



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”
Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Correlazioni a corto raggio nei nuclei atomici

Laureanda:
Federica CASCIARO

Relatore:
Prof. Giampaolo CO'

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1	Introduzione	3
2	Il campo medio	11
2.1	Simmetria sferica	11
2.2	Hartree-Fock	12
2.3	Appaiamento (pairing)	13
3	Il modello per la correlazione	15
3.1	Densità	15
3.2	Sviluppo in cluster	16
4	Risultati	23
4.1	Risultati con IPM	23
4.2	Risultati con le correlazioni SRC	28
5	Riassunto e conclusioni	33

Capitolo 1

Introduzione

L'interazione tra due nucleoni è costruita riproducendo i dati di diffusione elastica tra due nucleoni. L'interazione tra due nucleoni nel vuoto è caratterizzata dalla presenza di un nocciolo fortemente repulsivo a piccole distanze [Rin80], [Eis72]. L'uso di questa interazione per la descrizione dei nuclei richiede teorie molto complesse da applicare a sistemi con molte particelle. La tecnica più accreditata è la teoria Green's function Monte Carlo, oggi applicata fino al nucleo ^{12}C [Gan20].

Normalmente per la descrizione di nuclei medio-pesanti si usano modelli a campo medio, o meglio a particelle indipendenti.

Supponendo che esistano solo interazioni a due corpi, l'hamiltoniana nucleare, può essere scritta come:

$$H = \sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i<j}^A V(i, j) \quad (1.1)$$

dove $T(i)$ è l'energia cinetica, e $V(i, j)$ l'interazione tra le particelle i e j . All'hamiltoniana si aggiunge e toglie un termine ad un corpo (il campo medio):

$$H = \left[\sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] + \left[\sum_{i<j}^A V(i, j) - \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] = H_0 + V_{res} \quad (1.2)$$

Il modello a campo medio risolve l'equazione di Schrödinger solo per la parte H_0 dell'hamiltoniana che, per definizione, è somma di hamiltoniane di singola particella:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) = \sum_{i=1}^A [T(i) + V_0(i)] \quad (1.3)$$

L'hamiltoniana $h(i)$ genera una base ortonormale di funzioni d'onda di singola particella. L'autovettore dell'hamiltoniana H_0 è un determinante di Slater delle funzioni d'onda di singola particella. Questo garantisce l'antisimmetrizzazione delle funzioni d'onda. Nei modelli a campo medio i valori degli osservabili di tutto il sistema sono ottenuti sommando

i contributi di ogni singolo nucleone. Questo è strettamente vero per quegli osservabili descrivibili da operatori ad un corpo, ma non per osservabili descrivibili solo con operatori a più corpi.

La base microscopica del modello è la teoria Hartree-Fock (HF) [Fet71]. Per i nuclei a shell aperte viene implementata con la teoria Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) [Rin80] che considera l'appaiamento. Ci sono anche teorie che trattano contemporaneamente il problema HF e l'appaiamento: sono le teorie di Hartree-Fock-Bogoulioubov (HFB) [Car15].

Il solo input dei modelli HF+BCS e HFB è l'interazione effettiva tra i nucleoni, che, contrariamente a quella microscopica, non ha il nocciolo fortemente repulsivo. Questa interazione contiene dei parametri i cui valori sono fissati cercando di riprodurre energie di legame e raggi di carica sperimentali.

I modelli HF+BCS e HFB hanno prodotto ottime descrizioni dello stato fondamentale dei nuclei in tutta la tavola dei nuclidi da quelli con $A = 10$ fino a i più pesanti conosciuti.

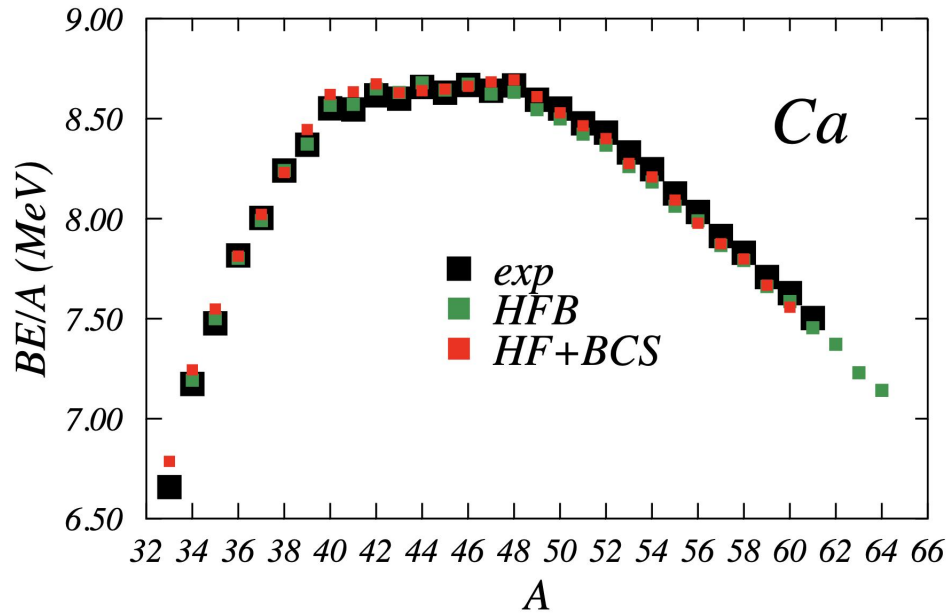


Figura 1.1: Energie di legame per nucleone di alcuni isotopi del Ca. I dati sperimentali [Bnlw] sono indicati dai quadrati neri. I risultati dei calcoli HFB [Cea] indicati dai quadrati verdi e quelli del modello HFB+BCS [Ang15], [Ang14] sono stati ottenuti usando la stessa interazione residua: l'interazione di Gogny nella parametrizzazione D1S [Ben05].

Quello è un esempio ma l'accordo con i dati sperimentali è analogo per tutti i nuclei per $A > 10$ e fino a $Z=110$ e $A=364$ [Cea]. L'accordo con i dati sperimentali scompare quando si prova a descrivere gli stati eccitati.

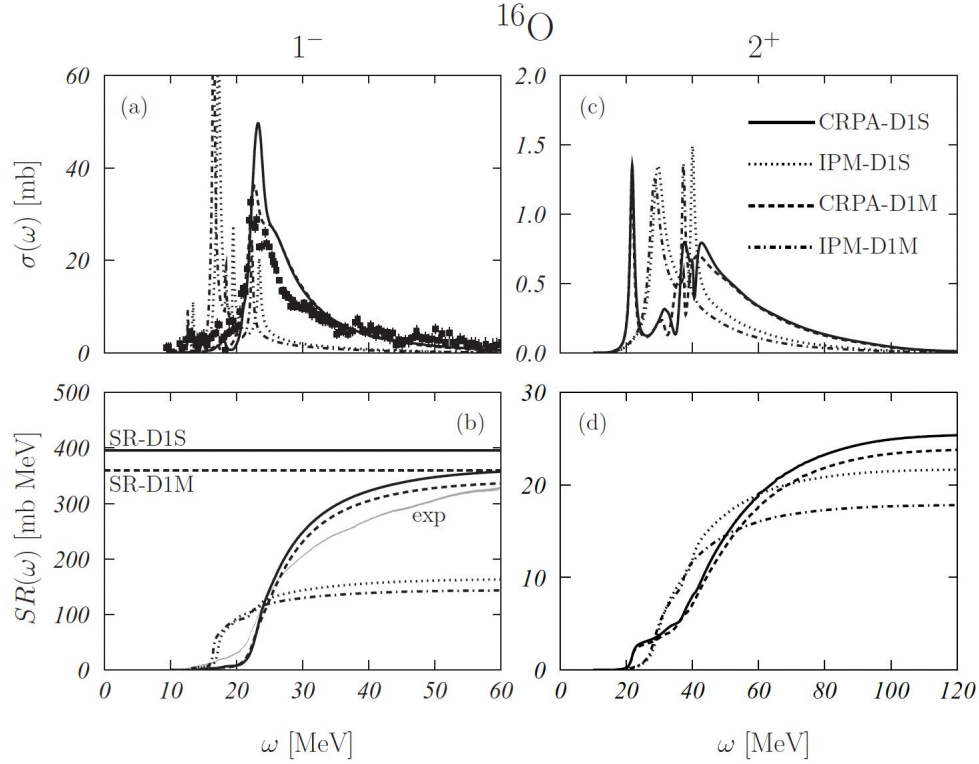


Figura 1.2: Le linee piene e tratteggiate mostrano i risultati CRPA ottenuti rispettivamente con le interazioni D1S e D1M; le linee punteggiate e le linee tratteggiate-punteggiate mostrano i risultati IPM ottenuti rispettivamente con le funzioni d'onda di singola particella D1S e D1M HF.

L'esempio di prima mostra come sia importante la parte dell'hamiltoniana trascurata nel IPM. La domanda è se anche per lo stato fondamentale dove i modelli HF+BCS e HFB funzionano bene (perché le interazioni sono state costruite per farli funzionare bene) ci sono fenomeni che indicano la presenza di effetti che vanno al di là dell'IPM.

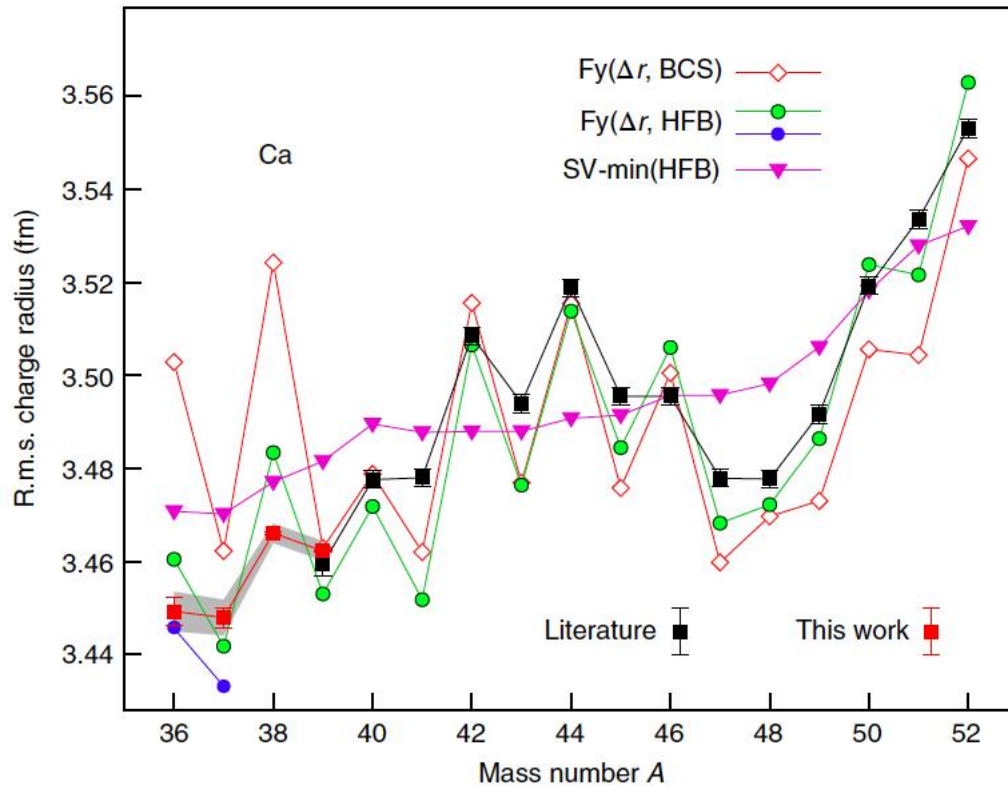


Figura 1.3: Raggi di carica di isotopi del Ca [Gar16] e [Mil19]. I dati sperimentali sono in nero e rosso, quelli di un IPM i triangoli rosa indicati come SVmin(HFB).

Recentemente, sono stati misurati raggi di carica di isotopi instabili del Ca. L'IPM non riesce a riprodurre l'andamento di questi dati empirici (sono i triangoli rosa della figura 1.3). In realtà aumentando il numero dei parametri dell'interazione si riesce anche a riprodurre l'andamento dei dati sperimentali, pallini verdi. Si tratta comunque di un fit che non aggiunge nulla alla nostra conoscenza dei fenomeni che conducono a questo comportamento dei raggi. Le interazioni Fy contengono un maggior numero di parametri e sono state usate solo per gli isotopi del Ca. Non si sa come si comportano per altri nuclei. A proposito, questi raggi di carica sono stati ottenuti con tecniche di diffusione elastica di elettroni per nuclei stabili e di spettroscopia iperfine (spostamenti delle linee spettrali atomiche legati alla distribuzione di carica del nucleo). Si tratta di esperimenti che utilizzano l'interazione elettromagnetica.

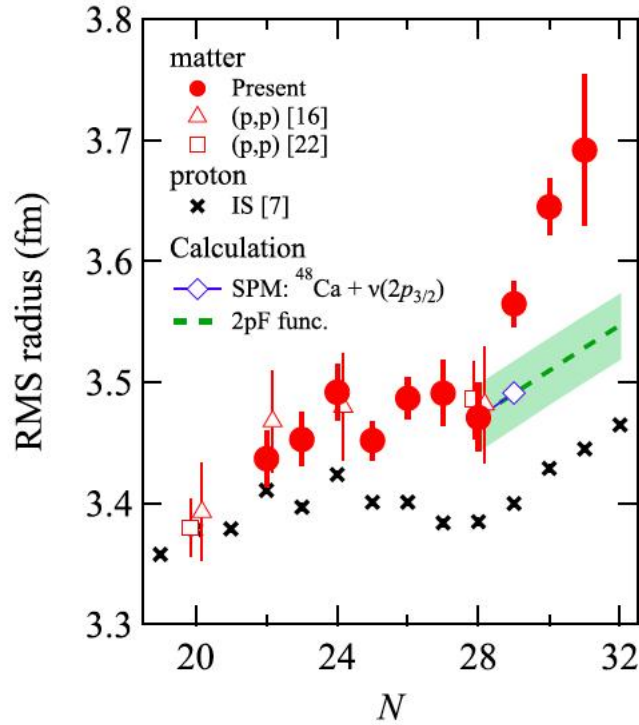


Figura 1.4: Raggi di materia di isotopi del Ca misurati in [Tan20]. Le croci rappresentano i raggi di carica della figura 1.3.

Sono stati misurati anche raggi di distribuzioni di materia Fig.1.4. Sono esperimenti di diffusione elastica di protoni che mostrano una chiara differenza nell'andamento prima e dopo il nucleo di ^{48}Ca . Il confronto tra i risultati di un IPM e questi dati sperimentali è presentato in Fig.1.5 dove vengono messi a confronto con i risultati di calcoli del modello a particelle indipendenti HF+BCS [Ang14]. L'interazione effettiva tra nucleoni è la D1S.

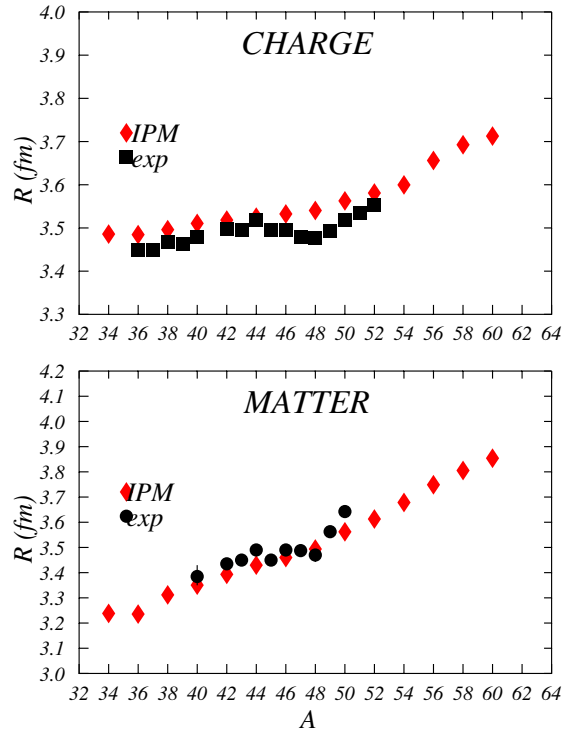


Figura 1.5: Dati sperimentali delle figure 1.3 e 1.4 confrontati con i risultati di calcoli del modello a particelle indipendenti HF+BCS presentato in [Ang14]. L'interazione effettiva tra nucleoni è la D1S.

L'IPM è costruito con delle ipotesi ben precise che implicano che i nucleoni si muovono in maniera indipendente uno dall'altro. Tutto ciò che va oltre questo modello e che modifica il moto indipendente dei nucleoni viene chiamato correlazione. Dato che nei calcoli di campo medio le correlazioni non sono incluse, l'idea è che queste possano avere un effetto notevole sulle distribuzioni di protoni e neutroni. Si distinguono due tipi di correlazioni: correlazioni a lungo raggio (LRC per Long Range Correlations) che sono dovute all'accoppiamento del moto del singolo nucleone con i moti di eccitazione collettiva del nucleo. Ci sono poi le correlazioni a corto raggio (SRC) che sono quelle legate al nocciolo fortemente repulsivo dell'interazione microscopica tra due nucleoni. Nell'IPM si usano interazioni effettive in cui non c'è questo nocciolo. Scopo della tesi è quello di studiare le conseguenze di questa approssimazione per nuclei medi e pesanti, e nello specifico ci interessiamo allo studio degli effetti delle SRC sui raggi delle distribuzioni di carica e di materia. Si sviluppa in questo modo un modello per trattare questi effetti [Co95] e [Ang01] ed esteso per trattare anche distribuzioni di materia per nuclei con shell aperte.

Capitolo 2

Il campo medio

2.1 Simmetria sferica

Come visto precedentemente, nel modello a campo medio la soluzione del problema a multi-corpi consiste nel risolvere per ogni particella l'equazione di Schrödinger di singola particella. Atomi e nuclei sono sistemi che vengono ben descritti considerando un sistema di coordinate posizionate al centro del nucleo atomico, e la simmetria sferica del potenziale implica $U(\mathbf{r}) \rightarrow U(r)$ dove ho indicato $r = |\mathbf{r}|$.

A questo punto conviene considerare espressioni dell'autofunzione dell'hamiltoniana della forma:

$$\phi_{nljm}(r) = R_{nlj}(r) \sum_{\mu\sigma} \langle l\mu \frac{1}{2}\sigma | jm \rangle Y_{l\mu}(\Omega) \chi_\sigma = R_{nlj}(r) \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) \quad (2.1)$$

dove abbiamo unito armoniche sferiche e spinori di Pauli considerando i coefficienti di Clebsch-Gordan, e abbiamo definito l'armonica sferica di spin che è autostato dei seguenti operatori:

$$j^2 \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) = j(j+1) \hbar^2 \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) \quad (2.2)$$

$$l^2 \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) = l(l+1) \hbar^2 \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) \quad (2.3)$$

$$j_z \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) = m \hbar \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) \quad (2.4)$$

$$s^2 \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) = 3/4 \hbar^2 \mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) \quad (2.5)$$

Quindi il modello a campo medio descrive il nucleo in termini di funzioni d'onda di singola particella ed energie di singola particella. Le funzioni d'onda a singola particella sono caratterizzate dall'autovalore di energia ϵ_i (energia di singola particella), dal momento angolare orbitale l , dal momento angolare totale j e dall'isospin t del nucleone.

Per un tipo di nucleone (protone o neutrone) ogni livello è degenere, dato che l'energia non dipende dalla terza componente del momento angolare. Definendo l'autovalore di j^2 come $j(j+1)$ in unità di \hbar^2 , la degenerazione di ogni livello è $2j+1$.

Ogni stato è caratterizzato dai numeri quantici n, l, j (j numero quantico del momento angolare totale, n numero quantico principale e l numero quantico del momento angolare). Il ruolo del principio di esclusione di Pauli consiste nel riempire tutti gli stati di singola particella con le energie inferiori con la degenerazione indicata.

2.2 Hartree-Fock

La base microscopica del modello a campo medio è la teoria Hartree-Fock (HF).

Questa teoria è basata sul principio variazionale [Mes99].

Questo principio si basa sul fatto che, se si considera l'energia del sistema come funzionale delle funzioni d'onda che descrivono il sistema a molti corpi, la ricerca del minimo di questo funzionale coincide con la soluzione dell'equazione di Schrödinger.

Questo è vero se questa ricerca viene effettuata in tutto lo spazio di Hilbert. In realtà il problema viene semplificato cercando la funzione che minimizza l'energia in un sottospazio dello spazio di Hilbert. In questo modo si ottiene un limite superiore al valore dell'energia che si otterrebbe risolvendo il problema senza approssimazioni, ovvero considerando l'intero spazio di Hilbert.

Nel caso specifico della teoria HF, la ricerca viene effettuata solo considerando funzioni d'onda a molti corpi che possono essere espresse come un singolo determinante di Slater di funzioni d'onda di singola particella. Il fatto che la funzione d'onda cercata sia un solo determinante di Slater implica automaticamente che l'hamiltoniana debba essere espressa come somma di hamiltoniane di singola particella, che è la base del modello a campo medio, o meglio a particelle indipendenti.

Applicando il principio variazionale al funzionale dell'energia e cercando il minimo tra i valori ottenuti come aspettazione tra determinanti di Slater, anche considerando l'hamiltoniana completa si ottengono equazioni tipo campo medio.

$$h\phi_k(r) = \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} \phi_k(r) + U(r)\phi_k(r) - \int d^3r' W(r, r') \phi_k(r') = \epsilon_k \phi_k(r) \quad (2.6)$$

dove $U(r)\phi_k(r)$ è il termine di Hartree, mentre $\int d^3r' W(r, r') \phi_k(r')$ è il termine di Fock-Dirac. Il potenziale di Hartree è definito come:

$$U(r) = \sum_j \langle j | V | j \rangle = \sum_j \int d^3r' \phi_j^*(r) V(r, r') \phi_j(r') \quad (2.7)$$

dove la somma è effettuata su tutti gli stati al di sotto dell'energia di Fermi, e il potenziale di Fock-Dirac è definito come:

$$W(r, r') = \sum_j \phi_j^*(r') V(r, r') \phi_j(r) \quad (2.8)$$

Il termine di Fock-Dirac, detto anche di scambio, modifica la pura equazione di campo medio inserendo l'effetto del principio di esclusione di Pauli. Le equazioni integro-differenziali (2.6) sono risolte numericamente utilizzando una procedura iterativa. Si parte da funzioni d'onda di prova $\phi_k^{(1)}(r)$ costruite con metodi di campo medio, ad esempio oscillatore armonico o Woods-Saxon. Con queste funzioni d'onda si calcolano i potenziali di Hartree e di Fock-Dirac che vengono inseriti nell'equazione (2.6) la cui soluzione produce un nuovo insieme di funzioni d'onda $\phi_i^{(2)}(r)$ con le quali è possibile calcolare nuovi potenziali U e W . Il processo continua fino a convergenza. Nel nostro caso, le funzione d'onda devono essere espresse in una base sferica come indicato nell'equazione (2.1).

2.3 Appaiamento (pairing)

Il modello a particelle indipendenti (IPM) descritto sopra funziona molto bene per i nuclei doppio magici. Per tutti i nuclei con shell aperte, il modello presentato sopra deve essere implementato considerando l'interazione di appaiamento che è parte di quella interazione residua che viene trascurata, se si considera solo H_0 .

Nella formula semi-empirica della massa è stato introdotto un termine di appaiamento che tiene conto del fatto che i nuclei pari-pari sono più legati degli altri. L'interazione residua di appaiamento è un'interazione che unisce i nucleoni a coppie. All'interno dello stesso livello i due nucleoni si sistemano nello stato relativo di minore energia che risulta essere quello in cui i due nucleoni con momento angolare j, m e j, m' si accoppiano con un momento angolare totale nullo:

$$|00\rangle = \sum_{m, m'} \langle jmjm'|00\rangle |jm\rangle |jm0\rangle \quad (2.9)$$

dove $|jm\rangle$ e $|jm0\rangle$ sono gli stati di singola particella dei due nucleoni e $\langle jmjm'|00\rangle$ è il coefficiente di Clebsch-Gordan.

Lo stato $|00\rangle$ ha la maggiore sovrapposizione tra le funzioni d'onda dei due nucleoni, questo favorisce la formazione di stati di questo tipo, dato che l'interazione di appaiamento è attrattiva. I nuclei pari-pari risultano più legati degli altri tipi di nuclei perchè per liberare i nucleoni bisogna fornire dell'energia aggiuntiva per spezzare le coppie nucleoni. Questa è l'origine del termine di appaiamento nella formula semi-empirica della massa. L'interazione di appaiamento è attiva anche nel riempimento dei livelli di singola-particella generati dal modello a shell: i nucleoni si uniscono in coppie con momento angolare nullo. Questo spiega perchè tutti i nuclei pari-pari abbiano tutti momento angolare nullo.

Una delle più semplici descrizioni dell'appaiamento è fornita dalla teoria di Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) originariamente formulata per spiegare la superconduttività. L'idea della teoria della BCS è quella di modificare l'occupazione dei livelli di s.p.. Nel modello senza appaiamento tutti i livelli sotto la superficie di Fermi sono occupati e quelli sopra vuoti. Nella teoria BCS si ipotizza che i livelli di s.p. siano occupati con una probabilità v_k^2 , dove k identifica i numeri quantici del livello considerato. Utilizzando il principio variazionale con il vincolo che il numero di nucleoni debba essere conservato in media, si ottiene un insieme di equazioni da risolvere.

Per calcolare il valore di v_k bisogna risolvere una sequenza di equazioni concatenate, dette equazioni BCS:

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{(\epsilon_k - \lambda)^2 - \Delta_k^2} \right], \quad (2.10)$$

dove λ , il gap energetico, è dato da:

$$\lambda = \frac{2 \sum_k v_k^2 - \sum_k \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right)}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}}. \quad (2.11)$$

La quantità Δ_k soddisfa la relazione

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\Delta_i}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 + \Delta_i^2}} \langle kk 00 | V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | ii 00 \rangle, \quad (2.12)$$

con $|\alpha\alpha 00\rangle$ che indica uno stato in cui gli stati a singola particella ϕ_α sono accoppiati con il momento angolare totale $J = 0$ e la proiezione sull'asse z $M = 0$.

Possiamo dire, a questo punto, che l'IPM è costituito dalle equazioni HF più le equazioni BCS. Chiamiamo questo modello HF+BCS.

Capitolo 3

Il modello per la correlazione

3.1 Densità

Le densità di protoni, neutroni e materia sono definite in termini di valori di aspettazione rispetto agli autostati $|\Psi\rangle$ dell'hamiltoniana a molticorpi H come:

$$\rho_q(\mathbf{r}) = A \frac{\langle \Psi | Q_q(\mathbf{r}) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (3.1)$$

dove q indica protoni p , neutroni n o materia m e Q_q è il relativo operatore densità definito come

$$Q_m(r) = \sum_{j=1}^A \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (3.2)$$

$$Q_p(r) = \sum_{j=1}^A \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{2} (1 + \tau_3(j)) \quad (3.3)$$

$$Q_n(r) = \sum_{j=1}^A \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{2} (1 - \tau_3(j)) \quad (3.4)$$

dove $\tau_3(j) = 1$ se il j -esimo nucleone è un protone e -1 se è un neutrone.

Il fattore A davanti all'equazione (3.1) è necessario in quanto la funzione d'onda a molti corpi normalizzata è:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = A \quad (3.5)$$

Le densità di protoni, neutroni e di materia, sono normalizzate, rispettivamente a Z , N e $A = N + Z$.

Il confronto con le densità di carica avviene facendo una convoluzione tra la densità di protoni, che sono considerati puntiformi, e il fattore di forma elettromagnetico del protone f_p .

$$\rho_{\text{ch}}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_p(\mathbf{r}') \quad (3.6)$$

f_p è estratto da processi di diffusione elastica di elettroni sul protone. L'espressione più semplice è quella di dipolo [Pov98].

3.2 Sviluppo in cluster

Il modello si basa sul presupposto che la funzione d'onda a molti corpi $|\Psi\rangle$ possa essere espressa come:

$$\Psi(1, 2, \dots, A) = F(1, 2, \dots, A) \Phi(1, 2, \dots, A) \quad (3.7)$$

dove $\Phi(1, 2, \dots, A)$ è un determinante di Slater composto da funzioni d'onda di singola particella e $F(1, 2, \dots, A)$ è l'operatore correlazione che agisce su Φ . Consideriamo, al momento, una funzione di correlazione puramente scalare con un'espressione detta di Jastrow

$$F = \prod_{j>i=1}^A f(r_{ij}) \quad (3.8)$$

dove f è una funzione reale della distanza tra le particelle i e j .

Usando l'espressione (3.7) nella definizione di densità (3.1) ottengo l'espressione

$$\rho_p(\mathbf{r}_1) = A \frac{\int d^3r_2 \dots d^3r_A \Phi^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) Q_p(r_1) \Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)}{\int d^3r_1 \dots d^3r_A \Phi^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)} \quad (3.9)$$

dove è sottintesa la somma sugli indici di spin e isospin e $Q_p(r_1)$ è l'operatore densità di carica ad un corpo. Poichè trattiamo solo correlazioni scalari, allora possiamo scrivere:

$$\rho_p(\mathbf{r}_1) = A \frac{\int d^3r_2 \dots d^3r_A \Phi^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \left(\prod_{ij}^A f^2(r_{ij}) \right) Q_p(r_1) \Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)}{\int d^3r_1 \dots d^3r_A \Phi^*(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) \left(\prod_{ij}^A f^2(r_{ij}) \right) \Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)} \quad (3.10)$$

Definiamo $f^2(r_{ij}) = 1 + h(r_{ij})$ allora:

$$\begin{aligned}
\prod_{i>j=1}^A f^2(r_{ij}) &= (1 + h(r_{12}))(1 + h(r_{13}))\dots \\
&= 1 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A h(r_{ij}) + \sum_{i=1}^A \sum_{k=1}^A \sum_{j>k}^A h(r_{ij})h(r_{lk}) + \dots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\rho_p(\mathbf{r}_1) &= A \frac{\int d^3r_2 \dots d^3r_A Q_p(r_1) (1 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A h(r_{ij}) + \dots) |\Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)|^2}{\int d^3r_1 \dots d^3r_A |\Phi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A)|^2 (1 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A h(r_{ij}) + \dots)} \\
&= A \frac{\int d^3r_2 \dots d^3r_A Q_p(r_1) \Delta(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) (1 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A h(r_{ij}) + \dots)}{\int d^3r_1 \dots d^3r_A \Delta(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_A) (1 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A h(r_{ij}) + \dots)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

con Δ sotto-determinante di un sistema di A particelle. Analizzando i vari termini che contribuiscono all'espressione di sopra si vede che i soli diagrammi connessi contribuiscono.

La matrice densità dell'IPM:

$$\rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mu} \nu_{\mu}^2 \phi_{\mu}^*(\mathbf{r}_1) \phi_{\mu}(\mathbf{r}_2) \tag{3.13}$$

Le matrici densità IPM soddisfano la proprietà:

$$\int d^3r' \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \rho_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) = \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \tag{3.14}$$

La densità correlata è normalizzata come l'IPM:

$$\int d^3r \rho_0^{SRC}(\mathbf{r}) = \int d^3r \rho_0^{IPM}(\mathbf{r}) \tag{3.15}$$

Questi integrali sono uguali a A, Z o N a seconda della distribuzione di densità considerata.

Definiamo i sotto-determinanti come:

$$\Delta_p(1, \dots, p) = \det \begin{vmatrix} \rho_0(r_1, r_1) & \rho_0(r_1, r_2) & \cdots & \rho_0(r_1, r_p) \\ \rho_0(r_2, r_1) & \rho_0(r_2, r_2) & \cdots & \rho_0(r_2, r_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_0(r_p, r_1) & \rho_0(r_p, r_2) & \cdots & \rho_0(r_p, r_p) \end{vmatrix}$$

Una proprietà fondamentale dell'OBDM non correlata, dovuta all'ortonormalità delle fuzioni d'onda di singola particella, è:

$$\int dr_j \rho_0(r_i, r_j) \rho_0(r_j, r_k) = \rho_0(r_i, r_k) \quad (3.16)$$

Per la proprietà appena citata i sotto-determinanti hanno la seguente proprietà:

$$\int dr_{p+1} \dots \Delta_{p+1}(1, \dots, p+1) = (A-p) \Delta_p(1, \dots, p) \quad (3.17)$$

e, per iterazione, si ha:

$$\int dr_{p+1} \dots dr_A \Delta_A(1, \dots, A) = (A-p)! \Delta_p(1, \dots, p) \quad (3.18)$$

Questo implica che:

$$\Delta_p = 0, p > A \quad (3.19)$$

Questa proprietà è estremamente utile nell'applicazione delle tecniche di sviluppo a cluster in sistemi fermionici finiti.

Il numeratore N e il denominatore D dell'equazione (3.12) possono essere espressi come somme di termini caratterizzate dal numero di funzioni h . Allora l'equazioni generali per numeratore N e denominatore D saranno:

$$N = \frac{A!}{A} [\Delta_1(\mathbf{r}_1) + \sum_{p=2}^A \frac{1}{(p-1)!} \int d^3 r_2 \dots d^3 r_p \Delta_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p) W_p(1, \dots, p)] \quad (3.20)$$

dove W_p contiene tutti i possibili diagrammi composti da p punti;

$$D = \sum_{p=1}^A \frac{A!}{p!} \int d^3 r_1 \dots d^3 r_p \Delta_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p) X_p(1, \dots, p) \quad (3.21)$$

dove X_p contiene tutti i possibili diagrammi che coinvolgono p punti.

Allora la densità può essere scritta come:

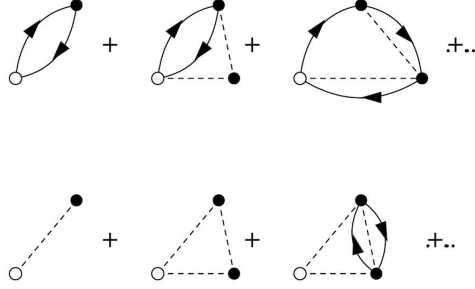


Figura 3.1: Vengono indicati alcuni diagrammi che si trovano al numeratore. Il punto bianco, detto esterno, non è integrato; punti neri, interni, sono invece integrati; la linea tratteggiata indica $h(r_{ij})$ per questo unisce due punti; la linea continua orientata indica $\rho(r_i, r_j)$.

$$\rho_p(\mathbf{r}_1) = A! \frac{Q_p(r_1) \frac{A!}{A} [\Delta_1 + \sum_{p=2}^A \frac{1}{(p-1)!} \int d^3 r_2 \dots d^3 r_p \Delta_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p) W_p(1, \dots, p)]}{\sum_{p=1}^A \frac{A!}{p!} \int d^3 r_1 \dots d^3 r_A \Delta_p(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p) X_p(1, \dots, p)} \quad (3.22)$$

Il numeratore contiene sia i diagrammi connessi che quelli non connessi. I diagrammi non connessi sono stati cancellati del denominatore.

La densità di carica con solo una funzione di correlazione al primo ordine è:

$$\begin{aligned}
 \rho_1(\mathbf{r}_1) &= \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \\
 &+ \int d^3r_2 h(r_{12}) \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \rho_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2) \\
 &- \int d^3r_2 h(r_{12}) \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \\
 &- \int d^3r_2 d^3r_3 h(r_{23}) \rho_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3) \rho_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\
 &+ \int d^3r_2 d^3r_3 h(r_{23}) \rho_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rho_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \rho_0(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ogni linea rappresenta, in ordine, i grafici della figura 3.2.

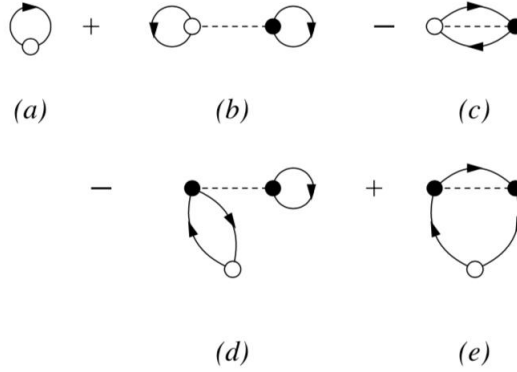


Figura 3.2: Diagrammi considerati nell'approssimazione del primo ordine.

Le considerazioni fatte finora si sono limitate ad una correlazione scalare, ma possiamo considerare nella (3.23) anche correlazioni più complicate contenenti termini operatoriali.

Utilizziamo la seguente espressione di F :

$$F(1, \dots, A) = S \prod_{i < j=i}^A \sum_{p=1}^M f^p(r_{ij}) O^p(i, j) \quad (3.24)$$

Nell'equazione $f^p(r)$ è la funzione correlazione scalare a due corpi, che dipende dalla distanza interparticellare $r_{(ij)}$, e S è l'operatore di simmetrizzazione. I termini $O^p(i, j)$ descrivono la dipendenza operatoriale della correlazione. Nel nostro caso consideriamo quattro canali centrali ($n=1,4$), ($O^n(i, j) = 1, \sigma_i \cdot \sigma_j, \tau_i \cdot \tau_j, \sigma_i \cdot \sigma_j, \tau_i \cdot \tau_j$) e i canali tensore isoscalare e isovettoriale ($n=5,6$), ($O^n(i, j) = S_{ij}, S_{ij} \tau_i \cdot \tau_j$).

$S(i, j)$ rappresenta l'operatore tensoriale:

$$S(i, j) = 3 \frac{(\sigma_i \cdot \mathbf{r}_{ij}) (\sigma_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{(\mathbf{r}_{ij})^2} - \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (3.25)$$

Il punto chiave del modello è considerare solo quei termini con una singola funzione di correlazione:

$$h^p(r_{ij}) = f^p(r_{ij}) \delta_{p,1} \quad (3.26)$$

dove δ indica il simbolo di Kronecker [Co95].

Capitolo 4

Risultati

In questi ultimi anni, è stata completata la misurazione di diversi spostamenti isotopici, ottenendo informazioni sui raggi di carica dei nuclei di Ca. Garcia Ruiz *et al.* [Gar16] hanno misurato gli spostamenti isotopici dei nuclei ricchi di protoni mediante spettroscopia laser $^{49,51,52}\text{Ca}$ e Miller *et al.* [Mil19] hanno studiato gli isotopi ricchi con tecniche sperimentali simili $^{36,37,38}\text{Ca}$. Questi nuovi dati sono stati usati per derivare i valori dei raggi di carica di questi nuclei. Il comportamento dei valori sperimentali dei raggi di carica mostra un forte miglioramento per i nuclei con $A > 48$. Questo comportamento non è descritto da molti modelli a particelle indipendenti [Gar16, Mil19, Tan20]. La nostra idea è quella di verificare se le SRC possono spiegare questo comportamento dei dati.

4.1 Risultati con IPM

Nel nostro studio abbiamo considerato gli isotopi del Ca pari-pari. I parametri delle interazioni effettive nucleone-nucleone sono stati scelti in modo che, con l'IPM, si abbia una buona descrizione dello stato fondamentale di un insieme di nuclei lungo tutta la carta nucleare. Come esempio dei risultati di queste interazioni, confrontiamo nella tabella 4.1 le energie sperimentali di legame dei nuclei da noi trovate con quelle ottenute con il nostro IPM (HF+BCS) utilizzando le tre interazioni considerate [Bnlw]: D1S, D1M e D1ST2a. D1S [Ber91] e D1M [Gor09] non hanno termini tensoriali, mentre la D1ST2a è una D1S a cui sono stati aggiunti due termini tensoriali. Uno è puramente tensore, l'altro è tensore-isospin.

I due parametri che definiscono l'intensità di questi due termini sono stati fissati per riprodurre i valori sperimentali del primo stato eccitato 0^- in ^{16}O e la differenza tra le energie degli stati di singola particella $1f_{7/2}$ e $2p_{3/2}$ del ^{48}Ca [Ang12]. Le tre interazioni vengono usate per identificare effetti che sono indipendenti dall'uso di una specifica parametrizzazione delle interazioni.

A	D1S	D1ST2a	D1M	exp.
34	7.254	7.255	7.148	7.173
36	7.867	7.871	7.754	7.816
38	8.296	8.296	8.180	8.240
40	8.626	8.624	8.513	8.551
42	8.668	8.669	8.556	8.617
44	8.711	8.718	8.602	8.658
46	8.719	8.732	8.614	8.669
48	8.694	8.714	8.593	8.667
50	8.551	8.572	8.458	8.550
52	8.404	8.427	8.320	8.429
54	8.211	8.230	8.140	8.248
56	8.028	8.033	7.956	8.033
58	7.832	7.834	7.768	7.828
60	7.614	7.620	7.577	7.627

Tabella 4.1: Energie di legame per nucleone, in MeV, per gli isotopi del Ca che stiamo studiando, ottenute con il nostro modello HF+BCS usando le interazioni D1S, D1ST2a e D1M, confrontate con i valori sperimentali presi dalla compilazione del Brookhaven National Laboratory [Bnlw]. Il valore maggiore dell'incertezza sperimentale è di 0.012 MeV nel nucleo ^{60}Ca .

Il buon accordo tra il valore empirico e i risultati dei nostri calcoli è evidente, ma questo non è sorprendente, poichè l'energie di legame sono state utilizzate per selezionare i valori dei parametri di forza. La quantità misurata, lo spostamento isotopico, è definita come la differenza tra il quadrato dei raggi di carica di ogni nucleo con quello di un isotopo preso come riferimento. Nel nostro caso il nucleo di riferimento è il ^{40}Ca , il cui raggio di carica quadratico medio è stato misurato con grande precisione $R_{ch}(A = 40) = 3.4776(19) \text{ fm}$ [Ang13].

Lo spostamento isotopico è definito come

$$\delta R_{ch}^2(A) = [R_{ch}(A)]^2 - [R_{ch}(A = 40)]^2 \quad (4.1)$$

Il nostro studio si è concentrato sugli spostamenti isotopici piuttosto che sui raggi di carica.

Vengono confrontati in Fig.4.1 i valori degli spostamenti isotopici ottenuti nei nostri calcoli IPM, con le tre diverse parametrizzazioni dell'interazione di Gogny D1S (punti aperti rossi), D1M (quadrati aperti blu) e D1ST2a (punti pieni verdi) con i dati sperimentali (triangoli neri) [Mil19], [Gar16], [Woh81].

La prima osservazione è che i comportamenti dei nostri risultati IPM sono molto simili, indipendentemente dall'interazione utilizzata. L'indicatore quantitativo di questa

somiglianza è la media delle differenze assolute tra queste curve, che è più piccola di 0.07 fm^2 , con un valore massimo di 0.2 fm^2 . Vale anche la pena notare che i termini tensoriali di forza non giocano alcun ruolo rilevante: i risultati ottenuti con D1ST2a e D1S quasi si sovrappongono.

Osserviamo un buon accordo con gli spostamenti isotopici dei nuclei più leggeri del ^{40}Ca e più pesanti del ^{48}Ca , mentre nei casi di ^{42}Ca , ^{44}Ca e ^{48}Ca l'IPM non riesce a descrivere i dati.

I valori degli spostamenti isotopici calcolati con l'IPM aumentano gradualmente con l'aumentare del numero di neutroni. Al contrario, i dati sperimentali mostrano un aumento più marcato dal ^{40}Ca fino al ^{44}Ca e un comportamento decrescente per ^{46}Ca e ^{48}Ca , il cui spostamento isotopico è quasi zero. Un confronto diretto tra i raggi quadratici medi di carica ottenuti utilizzando le nostre densità IPM e quelli empirici sono mostrati nella figura 4.1b.

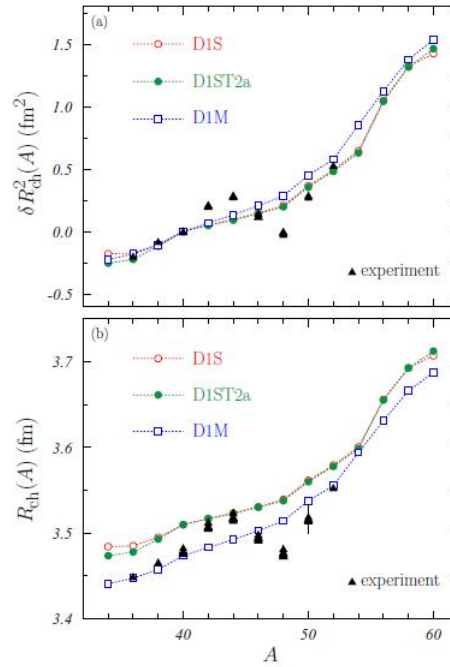


Figura 4.1: Risultati IPM ottenuti con D1S (punti aperti rossi), D1ST2a (punti pieni verdi) e D1M (quadrati aperti blu) delle interazioni di Gogny con i dati sperimentali (triangoli neri). (a) Spostamento isotopico del quadrato dei raggi di carica valutati rispetto al ^{40}Ca . (b) Raggi di carica r.m.s. degli isotopi di Ca; i valori sperimentali sono stati calcolati considerando lo spostamento isotopico nel pannello (a) e il raggio di carica $R_{ch}(A=40) = 3.4776(19) \text{ fm}$.

I risultati ottenuti con le interazioni D1S e D1ST2a sono quasi sovrapposti, con differenze inferiori allo 0.5%, e questo indica ancora una volta che i termini tensoriali nell'interazione non producono notevoli effetti sui raggi di carica. Osserviamo una differenza sistematica, di circa l'1%, tra i risultati ottenuti con le interazioni D1S e D1M. Questi risultati migliorano la descrizione dei dati ottenuti con il D1M rispetto alle interazioni D1S e D1ST2a. È sorprendente che tutti i calcoli IPM non riescono a descrivere il raggio di carica di ^{48}Ca , nucleo doppiamente magico, ed in generale i raggi di carica dei nuclei tra ^{40}Ca e ^{48}Ca .

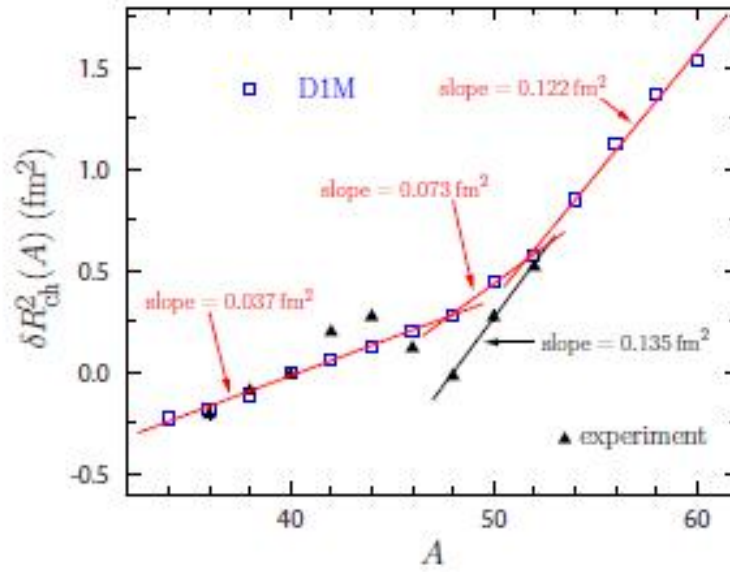


Figura 4.2: Spostamenti isotopici, ottenuti nei calcoli IMP con l'interazione D1M (quadrati blu aperti) e i risultati sperimentali (triangoli neri). Il fit lineare si adatta alle tre sezioni dei risultati IPM e ai valori sperimentali per gli isotopi di Ca più pesanti sono indicate dalle linee rette. Vengono forniti anche i coefficienti angolari cioè le pendenze di queste linee.

Il comportamento degli spostamenti isotopici che abbiamo ottenuto con il nostro IPM può essere separato in tre regioni. Si riporta in Fig.4.2 il confronto tra gli spostamenti isotopici ottenuti con l'interazione D1M (quadrati blu aperti) e i valori sperimentali (triangoli neri). Le linee rosse sono i risultati degli adattamenti (fit) lineari dei dati D1M per tre regioni: nuclei più leggeri del ^{48}Ca , dal ^{48}Ca al ^{52}Ca , e nuclei più pesanti del ^{52}Ca . I valori dei coefficienti angolari, cioè le pendenze di queste linee sono indicate in figura. Risultati simili si ottengono per le altre due forze considerate.

Identifichiamo tre regioni anche nei dati sperimentali. Il comportamento per gli isotopi più leggeri di ^{40}Ca e più pesanti di ^{48}Ca è lineare. Il valore che corrisponde a quest'ultimo insieme di dati è molto simile a quello dei risultati IPM per i nuclei più pesanti di ^{54}Ca .

Il vero problema è legato ai dati sperimentali degli isotopi dal ^{40}Ca al ^{48}Ca . Contrariamente ai risultati dell'IPM, questi dati presentano un massimo per il nucleo ^{44}Ca e un minimo per il ^{48}Ca il quale ha spostamento isotopico nullo, con il raggio quadratico medio uguale a quello di ^{40}Ca .

4.2 Risultati con le correlazioni SRC

Nell'IPM ogni nucleone è libero di muoversi indipendentemente della presenza degli altri. Inoltre l'interazione nucleone-nucleone ha un nucleo fortemente repulsivo che impedisce ai due nucleoni di avvicinarsi l'uno l'altro a distanze inferiori di circa 0.5 fm. Queste interazioni vengono chiamate correlazioni a corto raggio (SRC); mentre la parte dell'Hamiltoniana nucleare non considerata dall'IPM, cioè l'interazione residua, è chiamata correlazione a lungo raggio (LRC), la quale tiene conto dei fenomeni collettivi all'interno del nucleo. L'inclusione delle correlazioni modifica l'IPM, conseguentemente, i valori dei raggi.

In particolare, nel nostro calcolo, vengono prese in considerazione le correlazioni a corto raggio (SRC). Queste correlazioni provengono da un calcolo microscopico fatto con CBF-FHNC [Ari07] utilizzando l'interazione Argonne V-18 che riproduce i dati sperimentali dei sistemi a due corpi. La figura 4.3 mostra che la funzione più importante è $f^{(1)} \equiv c$ e che le correlazioni tensoriali $f^{(5)} \equiv t$ e $f^{(6)} \equiv t\tau$ hanno un raggio d'azione maggiore rispetto alle altre.

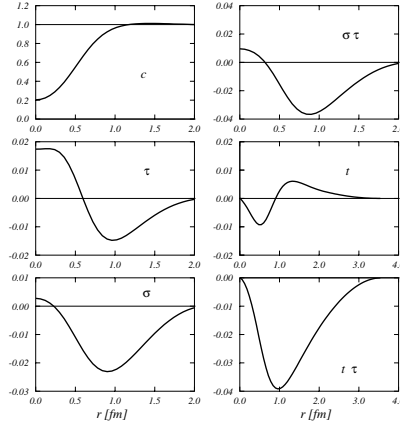


Figura 4.3: Funzioni $f_p(r)$ della correlazione nei vari canali: $p = 1 \equiv c$, $p = 2 \equiv \tau$, $p = 3 \equiv \sigma$, $p = 4 \equiv \sigma\tau$, $p = 5 \equiv t$, $p = 6 \equiv t\tau$.

Queste SRC sono state utilizzate per fare il calcolo indicato nei capitoli precedenti. Nella figura 4.4 sono presentati i risultati per ognuna delle tre interazioni.

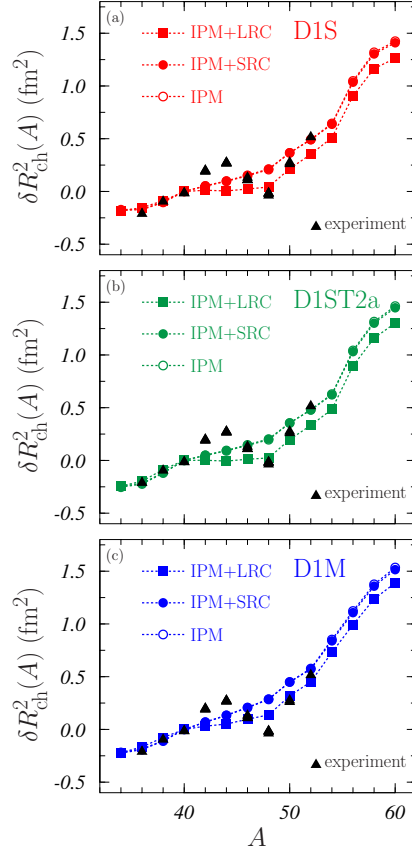


Figura 4.4: Effetti delle correlazioni a corto e lungo raggio dello spostamento isotopico. I risultati IPM (cerchi pieni) vengono confrontati con quelli trovati dopo l'aggiunta di SRC (cerchi pieni) e LRC (quadrati pieni). I risultati delle interazioni sono mostrati in D1S(a), D1ST2a(b), e D1M(c). I dati sperimentali vengono mostrati con i triangoli neri.

Gli effetti delle correlazioni sugli spostamenti isotopici sono mostrati in Fig.4.4. I tre pannelli, rappresentano separatamente, i risultati ottenuti per le tre interazioni considerate. In ogni pannello i cerchi vuoti indicano i risultati dell'IPM, i cerchi pieni quelli ottenuti considerando SRC e i quadrati quelli che includono LRC. Gli effetti delle SRC sono estremamente piccoli e i risultati ottenuti quasi si sovrappongono con quelli dell'IPM. Nella figura è stato inserito un altro effetto delle correlazioni le LRC, che dal punto di vista fisico rappresentano il contributo degli stati eccitati a bassa energia che deformano lo stato fondamentale del sistema. Nella Fig.4.5 viene mostrato il confronto tra SRC e LRC.

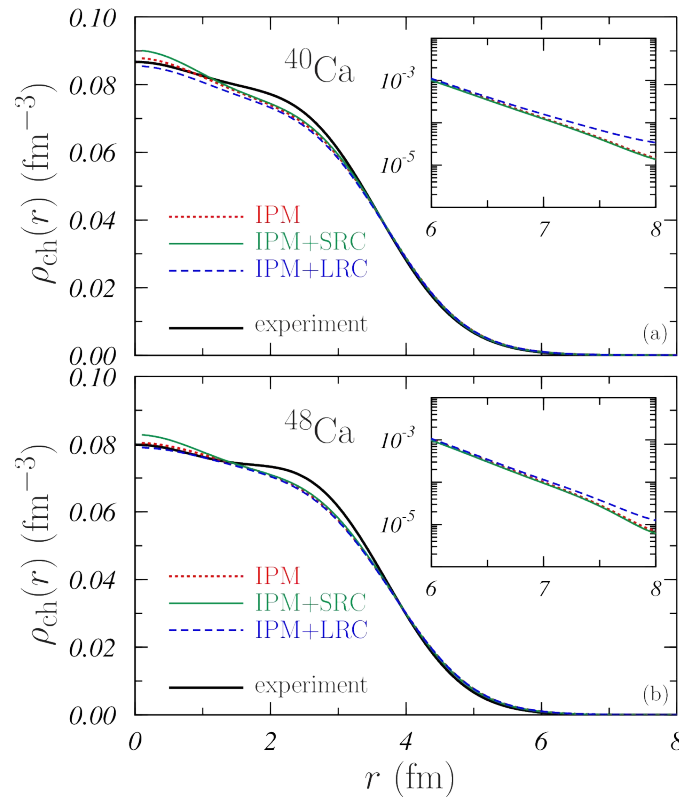


Figura 4.5: Densità di carica dei nuclei ^{40}Ca e ^{48}Ca calcolate con l'interazione D1S e confrontate con le densità empiriche prese dalla compilazione di Ref. [DeV87]. Negli inserti sono presentate le code delle distribuzioni in scala logaritmica.

Negli isotopi più leggeri di ^{40}Ca , gli effetti LRC sono trascurabili. Tuttavia, già i valori IPM descrivono bene i corrispondenti dati sperimentali. I maggiori effetti dell'LRC si vedono nei nuclei tra ^{40}Ca e ^{48}Ca . L'inclusione dell'LRC genera un insieme di valori quasi costanti per le interazioni D1S e D1ST2a, mentre per l'interazione D1M abbiamo trovato una crescita moderata, anche se molto inferiore a quella mostrata dai risultati dell'IPM. Il punto importante è che includendo LRC si ha una buona descrizione dello spostamento isotopico ^{48}Ca per il D1S e si ottengono interazioni D1ST2a. Al di sopra di ^{48}Ca , l'andamento dello spostamento isotopico è all'incirca pari a quello dei calcoli dell'IPM, mostrando un miglioramento con due pendenze ben definite per $A < 52$ e $A > 52$, rispettivamente. Per i nuclei più pesanti di questo isotopo, la crescita degli spostamenti isotopici è simile a quella sperimentale, come determinato dai valori di ^{48}Ca , ^{50}Ca e ^{52}Ca .

Capitolo 5

Riassunto e conclusioni

In questo lavoro, abbiamo presentato i risultati dello studio fatto sugli spostamenti isotopici degli isotopi di Ca pari-pari. Sono stati presi in considerazione i calcoli IPM, basati sul modello HF+BCS. Questo modello ha prodotto ottime descrizioni dello stato fondamentale per nuclei $A = 10$ fino ai più pesanti ma non per la descrizione degli stati eccitati. I risultati dei calcoli sono stati ottenuti utilizzando l'interazione di Gogny nella parametrizzazione D1S, D1M e D1ST2a dove vengono inseriti dei termini tensoriali.

Sono stati messi a confronto i valori degli spostamenti isotopici ottenuti con i calcoli IPM con le tre parametrizzazioni dell'interazione di Gogny D1S, D1M e D1ST2a. Si osserva che i comportamenti dei nostri risultati IPM sono molto simili, indipendentemente dall'interazione usata. I termini tensoriali non hanno un ruolo rilevante in quanto i risultati di D1ST2a e D1S quasi si sovrappongono. Si ha un buon accordo con gli spostamenti isotopici dei nuclei più leggeri del ^{40}Ca e più pesanti del ^{48}Ca mentre nei casi di ^{42}Ca , ^{44}Ca e ^{48}Ca l'IPM non riesce a descrivere i dati. Osserviamo una differenza sistematica, di circa l'1%, tra i risultati ottenuti con le interazioni D1S e D1M. Il problema è l'incapacità di descrivere il comportamento dei dati sperimentali dei nuclei da ^{40}Ca a ^{48}Ca , in particolare il fatto che questi nuclei doppiamente magici, che in linea di principio dovrebbero essere ben descritti dall'IPM, hanno lo stesso raggio di carica.

Sono stati estesi i calcoli prendendo in considerazione un modello per le correlazioni a corto raggio (SRC). Gli effetti delle SRC sono estremamente piccoli e i risultati ottenuti quasi si sovrappongono con quelli dell'IPM. Per questo motivo vengono presi in considerazione gli effetti dell'LRC (correlazioni a lungo raggio). Negli isotopi più leggeri ^{40}Ca , gli effetti LRC sono trascurabili mentre i maggiori effetti si vedono nei nuclei tra ^{40}Ca e ^{48}Ca . I calcoli LRC generano valori quasi costanti dell'isotopo per le interazioni D1S e D1ST2a, contrariamente ai risultati IPM che mostrano un continuo aumento. Quindi, al contrario delle SRC, includendo LRC si dà una buona descrizione dello spostamento isotopico ^{48}Ca per il D1S e si ottengono interazioni D1ST2a. In Fig.4.4 vengono mostrati gli effetti delle correlazioni a corto e lungo raggio dove vengono rappresentati i risultati dell'IPM, di SRC e di LRC ottenuti con le tre interazioni considerate.

Bibliografia

- [Ang01] M. Anguiano, Jour. Phys. G 27, 2109 (2001).
- [Ang12] M. Anguiano, M. Grasso, G. Cò, V. De Donno, A. M. Lallena, Phys. Rev. C 86, 054302 (2012).
- [Ang13] I. Angeli and K. P. Marinova, At. Data Nucl. Data Tables 99, 69 (2013).
- [Ang14] M. Anguiano, A. M. Lallena, G. Cò, V. De Donno, J. Phys. G. 41, 025102 (2014).
- [Ang15] M. Anguiano, A. M. Lallena, G. Cò, V. De Donno, J. Phys. G. 42, 079501 (2015).
- [Ari07] F. Arias de Saavedra, C. Bisconti, G. Co' and A. Fabrocini, Phys. Rep. 450, 1 (2007).
- [Ben05] K. Bennaceur, J. Dobaczewski, Comput. Phys. Comm. 168, 96 (2005).
- [Ber91] J. F. Berger, M. Girod, and D. Gogny, Comput. Phys. Commun. 63, 365 (1991).
- [Bnlw] Brookhaven National Laboratory, National Nuclear Data Center.
<http://www.nndc.bnl.gov>
- [Car15] J. Carlson, S. Gandolfi, F. Pederiva, S. C. Pieper, R. Schiavilla, K. E. Schmidt and R. B. Wiringa, Quantum Monte Carlo methods for nuclear physics, Rev. Mod. Phys. 87, 1067 Published 9 September (2015).
- [Cea] S. Hilaire, M. Girod, Hartree-Fock-Bogoliubov results based on the Gogny force. AMEDEV database.
http://www-phynu.cea.fr/HFB-Gogny_eng.htm
- [Co95] G. Cò, Il Nuovo Cimento A108, 623 (1995).
- [DeV87] H. De Vries, C. W. De Jager, C. De Vries, Atomic data and nuclear data tables, 36 (1987) 495.
- [Eis72] J. M. Eisenberg, W. Greiner, Microscopic theory of the nucleus, North Holland, Amsterdam (1972).

- [Fet71] L. Fetter, D. Walecka, Quantum theory of many-particle systems, Mc Graw-Hill, New York (1971), anche Dover, New York (2003).
- [Gan20] S. Gandolfi, D. Lonardoni, A. Lovato, M. Piarulli M, Quantum Monte Carlo Calculations With Chiral EFT Interactions. *Front. Phys.* 8 (2020) 117.
- [Gor09] S. Goriely, S. Hilaire, M. Girod, and S. P'èru, *Phys. Rev. Lett.* 102, 242501 (2009).
- [Gar16] R.F. Garcia Ruiz et al., *Nat. Phys.* 12, 594 (2016).
- [Mes99] A. Messiah, Quantum Mechanics, Dover, New York (1999).
- [Mil19] A. J. Miller et al., *Nat. Phys.* 15, 432 (2019).
- [Pie01] S. C. Pieper and R. B. Wiringa, 51, 53 (2001).
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetche, *Particelle e Nuclei, Introduzione ai concetti fisici*, Boringhieri, Torino (1998).
- [Rin80] P. Ring, P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer, Berlin (1980).
- [Tan20] M. Tanaka et al., *Phys. Rev. Lett.* 124, 102501 (2020).
- [Woh81] H. D. Wohlfahrt, E. B. Shera, M. V. Hoehn, Y. Yamazaki, R. M. Steffen, *Phys. Rev. C* 23, 533 (1981).