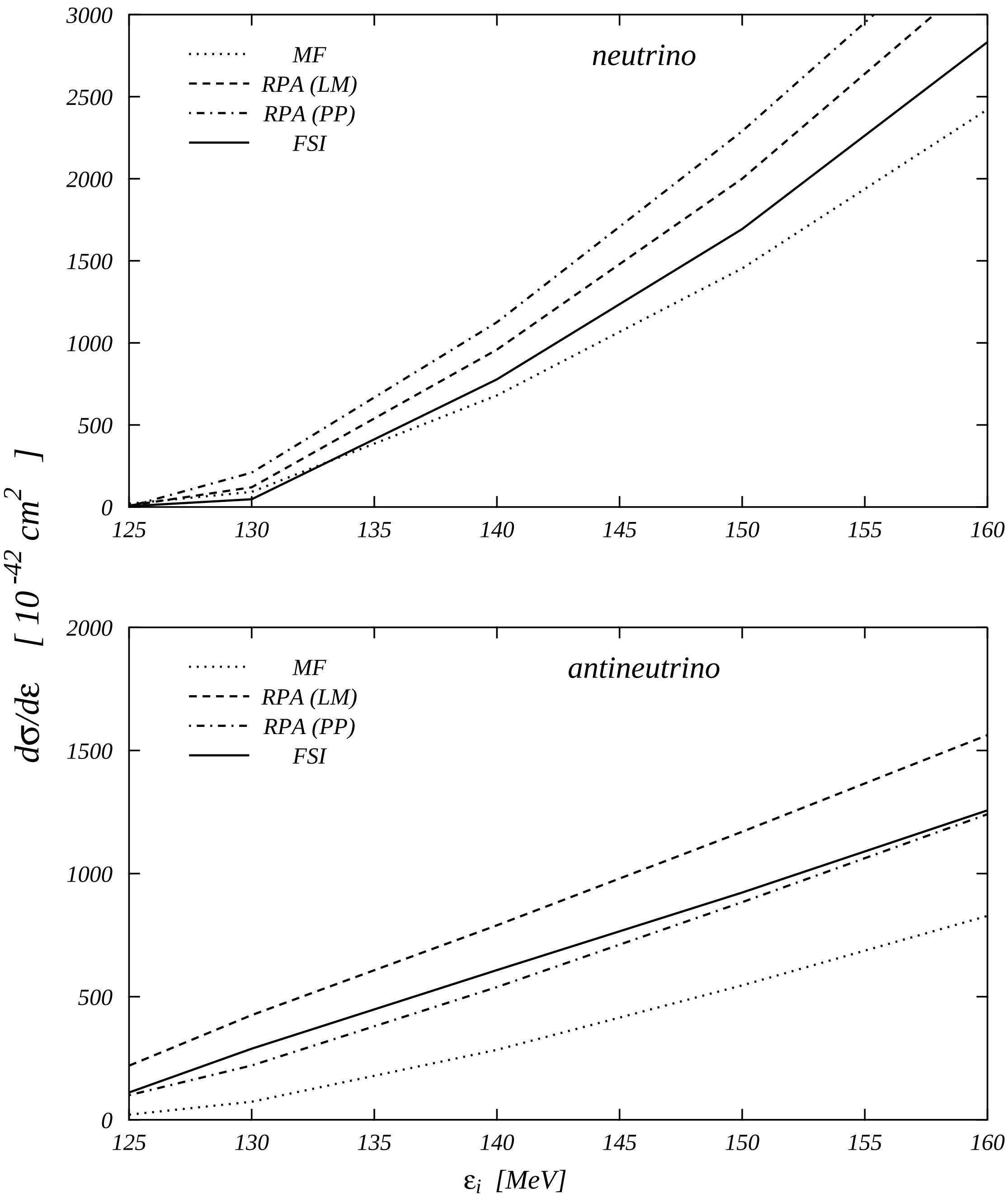

Figura 6.6: Sezione d'urto totale del processo $^{16}O(\nu_\mu, \mu^-)^{16}F^*$ (sopra) e $^{16}O(\overline{\nu}_\mu, \mu^+)^{16}N^*$ (sotto).

6.2 Il nucleo ^{12}C

A differenza dell'ossigeno, è noto che il ^{12}C è deformato. La struttura nucleare del suo stato fondamentale è spesso descritta mediante combinazione lineare di diverse configurazione di stati di singola particella occupati, oppure introducendo effetti dovuti al pairing. In questo lavoro considererò lo stato fondamentale descritto con tutti gli stati di singola particella fino all'$1p_{3/2}$ occupati. Queste caratteristiche dello stato fondamentale rendono l'applicazione del nostro formalismo e l'interpretazione dei risultati più problematica rispetto all'ossigeno. Tuttavia il ^{12}C è un nucleo di grande interesse sperimentale, è il materiale attivo utilizzato nei rivelatori a scintillazione. L'energia di soglia per l'emissione nucleonica corrisponde all'energia di singola particella degli stati $1p_{3/2}$ fissata a $18.72 MeV$ per protoni e $15.96 MeV$ per neutroni.

Nella Fig. 6.7 mostro la sezione d'urto differenziale per diffusione di neutrino e nella Fig.6.8 quella totale per diffusione di neutrino ed antineutrino. Rispetto all'ossigeno la sezione d'urto è più bassa di meno di un ordine di grandezza e presenta un minor numero di risonanze, questi aspetti sono dovuti al minor numero di massa del ^{12}C e quindi al minor numero di coppie particella-buca di cui si deve tener conto in un processo inclusivo. Anche in questo caso il calcolo FSI è stato effettuato sulla base del risultato RPA con l'interazione LM e si può notare che provoca uno spostamento della probabilità di transizione ad ω più alte. Come nell'ossigeno le risonanze sono dovute ad eccitazioni di tipo 1^- dell'operatore magnetico assiale e 2^- dell'elettrico assiale. Tuttavia la risonanza gigante nel ^{12}C non è ben individuata ma appare frammentata in tre picchi piuttosto allargati per ω compreso tra 20 e $30 MeV$, questo risultato si discosta da quello ottenuto in [Jac99] dove la risonanza gigante appare come un unico picco molto allargato. In entrambi i casi la risonanza gigante è descritta dalla transizione 1^- dell'operatore magnetico assiale.

Le figure 6.9, 6.10, 6.11, 6.12 mostrano gli stessi risultati nel caso dei processi CC. Nei processi CC la risonanza gigante è frammentata in due e non in tre picchi.

Il ^{12}C svolge un ruolo importantissimo nello studio del fenomeno di oscillazione del neutrino. Gli esperimenti LSND a Los Alamos e KARMEN in Inghilterra utilizzano il carbonio come materiale attivo per la rivelazione dei neutrini ed hanno misurato la sezione d'urto per processi CC inclusi ed esclusivi. Entrambi usano fasci di neutrini prodotti dal decadimento di pioni a riposo e in volo. poiché lo spettro energetico del fascio di neutrini può essere dedotto teoricamente, è sufficiente effettuare una convoluzione tra la sezione d'urto totale e lo spettro energetico per ottenere un risultato confrontabile con i dati sperimentali. Il primo calcolo effettuato utilizzando la CRPA [Kol95] sovrastima il risultato sperimentale di un fattore due, nonostante gli sforzi teorici [Kol97, Jac99] il problema non è stato completamente risolto.

I processi NC su ^{12}C non sono utilizzati per la determinazione dei neutrini poiché un leptone uscente neutro è difficile da rivelare. Come nell'^{16}O questo processo risulta comunque importante per la descrizione dell'esplosione di una supernova.

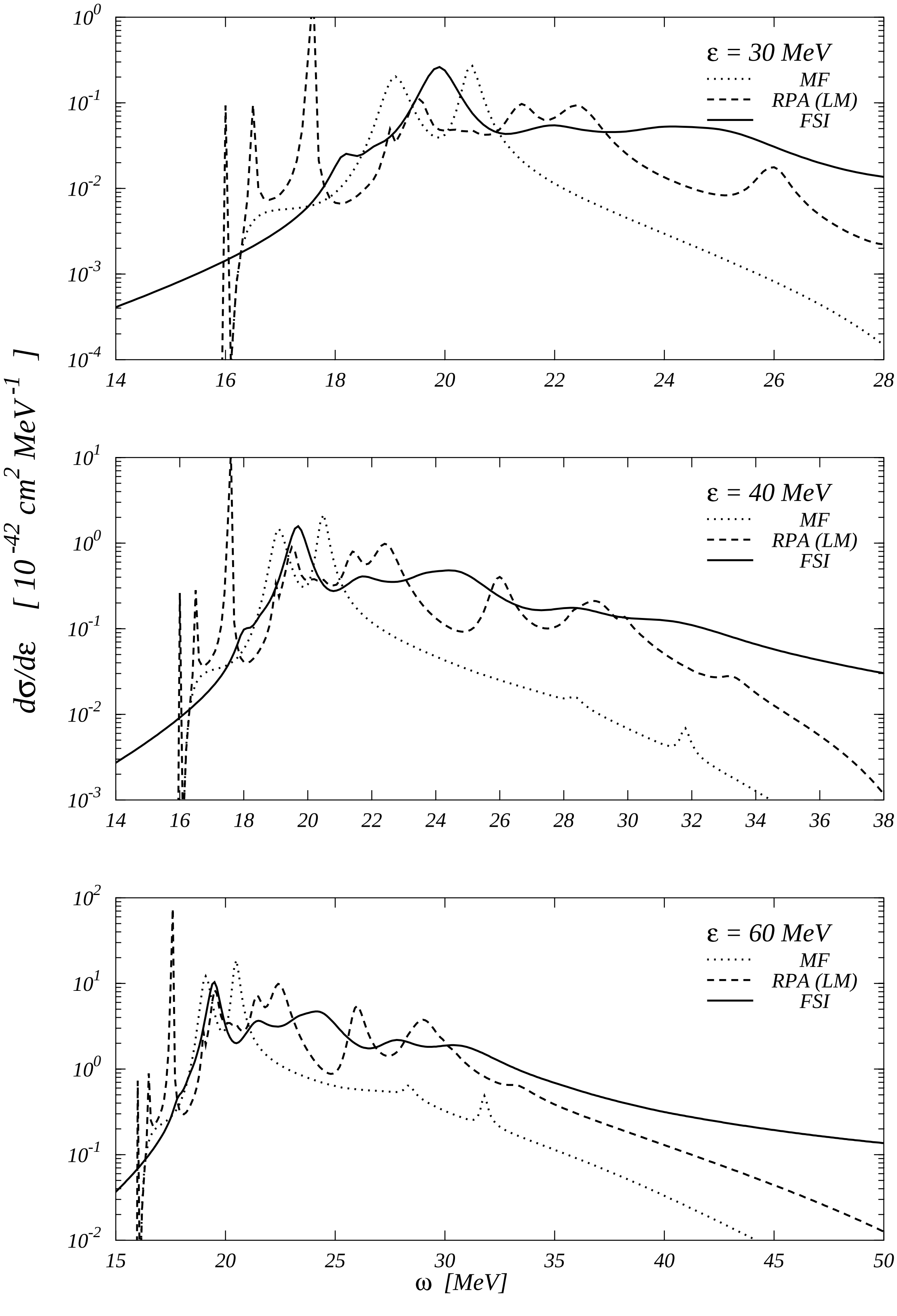

Figura 6.7: Sezione d'urto differenziale del processo $^{12}C(\nu, \nu')^{12}C^*$ per diversi valori dell'energia ε del neutrino incidente.

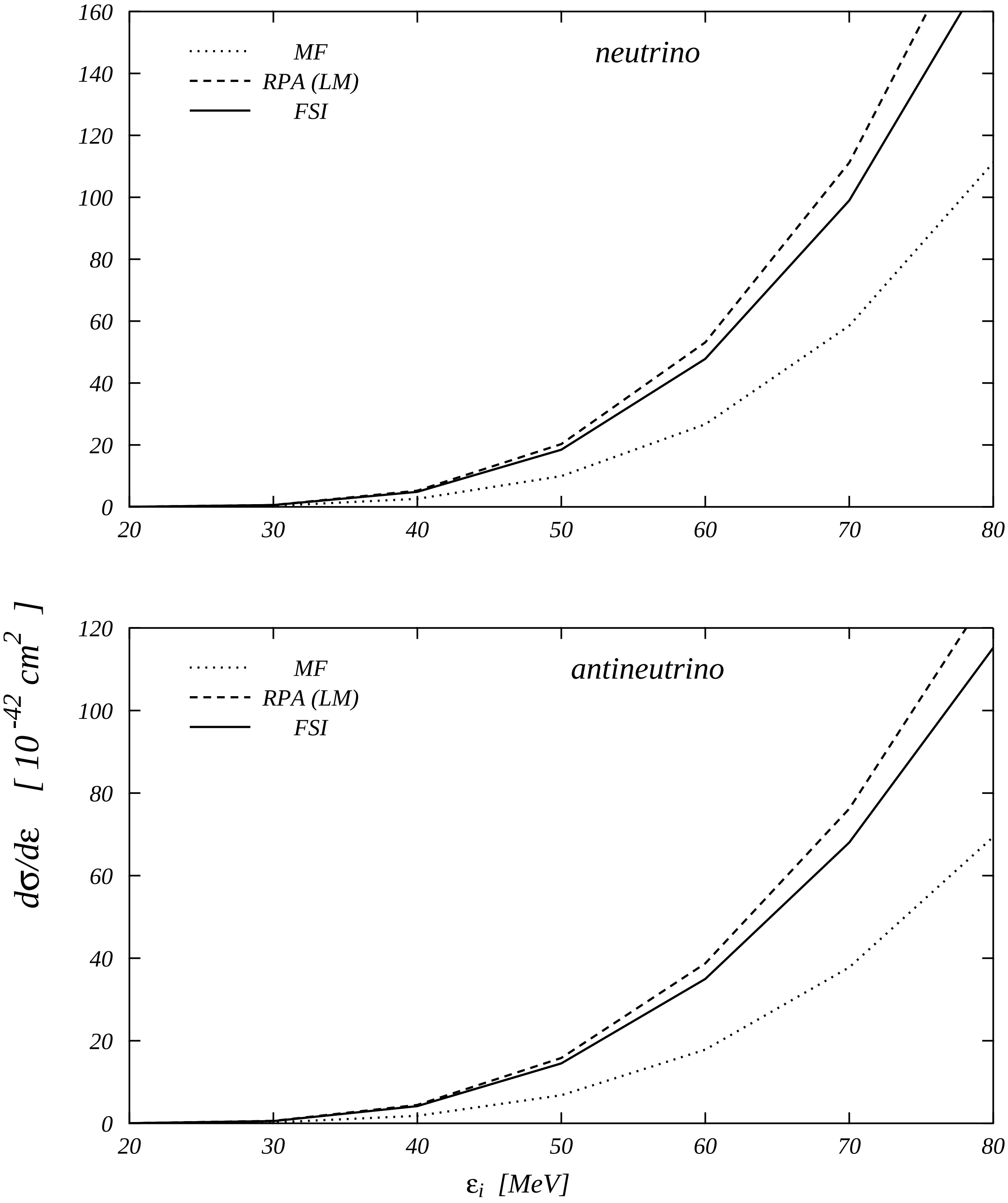

Figura 6.8: Sezione d'urto totale del processo $^{12}C(\nu,\nu')^{12}C^*$ (sopra) e $^{12}C(\overline{\nu},\overline{\nu}')^{12}C^*$ (sotto).

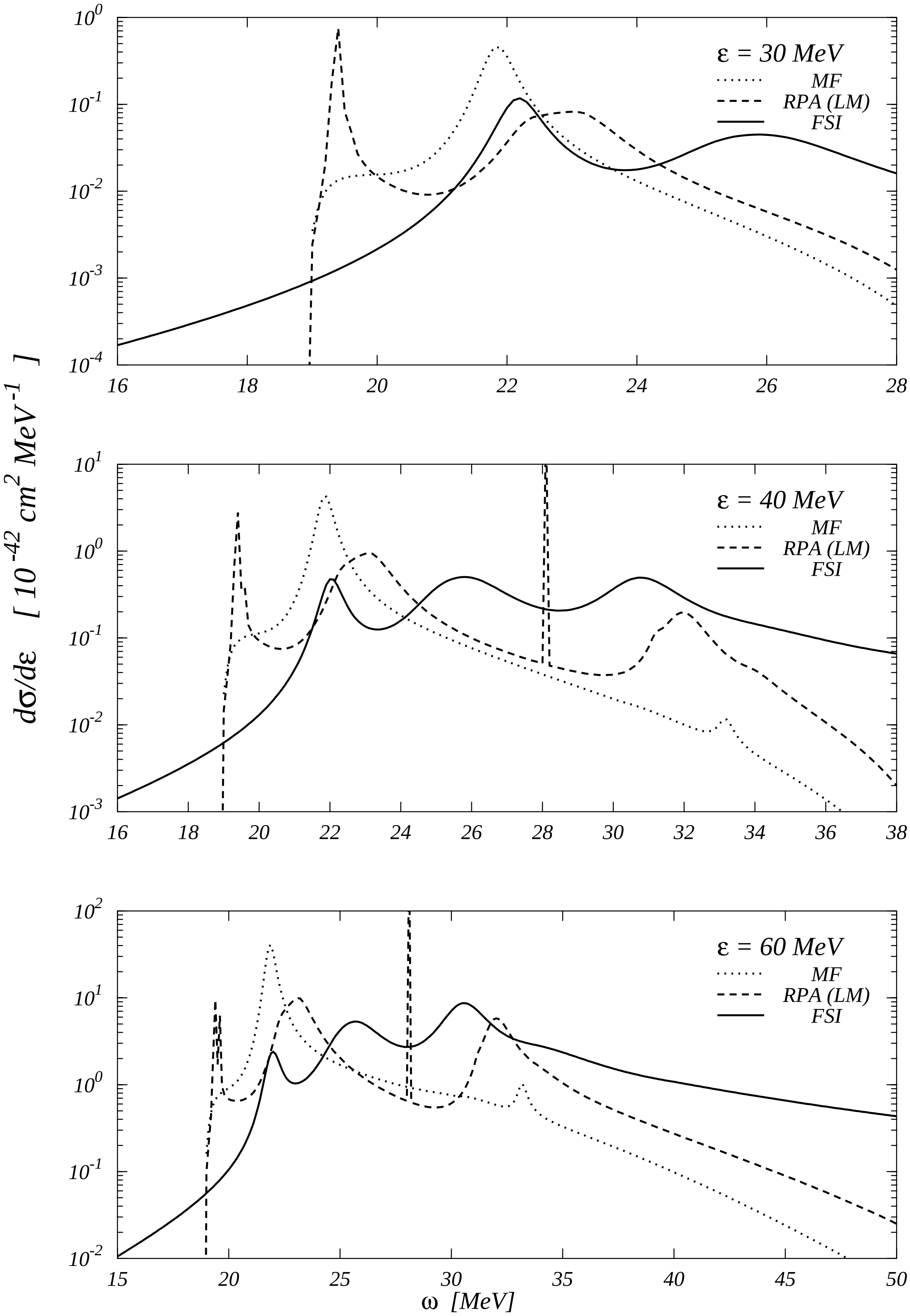

Figura 6.9: Sezione d'urto differenziale del processo $^{12}C(\nu_e, e^-)^{12}N^*$ per diversi valori dell'energia ε del neutrino incidente.

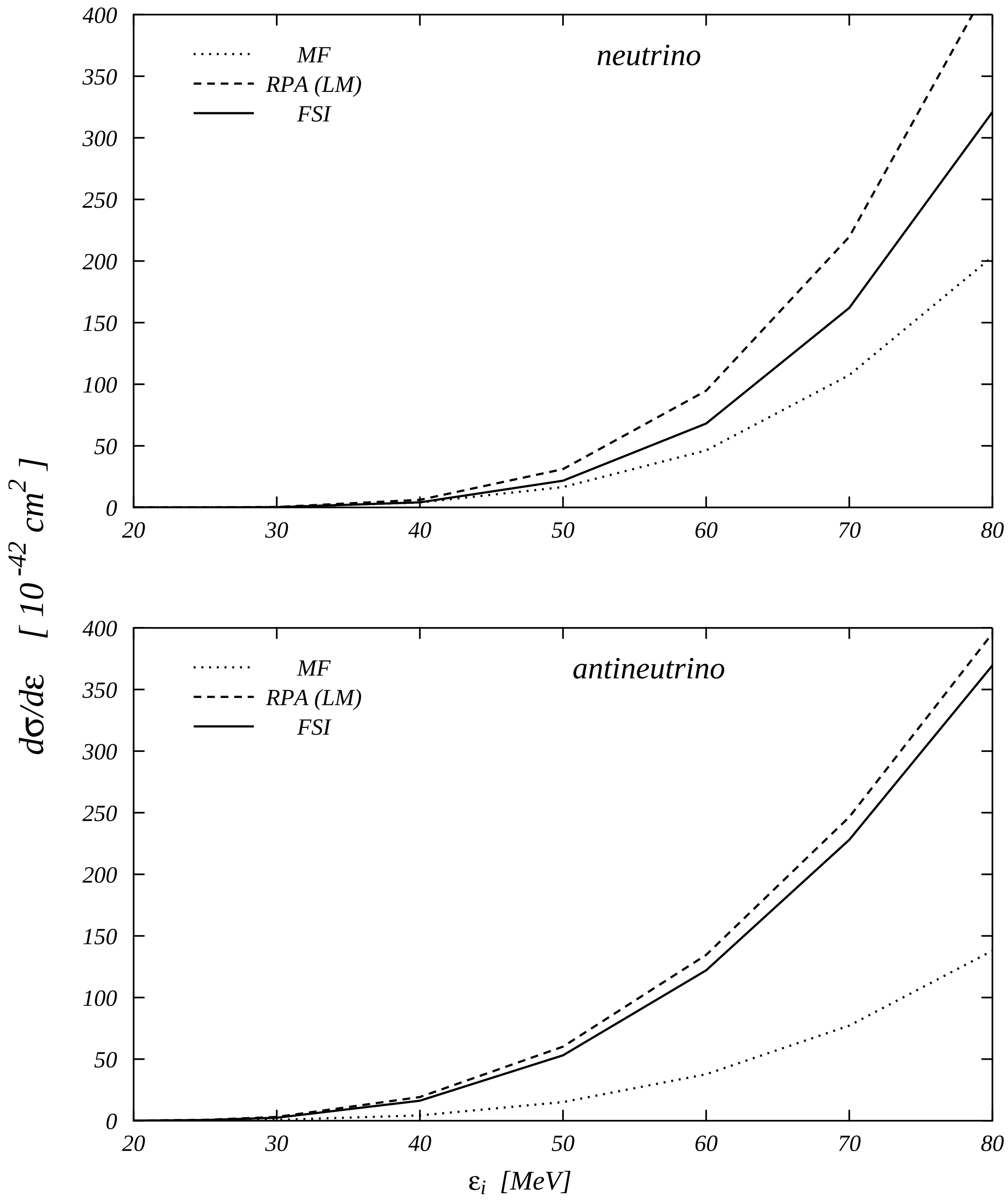

Figura 6.10: Sezione d'urto totale del processo $^{12}C(\nu_e, e^-)^{12}N^*$ (sopra) e $^{12}C(\overline{\nu}_e, e^+)^{12}B^*$ (sotto).

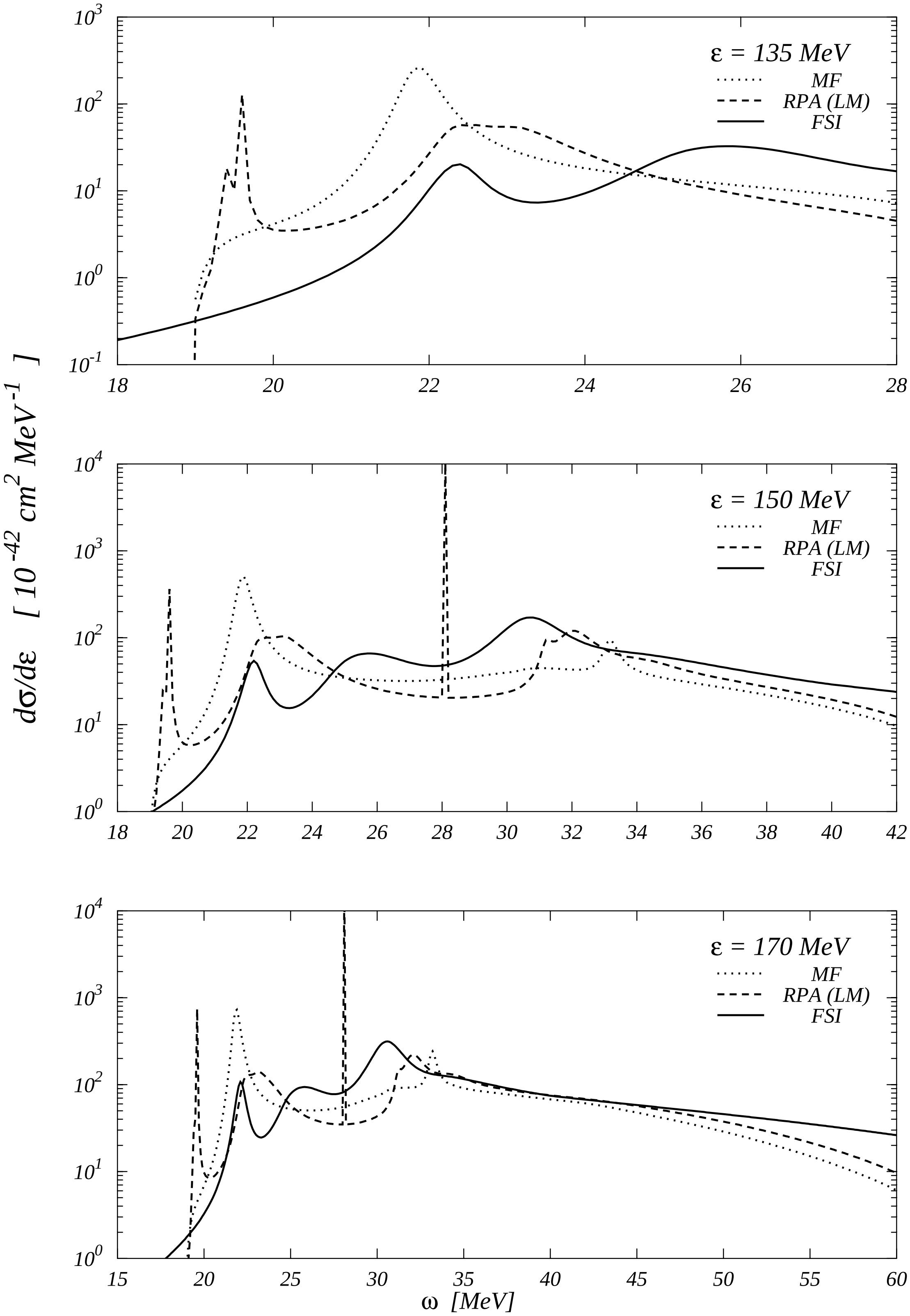

Figura 6.11: Sezione d'urto differenziale del processo $^{12}C(\nu_\mu, \mu^-)^{12}N^*$ per diversi valori dell'energia ε del neutrino incidente.

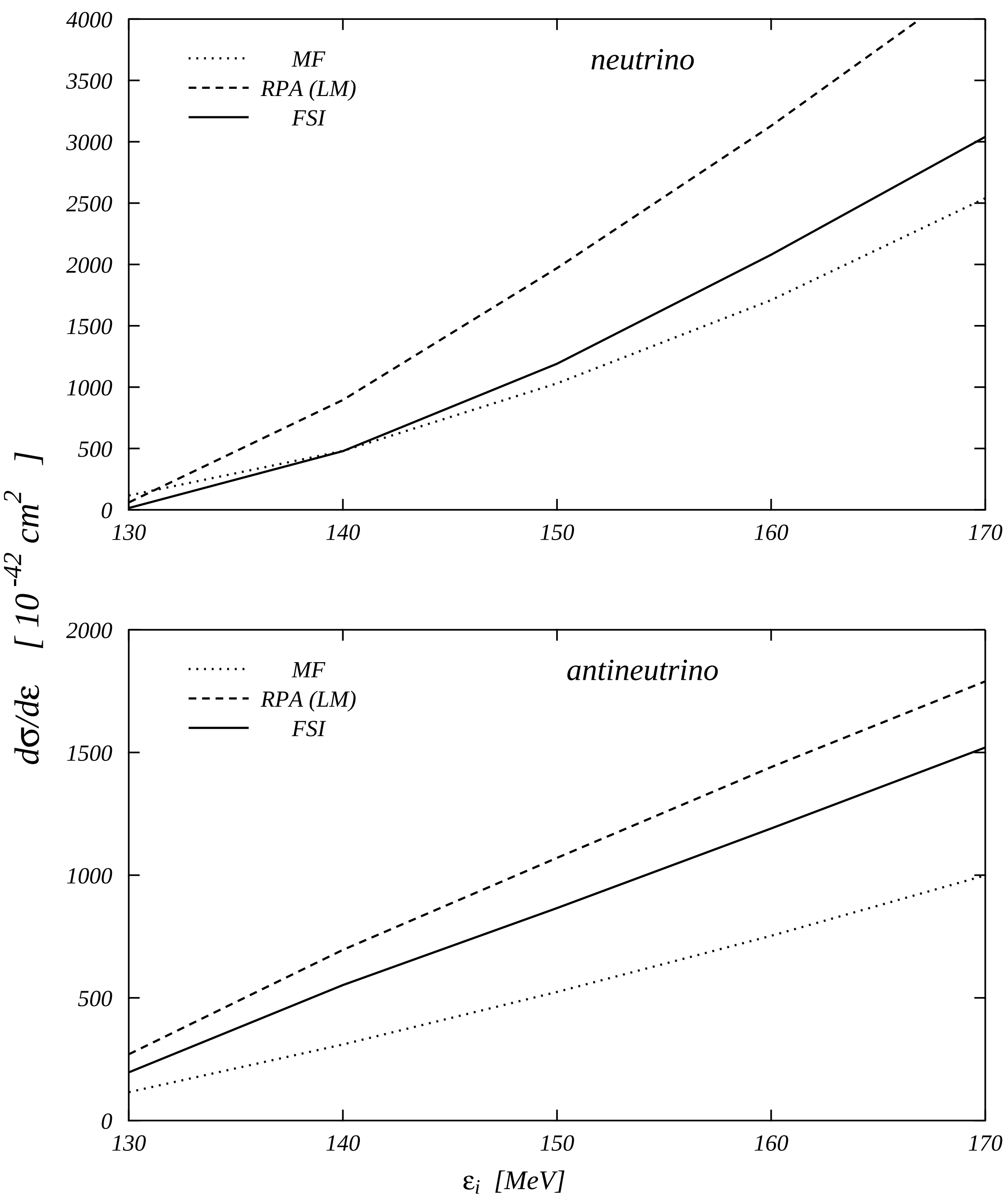

Figura 6.12: Sezione d'urto totale del processo ${}^{12}C(\nu_\mu,\mu^-)^{12}N^*$ (sopra) e ${}^{12}C(\overline{\nu}_\mu,\mu^+)^{12}B^*$ (sotto).

6.3 Il nucleo ^{208}Pb

Come l'^{16}O anche il ^{208}Pb è doppio magico ma il suo elevato numero atomico rende più complicato il trattamento numerico e più difficile da analizzare il risultato finale. Il gran numero di coppie particella buca provoca numerose risonanze nella sezione d'urto come già accade nel caso del fotoassorbimeto (vedi Fig 4.3), nel caso del neutrino a basse energie è impossibile distinguere un andamento qualitativo della sezione d'urto. All'aumentare dell'energia aumenta rapidamente anche lo sforzo computazionale necessario per il calcolo, l'apertura di nuovi canali fa crescere continuamente le dimensioni della matrice CRPA.

Rispetto agli altri nuclei precedentemente utilizzati, il ^{208}Pb ha il duplice vantaggio di avere una sezione d'urto maggiore e una soglia di apertura del continuo più bassa. Gli ultimi stati buca occupati sono infatti il $3s_{1/2}$ protonico a $8.0MeV$ e il $3p_{1/2}$ neutronico a $7.3MeV$. Gli operatori dominati sono sempre i trasversali assiali. In Fig. 6.13 mostro la sezione d'urto totale per i processi CC $^{208}Pb(\nu_e, e^-)^{208}Bi^*$ e $^{12}Pb(\overline{\nu}_e, e^+)^{208}Tl^*$ calcolata con il modello RPA e la correzione FSI. L'andamento è analogo a quello mostrato per gli stessi processi su altri nuclei, ma la sezione d'urto è più grande. Il risultato ottenuto in questo lavoro è più basso di circa un ordine di grandezza rispetto a quello riportato in [Vol02].

Il piombo è stato spesso utilizzato come schermo in vari esperimenti con fasci di neutrini, in modo da ridurre il rumore dovuto a neutrini solari o atmosferici. Recentemente è stato utilizzato anche come materiale per la rivelazione dei neutrini. Gli esperimenti OMNIS e LAND usano il ^{208}Pb per la rivelazione dei neutrini provenienti dalla prossima esplosione di una supernova.

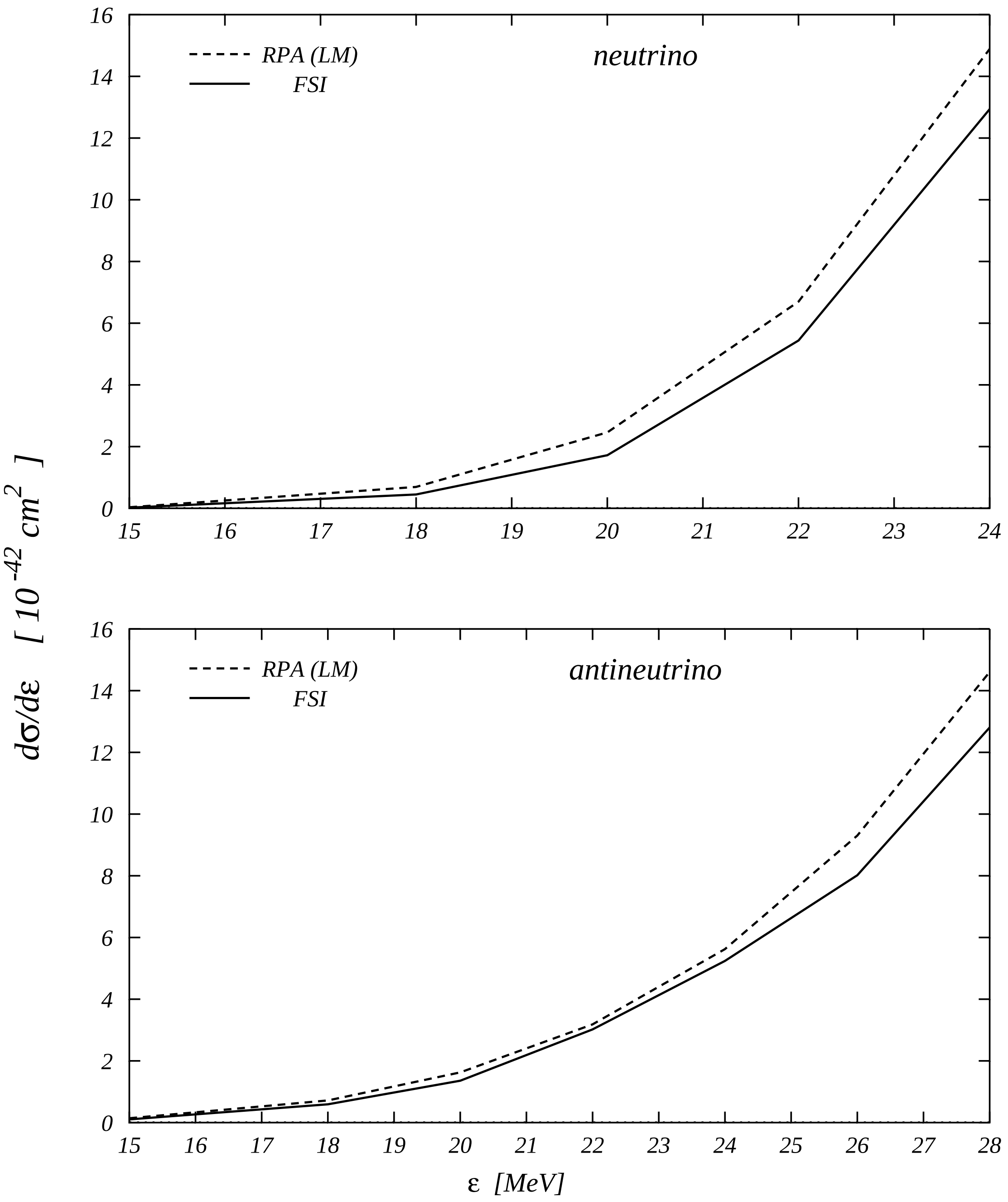

Figura 6.13: Sezione d'urto totale del processo $^{208}Pb(\nu_e, e^-)^{208}Bi^*$ (sopra) e $^{208}Pb(\overline{\nu}_e, e^+)^{208}Tl^*$ (sotto).

Appendice A

Termini leptonici

Il risultato sull'espressione del tensore leptonico riportato nella 2.20 ha validità per tutti i processi semileptonici. L'unica condizione utilizzata è infatti che $m_i m_f = 0$ la quale è sempre verificata quando un neutrino compare nello stato iniziale o finale perchè le energie tipiche sono tali da poteter considerare $m_\nu = 0$.

A.1 Tracce del tensore leptonico

Il tensore leptonico $l_\mu = (l_0, l_+, l_-, l_3)$ ha la seguente espressione:

$$l_\mu (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') = \overline{u} (k', s') \ \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \ u (k, s) \tag{A.1}$$

dove lo spinore di Dirac per una normalizzazione covariante a 2ϵ particelle per unità di volume è dato da

$$u (\mathbf{k}, s) = \sqrt{\frac{\varepsilon + m}{V}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{\varepsilon + m} \chi_s \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

Nella sezione d'urto si deve calcolare la somma sugli stati di spin del leptone entrante ed uscente

$$\sum_{s,s'} l_\alpha (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') \, l^*_\beta (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') =$$

$$= \sum_{s,s'} \left[\overline{u}_f (\mathbf{k}', s') \ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \ u_i (\mathbf{k}, s) \right] \left[\overline{u}_f (\mathbf{k}', s') \ \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \ u_i (\mathbf{k}, s) \right]^* =$$

$$= \sum_{s,s'} \left[\overline{u}_f (\mathbf{k}', s') \ \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \ u_i (\mathbf{k}, s) \right] \left[\overline{u}_i (\mathbf{k}, s) \ \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \ u_f (\mathbf{k}', s') \right] =$$

$$= \frac{1}{V^2} Tr \ \left[(\not{k}' + m_f) \, \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \, (\not{k} + m_i) \, \gamma_\beta (1 - \gamma_5) \right] =$$

$$= \frac{1}{V^2} \left(Tr \ \left[\not{k}' \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{k} \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] + m_f Tr \ \left[\gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{k} \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] + \right.$$

$$\left. + m_i Tr \ \left[\not{k}' \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] + m_i m_f Tr \ \left[\gamma_\alpha (1-\gamma_5) \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] \right) \quad \text{(A.3)}$$

nella precedente espressione ho utilizzato le relazioni di completezza degli spinori di Dirac e i teoremi sulle tracce riportati in appendice D. Le tracce proporzionali a m_i e m_f sono nulle perché costituite da un numero dispari di matrici γ. Il termine proporzionale a $m_i m_f$ è nullo nei processi semileptonici che coinvolgono il neutrino. Si ottiene allora:

$$Tr \ \left[\not{k}' \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{k} \gamma_\beta (1-\gamma_5) \right] =$$

$$= 2Tr \ \left[\not{k}' \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{k} \gamma_\beta \right] = 2Tr \ \left[\not{k}' \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta \right] - 2Tr \ \left[\not{k}' \gamma_\alpha \gamma_5 \not{k} \gamma_\beta \right] =$$

$$= 8 \left[k'_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) + k'_\beta k_\alpha - i \varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta} \ k'^\mu k^\rho \right] \quad \text{(A.4)}$$

ho usato l'uguaglianza $(1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5)$.

In definitiva si ottiene:

$$\sum_{s,s'} l_\alpha (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') \, l^*_\beta (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') \ = \frac{8}{V^2} \left[k'_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) + k'_\beta k_\alpha - i \varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta} \ k'^\mu k^\rho \right] \quad \text{(A.5)}$$

Per una normalizzazione a una particella nell'unità di volume il precedente risultatato deve essere moltiplicato per $1/4\epsilon\epsilon'$ e si ottiene:

$$\sum_{s,s'} l_\alpha (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') \, l^*_\beta (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') \ = \frac{2}{\varepsilon\varepsilon' V^2} \left[k'_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) + k'_\beta k_\alpha - i \varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta} \ k'^\mu k^\rho \right] \quad \text{(A.6)}$$

La sezione d'urto non dipende dalla normalizzazione perché in caso di diversa normalizzazione il fattore $1/4\epsilon\epsilon'$ è esattamente bilanciato da la fattore $4\epsilon\epsilon'$ che compare nell'espressione della sezione d'urto, come discusso nel paragrafo 2.5.

Per processi con antileptoni, invertendo la direzione temporale si ottiene:

$$\sum_{s,s'} l_\alpha (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') \, l^*_\beta (\mathbf{k}, s, \mathbf{k}', s') =$$

$$= \sum_{s,s'} \left[u_f (\mathbf{k}, s) \ \ \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \ \ \overline{u}_i (\mathbf{k}', s') \right] \left[u_i (\mathbf{k}', s') \ \ \gamma_\beta (1-\gamma_5) \ \ \overline{u}_f (\mathbf{k}, s) \right] =$$

$$= \frac{1}{V^2} Tr \ \left[(\not{k} - m_i) \, \gamma_\alpha \, (1-\gamma_5) \, (\not{k}' - m_f) \, \gamma_\beta \, (1-\gamma_5) \right] \tag{A.7}$$

e in maniera analoga a quanto fatto nel caso dei leptoni per il calcolo della traccia, si ottiene:

$$\begin{aligned} &Tr \ \left[(\not{k} - m_i) \, \gamma_\alpha \, (1-\gamma_5) \, (\not{k}' - m_f) \, \gamma_\beta \, (1-\gamma_5) \right] = \\ &= 8 \left[k'_\alpha k_\beta - g_{\alpha\beta} \, (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) + k'_\beta k_\alpha + i \varepsilon_{\mu\alpha\rho\beta} \ k'^\mu k^\rho \right] \end{aligned} \tag{A.8}$$

quindi soltanto il termine proporzionale al tensore di Levi-Civita cambia segno.

A.2 Elementi del tensore leptonico

Riporto qui il dettaglio dei calcoli per gli elementi del tensore leptonico utilizati nella sezione d'urto il cui risultato per processi CC e NC è riportato in Tab. 2.3. I termini del tensore dipendono da tre grandezze cinematiche indipendenti, ho usato l'insieme $A = (\epsilon \ \epsilon' \ \ |\mathbf{q}|)$ e l'insieme $B = (\epsilon \ \epsilon' \ \theta)$ in modo che sia semplice passare agli insiemi $(\epsilon \ \omega \ \ |\mathbf{q}|)$ e $(\epsilon \ \omega \ \theta)$ con la semplice sostituzione $\epsilon' = \epsilon - \omega$. Solitamente in letteratura si scrivono i termini leptonici senza ridurre la loro espressioni all'utilizzo di grandezze cinematicamente indipendenti, ciò impedisce di poter valutare l'esatta dipendenza del termine dalle grandezze cinematiche.

Utilizzando la A.5 si può facilmente calcolare il valore generale dei termini leptonici per i processi semileptonici che coinvolgono neutrini:

- $$\frac{V^2}{8} \sum_{ss'} l_0 l_0^* = \varepsilon\varepsilon' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \tag{A.9}$$

A) $$\frac{1}{2} \left((\varepsilon + \varepsilon')^2 - m_i^2 - m_f^2 - \mathbf{q}^2 \right)$$

B) $$\varepsilon\varepsilon' \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{m_i}{\varepsilon}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_f}{\varepsilon'}\right)^2} \cos\theta \right)$$

- $$\frac{V^2}{8} \sum_{ss'} l_3 l_3^* = 2 \, (\mathbf{k}' \cdot \widehat{\mathbf{q}}) \, (\mathbf{k} \cdot \widehat{\mathbf{q}}) + \varepsilon\varepsilon' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \tag{A.10}$$

A) $$\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon'^2 - \varepsilon^2 - m_f^2 + m_i^2}{\mathbf{q}^2} - (\varepsilon - \varepsilon')^2 + m_f^2 + m_i^2 \right)$$

B) $$\varepsilon\varepsilon' \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_i}{\varepsilon}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_f}{\varepsilon'}\right)^2} \cos\theta \right)$$

$$\bullet \quad \frac{V^2}{8}\sum_{ss'} l_0 l_3^* = \varepsilon' \left(\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{q}}\right) + \varepsilon \left(\mathbf{k}'\cdot\widehat{\mathbf{q}}\right) = \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
A) &\quad \frac{1}{2\left|\mathbf{q}\right|} && \left(\left(\varepsilon+\varepsilon'\right)\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2+m_f^2-m_i^2\right)+\left(\varepsilon'-\varepsilon\right)\left|\mathbf{q}\right|\right)\\
B) &\quad \frac{1}{\left|\mathbf{q}\right|} && \left[\varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta-\varepsilon'^2+m_f^2\right)-\right.\\
& && \left.-\varepsilon'\left(\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta-\varepsilon^2+m_i^2\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{V^2}{8}\sum_{ss'} l_+ l_+^* + l_- l_-^* = 2\varepsilon\varepsilon' - 2\left(\mathbf{k}'\cdot\widehat{\mathbf{q}}\right)\left(\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{q}}\right) = \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
A) &\quad 2\varepsilon\varepsilon'-\frac{1}{2\mathbf{q}^2} && \left(\left(\varepsilon'^2-\varepsilon^2-m_f^2+m_i^2\right)^2-\mathbf{q}^4\right)\\
B) &\quad 2\varepsilon\varepsilon'+\frac{2}{\mathbf{q}^2} && \left(\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta-\varepsilon'^2+m_f^2\right)\times\\
& && \times\left(\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta-\varepsilon^2+m_i^2\right)
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{V^2}{8}\sum_{ss'} l_+ l_+^* - l_- l_-^* = 2\left(\varepsilon'\left(\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{q}}\right) - \varepsilon\left(\mathbf{k}'\cdot\widehat{\mathbf{q}}\right)\right) = \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
A) &\quad \frac{1}{\left|\mathbf{q}\right|} && \left(\left(\varepsilon'-\varepsilon\right)\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2+m_f^2-m_i^2\right)+\left(\varepsilon'+\varepsilon\right)\mathbf{q}^2\right)\\
B) &\quad -\frac{2}{\left|\mathbf{q}\right|} && \left[\varepsilon'\left(\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta-\varepsilon^2+m_i^2\right)+\right.\\
& && \left.+\varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta-\varepsilon'^2+m_f^2\right)\right]
\end{aligned}$$

nel calcolo delle precedenti espressioni ho ripetutamente utilizzato

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varepsilon'^2+\varepsilon^2-m_f^2-m_i^2-\mathbf{q}^2\right) \\ \varepsilon\varepsilon'\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta \end{cases}$$

$$\mathbf{k}\cdot\widehat{\mathbf{q}} = \begin{cases} \frac{1}{\left|\mathbf{q}\right|}\left(\varepsilon^2-m_i^2-\sqrt{\varepsilon'^2-m_f^2}\sqrt{\varepsilon^2-m_i^2}\cos\theta\right) \\ \frac{1}{2\left|\mathbf{q}\right|}\left(\varepsilon^2-\varepsilon'^2-m_f^2-m_i^2-\mathbf{q}^2\right) \end{cases}$$

I risultati della parte superiore delle parentesi graffe si riferiscono all'utilizzo dell'insieme A, quelli della parte inferiore all'insieme B.

I risultati per processi CC si ottengono dai precedenti utilizzando $m_i = 0$ e $m_f = m_l$, quelli per processi NC utilizzando $m_i = 0$ e $m_f = 0$. Faccio notare che i risultti fin qui ottenuti valgono anche per il processo di cattura muonica, in questo caso si può utilizzare $m_i = m_\mu$ e $m_f = 0$.

Appendice B

Riduzione non relativistica

I modelli nucleari utilizzati in questo lavoro si basano su una descrizione non relativistica del moto dei nucleoni. L'operatore della corrente nucleonica descritto dalle 2.32-2.35 deriva invece da una teoria relativistica. Al fine di poter calcolare l'elemento di matrice dell'operatore tra funzioni d'onda di singola particella non relativistiche, è necessario operare una riduzione non relativistica dell'operatore stesso.

Seguendo la procedura di Foldy-Wouthuysen, sviluppo l'operatore di corrente debole nucleonica in potenze di $|\mathbf{p}|/m$, dove $|\mathbf{p}|$ ed m sono il momento e la massa del nucleone.

$$\left\langle p' \left| J_\mu^V \right| p \right\rangle = \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right) \left[F_V\left(q^2\right) \gamma_\alpha + \frac{i}{2m} F_M\left(q^2\right) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] u\left(\mathbf{p}, s\right) \tag{B.1}$$

$$\left\langle p' \left| J_\mu^A \right| p \right\rangle = \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right) \left[F_A\left(q^2\right) \gamma_\alpha \gamma_5 + \frac{i}{2m} F_P\left(q^2\right) \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \gamma_5 \right] u\left(\mathbf{p}, s\right) \tag{B.2}$$

ho usato gli spinori di Dirac con la normalizzazione covariante a 2ε particelle per unita di volume:

$$u\left(\mathbf{p}, s\right) = \left(\frac{E+m}{2E} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_s \tag{B.3}$$

Sviluppando lo spinore di Dirac in potenze di $|\mathbf{p}|/m$ fino ad un ordine di $\mathbf{p}^2/m^2$ si ottiene:

$$u\left(\mathbf{p}, s\right) = \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} + o\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right) \tag{B.4}$$

Nei prossimi paragrafi non considererò la dipndenza dei fattori di forma nello sviluppo e per comodità non espliciterò la loro dipendenza da q^2 nelle formule. Inoltre sfrutterò il fatto che ogni elemento di matrice è moltiplicato per il fattore

$$\left(1-\frac{\mathbf{p}'^2}{8m^2}\right)\left(1-\frac{\mathbf{p}^2}{8m^2}\right)=\left(1-\frac{\mathbf{p}^2+\mathbf{p}'^2}{8m^2}\right)+o\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}\right)$$

come si deduce dalla B.4, e userò ripetutamente le seguenti identità relative alle matrici di Pauli:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}\right) &= \mathbf{A}-i\left(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{A}\right)\\ \left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{A}+i\left(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{A}\right)\end{aligned}$$

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right)=\mathbf{A}\times\left(\mathbf{B}\times\boldsymbol{\sigma}\right)-\mathbf{A}\times\mathbf{B}+\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{A}$$

dove $\boldsymbol{\sigma}$ sono le matrici di Pauli, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due operatori vettoriali che commutano tra loro e con le matrici di Pauli.

Nei prossimi paragrafi analizzerò separatamente le componenti della parte vettoriale e assiale della corrente esplicitando le matrici γ nella rappresentazione di Pauli-Dirac e trascurando i termini di ordine superiore a $\mathbf{p}^2/m^2$.

B.1 Componente temporale della corrente vettoriale

$$\left\langle p'\left|J_0^V\right|p\right\rangle=\overline{u}\left(\mathbf{p}',s'\right)\left[F_V\gamma_0+\frac{i}{2m}F_M\sigma_{0\beta}q^\beta\right]u\left(\mathbf{p},s\right) \tag{B.5}$$

- $\overline{u}\left(\mathbf{p}',s'\right)F_V\gamma_0 u\left(\mathbf{p},s\right)=$

$$=u^\dagger\left(\mathbf{p}',s'\right)\gamma_0F_V\gamma_0u\left(\mathbf{p},s\right)\cong$$

$$\cong F_V\ \left(1-\frac{\mathbf{p}^2+\mathbf{p}'^2}{8m^2}\right)\ \left(1\quad\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\right)\begin{pmatrix}1\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\end{pmatrix}\cong$$

$$\cong F_V\left(1-\frac{\mathbf{p}^2+\mathbf{p}'^2}{8m^2}+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{4m^2}\right)=$$

$$=F_V\left(1-\frac{\mathbf{p}^2+\mathbf{p}'^2}{8m^2}+\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'}{4m^2}+\frac{i\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}'\times\ \mathbf{p}\right)}{4m^2}\right)=$$

$$= F_V \left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m^2} - \frac{i\ \mathbf{q}\cdot (\boldsymbol{\sigma} \times\ \mathbf{p})}{4m^2}\right)$$

- $$\overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right) \frac{i}{2m} F_M \sigma_{0\beta} q^\beta u\left(\mathbf{p}, s\right) =$$

$$= \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right)\ \frac{F_M}{2m}\left(q_0 - \gamma_0\gamma_\beta q^\beta\right)\ u\left(\mathbf{p}, s\right) =$$

$$= u^\dagger\left(\mathbf{p}', s'\right)\ \frac{F_M}{2m}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}\ u\left(\mathbf{p}, s\right) \cong$$

$$\cong \frac{F_M}{2m}(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2})\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{F_M}{2m}(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2})\ \left(-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\right) \cong$$

$$\cong \frac{F_M}{4m^2}\left(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p} + i\ \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{q}\times\ \mathbf{p})\ -\ \mathbf{p}'\cdot\mathbf{q} - i\ \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}'\times\ \mathbf{q})\right) =$$

$$= \frac{F_M}{4m^2}\left(-\mathbf{q}^2 - 2i\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\ \mathbf{p})\right)$$

In definitiva si trova che l'operatore della componente temporale della parte vettoriale della corrente debole nucleonica può essere scritto come:

$$J_0^V = J_0^{V(0)} + J_0^{V(1)} + J_0^{V(2)} + o(\mathbf{p}^2/m^2) \tag{B.6}$$

con

$$J_0^{V(0)} = F_V \tag{B.7}$$
$$J_0^{V(1)} = 0 \tag{B.8}$$
$$J_0^{V(2)} = \left(-\frac{\mathbf{q}^2}{8m^2} + \frac{i\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\ \mathbf{p})}{4m^2}\right)(F_V + 2F_M) \tag{B.9}$$

dove $J_0^{V(0)}$,$J_0^{V(1)}$+$J_0^{V(2)}$ sono rispettivamente i termini di ordine zero, uno e due dello sviluppo.

B.2 Componente spaziale della corrente vettoriale

$$\left\langle p' \left| \mathbf{J}^V \right| p \right\rangle = \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right) \left[F_V \boldsymbol{\gamma} + \frac{i}{2m} F_M \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \right] u\left(\mathbf{p}, s\right) =$$

$$= \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right) \left[F_V \boldsymbol{\gamma} + \frac{F_M}{2m} \left(\mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma}\gamma_\beta q^\beta \right) \right] u\left(\mathbf{p}, s\right) =$$

$$= u^\dagger\left(\mathbf{p}', s'\right) \left[F_V \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} + \frac{F_M}{2m} \left(\gamma_0 \mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma} q_0 + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} \right) \right] u\left(\mathbf{p}, s\right) \tag{B.10}$$

- $u^\dagger\left(\mathbf{p}', s'\right)\ F_V \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}\ u\left(\mathbf{p}, s\right) \cong$

$$\cong F_V \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} =$$

$$= F_V \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right) =$$

$$= F_V \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) \left(\frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} + \frac{i \boldsymbol{\sigma} \times \left(\mathbf{p}' - \mathbf{p}\right)}{2m} \right) \cong$$

$$\cong F_V \left(\frac{2\mathbf{p} + \mathbf{q}'}{2m} + \frac{i \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}}{2m} \right)$$

- $u^\dagger\left(\mathbf{p}', s'\right) \frac{F_M}{2m} \left(\gamma_0 \mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma} q_0 + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} \right) u\left(\mathbf{p}, s\right) \cong$

$$\cong \frac{F_M}{2m} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} & \boldsymbol{\sigma}\omega \\ -\boldsymbol{\sigma}\omega & -\mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} \cong$$

$$\begin{aligned} \cong\ & \frac{F_M}{2m} \left(1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}\right) \left[\mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \boldsymbol{\sigma} + \right. \\ & \left. + \left(\boldsymbol{\sigma}\omega - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} \right] \cong \end{aligned}$$

$$\cong \frac{F_M}{2m} \left(\mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q} + \frac{\omega}{2m} \left(\boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\ -\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}' \boldsymbol{\sigma} \right) \right) =$$

$$= \frac{F_M}{2m}\left[i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q}+\frac{\omega}{2m}\left(-\mathbf{q}-i\;\boldsymbol{\sigma}\times(2\mathbf{p}+\mathbf{q})\right)\right]$$

In definitiva si trova che l'operatore della componente spaziale della parte vettoriale della corrente debole nucleonica può essere scritto come:

$$\mathbf{J}^V = \mathbf{J}^{V(0)} + \mathbf{J}^{V(1)} + \mathbf{J}^{V(2)} + o(\mathbf{p}^2/m^2) \tag{B.11}$$

$$\mathbf{J}^{V(0)} = 0 \tag{B.12}$$

$$\mathbf{J}^{V(1)} = F_V\left(\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m}\right) + (F_V+F_M)\left(\frac{i\;\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q}}{2m}\right) \tag{B.13}$$

$$\mathbf{J}^{V(2)} = -F_M\left(\frac{\omega\mathbf{q}}{4m^2}+\frac{i\omega}{4m^2}\;\boldsymbol{\sigma}\times(2\mathbf{p}+\mathbf{q})\right) \tag{B.14}$$

La parte vettoriale della corrente debole ha la stessa struttura operatoriale della corrente elettromagnetica, l'unica differenza sono le espressioni dei fattori di forma. Poiché nella tecnica di riduzione qui utilizzata non ho considerato i fattori di forma, il risultato ottenuto vale anche per la corrente elettromagnetica, è sufficiente sostituire i fattori di forma deboli con quelli elettromagnetici, si ottiene:

$$J = (\rho, \mathbf{J}) = J^{(0)} + J^{(1)} + J^{(2)} + o(\mathbf{p}^2/m^2)$$

$$\begin{aligned}
\rho^{(0)} &= F_1\\
\rho^{(1)} &= 0\\
\rho^{(1)} &= \left(-\frac{\mathbf{q}^2}{8m^2}+\frac{i\mathbf{q}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\;\mathbf{p})}{4m^2}\right)(F_1+2F_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(0)} &= 0\\
\mathbf{J}^{(1)} &= F_1\left(\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m}\right)+(F_1+F_2)\left(\frac{i\;\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q}}{2m}\right)\\
\mathbf{J}^{(2)} &= -F_2\left(\frac{\omega\mathbf{q}}{4m^2}+\frac{i\omega}{4m^2}\;\boldsymbol{\sigma}\times(2\mathbf{p}+\mathbf{q})\right)
\end{aligned}$$

I risultati sulla corrente elettromagnetica sono in accordo con [Bof96] tranne che per il termine $\mathbf{J}^{(2)}$, tuttavia non è chiara l'equivalenza tra il metodo di riduzione da me seguito e quello riportato in [Bof96].

B.3 Componente temporale della corrente assiale

$$\left\langle p' \left| J_0^A \right| p \right\rangle = \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right)\left[F_A \gamma_0 \gamma_5 + \frac{F_P}{2m} q_0 \gamma_5\right] u\left(\mathbf{p}, s\right) \cong \tag{B.15}$$

$$= (1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2})\begin{pmatrix} 1 & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & F_A + \frac{\omega F_P}{2m} \\ F_A - \frac{\omega F_P}{2m} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong (1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2})\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\left(F_A - \frac{\omega F_P}{2m}\right) + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\left(F_A + \frac{\omega F_P}{2m}\right)\right] \cong$$

$$\cong F_A \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(2\mathbf{p}+\mathbf{q})}{2m} - \frac{\omega F_P}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}$$

quindi si ottiene che l'operatore della componente temporale della parte assiale della corrente debole nucleonica può essere scritto come:

$$J_0^A = J_0^{A(0)} + J_0^{A(1)} + J_0^{A(2)} + o(\mathbf{p}^2/m^2) \tag{B.16}$$

$$J_0^{A(0)} = 0 \tag{B.17}$$

$$J_0^{A(1)} = F_A \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(2\mathbf{p}+\mathbf{q})}{2m} - \frac{\omega F_P}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q} \tag{B.18}$$

$$J_0^{A(2)} = 0 \tag{B.19}$$

B.4 Componente spaziale della corrente assiale

$$\left\langle p' \left| \mathbf{J}^A \right| p \right\rangle = \overline{u}\left(\mathbf{p}', s'\right)\left[F_A \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}_5 + \frac{F_P}{2m}\mathbf{q}\gamma_5\right] u\left(\mathbf{p}, s\right) = \tag{B.20}$$

$$= u^\dagger\left(\mathbf{p}', s'\right)\left[F_A \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}_5 + \frac{F_P}{2m}\gamma_0 \mathbf{q}\gamma_5\right] u\left(\mathbf{p}, s\right) \cong$$

$$\cong (1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2})\begin{pmatrix} 1 & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_A\boldsymbol{\sigma} & \frac{F_P}{2m}\mathbf{q} \\ -\frac{F_P}{2m}\mathbf{q} & F_A\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} \end{pmatrix} =$$

$$= (1 - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2})\left[F_A\boldsymbol{\sigma} - \frac{F_P}{2m}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\mathbf{q} + \frac{F_P}{2m}\mathbf{q}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} + F_A\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\boldsymbol{\sigma}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\right] \cong$$

$$\cong F_A\boldsymbol{\sigma} - F_P\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{4m^2}\mathbf{q} + F_A\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\boldsymbol{\sigma}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2}F_A\boldsymbol{\sigma}$$

quindi si ottiene che l'operatore della componente spaziale della parte assiale della corrente debole nucleonica può essere scritto come:

$$\mathbf{J}^A = \mathbf{J}^{A(0)} + \mathbf{J}^{A(1)} + \mathbf{J}^{A(2)} + o(\mathbf{p}^2/m^2) \tag{B.21}$$

$$\mathbf{J}^{A(0)} = F_A \boldsymbol{\sigma} \tag{B.22}$$

$$\mathbf{J}^{A(1)} = 0 \tag{B.23}$$

$$\mathbf{J}^{A(2)} = -F_P \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q}}{4m^2} \mathbf{q} + F_A \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{2m} \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2}{8m^2} F_A \boldsymbol{\sigma} \tag{B.24}$$

Vi sono alcuni aspetti della tecnica di riduzione di Foldy-Wouthuysen non del tutto chiari. L'aspetto più problematico è sicuramente la dipendenza del risultato finale dalla normalizzazione degli spinori di Dirac. Inoltre i risultati al secondo ordine cambiano se si include nella tecnica di riduzione l'espressione dei fattori di forma.

Appendice C

Elementi di matrice ridotta

Il calcolo degli elementi di matrice tra funzione d'onda nucleare può essere effettuato separando parte angolare e radiale della funzione d'onda. Per stati nucleari con momento angolare definito l'integrale sulle variabili angolari è valutato analiticamente sfruttando il teorema di Wigner-Eckart [Edm57] e le proprietà degli elementi di matrice ridotta:

$$\langle \Psi_f \left| O \right| \Psi i \rangle = \int d\mathbf{r}_1..d\mathbf{r}_A \quad \Psi_f^* \left(\mathbf{r}_1..\mathbf{r}_A \right) O \left(\mathbf{r}_1..\mathbf{r}_A \right) \Psi_i \left(\mathbf{r}_1..\mathbf{r}_A \right) =$$

$$= \int dr_1..dr_A \quad R_f^* \left(r_1..r_A \right) \langle J_f \left\| O \right\| J_i \rangle R_i \left(r_1..r_A \right) \tag{C.1}$$

dove $R_i \left(r_1..r_A \right)$ è la parte radiale della funzione d'onda nucleare.

In questo lavoro l'elemento di matrice nucleare è calcolato sulla base di elementi di matrice di singola particella degli operatori multipolari definiti nel paragrafo 2.4.1. La funzione d'onda di singola particella è definita come:

$$|\alpha\rangle = \left| \, n_\alpha l_\alpha \frac{1}{2} j_\alpha m_\alpha \, \right\rangle = R_{nlj} \left(r \right) \sum_{\mu\sigma} \left\langle \, l\mu \frac{1}{2} \sigma \right| \, jm \, \rangle \, Y_l^m \left(\Omega_r \right)$$

Di seguito riporto in maniera sistematica le espressioni degli elementi di matrice ridotta di tutti gli opearatori che compaiono nel calcolo dei vari operatori multipolari. Si noti che esistono delle relazioni tra alcuni di questi operatori in base alle proprietà mostrate nel prossimo paragrafo. In unità naturali ($\hbar = c = 1$) si ottiene:

- Per $C_J^V \left(q \right)$

$$\langle p \left\| M_J \left(r \right) \right\| h \rangle = \left(- \right)^{J + j_h + \frac{3}{2}} \frac{\hat{\jmath}_p \hat{\jmath}_h \hat{J}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} R_J^\alpha(|\mathbf{q}|) \, \xi \left(l_p + l_h + J \right) \tag{C.2}$$

- Per $C_J^A \left(q \right)$

$$\begin{aligned}\langle p \left\| M_J(r)\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right\| h\rangle &= (-)^{l_p}\frac{\hat{j}_p\hat{j}_h\hat{J}}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\ &\left[2\left(j_h-l_h\right)DR_J^{\alpha}\left(|\mathbf{q}|\right)+\left(j_h-2l_h-\frac{1}{2}\right)R_J^{\beta}\left(|\mathbf{q}|\right)\right]\\ &\xi\left(l_p+l_h+J+1\right) \qquad \text{(C.3)}\end{aligned}$$

- Per $M_J^V(q)$

$$\begin{aligned}\langle p \left\|\mathbf{M}_{J,J}(r)\cdot\boldsymbol{\nabla}\right\| h\rangle &= (-)^{J+j_h+\frac{1}{2}}H\left(l_p,l_h,J\right)\frac{\hat{j}_p\hat{j}_h\hat{J}}{\sqrt{J\left(J+1\right)}\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\ &R_J^{\beta}\left(|\mathbf{q}|\right)\;\xi\left(l_p+l_h+J+1\right) \qquad \text{(C.4)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle p \left\|\mathbf{M}_{J,J}(r)\,\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\nabla}\right\| h\rangle &= i\,|\mathbf{q}|\,(-)^{J+j_h+\frac{1}{2}}\frac{\hat{j}_p\hat{j}_h}{\hat{J}\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\ &\left[\sqrt{\frac{J+1}{J}}\left(\chi_p+\chi_h-J\right)R_{J-1}^{\alpha}\left(|\mathbf{q}|\right)-\right.\\ &\left.-\sqrt{\frac{J}{J+1}}\left(\chi_p+\chi_h+J+1\right)R_{J+1}^{\alpha}\left(|\mathbf{q}|\right)\right]\\ &\xi\left(l_p+l_h+J+1\right) \qquad \text{(C.5)}\end{aligned}$$

- Per $M_J^A(q)$

$$\langle p \left\|\mathbf{M}_{J,J}(r)\cdot\boldsymbol{\sigma}\right\| h\rangle = (-)^{J+j_h+\frac{3}{2}}\frac{\hat{j}_p\hat{j}_h\hat{J}}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\frac{\chi_h-\chi_p}{\sqrt{J\left(J+1\right)}}R_J^{\alpha}(|\mathbf{q}|)\,\xi\left(l_p+l_h+J\right) \qquad \text{(C.6)}$$

- Per $E_J^V(q)$

$$\begin{aligned}\left\langle p \left\|\mathbf{M}_{J-1,J}(r)\cdot\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}-\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right)\right\| h\right\rangle &= (-)^{J+j_h+\frac{3}{2}}\frac{\hat{j}_p\hat{j}_h}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\ &\left[\sqrt{J}\left(DR_{J-1}^{\alpha}(|\mathbf{q}|)-D_pR_{J-1}^{\alpha}(|\mathbf{q}|)\right)\right.\\ &\left.+\frac{\left(\chi_h-\chi_p\right)\left(1+\chi_p+\chi_h\right)}{\sqrt{J}}R_{J-1}^{\beta}(|\mathbf{q}|)\right]\\ &\xi\left(l_p+l_h+J\right) \qquad \text{(C.7)}\end{aligned}$$

$$\left\langle p \left\| \mathbf{M}_{J+1,J}\left(r\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right) \right\| h \right\rangle = (-)^{J+j_h+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_h}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left[\sqrt{J+1}\left(DR^{\alpha}_{J+1}(|\mathbf{q}|) - D_p R^{\alpha}_{J-1}(|\mathbf{q}|)\right) - \frac{\left(\chi_h - \chi_p\right)\left(1 + \chi_p + \chi_h\right)}{\sqrt{J+1}} R^{\beta}_{J+1}(|\mathbf{q}|)\right] \xi\left(l_p + l_h + J\right) \tag{C.8}$$

$$\left\langle p \left\| \mathbf{M}_{J-1,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla} \right\| h \right\rangle = i\left|\mathbf{q}\right| (-)^{J+j_h+\frac{3}{2}} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_h}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{\left(\chi_h - \chi_p\right)}{\sqrt{J}} R^{\alpha}_{J}(|\mathbf{q}|)\, \xi\left(l_p + l_h + J\right) \tag{C.9}$$

$$\left\langle p \left\| \mathbf{M}_{J+1,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla} \right\| h \right\rangle = i\left|\mathbf{q}\right| (-)^{J+j_h+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_h}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{\left(\chi_h - \chi_p\right)}{\sqrt{J+1}} R^{\alpha}_{J}(|\mathbf{q}|)\, \xi\left(l_p + l_h + J\right) \tag{C.10}$$

- Per $E^{A}_{J}\left(q\right)$

$$\left\langle p \left\| \mathbf{M}_{J-1,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\| h \right\rangle = (-)^{J+j_h+\frac{3}{2}} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_h}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{\chi_h + \chi_p - J}{\sqrt{J}} R^{\alpha}_{J-1}(|\mathbf{q}|)\, \xi\left(l_p + l_h + J + 1\right) \tag{C.11}$$

$$\left\langle p \left\| \mathbf{M}_{J+1,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\| h \right\rangle = (-)^{J+j_h+\frac{3}{2}} \frac{\hat{j}_p \hat{j}_h}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{\chi_h + \chi_p + J + 1}{\sqrt{J+1}} R^{\alpha}_{J+1}(|\mathbf{q}|)\, \xi\left(l_p + l_h + J + 1\right) \tag{C.12}$$

ho usato le seguenti notazioni:

$$\hat{j} = \sqrt{2j+1} \tag{C.13}$$

$$\chi_p = (-1)^{l_p+j_p+\frac{1}{2}}\left(j_p + \frac{1}{2}\right) = \left(l_p + j_p\right)\left(2j_p + 1\right)$$

$$\chi_h = (-1)^{l_h+j_h+\frac{1}{2}}\left(j_h + \frac{1}{2}\right) = \left(l_h + j_h\right)\left(2j_h + 1\right)$$

$$\xi\left(l_p + l_h + J\right) = \frac{1 + (-1)^{l_p+l_h+J}}{2}$$

e le seguenti abbreviazioni per gli integrali sulla cordinata radiale r

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}_{J}\left(|\mathbf{q}|\right) &= \int dr \ \left(r^2 \ j_J\left(|\mathbf{q}|\, r\right) \ R^*_p(r) R_h(r)\right) \\
R^{\beta}_{J}\left(|\mathbf{q}|\right) &= \int dr \ \left(r \ \ j_J\left(|\mathbf{q}|\, r\right) \ R^*_p(r) R_h(r)\right) \\
R^{\gamma}_{J}\left(|\mathbf{q}|\right) &= \int dr \ \left(\ j_J\left(|\mathbf{q}|\, r\right) \ R^*_p(r) R_h(r)\right) \\
DR^{\alpha}_{J}\left(|\mathbf{q}|\right) &= \int dr \ \left(r^2 \ j_J\left(|\mathbf{q}|\, r\right) \ R^*_p(r) \frac{\partial R_h(r)}{\partial r}\right) \\
DR^{\beta}_{J}\left(|\mathbf{q}|\right) &= \int dr \ \left(r \ \ j_J\left(|\mathbf{q}|\, r\right) \ R^*_p(r) \frac{\partial R_h(r)}{\partial r}\right)
\end{aligned}$$

C.1 Identità operatoriali

Con la sola ipotesi che le funzioni d'onda nucleari tendano a zero sufficientemente rapidamente e sfruttando l'integrazione per parti si possono dimostrare le seguenti utili identità operatoriali:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{J,J}\left(r\right) \cdot \left(\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\nabla}\right) &= -\left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}_{J,J}\left(r\right)\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \\
&= -\frac{i\,|\mathbf{q}|}{\widehat{J}} \left(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J-1,J}\left(r\right) - \sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J+1,J}\left(r\right)\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{q}|\,\mathbf{M}_{J,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{|\mathbf{q}|} \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}_{J,J}\left(r\right)\right) \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) = \\
&= \frac{i}{\widehat{J}} \left(\sqrt{J+1}\mathbf{M}_{J-1,J}\left(r\right) - \sqrt{J}\mathbf{M}_{J+1,J}\left(r\right)\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{J,J}\left(r\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right) = 2\mathbf{M}_{J,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}_{J,J}\left(r\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}\right) = 2\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}_{J,J}\left(r\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}$$

Appendice D

Matrici e Funzioni speciali

D.1 Matrici di Pauli

Le matrici 2×2 di Pauli σ_i sono definite in maniera tale che l'operatore di spin $\mathbf{s}$ associato ad una particella non relativistica di spin $\frac{1}{2}$ sia dato da:

$$\mathrm{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{D.1}$$

Nella rappresentazione fondamentale le matrici σ_i hanno le seguenti espressioni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

Le componenti dell'operatore $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfano le seguenti regole di commutazione e anticommutazione:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i2\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{D.3}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I \tag{D.4}$$

dove con I indichiamo la matrice unità 2×2 definita come:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{D.5}$$

Un'identità utile è:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})\,(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{D.6}$$

con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ operatori che commutano con $\boldsymbol{\sigma}$, ma non necessariamente tra di loro.

Gli spinori di Pauli $\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autostati della terza componente dell'operatore $\boldsymbol{\sigma}$ relativi agli autovalori ± 1:

$$\sigma_3 \chi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi^1 \tag{D.7}$$

$$\sigma_3 \chi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\chi^2 \tag{D.8}$$

D.2 Matrici di Dirac

L'Hamiltoniana di Dirac che descrive il moto di una particella relativistica di spin $\frac{1}{2}$, massa m e impulso $\mathbf{p}$, è data da:

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \tag{D.9}$$

L'operatore β e le componenti dell'operatore $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\{\alpha_i, \alpha_j\}_{i \neq j} = \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ &(\alpha_i)^2 = (\beta)^2 = I \\ &\alpha_i^+ = \alpha_i \qquad\qquad \beta^+ = \beta \end{aligned} \tag{D.10}$$

le equazioni precedenti impongono che gli operatori $\boldsymbol{\alpha}$ e β siano delle matrici $2n \times 2n$ a traccia nulla, con $n > 1$. In particolare in rappresentazione di Dirac ($n = 2$) assumono le seguenti espressioni:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{D.11}$$

Le matrici γ di Dirac sono definite come:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}) = \left(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}\right) \tag{D.12}$$

pertanto hanno le seguenti espressioni:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{D.13}$$

e godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ &(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ &\left(\gamma^0\right)^2 = I_4 \\ &\left(\gamma^k\right)^2 = -I_4 \qquad\qquad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{D.14}$$

dove ho indicato con I_4 la matrice unità 4×4 definita come:

$$I_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{D.15}$$

La matrice γ^5 ha la seguente espressione:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{D.16}$$

e gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} = 0 \\ &\left(\gamma^5\right)^+ = \gamma^5 \\ &\left(\gamma^5\right)^2 = I_4 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Il tensore antisimmetrico $\sigma^{\mu\nu}$ è definito come:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = \\ &= i\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{D.18}$$

Detto a_μ un generico vettore, con $\not{a}$ si denota il seguente prodotto scalare:

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\gamma} \tag{D.19}$$

Il calcolo dei tensori leptonici (vedi appendice A) è riconducibile al calcolo della traccia di una matrice prodotto di matrici γ. I teoremi sulle tracce [Hal84], consentono di determinare la traccia della matrice prodotto senza effettuare un calcolo matriciale esplicito:

$$\begin{aligned} &Tr\ \ (\not{a}\ \not{b}) = 4a\cdot b \\ &Tr\ \ (\not{a}\ \not{b}\ \not{c}\ \not{d}) = 4\left[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\right] \\ &Tr\ \ \left(\gamma^5\right) = 0 \\ &Tr\ \ (\gamma_5\ \not{a}\ \not{b}) = 0 \\ &Tr\ \ (\gamma_5\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}\ \not{d}) = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma \\ &Tr\ \ (\gamma^\mu\ \not{a}\gamma^\nu\ \not{b}) = 4\left[a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu - (a\cdot b)\, g^{\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{D.20}$$

Nelle equazioni precedenti il tensore antisimmetrico di Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ è pari a ± 1 a seconda che gli indici μ, ν, λ, σ siano una permutazione pari o dispari dei numeri 0, 1, 2, 3; se due degli indici sono ripetuti allora $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ è nullo.

D.3 Versori sferici

Vettori unitari sferici:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z \tag{D.21}$$

$$\mathbf{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y\right) \tag{D.22}$$

Proprietà:

$$\mathbf{e}^*_\lambda = (-)^\lambda \mathbf{e}_{-\lambda} \tag{D.23}$$

$$\mathbf{e}^*_{\lambda'} \cdot \mathbf{e}_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{D.24}$$

Vettori in coordinate sferiche:

$$\mathbf{v} = \sum_{\lambda=-1}^{1} v_\lambda \mathbf{e}^*_\lambda = \sum_{\lambda=-1}^{1} v^*_\lambda \mathbf{e}_\lambda \tag{D.25}$$

Prodotto scalare:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \sum_{\lambda=-1}^{1} a^*_\lambda \mathbf{e}_\lambda \sum_{\lambda=-1}^{1} b_{\lambda'} \mathbf{e}^*_{\lambda'} = \\ &= \sum_{\lambda=-1}^{1} a^*_\lambda b_{\lambda'} \delta_{\lambda,\lambda'} = \\ &= \sum_{\lambda=-1}^{1} a^*_\lambda b_\lambda = \sum_{\lambda=-1}^{1} (-)^\lambda a_{-\lambda} b_\lambda\end{aligned} \tag{D.26}$$

Sviluppo in multipoli della funzione esponenziale $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa x)\, Y^*_{lm}(\widehat{x})\, Y_{lm}(\widehat{x}) \tag{D.27}$$

nella precedente espressione espressione ho usato $\kappa = |\mathbf{q}|$, $x = |\mathbf{x}|$ e $\widehat{x} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$
Armoniche sferiche vettoriali:

$$\mathcal{Y}^M_{lJ}(\widehat{x}) = \sum_{m'\lambda'} \langle lm'1\lambda'|JM\rangle\, Y_{lm'}(\widehat{x}) \tag{D.28}$$

Proprietà:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nabla} j_J(\kappa x)\, Y_{JM}(\widehat{x}) &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J+1}(\kappa x)\, \mathcal{Y}^M_{J+1J}(\widehat{x}) + \\ &\quad + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{j-1}(\kappa x)\, \mathcal{Y}^M_{J-1J}(\widehat{x})\end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nabla}\times j_J(\kappa x)\,\mathcal{Y}_{JJ}^M(\widehat{x}) = i\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}j_{J-1}(\kappa x)\,\mathcal{Y}_{J-1J}^M + -i\sqrt{\frac{J}{2J+1}}j_{j+1}(\kappa x)\,\mathcal{Y}_{J+1J}^M(\widehat{x}) \tag{D.30}$$

$$\nabla\cdot\phi(x)\,\mathcal{Y}_{JJ}^M(\widehat{x}) = 0 \tag{D.31}$$

D.4 Sviluppo in multipoli

Inseriamo nell'equazione (D.27) le seguenti relazioni:

$$1 = \sum_{m'\lambda'}\delta_{mm'}\delta_{\lambda\lambda'} = \sum_{m'\lambda'}\sum_{JM}\langle lm1\lambda|JM\rangle\langle lm'1\lambda'|JM\rangle \tag{D.32}$$

$$Y_{lm}^*(\widehat{q}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0} \tag{D.33}$$

La relazione precedente è valida scegliendo la direzione dell'asse z coincidente con la direzione di $\mathbf{q}$. In questa maniera la funzione d'onda esponenziale assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} &= 4\pi\sum_{l.m} i^l j_l(\kappa x)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}Y_{lm}(\widehat{x}) = \\ &= \sqrt{4\pi}\sum_{l} i^l j_l(\kappa x)\sqrt{2l+1}Y_{l0}(\widehat{x}) \end{aligned} \tag{D.34}$$

Lo sviluppo in multipoli del termine $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda$, con $\lambda = \pm 1, 3$, è ottenuto calcolando:

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda &= 4\pi\sum_{l.m} i^l j_l(\kappa x)\,Y_{lm}^*(\widehat{q})\sum_{JM}\langle lm1\lambda|JM\rangle\sum_{m'\lambda'}\langle lm'1\lambda'|JM\rangle\,Y_{lm'}(\widehat{x}) \\ &= \sqrt{4\pi}\sum_{l.m} i^l j_l(\kappa x)\sqrt{2l+1}\delta_{m0}\sum_{JM}\langle lm1\lambda|JM\rangle\,\mathcal{Y}_{lJ}^M(\widehat{x}) \\ &= \sqrt{4\pi}\sum_{l} i^l j_l(\kappa x)\sqrt{2l+1}\sum_{JM}\langle l01\lambda|JM\rangle\,\mathcal{Y}_{lJ}^M(\widehat{x}) \end{aligned} \tag{D.35}$$

Esplicitiamo la somma su l tenendo presente che $|J-1| < l < J+1$:

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda &= \sqrt{4\pi}\{i^{J-1}\sqrt{2(J-1)+1}j_{J-1}(\kappa x)\sum_{JM}\langle J-101\lambda|JM\rangle\,\mathcal{Y}_{J-1J}^M(\widehat{x}) + \\ &+i^J\sqrt{2J+1}j_J(\kappa x)\sum_{JM}\langle J01\lambda|JM\rangle\,\mathcal{Y}_{JJ}^M(\widehat{x}) + \\ &+i^{J+1}\sqrt{2(J+1)+1}j_{J+1}(\kappa x)\sum_{JM}\langle J+101\lambda|JM\rangle\,\mathcal{Y}_{J+1J}^M(\widehat{x})\} \end{aligned} \tag{D.36}$$

Consideriamo il caso $\lambda = 0$; affinché i coefficienti di Clebsh-Gordan non siano nulli deve essere $M = 0$:

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_3 &= \sqrt{4\pi}\{i^{J-1}\sqrt{2\,(J-1)+1}j_{J-1}\,(\kappa x)\sum_J \langle J-1010|J0\rangle\,\mathcal{Y}^0_{J-1J}\,(\widehat{x}) \\
&\quad +i^J\sqrt{2J+1}j_J\,(\kappa x)\sum_J \langle J010|J0\rangle\,\mathcal{Y}^0_{JJ}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad +i^{J+1}\sqrt{2\,(J+1)+1}j_{J+1}\,(\kappa x)\sum_J \langle J+1010|J0\rangle\,\mathcal{Y}^0_{J+1J}\,(\widehat{x})\}
\end{aligned}
\tag{D.37}
$$

I coefficenti di Clebsch-Gordan che compaiono nell'equazione precedente sono stati calcolati utilizzando le relazioni definite in [Eis70, App.A,Tab.1], ottenendo i seguenti valori:

$$\langle J-1010|J0\rangle = \sqrt{\frac{J}{J\,(J-1)+1}} \tag{D.38}$$

$$\langle J010|J0\rangle = 0 \tag{D.39}$$

$$\langle J+1010|J0\rangle = -\sqrt{\frac{J}{J\,(J+1)+1}} \tag{D.40}$$

sostistuendo le relazioni precedenti nella (D.37) si ottiene:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_0 = \sqrt{4\pi}\,(-i)\sum_J i^J\{j_{J-1}\,(\kappa x)\,\sqrt{J}\mathcal{Y}^0_{J-1J}\,(\widehat{x}) + j_{J+1}\,(\kappa x)\,\mathcal{Y}^0_{J+1J}\,(\widehat{x})\} \tag{D.41}$$

La relazione precedente può essere ulteriormente semplificata utilizzando la relazione (D.29), ottenendo:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_3 = \sqrt{4\pi}\frac{-i}{q}\sum_J i^J\sqrt{2J+1}\boldsymbol{\nabla}j_J\,(\kappa x)\,Y_{J0}\,(\widehat{x}) \tag{D.42}$$

Consideriamo adesso il caso $\lambda = \pm 1$; affiché i coefficenti di Clebsh-Gordan non siano nulli devono valere le seguenti relazioni $\lambda = M$, $J \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}e_\lambda &= \sqrt{4\pi}\sum_{\lambda,J\ \geq 1}\{i^{J-1}\sqrt{\frac{(J+1)}{2}}j_{J-1}\,(\kappa x)\,\mathcal{Y}^\lambda_{J-1J}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad +i^J\,(-\lambda)\sqrt{\frac{2J+1}{2}}j_J\,(\kappa x)\,\mathcal{Y}^\lambda_{JJ}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad +i^{J+1}\sqrt{\frac{J}{2}}j_{J+1}\,(\kappa x)\,\mathcal{Y}^\lambda_{J+1J}\,(\widehat{x})\} = \\
&= -\sqrt{2\pi}\sum_{\lambda,J\ \geq 1} i^J\sqrt{2J+1}\{\lambda j_J\,(\kappa x)\,\mathcal{Y}^\lambda_{JJ}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad +\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nabla}\times j_J\,(\kappa x)\,\mathcal{Y}^\lambda_{JJ}\,(\widehat{x})\}
\end{aligned}
\tag{D.43}
$$

L'equazione precedente è stata ricavata inserendo i valori dei coefficenti di Clebsh-Gordan:

$$\begin{aligned}
\langle J-101\lambda|J\lambda\rangle &= \sqrt{\frac{J\left(J+1\right)}{\left[2\left(J-1+1\right)\right]\left[2\left(J-1\right)+2\right]}} && \text{(D.44)}\\
\langle J01\lambda|J\lambda\rangle &= \frac{-\lambda}{\sqrt{2}} && \text{(D.45)}\\
\langle J+101\lambda|J\lambda\rangle &= \sqrt{\frac{J}{2\left[2\left(J+1\right)+1\right]}} && \text{(D.46)}
\end{aligned}$$

Inoltre, è stata utilizzata la relazione data in (D.30).

D.5 Funzioni Sferiche di Bessel

Le funzioni di Bessel sono definite come le soluzioni della seguente equazione differenziale lineare:

$$x^2y''\left(x\right)+xy'\left(x\right)+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$$

dove ν è un numero non negativo detto ordine dell'equazione e delle sue soluzioni. Per ν semintero le soluzioni $J_\nu(x)$ sono dette funzioni di Bessel del primo tipo, per ν intero le soluzioni $j_\nu(x)$ sono dette funzioni sferiche di Bessel. Le funzioni di Bessel costituiscono una base completa per le funzioni al quadrato sommabili.

Valgono le seguenti propietà:

$$\begin{aligned}
j_l\left(x\right) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}\left(x\right) && \text{(D.47)}\\
J_{l+\frac{1}{2}}\left(x\right) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}J_l\left(x\right) && \text{(D.48)}
\end{aligned}$$

con l intero non negativo.

D.5.1 Sviluppo in serie di Fourier-Bessel

Siano x_n gli zeri della funzione di Bessel di primo tipo di ordine $l+1/2$ e della sferica di Bessel di ordine l:

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x_n)=j_l(x_n)=0 \tag{D.49}$$

con n intero positivo.

Scelto un parametro R positivo valgono le seguenti proprietà:

$$\int_0^R r J_{l+\frac{1}{2}}\left(x_n \frac{r}{R}\right) J_{l+\frac{1}{2}}\left(x_{n'} \frac{r}{R}\right) dr = \frac{R^2}{2}\left[J_{l+\frac{3}{2}}\left(x_n\right)\right]^2 \delta_{n,n'} \tag{D.50}$$

$$\int_0^R r^2\, j_l\left(x_n \frac{r}{R}\right)\, j_l\left(x_{n'} \frac{r}{R}\right) dr = \frac{R^3}{2}\left[j_{l+1}\left(x_n\right)\right]^2 \delta_{n,n'} \tag{D.51}$$

Ciò permette di descrivere una funzione nell'intervallo $0 < r < R$ in termini di sferiche di Bessel:

$$f\left(r\right) = \sum_{n=1}^{M} A_n\, j_l\left(x_n \frac{r}{R}\right) \tag{D.52}$$

con

$$A_n = \frac{2}{R^3\, j_{l+1}^2\left(x_n\right)} \int_0^R r^2\, j_l\left(x_n \frac{r}{R}\right) f\left(r\right) dr \tag{D.53}$$

detti coefficienti dello sviluppo in Fourier-Bessel.

Questa tecnica di sviluppo è stata utilizzata per risolvere il sistema di equazioni 3.51-3.52. In particolare le 3.53 3.54 sono state scritte ponendo $q_\mu = x_\mu/R$.

Appendice E

Abbreviazioni

CC - Charge Current
CRPA - Continuum Random Phase Approximation
EFT - Effective Field Theory
FSI - Final State Interaction
IA - Impulse Approximation
IPM - Indipendent Particles Model
LM - Landau-Migdal
MEC - Meson Exchange Current
MF - Mean Field
NC - Neutral Current
PP - Polarization Potential
PWBA - Plane Wave Born Approximation
QCD - Quantum Cromodynamics
RPA - Random Phase Approximation
SNO - Sudbury Neutrino Observatory
SNPA - Standard Nuclear Physics Approch
SSM - Standard Solar Model
TDA - Tamm Dankoff Approximation
V-A - Vector-Axial

Summary: Neutrino-Nucleus Interaction

Neutrino-Nucleus interaction is an important tool for three fundamental reasons: the study of the intrinsic properties of the neutrinos, the study of some astrophysical phenomena in which neutrino plays a crucial role and the study of nuclear structure. A lot of questions concerning the neutrinos are still unanswered. The evidence of neutrinos oscillation, found at Sudbury Neutrino Observatory, increased the interest for the features of oscillation. The mixing angles and masses of the neutrinos are still not well determinate. We ignore if the neutrinos are Dirac or Majorana particles. The discussion about nonvanishing magnetic moment of the neutrinos is still open. Moreover, neutrino-nucleus cross section is an important ingredient in a lot of astrophysical processes. A lot of electronic neutrinos are produced in the core of the sun and others stars, and their re-interaction with the star is an important effect in the study of nucleosynthesis processes. A huge amount of neutrinos of various flavours is produced during the collapse of a supernova and they take out 99% of gravitational energy. Since in addition to the vector currents also the axial vector currents contribute to the neutrino nucleus interaction, the neutrinos can induce new and unusual excitation modes in nuclei, and give us the possibility to investigate nuclear responses not accessible by electromagnetic probes. Because of the tiny weak coupling constant, the first order Born approximation produce a very accurate results of the neutrino-nucleus scattering, but on the other hand it increases experimental difficulties.

The aim of this work is to calculate the cross sections for inelastic charge current neutrino and antineutrino-nucleus scattering

$$\nu_l \;+\; {}^{A}_{Z}X \quad\rightarrow\quad l^- \;+\; {}^{A}_{Z+1}Y^* \tag{S.1}$$
$$\bar{\nu}_l \;+\; {}^{A}_{Z}X \quad\rightarrow\quad l^+ + \; {}^{A}_{Z-1}Y^* \tag{S.2}$$

and inelastic neutral current neutrino and antineutrino-nucleus scattering

$$\nu_l \;+\; {}^{A}_{Z}X \quad\rightarrow\quad \nu_l \;+\; {}^{A}_{Z}X^* \tag{S.3}$$
$$\bar{\nu}_l \;+\; {}^{A}_{Z}X \quad\rightarrow\quad \bar{\nu}_l \;+\; {}^{A}_{Z}X^* \tag{S.4}$$

for energies above the nucleon emission threshold.

During the last years, a lot of number of neutrino-nucleus scattering studies about these processes have been carried out. Various nuclear models have been used, such as relativistic Fermi gas [Smi72], Shell Model [Hay00], Continuum Random Phase Approximation with various residual interaction. In [Jac99, Jac02] the CRPA equations are solved using a Green's function approach in which the polarization propagator is approximated by an iteration of the first-order contribution. In [Kol92, Kol95] the CRPA equations are solved using a technique based on Fourier-Bessel expansion. In this work I developed the Fourier-Bessel technique to treat also charge current processes. Moreover, I studied the effect of re-interaction between ejected nucleon and residual nucleus in a phenomenological model inspired to the work of refs. [Co88, Smi88] and used on electron scattering in quasi-elastic region.

Quasielastic neutrino scattering

Within the standard model of the weak interaction, the hamiltonian governing semileptonic processes with one boson exchanged is composed by a leptonic term and an hadronin term. Because of the transferred quadri momentum is much smaller than the mass of the exchanged boson $(W^{\pm}, Z^0)$, the hamiltonian takes a typical current-current form:

$$\mathcal{H}_{int}(x) = \begin{cases} \frac{iG}{\sqrt{2}}\, j_\mu(x)\widetilde{J}^\mu(x) & \textit{for NC processes} \\ \frac{iG\cos\theta_C}{\sqrt{2}}\, j_\mu(x)\widetilde{J}^\mu(x) & \textit{for CC processes} \end{cases} \tag{S.5}$$

where G is Fermi's constant and θ_C Cabibbo's angle. Within Glashow-Weinberg-Salam theory the lepton current expression $j_\mu(x)$ is well known (see eq. 2.17 and 2.18), but hadronic current $\widetilde{J}^\mu(x)$ is more complex to describe.

I assume that nucleons are the fundamental constituents of nucleus and that neutrino interacts with a single nucleon. I use the current operator of the bare nucleons which takes into account the nucleon internal structure with form factors. The expression of the weak nucleon current operator comes from general symmetry properties. In momentum space they are given as:

- for CC processes

$$J^V_\mu(q) = \left(F^{\pm}_V\gamma_\mu + \frac{i}{2m}F^{\pm}_M\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right)\tau_\pm \tag{S.6}$$

$$J^A_\mu(q) = \left(F^{\pm}_A\gamma_\mu + \frac{1}{2m}F^{\pm}_P q_\mu\right)\tau_\pm \tag{S.7}$$

- for NC processes:

$$J^V_\mu(q) = \left(F^{0}_V\gamma_\mu + \frac{i}{2m}F^{0}_M\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right)\tau_3 \tag{S.8}$$

$$J^A_\mu(q) = \left(F^0_A \gamma_\mu + \frac{1}{2m} F^0_P q_\mu \right) \tau_3 \tag{S.9}$$

The current is composed by a vector and an axial-vector part. The form factor of the vector current (F_V, F_M) are fixed within the conserved vector current theory, which identifies the charge raising and lowering parts of the vector current of the weak interaction with the isovector part of the electromagnetic current. The pseudoscalar form factor (F_P) is related to the axial one (F_A) by using the Goldberger-Treiman relation [Wal75]:

$$F_P(q^2) = \frac{4m^2 F_A(0)}{m^2_\pi - q^2} \tag{S.10}$$

where m_π is the pion mass. Finally, the axial form factor needs to be extracted from neutrino-nucleon scattering. At low q^2 it can also be extracted from pion electroproduction data. For the axial form factor I assumed the typical dipole form

$$F_A(q^2) = \frac{F_A(0)}{(1 - \frac{q^2}{M^2_A})^2} \tag{S.11}$$

and I use $F_A(0) = -1.267$, $M_A = 1014 \pm 16 MeV$ [Arr03].

The cross section formula can be derived using Fermi's gold rule. In plane wave Born approximation, the incoming neutrino and the outcoming lepton are described by a plane wave. For CC processes this is not the exact physical picture, because the charged outgoing lepton interacts with Coulomb field of residual nucleus. To take into account this effect, I corrected the wave function of the outgoing charged lepton by using a Fermi function. I assumed that nucleus is spherically symmetric and in its ground state, and that its excited final state is characterized by well defined parity and angular momentum (J^π). In this hypothesis, performing a multipole analysis of nuclear currents, and neglecting the nuclear target recoil, the expression of cross section is:

- for NC processes

$$\frac{d^2\sigma(\theta,\omega)}{d\omega\ d(\cos\theta)} = \frac{G^2}{2\pi} \frac{V^2}{8} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{ss'} \sum_{m_i m_f} \sum_{ph} \left| l_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \widetilde{J}^\mu(\mathbf{q}) \right|^2 \tag{S.12}$$

- for CC processes

$$\frac{d^2\sigma(\theta,\omega)}{d\omega\ d(\cos\theta)} = \frac{(G\cos\theta_C)^2}{2\pi} \frac{V^2}{8} \frac{2\,|\mathbf{k}'|}{\varepsilon} \frac{1}{2J_i + 1} F(Z',\varepsilon') \sum_{ss'} \sum_{m_i m_f} \sum_{ph} \left| l_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \widetilde{J}^\mu(\mathbf{q}) \right|^2 \tag{S.13}$$

where

$$\sum_{ss' M_i M_f} \left| l_\mu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\, \widetilde{J}^\mu(\mathbf{q}) \right|^2 = 4\pi \sum_{J=0} \sigma^J_L + 2\pi \sum_{J=1} \sigma^J_T$$

with charge and longitudinal contribution

$$\sigma_C^J = L_0 \left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{C}_J^A\right\| J_i\right\rangle\right|^2 + L_3 \left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{L}_J^A\right\| J_i\right\rangle\right|^2 + L_S \left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{C}_J^V\right\| J_i\right\rangle\right|^2$$
$$+2L_{03}\,\mathrm{Re}\left(\left\langle J_f \left\|\mathcal{C}_J^A\right\| J_i\right\rangle \left\langle J_f \left\|\mathcal{L}_J^A\right\| J_i\right\rangle^*\right) \tag{S.14}$$

and transvers contribution

$$\sigma_T^J = L_+ \left(\left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{E}_J^V\right\| J_i\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{M}_J^V\right\| J_i\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{E}_J^A\right\| J_i\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle J_f \left\|\mathcal{M}_J^A\right\| J_i\right\rangle\right|^2\right)$$
$$-2L_-\,\mathrm{Re}\left(\left\langle J_f \left\|\mathcal{E}_J^V\right\| J_i\right\rangle \left\langle J_f \left\|\mathcal{M}_J^A\right\| J_i\right\rangle^* + \left\langle J_f \left\|\mathcal{E}_J^A\right\| J_i\right\rangle \left\langle J_f \left\|\mathcal{M}_J^V\right\| J_i\right\rangle^*\right) \tag{S.15}$$

In the previous equations the expression of the lepton terms (L_x) depends on the processes and they are resumed in Tab. 2.3. Their values are calculated by eq. 2.20 using trace theorems for the γ matrixes to perform the summation over the lepton spins. The operators $\mathcal{C}_J$, $\mathcal{L}_J$, $\mathcal{M}_J$ e $\mathcal{E}_J$, are the multipole operators for charge, longitudinal, transverse electric and transverse magnetic parts of the nuclear current, they have both vector (V) and axial-vector (A) character. Their parity is given in Tab. 2.1. They come out from the multipole expansion of the four-current, and after a non-relativistic reduction of the current assume the expression given in eq. 2.49-2.56. To derive the cross section formula, I used the Wigner-Eckart theorem to perform the average over initial nuclear states and the summation over the final states, so the cross section involves the reduced matrix elements of multipole operators.

Nuclear Model

Mean Field Model

In non relativistic quantum mechanics the hamiltonian of a many-body system is:

$$H = \sum_{i=1}^{A} T_i + \sum_{i<j} V_{i,j} \tag{S.16}$$

here T_i is kinetic energy and the $V_{i,j}$ two body interaction. The basic hypothesis of the model is that nucleons move with a large free path as independent particles in a local mean field potential. In this assumption the hamiltonian S.16 can be replaced by

$$H_0 = \sum_{i=1}^{A} h_i = \sum_{i=1}^{A} \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + U\left(\mathbf{r}_i\right)\right) \tag{S.17}$$

here m in nucleon mass and $U(\mathbf{r})$ the mean field potential. The single particle wave function can be generated by solving the single particle Schordinger equation with a Wood-Saxon type potential:

$$U(r) = U_C(r) + U_{SO}(r) + U_{Coul}(r) \tag{S.18}$$

with

$$U_C(r) = \frac{V}{1+e^{\frac{r-R}{a}}} \tag{S.19}$$

$$U_{SO}(r) = \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{V_S}{1+e^{\frac{r-R_s}{a_s}}}\right) \mathbf{l}\cdot\mathbf{s} \tag{S.20}$$

$$U_{Coul}(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{2R_c}\left(3-\left(\frac{r}{R_c}\right)\right) & \text{per} \quad r \le R_c \\ \frac{(Z-1)e^2}{2r} & \text{per} \quad r > R_c \end{cases} \tag{S.21}$$

here m_π is the pion mass, $U_{Coul}(r)$ is the Coulomb potential produced by a homogeneous charge sphere of radius R_c. The same parameterization of the potential has been used to generate both bound and continuum wave functions. The parameters of the potential for ^{12}C, ^{16}O and ^{208}Pb are given in Tab. 4.1. They have been chosen to reproduce at best the single particle energies around the Fermi surface and the experimental charge density of the nuclei [Rin78, Neg75].

Continuum Random Phase Approximation

The basic hypothesis of CRPA theory is that the excited state of the nucleus with fixed angular momentum J can be constructed on the ground state using:

$$Q^+_{J,M} = \sum_{ph}^{disc}\left(X^{J,\omega}_{ph} a^+_p a_h + Y^{J,\omega}_{ph} a^+_h a_p\right) + \sum_{ph}^{cont}\int_0^\infty d\varepsilon_p \left(X^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)\, a^+_p a_h + Y^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p)\, a^+_h a_p\right) \tag{S.22}$$

here a^+_p a^+_h are the creator operators for particles and holes, a_p a_h are the destructor operators for particles and holes, ε_p is the energy of the particle state. The first summation involves transitions between discrete state ($\varepsilon_p < 0$), the second summation involves transitions with particle state in continuum ($\varepsilon_p > 0$). The functions $X^{J,\omega}_{ph}$ and $Y^{J,\omega}_{ph}$ are the RPA amplitudes which can be determined solving the following integral equations:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega)\, X^{J,\omega}_{ph}(\varepsilon_p) + \sum_{p'h'}\left[v_{php'h'} X^{J,\omega}_{p'h'} + u_{php'h'} Y^{J,\omega}_{p'h'}\right] + \\ + \sum_{p'h'}\int_0^\infty d\varepsilon_{p'}\left[v_{php'h'}(\varepsilon_p,\varepsilon_{p'})\, X^{J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'}) + u_{php'h'}(\varepsilon_p,\varepsilon_{p'})\, Y^{J,\omega}_{p'h'}(\varepsilon_{p'})\right] = 0\end{aligned} \tag{S.23}$$

$$(\varepsilon_p - \varepsilon_h - \omega) \, Y_{ph}^{J,\omega}(\varepsilon_p) + \sum_{p'h'} \left[v^*_{php'h'} Y_{p'h'}^{J,\omega} + u^*_{php'h'} X_{p'h'}^{J,\omega} \right] +$$
$$+ \sum_{p'h'} \int_0^\infty d\varepsilon_{p'} \left[v^*_{php'h'}(\varepsilon_p, \varepsilon_{p'}) \, Y_{p'h'}^{J,\omega}(\varepsilon_{p'}) + u^*_{php'h'}(\varepsilon_p, \varepsilon_{p'}) \, X_{p'h'}^{J,\omega}(\varepsilon_{p'}) \right] = 0 \quad \text{(S.24)}$$

$$v_{php'h'} = \langle ph \,|V|\, p'h' \rangle - \langle ph \,|V|\, h'p' \rangle \quad \text{(S.25)}$$
$$u_{php'h'} = \langle pp' \,|V|\, hh' \rangle - \langle pp' \,|V|\, h'h \rangle \quad \text{(S.26)}$$

they involve both direct and exchange terms.

I used two types of nucleon-nucleon interaction. In the momentum space the two interactions have the same form:

$$\begin{aligned} V^{ph}(q) &= F(q) + F'(q) \, \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \\ &\quad + G(q) \, \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + G'(q) \, \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \, \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \end{aligned} \quad \text{(S.27)}$$

where q is the relative momentum of the two interacting nucleons. One of the interactions is a zero-range interaction of Landau-Migdal type, it is constant in momentum space. The values of the parameters of this interaction are given in Tab. 4.3, and correspond to the set of parameters fixed in [Rin78] to reproduce the isotope shifts of atomic spectra in lead atoms, and it predicted the correct energy of the monopole giant resonance in ^{208}Pb. The second interaction is the polarization potential of [Pin88], the various terms forming the PP interactions are shown in Fig. 4.2 as a function of relative momentum q. They correspond to the set of values used in [Pin88]. I have multiplied both interactions for a renormalization factor $\mathcal{R}$ in order to reproduce the energy of the low lying 3^- states. The renormalization factor are given in Tab. 4.4 and 4.5.

In this work the CRPA equations S.23 S.24 have been solved using the Fourier-Bessel formalism of [Har82]. This technique allows a reduction of the the integral equations system to an algebraic system, however it cannot treat exactly the exchange terms of residual interaction, and it need a cut for the integration on the ejected nucleon energy.

Final state interaction

The RPA model includes all the possible excitations of one-particle one-hole type. The presence of higher order excitations are neglected. I used a phenomenological model developed in [Co88, Smi88] to take into account the higher order excitations.

The basic idea of the model is to neglect the coupling between 2p-2h excitations among themselves. Therefore these high-order excitations act as intermediate doorway states since, asymptotically, the final nuclear excited states have one particle, in the continuum, and one hole in the residual nucleus. A further hypothesis consists in considering that, at sufficiently high excitation energies, the role of 2p-2h excitations, or of higher order, is independent from the angular momentum of the nuclear excited state. The density of states is so high that the specific nuclear excitation characterized by its angular momentum and parity is not any more relevant.

On the basis of these hypotheses, the effect of these high-order excitations can be accounted for by a folding integral:

$$S^{2p-2h}(|\mathbf{q}|,\omega) = \int_0^\infty dE \;\; S^{RPA}(|\mathbf{q}|,E)\left[\rho(E,\omega)+\rho(E,-\omega)\right] \tag{S.28}$$

where the folding function is:

$$\rho\left(\varepsilon,\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma\left(\omega\right)}{\left(\varepsilon-\omega-\Delta\left(\omega\right)\right)^2+\frac{1}{4}\Gamma\left(\omega\right)^2} \tag{S.29}$$

here $S^{RPA}(|\mathbf{q}|,E)$ is RPA nuclear response and I defined

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega d\epsilon\left[\gamma(\epsilon+\omega)+\gamma(\epsilon-\omega)\right] \tag{S.30}$$

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\frac{\Gamma(\omega')}{\omega'-\omega} \tag{S.31}$$

with

$$\gamma(\epsilon) = A\left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+B^2}\right)\left(\frac{C^2}{\epsilon^2+C^2}\right) \tag{S.32}$$

The fundamental quantities are the functions $\gamma(\omega)$. In principle this function should be evaluated by calculating all the many-particle many-hole transitions induced by the interaction part of the hamiltonian. In practice we extract it from the imaginary part of the single particle self-energy. We have obtained $\Gamma(\omega)$ by making the average of the single particle energy width $\gamma(\omega)$

The empirical values of the single particle widths have been fitted by using the following expression of γ:

$$\gamma(\epsilon) = A\left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2+B^2}\right)\left(\frac{C^2}{\epsilon^2+C^2}\right) \tag{S.33}$$

The parameters A, B and C need to be empirically determinated. The values $A = 11$, $B = 20MeV$ and $C = 110MeV$ allow to reproduce the electromagnetic quasi-elastic responses in various nuclei [Ama94], but they are not valid in the giant resonance region. I fixed the values of A, B and C for excitation energies below $10MeV$, and above $40MeV$. From $10MeV$ to $40MeV$ the values of the parameters are obtained by performing a linear interpolation between the values fixed at the extremes of the energy interval. The parameters are fitted to reproduce photo-absorption cross sections in nuclei over investigation and electron scattering cross section of ^{12}C. The value of parameters are given in Tab.4.8

Results

I used the formalism developed in this work to calculate neutrino cross sections for NC and CC processes off $^{12}C,^{16}O,^{208}Pb$. These nuclei have both astrophysical and experimental interest.

In Fig. 5.17 I show the double differential $^{16}O(\nu_\mu,\mu^-)^{16}F^*$ cross section for $\theta = 40^o$ and various incident neutrino energies. Calculations have been performed with various models: relativistic Fermi gas (FG) used in [Smi72], mean field (MF), RPA with the interactions LM and PP. The application of FG is valid when surface effects of the nucleus can be neglected [Ama94]. In the quasi-elastic region all the models produce a similar results, apart the RPA calculations with the interaction LM, because of its zero range character. At lower energy FG calculation is not adequate to describe the process, and RPA and MF calculation are quite similar. At even lower energies, only the RPA calculations are able to reproduce the giant resonance for $24MeV < \omega < 28MeV$.

In Fig. 6.1 I show the differential $^{16}O(\nu,\nu')^{16}O^*$ cross sections for various incident neutrino energies. Calculations have been performed with mean field (dotted line), RPA with the interactions LM (dashed line) and PP (dash-dotted line), and FSI model calculated on response of RPA with the interactions LM (solid line). The effect obtained applying FSI model is to smooth the peaks and to move transition probability to higher ω versus the region that is kinematically forbidden. This implies that the total cross section is reduced with respect to that predicted by the CRPA. In Fig. 6.2 I show the total $^{16}O(\nu,\nu')^{16}O^*$ cross section for neutrino (upper part) and antineutrino (lower part).

Bibliografia

[Ahm02] Q.Ahmad et al., Phys. Rev. Lett. 89, (2002), 011301

[Ahr75] J.Ahrens et al., Nucl. Phys. A 251, (1975), 479

[Ald78] C.H.Aldric, D.Pines, J. Low Temp. Phys 32, (1978), 698

[Ama94] J.E.Amaro, G.Co', A.M.Lallena, Nucl. Phys. A 578, (1994), 365

[Ama99] J.E.Amaro, G.Co', A.M.Lallena, nucl-th [9902072], (1999)

[Arr03] J.Arrington, nucl-ex[0305009], (2003)

[Bah01] J.Bahcall, M.Pinsonneault, Astrophys J. 555, (2001), 990

[Bar83] P.Barreau et al., Nucl. Phys. A 402, (1983), 515

[Blo66] C.Bloch, Proc. XXXVI Int. School of Physics, Enrico Fermi Course, Academic (1966)

[Bof96] S.Boffi, C.Giusti, F.D.Pacati, M.Radici, *Electromagneti Response of Atomi Nuclei*, Oxford University Press, Oxford, (1996)

[Bro79] G.Brown, J.S.Dehesa, J.Speth, Nucl.Phys. A 517, (1990), 61

[Bub90] M.Buballa et al., Nucl.Phys. A 517, (1990), 61

[Bub91] M.Buballa, S.Drożdż, S.Krewald, J.Speth, Ann. Phys 208, (1991), 346

[Bud03] H.Budd, A.Bodek, J.Arrington, hep-ex [0308005], (2003)

[Co85] G.Co', S.Krewald, Nucl.Phys. A 433, (1985), 392

[Co88] G.Co', K.Q.Quader, R.Smith, J.Wambach, Nucl. Phys. A 485, (1988), 61

[Dej87] C.W.de Jager, C.de Vries, At. Data and Nucl. Data Tables 36, (1987), 495

[Edm57] A.R.Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, (1957) [Eis70] J.M.Eisenberg, W.Greiner, *Exitation mechanism of the nucleus*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1970)

[Far78] J.E.G.Farina, J. Phys A 11, n.10, (1978), 1917

[Fet71] A.L.Fetter, J.D.Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle System*, McGraw Hill Book Company, New York, (1971)

[For66] T.de Forest, J.DWalecka, Adv. Phys. 12, (1966), 1

[Hal84] F.Halzen, A.Martin, *Quarks and Leptons*, J.Wiley and Sons, New York, (1984)

[Hay00] A.C.Hayes, I.S.Towner, Phys. Rev. C 61, (2000), 044603

[Har82] R.de Haro, S.Krewald, J.Speth, Nucl. Phys. A 388, (1982), 265

[Hax87] W.C.Haxton, Phys. Rev. D 36, (1987), 2283

[Led78] S.Lederer, *Table of Isotopes*, Wiley and Sons, New York, (1978)

[Lei63] J.E. Leiss, R.E.Taylor, W. Czyz, Phys. Rev. 131, (1963), 2141

[Jac99] N.Jachowicz, S.Rombouts, K.Heyde, J.Ryckebusch, Phys. Rev. C 59, (1999), 3246

[Jac02] N.Jachowicz, S.Rombouts, K.Heyde, J.Ryckebusch, Phys. Rev. C 65, (2002), 025501

[Jon00] M.K.Jones et al., Phys. Rev. Lett. 84, (2000), 265

[Kol92] E.Kolbe, K.Langanke, S.Krewald, F.-K. Thielemann, Nucl. Phys. A540, (1992), 599

[Kol95] E.Kolbe, K.Langanke, F.K.Thielemann, P.Vogel, Phys. Rev. C 52 (1995), 3437

[Kol97] E.Kolbe, K.Langanke, P.Vogel, Nucl. Phys. A 613, (1997), 382

[Kub03] K.Kubodera, nuch-th [0308055], (2003)

[Mah82] C.Mahaux, N.Ngo, Nucl. Phys. A 378, (1982), 205

[Mah85] C.Mahaux et al., Phys. Rep. 120, (1985), 1

[Mes62] A.Messiah, *Quantum Mechanics*, North-Holland-Publishing, Amsterdam, (1962) [Mig67] A.B.Migdal, *Theory of finite Fermi system and applications to atomic nuclei*, Wiley, New York, (1967)

[Neg75] J.W.Negel, D.Vautherin, Phys. Rev. C 11, (1975), 1031

[Pin88] D.Pines, K.Q.Quader, J.Wambach, Nucl. Phys. A 477, (1988), 365

[Pov98] B.Povh, K.Rith, C.Scholz, F.Zetsche, *Particelle e Nuclei*, Ed. Bollati Boringhieri, Torino, (1998)

[Pub97] B.S.Publiner et al., Phys. Rev. C, (1997), 1720

[Ray67] J.Raynal, M.A.Melkanoff, T.Sowada, Nucl. Phys. A 101, (1967), 369

[Rin78] G.Rinker, J.Speth, Nucl. Phys. A 306, (1978), 360

[Rin80] P.Ring, P.Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, Berlin, (1980)

[Row70] D.J.Rowe, *Nuclear Collective Motion*, Methuen and Co., London, (1970)

[Rut11] E.Ruterford, Phil. Mag. 21, (1911), 669

[Smi72] R.A.Smith, E.J.Moniz, Nucl. Phys. B 43, (1972), 605

[Smi88] R.D.Smith, J.Wambach, Phys. Rev. C 38 (1988), 100

[Vol02] C.Volpe, N.Auerbach, G.Colò, N.Van Giai, Phys. Rev. C 65 (2002) 044603

[Wal75] J.D.Walecka, in *Muon Physics*, Academic Press, New York, (1975)

[Wu57] C.S. Wu et al. , Phys. Rev. 105, (1957), 1413