

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

**Sviluppo di algoritmi
per la soluzione delle
equazioni RPA nel continuo**

Relatore

Ch.mo Prof. Giampaolo Co'

Laureanda

Sara Della Monaca

Anno Accademico 2002-2003

Indice

Introduzione	1
1 La teoria Random Phase Approximation (RPA)	5
1.1 Introduzione	5
1.2 Le equazioni RPA	6
1.3 Le equazioni RPA in accoppiamento angolare	12
1.4 Elemento di matrice di transizione	17
2 Le equazioni RPA nel continuo	19
2.1 Introduzione	19
2.2 Equazioni RPA nel continuo	20
2.3 Equazioni RPA nel continuo nello spazio delle coordinate	21
3 Proprietà delle soluzioni delle equazioni RPA nel continuo	28
3.1 Introduzione	28
3.2 Condizioni al contorno	29
3.3 Normalizzazione delle soluzioni numeriche	32
3.4 Elemento di matrice di transizione	35

Indice	iii
<hr/>	
4 Soluzione numerica dell'equazione differenziale	38
4.1 Introduzione	38
4.2 Descrizione del metodo di calcolo numerico	39
4.3 Verifiche sulla validità del metodo numerico	41
4.4 Confronto con il <i>metodo di Numerov</i>	48
5 Metodo di risoluzione delle equazioni	55
5.1 Introduzione	55
5.2 Il metodo iterativo	57
5.3 Risultati del metodo iterativo	58
5.4 Calcolo con un'interazione a zero-range	66
6 Conclusioni	72
A Alcune equazioni relative alla teoria RPA	74
A.1 Derivazione dell'equazione del moto	74
A.2 Derivazione delle due equazioni accoppiate	75
A.3 Calcolo dei coefficienti A e B	80
B Equazioni RPA in accoppiamento angolare	84
B.1 Derivazione dei coefficienti $v_{ph,p'h'}$ e $u_{ph,p'h'}$	84
B.2 Equazioni RPA in accoppiamento angolare	86
C Elemento di matrice dell'interazione	88
D Elemento di matrice di transizione in accoppiamento angolare	94

E Valori numerici dei B-value	99
Bibliography	106
Ringraziamenti	107

Introduzione

Nella trattazione dei fenomeni nucleari è necessario ricorrere a svariati modelli per riuscire a fornire una descrizione completa delle diverse proprietà che caratterizzano la struttura nucleare e le interazioni tra nucleoni.

In alcuni casi è conveniente descrivere un certo tipo di fenomeni in termini di moti indipendenti di singoli nucleoni, ricorrendo ad un *modello a particelle indipendenti* (o *modello a shell*). In questo tipo di descrizione i nucleoni sono soggetti solo ad un potenziale medio e il moto di ciascuno di essi può essere descritto indipendentemente da quello degli altri. Gli stati eccitati sono interpretati come eccitazioni di un singolo nucleone che da un livello energetico al di sotto della superficie di Fermi viene promosso ad un livello al di sopra di questa superficie, eventualmente nel continuo. Stati eccitati ben descritti dal modello a particelle indipendenti sono stati ad alto spin nello spettro discreto [Co' 90] e l'eccitazione del picco quasi-elastico ad energie di centinaia di MeV [Ama 01].

In altri casi risulta invece più opportuno ricorrere ai cosiddetti *modelli collettivi*, che descrivono il nucleo come se fosse una goccia di un fluido nel quale i moti dei singoli nucleoni sono altamente legati tra loro e non possono essere trattati separatamente. È evidente la necessità di superare questa descrizione modellistica e di elaborare una

teoria che unifichi i due modelli, inglobando le caratteristiche di entrambi. Una risposta a questa esigenza viene dalla teoria *Random Phase Approximation*¹ (RPA), che si basa su un modello a particelle indipendenti ma considera anche la parte a due corpi dell'hamiltoniana, detta *interazione residua*, trascurata dal modello a particelle indipendenti. Questo permette di trattare anche stati di natura collettiva; la teoria descrive infatti gli stati eccitati del nucleo come combinazione lineare di tutte le possibili eccitazioni di singoli nucleoni compatibili con il momento angolare e la parità dello stato eccitato. I coefficienti della combinazione lineare sono ottenuti risolvendo le equazioni secolari RPA, mentre gli ingredienti esterni alla teoria sono la base di stati di singola particella e l'interazione tra i nucleoni.

Dato che le ipotesi di base della RPA sono molto generali, la teoria ha un campo di applicabilità molto vasto. Può essere applicata per lo studio di stati discreti, pochi MeV di eccitazione, per le risonanze giganti, qualche decina di MeV, e nel picco quasi elastico, alcune centinaia di MeV.

Come esempio di un'eventuale eccitazione mostriamo in figura il confronto tra i dati sperimentali e le previsioni della RPA per la sezione d'urto totale di fotoassorbimento per il nucleo di ^{16}O [Co' 85]. Questo calcolo è stato fatto sviluppando le equazioni RPA su una base di funzioni di Fourier-Bessel e utilizzando un'interazione residua a zero-range.

Il successo della teoria consiste nel prevedere l'eccitazione collettiva del nucleo all'energia corretta. Purtroppo il picco teorico è più alto di quello misurato e l'ampiezza della curva calcolata è più stretta di quella sperimentale. È evidente quindi la necessità di andare oltre la RPA per ottenere descrizioni più accurate delle eccitazioni nucleari.

¹Il nome "Random Phase Approximation" ha una motivazione storica ma non fa riferimento ad alcuna approssimazione intrinseca della teoria.

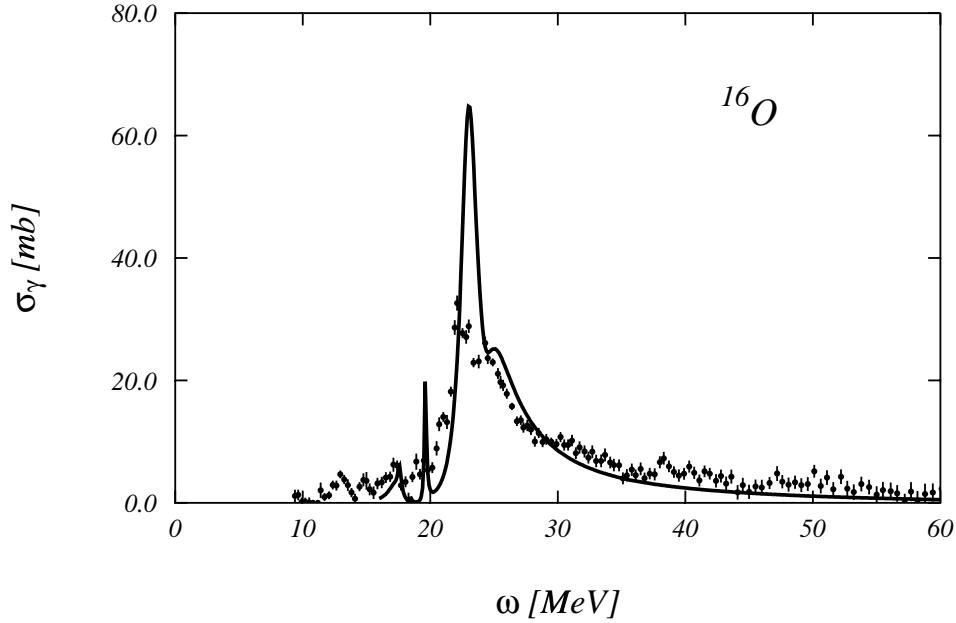


Figura 1: Sezione d'urto totale di fotoassorbimento per il nucleo ^{16}O . Confronto tra andamento previsto dalla teoria (linea continua) e punti sperimentali.

La teoria RPA è stata ampiamente utilizzata nel passato facendo ricorso ad approssimazioni che ne limitavano il campo di applicabilità. Una moderna formulazione della teoria deve considerare eccitazioni nel continuo, l'uso di interazioni a raggio finito e l'eventuale possibilità di estendere la teoria includendo eccitazioni più complesse di quelle trattate nella RPA. Una formulazione che risponde a queste esigenze è quella nello spazio delle coordinate. Questa formulazione permette di trattare il continuo senza fare troncamenti dello spazio delle configurazioni. Essa inoltre gestisce allo stesso modo i termini diretti e di scambio dell'elemento di matrice di interazione, permettendo di utilizzare interazioni a range finito senza dover effettuare approssimazioni.

In questo lavoro formuleremo le equazioni RPA nello spazio delle coordinate con interazioni a raggio finito, svilupperemo un algoritmo che permetta la soluzione numerica di queste equazioni e ne studieremo la validità.

Capitolo 1

La teoria Random Phase Approximation (RPA)

1.1 Introduzione

In questo capitolo presenteremo una formulazione della teoria RPA.

Dal punto di vista matematico, lo sviluppo della teoria RPA si riduce alla risoluzione di due equazioni accoppiate; tali equazioni saranno ricavate usando il *metodo dell'equazione del moto*, descritto nel paragrafo successivo.

Un altro metodo per ricavare il sistema di equazioni RPA è il metodo *Time Dependent Hartree Fock (TDHF)*, che utilizza il principio variazionale e in cui lo stato fondamentale è calcolato minimizzando il funzionale energia:

$$E = \frac{<\Psi|H|\Psi>}{<\Psi|\Psi>}$$

Le equazioni RPA ottenute nel primo paragrafo di questo capitolo saranno poi riscritte in accoppiamento angolare.

1.2 Le equazioni RPA

In questo paragrafo descriveremo il *metodo dell'equazione del moto* per la derivazione del sistema di equazioni RPA [Row 70].

Consideriamo il seguente problema agli autovalori:

$$H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle \quad (1.1)$$

dove H è l'hamiltoniana di un generico sistema di A fermioni identici, mentre $\{|\nu\rangle\}$ è l'insieme degli autostati (in particolare $|0\rangle$ indica lo stato fondamentale del sistema).

Nella notazione sintetica $|\nu\rangle$ è incluso l'intero set dei numeri quantici che caratterizzano lo stato.

È possibile definire un operatore Q_ν^+ che agisca nel seguente modo:

$$Q_\nu^+|0\rangle = |\nu\rangle \quad (1.2)$$

$$Q_\nu|0\rangle = 0 \quad (1.3)$$

Dalla (1.1) si ha:

$$[H, Q_\nu^+]|0\rangle = (E_\nu - E_0) Q_\nu^+|0\rangle \quad (1.4)$$

$$[H, Q_\nu]|0\rangle = 0 \quad (1.5)$$

(il calcolo dettagliato è riportato in Appendice A).

Sia A un operatore generico; dalla (1.4) otteniamo la seguente relazione:

$$\langle 0 | [A, [H, Q_\nu^+]] | 0 \rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0 | [A, Q_\nu^+] | 0 \rangle \quad (1.6)$$

In particolare, considerando una variazione casuale di Q_ν , si ha:

$$\langle 0 | [\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^+]] | 0 \rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0 | [\delta Q_\nu, Q_\nu^+] | 0 \rangle \quad (1.7)$$

La precedente espressione ricorda l'equazione di evoluzione temporale degli operatori in rappresentazione di Heisenberg e per questo motivo prende il nome di *equazione del moto*. Tale equazione costituisce il punto di partenza per la costruzione della teoria RPA.

Per ricavare l'espressione (1.7) non è stata fatta alcuna ipotesi sull'operatore Q . Tamite la definizione di quest'operatore, dalla (1.3) si ottiene anche la definizione dello stato fondamentale.

Per ottenere la teoria RPA, l'operatore Q_ν^+ è definito come:

$$Q_\nu^+ = \sum_{mi} (X_{mi}^\nu a_m^+ a_i - Y_{mi}^\nu a_i^+ a_m) \quad (1.8)$$

dove a_ν^+ ed a_ν sono rispettivamente gli operatori di creazione e di distruzione di particelle nello stato ν ; è usata la convenzione secondo cui i livelli energetici al di sopra della superficie di Fermi sono indicati con le lettere m, n, p, q, r mentre quelli al di sotto con h, i, j, k, l . Le ampiezze X_{mi}^ν e Y_{mi}^ν sono reali e i loro valori si ottengono risolvendo un sistema di equazioni accoppiate che si arriverà a scrivere alla fine del paragrafo.

Dal momento che l'operatore Q_ν^+ contiene l'operatore di creazione di uno stato particella-buca, $a_m^+ a_i$, ed anche l'operatore di distruzione di uno stato particella-buca, $a_i^+ a_m$, lo stato fondamentale nella teoria RPA deve contenere eccitazioni particella-buca perché le equazioni (1.2) e (1.3) siano soddisfatte.

La variazione dell'operatore definito dalla (1.8) ha la seguente espressione:

$$\delta Q_\nu^+ = \sum_{mi} (\delta X_{mi}^\nu a_m^+ a_i - \delta Y_{mi}^\nu a_i^+ a_m) \quad (1.9)$$

e ovviamente si ha:

$$\delta Q_\nu = \sum_{mi} (\delta X_{mi}^\nu a_i^+ a_m - \delta Y_{mi}^\nu a_m^+ a_i) \quad (1.10)$$

Inserendo la (1.10) nella (1.7), dal momento che le variazioni δX_{mi}^ν e δY_{mi}^ν sono tutte indipendenti tra loro, dall'equazione del moto si ottiene un sistema di due equazioni accoppiate, una ottenuta dalla variazione di X , l'altra dalla variazione di Y (Appendice A):

$$\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \quad (1.11)$$

$$\langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \quad (1.12)$$

dove con ω_ν si indica l'energia di eccitazione $E_\nu - E_0$ dello stato $|\nu\rangle$.

È possibile nel primo e nel secondo membro della (1.11) esplicitare l'operatore Q_ν^+ .

Per il primo membro otteniamo (i calcoli dettagliati sono riportati in Appendice A):

$$\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \sum_{nj} (X_{nj}^\nu A_{minj} + Y_{nj}^\nu B_{minj}) \quad (1.13)$$

dove:

$$A_{minj} = \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | \Psi_0 \rangle \quad (1.14)$$

$$B_{minj} = - \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]] | \Psi_0 \rangle \quad (1.15)$$

Per il secondo membro si ha:

$$\begin{aligned} \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle &= \\ &= \omega_\nu \sum_{nj} \{ X_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | \Psi_0 \rangle + \\ &\quad - Y_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | \Psi_0 \rangle \} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Per poter valutare gli elementi di matrice che compaiono nelle espressioni (1.14), (1.15) e (1.16), è necessario ricorrere all'Approssimazione Quasi Bosonica, QBA¹.

¹Il nome della QBA deriva dal fatto che il risultato del commutatore è quello che si otterrebbe se gli operatori di eccitazione $O_{nj}^+ = a_n^+ a_j$ e $O_{im} = a_i^+ a_m$ commutassero come operatori bosonici:

$$[O_{nj}^+, O_{im}] = \delta_{ij} \delta_{mn}$$

La QBA consiste nell'approssimare, nel calcolo di commutatori, l'autostato $|\Psi_0\rangle$ con lo stato Hartree-Fock $|\Phi_0\rangle$:

$$\langle \Psi_0 | [,] | \Psi_0 \rangle \longrightarrow \langle \Phi_0 | [,] | \Phi_0 \rangle$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | \Psi_0 \rangle &\simeq \langle \Phi_0 | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | \Phi_0 \rangle = \\ &= \langle \Phi_0 | a_i^+ a_m a_n^+ a_j | \Phi_0 \rangle = \delta_{nj} \delta_{mi} \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | \Psi_0 \rangle &\simeq \langle \Phi_0 | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | \Phi_0 \rangle = \\ &= \langle \Phi_0 | a_i^+ a_m a_j^+ a_n | \Phi_0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Il secondo membro della (1.11) può quindi essere scritto come:

$$\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu X_{mi}^\nu \quad (1.17)$$

L'equazione (1.11) può quindi essere espressa nel modo seguente:

$$\sum_{nj} [X_{nj}^\nu A_{minj} + Y_{nj}^\nu B_{minj}] = \omega_\nu X_{mi}^\nu \quad (1.18)$$

L'equazione (1.12) diventa invece (Appendice A):

$$\sum_{nj} [X_{nj}^\nu B_{minj}^* + Y_{nj}^\nu A_{minj}^*] = -\omega_\nu Y_{mi}^\nu \quad (1.19)$$

In forma matriciale le due equazioni possono essere espresse come:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

È possibile a questo punto calcolare gli elementi di matrice A e B utilizzando la QBA (Appendice A).

$$A_{minj} = \langle \Phi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | \Phi_0 \rangle \quad (1.21)$$

$$B_{minj} = - \langle \Phi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]] | \Phi_0 \rangle \quad (1.22)$$

L'hamiltoniana che compare nella (1.1) ha la seguente espressione:

$$H = \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^A U(i) + \sum_{i < j}^A v(i, j) - \sum_{i=1}^A U(i) = H_0 + V_{residuo} \quad (1.23)$$

Dove:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^A U(i) = \sum_{i=1}^A h_i \quad (1.24)$$

i e j indicano i numeri quantici dei nucleoni i-esimo e j-esimo;

m_i indica la massa del nucleone i-esimo;

$U(i)$ è un arbitrario potenziale medio ad un corpo;

$v(i, j)$ è l'interazione di una coppia di nucleoni.

Nella Rappresentazione dei Numeri di Occupazione (RNO) la (1.23) può essere espressa come:

$$H = \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} a_{\alpha}^+ a_{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{ijij} \bar{V}_{ijij} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} N[a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}] \quad (1.25)$$

dove:

$$h_{\alpha\beta} = \langle \alpha | h | \beta \rangle = t_{\alpha\beta} + \sum_i \bar{V}_{\alpha i \beta i} \quad (1.26)$$

con:

$$t_{\alpha\beta} = \langle \alpha | t | \beta \rangle = \int d^3r \phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) t(\mathbf{r}) \phi_{\beta}(\mathbf{r})$$

$\bar{V}_{ijij} = V_{ijij} - V_{ijji}$ è il valor medio antisimmetrizzato dell'interazione residua con:

$$V_{ijij} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \phi_j^*(\mathbf{r}_1) \phi_i^*(\mathbf{r}_2) v(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_j(\mathbf{r}_2);$$

$N[a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}]$ è il Prodotto Normale Ordinato degli operatori di distruzione e di creazione.

Il set di funzioni $\{\phi_\alpha(\mathbf{r})\}$ è una base di autostati di h tali che:

$$h\phi_\alpha(\mathbf{r}) = \epsilon_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{r}) \quad (1.27)$$

In seguito a pochi passaggi (riportati in Appendice A), si giunge ad ottenere le seguenti espressioni per gli elementi di matrice A e B :

$$A_{minj} = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{ji} \delta_{nm} + \bar{V}_{mjin} \quad (1.28)$$

$$B_{minj} = \bar{V}_{mni} \quad (1.29)$$

Le equazioni (1.18) e (1.19) diventano quindi:

$$(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega_\nu) X_{ph}^\nu + \sum_{p'h'} (v_{ph,p'h'} X_{p'h'}^\nu + u_{ph,p'h'} Y_{p'h'}^\nu) = 0 \quad (1.30)$$

$$(\epsilon_p - \epsilon_h + \omega_\nu) Y_{ph}^\nu + \sum_{p'h'} (v_{ph,p'h'}^* Y_{p'h'}^\nu + u_{ph,p'h'}^* X_{p'h'}^\nu) = 0 \quad (1.31)$$

dove p e h indicano generici stati di particella e buca.

I termini di interazione v e u sono definiti nel modo seguente:

$$v_{ph,p'h'} = \bar{V}_{ph'h'} = \langle ph' | V | hp' \rangle - \langle ph' | V | p'h \rangle \quad (1.32)$$

$$u_{ph,p'h'} = \bar{V}_{pp'h'} = \langle pp' | V | hh' \rangle - \langle pp' | V | h'h \rangle \quad (1.33)$$

ed è possibile dimostrare, per futura comodità, che valgono anche le seguenti uguaglianze:

$$v_{ph,p'h'} = \langle p'h | V | h'p \rangle - \langle p'h | V | ph' \rangle \quad (1.34)$$

$$u_{ph,p'h'} = \langle hh' | V | pp' \rangle - \langle hh' | V | p'p \rangle \quad (1.35)$$

Le equazioni (1.30) e (1.31) formano un sistema lineare omogeneo nelle incognite X e Y .

Imponendo una relazione di normalizzazione degli stati eccitati del tipo:

$$\langle \nu | \nu' \rangle = \delta_{\nu\nu'} \quad (1.36)$$

si ha una conseguente relazione di normalizzazione delle X e delle Y:

$$\sum_{ph} (X_{ph}^\nu X_{ph}^{\nu'} - Y_{ph}^\nu Y_{ph}^{\nu'}) = \delta_{\nu\nu'} \quad (1.37)$$

1.3 Le equazioni RPA in accoppiamento angolare

Il sistema di equazioni RPA riportato nelle espressioni (1.30) e (1.31) è scritto in una rappresentazione generica.

Il potenziale medio ad un corpo presente nell'hamiltoniana di singola particella h , sarà in questo lavoro di tesi un potenziale di Woods-Saxon contenente, oltre ad un termine centrale, un termine di spin-orbita, quindi le funzioni d'onda di singola particella saranno autostati simultanei del quadrato del momento angolare totale, \mathbf{J}^2 , della sua terza componente, j_z , del quadrato del momento angolare orbitale, \mathbf{l}^2 , del quadrato del momento angolare di spin, \mathbf{s}^2 , e della terza componente dell'isospin, t . Prendendo come base tali stati di singola particella e considerando solo la parte angolare, indicheremo il generico stato contenente un'eccitazione p-h con il ket $|j_p m_p j_h m_h >$, appartenente allo spazio degli osservabili precedentemente citati.

Dal momento che lo stato di un nucleo è descritto dal momento angolare totale e dalla parità, riscriveremo le equazioni RPA accoppiando i momenti angolari di particelle e buche, cioè usando autostati simultanei degli osservabili \mathbf{J}^2 , con $\mathbf{J} = \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_h$, e $J_z = j_{p,z} + j_{h,z}$.

Bisogna premettere che, affinché il generico operatore di creazione o di distruzione che agisce sulla funzione d'onda di singola particella sia un tensore sferico irriducibile, deve valere in generale la seguente proprietà:

$$(T_q^k)^+ = (T_{-q}^k)(-)^q \quad (1.38)$$

cioè, nel caso di un operatore a_q^+ :

$$(a_{m_q}^{+j_q})^+ = (-)^{j_q+m_q} a_{-m_q}^{j_q} \quad (1.39)$$

Pertanto un operatore di creazione di una coppia particella-buca ha la seguente espressione:

$$O_{ph} = a_{m_p}^{+j_p} (-)^{j_h+m_h} a_{-m_h}^{j_h} \quad (1.40)$$

L'operatore $Q^+(j_p, j_h)$ diventa:

$$Q^+(j_p, j_h) = \sum_{ph} [X_{ph} a_{m_p}^{+j_p} (-)^{j_h+m_h} a_{-m_h}^{j_h} - Y_{ph} a_{m_h}^{+j_h} (-)^{j_p+m_p} a_{-m_p}^{j_p}] \quad (1.41)$$

Sia $S_h = (-)^{j_h+m_h}$. I coefficienti v ed u contenenti l'interazione residua nelle equazioni (1.30) e (1.31) possono essere riscritti in funzione del nuovo set di osservabili (i calcoli dettagliati sono riportati in Appendice B).

Otteniamo:

$$\begin{aligned} v_{php'h'} &= \sum_{JM} S_h S_{h'} \langle j_{p'} m_{p'} j_h - m_h | JM \rangle \langle j_{h'} - m_{h'} j_p m_p | JM \rangle \\ &\quad \{ \langle j_{p'} j_h J | V | j_{h'} j_p J \rangle - (-)^{j_p + j_{h'} - J} \langle j_{p'} j_h J | V | j_p j_{h'} J \rangle \} \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} u_{php'h'} &= \sum_{JM} S_h S_{h'} \langle j_h - m_h j_{h'} - m_{h'} | JM \rangle \langle j_p - m_p j_{p'} m_{p'} | JM \rangle \\ &\quad \{ \langle j_h j_{h'} J | V | j_p j_{p'} J \rangle - (-)^{j_p + j_{p'} - J} \langle j_h j_{h'} J | V | j_{p'} j_p J \rangle \} \end{aligned} \quad (1.43)$$

dove oggetti del tipo $\langle j_a m_a j_b m_b | J' M' \rangle$ sono *coefficienti di Clebsh Gordan*.

Per arrivare a scrivere le equazioni RPA in accoppiamento angolare, il prossimo passo è quello di calcolare, utilizzando le espressioni di v ed u appena trovate, le seguenti somme:

$$R_{ph,p'h'} = \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | J' M' \rangle v_{ph,p'h'} \quad (1.44)$$

$$S_{ph,p'h'} = \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | J' M' \rangle u_{ph,p'h'} \quad (1.45)$$

Risulta conveniente nello sviluppo dei calcoli utilizzare i simboli 3j al posto dei coefficienti di Clebsh Gordan.

In generale vale la seguente relazione:

$$\langle j_a j_b m_a m_b | JM \rangle = (-1)^{j_a - j_b + M} \hat{J} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ m_a & m_b & -M \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

con $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$.

La parte angolare della (1.44) (escluso cioè quel che è compreso tra parentesi graffe nella (1.42)) diventa quindi:

$$\begin{aligned} ANG(R_{ph,p'h'}) &= \sum_{JM} \sum_{m_p m_h} \hat{J}' \hat{J}^2 S_h S_{h'} (-)^{j_h - j_p - M' + j_h - j_{p'} - M + j_p - j_{h'} - M} \\ &\quad \begin{pmatrix} j_p & j_h & J' \\ m_p & m_h & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{p'} & j_h & J \\ m_{p'} & -m_h & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{h'} & j_p & J \\ -m_{h'} & m_p & -M \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{JM} \sum_{m_p m_h} \hat{J}' \hat{J}^2 S_h S_{h'} (-)^{j_h + j_h - j_{p'} - j_{h'} - M'} \\ &\quad \begin{pmatrix} j_p & j_h & J' \\ m_p & m_h & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{p'} & j_h & J \\ m_{p'} & -m_h & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{h'} & j_p & J \\ -m_{h'} & m_p & -M \end{pmatrix} \quad (1.47) \end{aligned}$$

Per le seguenti proprietà dei 3j:

$$\begin{pmatrix} j_{p'} & j_h & J \\ m_{p'} & -m_h & -M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_h & J & j_{p'} \\ -m_h & -M & m_{p'} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

e:

$$\begin{pmatrix} j_{h'} & j_p & J \\ -m_{h'} & m_p & -M \end{pmatrix} = (-1)^{j_{h'} - p + j_{h'} + J} \begin{pmatrix} j_{h'} & j_p & J \\ m_{h'} & -m_p & M \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J & j_p & j_{h'} \\ M & -m_p & m_{h'} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

la parte angolare della (1.44), esplicitando S_h , può essere riscritta nel seguente modo:

$$ANG(R_{ph,p'h'}) = \sum_J \hat{J}' \hat{J}^2 S_{h'}(-)^{-j_{p'}-j_{h'}-M'} \sum_{Mm_h m_p} (-)^{j_h+j_h+j_h+m_h} \\ \begin{pmatrix} j_p & j_h & J' \\ m_p & m_h & -M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_h & J & j_{p'} \\ -m_h & -M & m_{p'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & j_p & j_{h'} \\ M & -m_p & m_{h'} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Introducendo la fase:

$$(-1)^{j_p+j_h+J+m_p-m_h+M} (-1)^{-j_p-j_h-J-m_p+m_h-M} = 1$$

otteniamo:

$$ANG(R_{ph,p'h'}) = \sum_J \hat{J}' \hat{J}^2 S_{h'}(-)^{-j_{p'}-j_{h'}-M'} \sum_{Mm_h m_p} (-)^{j_h+j_h+j_h+m_h} \\ (-1)^{j_p+j_h+J+m_p-m_h+M} (-1)^{-j_p-j_h-J-m_p+m_h-M} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J' \\ m_p & m_h & -M' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} j_h & J & j_{p'} \\ -m_h & -M & m_{p'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & j_p & j_{h'} \\ M & -m_p & m_{h'} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Per definizione del simbolo $6j$ si ha:

$$\sum_{Mm_h m_p} (-1)^{j_p+j_h+J+m_p-m_h+M} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J' \\ m_p & m_h & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_h & J & j_{p'} \\ -m_h & -M & m_{p'} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} J & j_p & j_{h'} \\ M & -m_p & m_{h'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{p'} & j_{h'} & J' \\ m_{p'} & m_{h'} & -M' \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} j_{p'} \quad j_{h'} \quad J' \\ j_p \quad j_h \quad J \end{array} \right\} \quad (1.52)$$

Riscrivendo l'intera espressione (1.44) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | J' M' \rangle v_{ph, p'h'} = \\
 & = \sum_J (-)^{j_{h'} + j_p + J} \hat{J} \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | J' M' \rangle \left\{ \begin{array}{ccc} j_{p'} & j_{h'} & J' \\ j_p & j_h & J \end{array} \right\} \\
 & \{ \langle j_h j_{h'} J | V | j_p j_{p'} J \rangle - (-)^{j_p + j_{p'} - J} \langle j_h j_{h'} J | V | j_{p'} j_p J \rangle \} = \\
 & = \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | J' M' \rangle \sum_J (-)^{j_{h'} + j_p + J} \hat{J} \left\{ \begin{array}{ccc} j_{p'} & j_{h'} & J' \\ j_p & j_h & J \end{array} \right\} \\
 & \{ \langle j_h j_{h'} J | V | j_p j_{p'} J \rangle - (-)^{j_p + j_{p'} - J} \langle j_h j_{h'} J | V | j_{p'} j_p J \rangle \} = \\
 & = \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | J' M' \rangle v_{ph, p'h'}^{J'} \tag{1.53}
 \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 v_{ph, p'h'}^{J'} = & \sum_J (-)^{j_{h'} + j_p + J} \hat{J} \left\{ \begin{array}{ccc} j_{p'} & j_{h'} & J' \\ j_p & j_h & J \end{array} \right\} \{ \langle j_{p'} j_h J | V | j_{h'} j_p J \rangle + \\
 & - (-)^{j_p + j_{h'} - J} \langle j_{p'} j_h J | V | j_p j_{h'} J \rangle \} \tag{1.54}
 \end{aligned}$$

Un calcolo analogo porta ad un'espressione per $u_{ph, p'h'}^{J'}$ del tipo:

$$u_{ph, p'h'}^{J'} = (-)^{j_{h'} - j_{p'} - J'} v_{ph, h'p'}^{J'} \tag{1.55}$$

Moltiplicando le equazioni (1.30) e (1.31) per i fattori, rispettivamente,

$\sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | J M \rangle$ e $\sum_{m_p m_h} S_{-J} \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle$, con $S_{-J} = (-1)^{J-M}$, si ottengono (Appendice B) le nuove equazioni RPA accoppiate in momento angolare:

$$(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega_J) X_{ph}^J + \sum_{p'h'} (v_{php'h'}^J X_{p'h'}^J + u_{php'h'}^J Y_{p'h'}^J) = 0 \tag{1.56}$$

$$(\epsilon_p - \epsilon_h + \omega_J) Y_{ph}^J + \sum_{p'h'} (v_{php'h'}^{J*} Y_{p'h'}^J + u_{php'h'}^{J*} X_{p'h'}^J) = 0 \tag{1.57}$$

con:

$$X_{ph}^J = \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle X_{ph} \quad (1.58)$$

$$Y_{ph}^J = \sum_{m_p m_h} S_{-J} \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle Y_{ph} \quad (1.59)$$

1.4 Elemento di matrice di transizione

In questo paragrafo ci proponiamo di calcolare l'elemento di matrice di transizione indotto da un operatore ad un corpo nell'ambito della teoria RPA.

Indichiamo con il ket $|\Psi_\nu\rangle$ un generico stato eccitato del nucleo.

Dalla (1.2) si ha:

$$|\Psi_\nu\rangle = Q_\nu^+ |\Psi_0\rangle \quad (1.60)$$

dove $|\Psi_0\rangle$ indica lo stato fondamentale RPA, mentre Q_ν^+ è l'operatore mediante il quale si costruisce la teoria ed è definito dalla (1.8).

Nella Rappresentazione dei Numeri di Occupazione un operatore ad un corpo T è scritto in generale come:

$$T = \sum_{\sigma \lambda} \langle \sigma | T | \lambda \rangle a_\sigma^+ a_\lambda \quad (1.61)$$

dove $|\sigma\rangle$ e $|\lambda\rangle$ sono stati di singola particella caratterizzati dai set di numeri quantici σ e λ .

Dalla (1.60) si ha che l'elemento di matrice di transizione dallo stato fondamentale allo stato $|\Psi_\nu\rangle$ indotto dall'operatore T è il seguente:

$$\langle \Psi_\nu | T | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | Q_\nu T | \Psi_0 \rangle \quad (1.62)$$

Tenendo conto della (1.3) otteniamo:

$$[Q_\nu, T] |\Psi_0\rangle = Q_\nu T |\Psi_0\rangle \quad (1.63)$$

Si ha quindi, applicando la QBA ed esplicitando le espressioni degli operatori Q_ν e T :

$$\begin{aligned}
 <\Psi_\nu | T | \Psi_0> &= <\Psi_0 | [Q_\nu, T] | \Psi_0> \simeq <\Phi_0 | [Q_\nu, T] | \Phi_0> = \\
 &= <\Phi_0 | \left[\sum_{ph} (X_{ph}^\nu a_h^+ a_p - Y_{ph}^\nu a_p^+ a_h) \right], \sum_{\sigma\lambda} <\sigma | T | \lambda> a_\sigma^+ a_\lambda] | \Phi_0> = \\
 &= <\Phi_0 | \sum_{ph} \sum_{\sigma\lambda} \{ X_{ph}^\nu <\sigma | T | \lambda> (a_h^+ a_p a_\sigma^+ a_\lambda - a_\sigma^+ a_\lambda a_h^+ a_p) + \\
 &\quad - Y_{ph}^\nu <\sigma | T | \lambda> (a_p^+ a_h a_\sigma^+ a_\lambda - a_\sigma^+ a_\lambda a_p^+ a_h) \} | \Phi_0> \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

dove $|\Phi_0>$ è lo stato fondamentale di campo medio.

Applicando il *teorema di Wick*, per il quale un prodotto di operatori può essere scritto come somma di Prodotti Normali Ordinati in cui sono effettuate tutte le possibili contrazioni, si ha infine la seguente espressione per l'elemento di transizione dell'operatore ad un corpo T :

$$<\Psi_\nu | T | \Psi_0> \simeq \sum_{ph} \{ X_{ph}^\nu <p | T | h> + Y_{ph}^\nu <h | T | p> \} \tag{1.65}$$

In Appendice D mostriamo che, quando si considera l'accoppiamento a buon momento angolare e si separano le dipendenze angolari e radiali dell'operatore T , $T = Q(r)O(\Omega)$, l'elemento di matrice di transizione può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
 < J | | T | | 0> &= \\
 &= \frac{1}{\hat{J}} \sum_{j_p j_h} [X_{ph}^J <j_p | | O(\Omega) | | j_h> \int dr r^2 R_p(r) R_h(r) Q(r) + \\
 &\quad + (-1)^{J+j_p+j_h} Y_{ph}^J <j_h | | O(\Omega) | | j_p> \int dr r^2 R_p(r) R_h(r) Q(r)] \tag{1.66}
 \end{aligned}$$

dove $R_p(r)$ e $R_h(r)$ sono funzioni radiali di singola particella e di buca relative agli stati p ed h .

Capitolo 2

Le equazioni RPA nel continuo

2.1 Introduzione

In questo capitolo presenteremo una formulazione delle equazioni RPA nel continuo.

Quando una forza esterna è applicata ad un nucleo, questo viene eccitato essenzialmente attraverso eccitazioni particella-buca. Fino ad un certo valore dell'energia trasferita dal campo esterno, il nucleo è eccitato solo per valori discreti dell'energia; quando invece l'energia trasmessa dal campo è al di sopra della soglia di emissione di particelle, il nucleo è eccitato per qualunque valore dell'energia e la particella eccitata da uno stato di buco viene a trovarsi nel *continuo*.

L'interazione residua crea correlazioni tra le coppie particella-buco (*ph*), che rivestono un ruolo determinante nella descrizione delle caratteristiche dello spettro di eccitazione nel continuo [Kno 91].

La nuova formulazione delle equazioni RPA, che presenteremo nel prossimo paragrafo, renderà possibile il calcolo dello spettro di eccitazione del nucleo nel continuo tenendo conto delle correlazioni *ph*.

In realtà le nuove equazioni costituiranno una generalizzazione delle equazioni ricavate nel capitolo precedente, dal momento che permetteranno uno studio dello spettro di eccitazione non solo nel continuo ma anche nel discreto.

Nel terzo ed ultimo paragrafo del capitolo il nuovo sistema di equazioni RPA sarà riscritto nello spazio delle coordinate.

2.2 Equazioni RPA nel continuo

È possibile formulare una generalizzazione del sistema di equazioni RPA (1.56) e (1.57) considerando ϵ_p come una varabile continua.

Se la particella è nel continuo, $X_{ph,p'h'}$ e $Y_{ph,p'h'}$ dipendono da ϵ_p e le somme sull'indice p si trasformano in una somma su tutti i numeri quantici che caratterizzano la particella p e in un integrale sull'energia ϵ_p .

Osserviamo che, scegliendo un'interazione V reale, i coefficienti v ed u che compaiono nelle (1.56) e (1.57) sono reali. Otteniamo le seguenti espressioni:

$$(\epsilon_p - \epsilon_h - E)X_{ph}^{J,E}(\epsilon_p) + \sum_{p'h'}^{discr.} (v_{ph,p'h'}^J X_{p'h'}^{J,E} + u_{ph,p'h'}^J Y_{p'h'}^{J,E}) + \\ + \sum_{p'h'}^{cont.} \int d\epsilon_{p'} (v_{ph,p'h'}^J(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) X_{p'h'}^{J,E}(\epsilon_{p'}) + u_{ph,p'h'}^J(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) Y_{p'h'}^{J,E}(\epsilon_{p'})) = 0 \quad (2.1)$$

$$(\epsilon_p - \epsilon_h + E)Y_{ph}^{J,E}(\epsilon_p) + \sum_{p'h'}^{discr.} (v_{ph,p'h'}^J Y_{p'h'}^{J,E} + u_{ph,p'h'}^J X_{p'h'}^{J,E}) + \\ + \sum_{p'h'}^{cont.} \int d\epsilon_{p'} (v_{ph,p'h'}^J(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) Y_{p'h'}^{J,E}(\epsilon_{p'}) + u_{ph,p'h'}^J(\epsilon_p, \epsilon_{p'}) X_{p'h'}^{J,E}(\epsilon_{p'})) = 0 \quad (2.2)$$

Per semplificare la notazione, nel seguito scriveremo:

$$X_{ph}^{J,E}(\epsilon_p) \longrightarrow X_{ph}(\epsilon_p)$$

$$Y_{ph}^{J,E}(\epsilon_p) \longrightarrow Y_{ph}(\epsilon_p)$$

tenendo comunque presente il fatto che le soluzioni delle equazioni (2.1) e (2.2) sono ottenute per J , parità ed energia di eccitazione fissati.

Per risolvere il precedente sistema di equazioni è necessario specificare l'espressione dell'interazione residua V per poter poi calcolare gli elementi di matrice contenuti nei coefficienti v^J e u^J .

2.3 Equazioni RPA nel continuo nello spazio delle coordinate

In questo paragrafo ricaveremo una formulazione nello spazio delle coordinate delle equazioni RPA nel continuo.

Il punto di partenza è ovviamente il sistema formato dalle equazioni (2.1) e (2.2).

Definiamo:

$$f_{ph}(r) = \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p X_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) \quad (2.3)$$

$$g_{ph}(r) = \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p Y_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) \quad (2.4)$$

dove il simbolo $\sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p$ indica una somma sui livelli discreti al di sopra della superficie di Fermi ed un integrale su tutti i livelli continui.

Le $R_p(r)$ sono le parti radiali delle funzioni d'onda di singola particella che costituiscono un set di autostati, soluzioni della seguente equazione agli autovalori:

$$h\phi_p(\mathbf{r}) = \epsilon_p \phi_p(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

separando parte radiale e parte angolare della funzione d'onda $\phi_p(\mathbf{r})$ si ha:

$$\phi_p(\mathbf{r}) = R_p(r)Y_{lj}^m(\Omega) \quad (2.6)$$

In generale gli elementi di matrice $v_{ph,p'h'}$ e $u_{ph,p'h'}$ possono essere scritti come prodotti di un termine dipendente solo dalla parte radiale della funzione d'onda ed uno dipendente solo dalla parte angolare.

Definiamo per futura comodità:

$$V_J(r_1, r_2) = \int dq q^2 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} j_J(qr_1) j_J(qr_2) V(q) \quad (2.7)$$

È possibile scrivere i coefficienti $v_{ph,p'h'}$ e $u_{ph,p'h'}$ nel modo seguente (in Appendice C è descritto il calcolo esplicito degli elementi di matrice nel caso di un'interazione residua puramente scalare):

$$\begin{aligned} v_{ph,p'h'} &= v_{ph,p'h'}^{dir} - v_{ph,p'h'}^{exch} = \\ &= \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) V_J(r_1, r_2) + \\ &\quad - \sum_l \langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_{p'}(r_1, \epsilon_{p'}) \\ &\quad \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_h(r_2) V_l(r_1, r_2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} u_{ph,p'h'} &= u_{ph,p'h'}^{dir} - u_{ph,p'h'}^{exch} = \\ &= \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) V_J(r_1, r_2) + \\ &\quad - \sum_l \langle u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_{h'}(r_1) \\ &\quad \int dr_2 r_2^2 R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) R_h(r_2) V_l(r_1, r_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sostituendo le espressioni di $v_{ph,p'h'}$ e $u_{ph,p'h'}$ nell'equazione (2.1) otteniamo:

$$(\epsilon_p - \epsilon_h - E) X_{ph}(\epsilon_p) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p'h'}^{discr.} \left[\int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2) \langle v_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle + \right. \\
& - \sum_l \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_{p'}(r_1) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) R_{h'}(r_2) \langle v_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l] \\
& X_{p'h'} + \\
& + \left[\int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2) \langle u_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle + \right. \\
& - \sum_l \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_1) R_p(r_1, \epsilon_p) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) R_{p'}(r_2) \langle u_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l] \\
& Y_{p'h'} + \\
& + \sum_{p'h'}^{cont.} \int d\epsilon_{p'} \left[\int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) \right. \\
& \left. \langle v_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle + \right. \\
& \left. - \sum_l \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_{p'}(r_1, \epsilon_{p'}) R_{p'}(r_1, \epsilon_{p'}) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) R_{h'}(r_2) \right. \\
& \left. \langle v_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \right] X_{p'h'}(\epsilon_{p'}) + \\
& + \left[\int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) \langle u_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle + \right. \\
& \left. - \sum_l \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_1) R_p(r_1, \epsilon_p) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) \langle u_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \right] \\
& Y_{p'h'}(\epsilon_{p'}) = 0 \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Consideriamo la relazione di completezza esistente tra le parti radiali, $R_p(r, \epsilon)$, delle funzioni d'onda di singola particella definite dalla (2.6) :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\epsilon}^{discr.} R_{\alpha}(r, \epsilon) R_{\alpha}(r', \epsilon) + \int_0^{\infty} d\epsilon R_{\alpha}(r, \epsilon) R_{\alpha}(r', \epsilon) = \\
& = \sum_{\epsilon < \epsilon_f} R_{\alpha}(r, \epsilon) R_{\alpha}(r', \epsilon) + \sum_{\epsilon > \epsilon_f}^{\infty} d\epsilon R_{\alpha}(r, \epsilon) R_{\alpha}(r', \epsilon) = \delta(r - r') \tag{2.11}
\end{aligned}$$

L'indice α si riferisce al set di numeri quantici che caratterizzano lo stato rappresentato dalla funzione d'onda, $\alpha = (l, j, m, \epsilon)$.

Nella (2.11) si ha una somma su livelli discreti per gli stati di buca, situati al di sotto della superficie di Fermi, ed una somma o un integrale per gli stati di particella, che possono essere situati nel discreto o nel continuo.

Moltiplichiamo l'equazione (2.10) a sinistra per $R_p(r, \epsilon_p)$ ed applichiamo $\sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p$.

Per il primo termine del primo membro otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p (\epsilon_p - \epsilon_h - E) X_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) &= \\ = (h_p - \epsilon_h - E) \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p X_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove si è utilizzata l'equazione radiale agli autovalori:

$$h_p R_p(r, \epsilon_p) = \epsilon_p R_p(r, \epsilon_p) \quad (2.13)$$

Ricordando la definizione (2.3) si ottiene:

$$\sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p (\epsilon_p - \epsilon_h - E) X_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) = (h_p - \epsilon_h - E) f_{ph}(r) \quad (2.14)$$

Il termine discreto e quello continuo contenenti l'elemento di matrice $\langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle$ possono essere raggruppati in un'unica espressione.

Otteniamo, ricordando la (2.11):

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p R_p(r, \epsilon_p) \sum_{p'h'} \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_{p'} \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle &= \int dr_1 r_1^2 \\ \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) X_{p'h'}(\epsilon_{p'}) &= \\ = \sum_{p'h'} \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle &= \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 [\delta(r - r_1) - \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) R_p(r_1, \epsilon_p)] \\ R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) f_{p'h'}(r_2) &= \\ = \sum_{p'h'} \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle &= R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) + \\ - \sum_{p'h'} \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle &= \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_p(r_1, \epsilon_p) \\ V(r_1, r_2) R_h(r_1) f_{p'h'}(r_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

La somma sull'indice p' indica una somma sui numeri quantici l, j, m, τ ma non sull'energia ϵ .

Il termine con $\sum_{\epsilon_p < \epsilon_f}$ indica una somma sugli stati di buco, cioè al di sotto della superficie di Fermi, aventi gli stessi numeri quantici l, j, m, τ degli stati di particella p .

Anche nel caso dell'elemento di matrice di scambio $\langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle$ è possibile raggruppare in un'unica espressione i termini nel discreto e quelli nel continuo.

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p R_p(r, \epsilon_p) \sum_{p'h'} \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_{p'} \sum_l \langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \int dr_1 r_1^2 \\
& \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_{p'}(r_1, \epsilon_{p'}) V_l(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_h(r_2) X_{p'h'}(\epsilon_{p'}) = \\
& = \sum_{p'h'} \sum_l \langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 [\delta(r - r_1) - \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) R_p(r_1, \epsilon_p)] \\
& R_h(r_2) V_l(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) f_{p'h'}(r_1) = \\
& = \sum_{p'h'} \sum_l \langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l f_{p'h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V_l(r, r_2) R_h(r_2) + \\
& - \sum_{p'h'} \sum_l \langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r) \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1) R_{h'}(r_2) \\
& V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) f_{p'h'}(r_1) \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Analogamente, per i termini con $\langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle$ e $\langle u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle$, ricordando la definizione (2.4), otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p R_p(r, \epsilon_p) \sum_{p'h'} \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_{p'} \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle \int dr_1 r_1^2 \\
& \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) Y_{p'h'}(\epsilon_{p'}) = \\
& = \sum_{p'h'} \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_{p'h'} \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1) R_h(r_1) \\
& V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) g_{p'h'}(r_2) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p R_p(r, \epsilon_p) \sum_{p'h'} \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_{p'} \sum_l \langle u_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \int dr_1 r_1^2 \\
& \int dr_2 r_2^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_{h'}(r_1) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) R_{p'}(r_2, \epsilon_{p'}) Y_{p'h'}(\epsilon_{p'}) = \\
& = \sum_{p'h'} \sum_l \langle u_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l R_{h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_{p'h'} \sum_l \langle u_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_1) R_p(r_1) \\
& V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) g_{p'h'}(r_2) \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Inserendo le espressioni (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) e (2.18) nell'equazione (2.10) otteniamo:

$$\begin{aligned}
& (h_p - \epsilon_h - E) f_{ph}(r) + \\
& + \sum_{p'h'} \{ \langle v_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_l \langle v_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l f_{p'h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V_l(r, r_2) R_h(r_2) + \\
& + \langle u_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_l \langle u_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l R_{h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) \} = \\
& = B.S.T \tag{2.19}
\end{aligned}$$

La sigla B.S.T, usata per indicare il secondo membro dell'equazione, sta per "Bound State Term". Al secondo membro troviamo infatti la somma sugli stati legati di buco, quelli al di sotto della superficie di Fermi.

Si ha cioè:

$$\begin{aligned}
& B.S.T. = \\
& \sum_{p'h'} \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) \{ \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 [\langle v_{ph, p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_p(r_1) R_{h'}(r_2) \\
& V(r_1, r_2) R_h(r_1) f_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_l \langle v_{ph, p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l R_p(r_1) R_{h'}(r_2) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) f_{p'h'}(r_1) +
\]$$

$$\begin{aligned}
& + \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_p(r_1) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_l \langle u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l R_{h'}(r_1) R_p(r_1) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) g_{p'h'}(r_2) \} \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Con un procedimento analogo a quello seguito per la (2.1), è possibile riscrivere anche l'equazione (2.2) nello spazio delle coordinate.

Otteniamo:

$$\begin{aligned}
& (h_p - \epsilon_h + E) g_{ph}(r) + \\
& + \sum_{p'h'} \left\{ \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) + \right. \\
& \left. - \sum_l \langle v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l g_{p'h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) R_{h'}(r_2) + \right. \\
& \left. + \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) + \right. \\
& \left. - \sum_l \langle u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l R_{h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) \right\} = \\
& = B.S.T. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Capitolo 3

Proprietà delle soluzioni delle equazioni RPA nel continuo

3.1 Introduzione

In questo capitolo descriveremo le proprietà delle soluzioni delle equazioni RPA nel continuo ricavate nel capitolo precedente.

In particolare, nel primo paragrafo stabiliremo le condizioni al contorno che dovranno essere soddisfatte dalle soluzioni del sistema; a tal fine analizzeremo dapprima il caso molto semplice di assenza di interazione residua e di interazione coulombiana e poi generalizzeremo i risultati ottenuti ad una situazione ben più complessa, in cui la presenza di interazione residua crea correlazioni tra le varie coppie particella-buca.

Successivamente, facendo uso delle condizioni al contorno, ci occuperemo di effettuare una normalizzazione delle soluzioni numeriche del sistema.

L'algoritmo usato per ottenere queste ultime sarà descritto nei capitoli successivi; per il momento ci limitiamo a presentare un quadro generale riguardante aspetti teorici,

senza entrare nel merito di questioni di calcolo numerico.

3.2 Condizioni al contorno

Consideriamo il caso in cui l'interazione residua sia nulla, $V_{res} = 0$.

Il sistema di equazioni (2.19) e (2.21) diventa:

$$(h_p - \epsilon_h - E)f_{ph}(r) = 0 \quad (3.1)$$

$$(h_p - \epsilon_h + E)g_{ph}(r) = 0 \quad (3.2)$$

Si ha cioè:

$$h_p f_{ph}(r) = (\epsilon_h + E)f_{ph}(r) \quad (3.3)$$

$$h_p g_{ph}(r) = (\epsilon_h - E)g_{ph}(r) \quad (3.4)$$

Ci limitiamo a considerare particelle nel continuo, abbiamo quindi $E > |\epsilon_h|$ ($\epsilon_h < 0$, dal momento che h indica uno stato legato di buco).

La (3.3) è l'equazione radiale per un'onda diffusa.

Consideriamo per semplicità il caso di un neutrone, cioè il caso di assenza di interazione coulombiana nel potenziale di campo medio.

In generale, il comportamento asintotico di un'onda diffusa in assenza di interazione coulombiana è il seguente:

$$\begin{aligned} \psi(r)_{r \rightarrow \infty} &\longrightarrow e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) + \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove $f(\theta)$ indica l'ampiezza di diffusione, le $j_l(kr)$ sono funzioni di Bessel sferiche, i $P_l(\cos \theta)$ sono polinomi di Legendre, mentre δ_l indica lo sfasamento dovuto all'onda

parziale l-sima.

Separando parte angolare e parte radiale nella precedente espressione otteniamo:

$$\psi(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) [j_l(kr) + e^{i\delta_l} \sin \delta_l \frac{e^{ikr - \frac{l\pi}{2}}}{kr}] \quad (3.6)$$

Consideriamo ora la *funzione di Henkel* $h_l^+(kr)$, definita come:

$$h_l^+(kr) = n_l(kr) + i j_l(kr) \quad (3.7)$$

Abbiamo indicato con $n_l(kr)$ le *funzioni di Von Neumann*.

Il comportamento asintotico delle $h_l^+(kr)$ è il seguente:

$$h_l^+(kr)_{kr \rightarrow \infty} \longrightarrow \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{kr} \quad (3.8)$$

Asintoticamente la parte radiale di un'onda parziale dell'espressione (3.6) diventa quindi:

$$\psi(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow j_l(kr) + f_l(\delta_l) (n_l(kr) + i j_l(kr)) \quad (3.9)$$

con:

$$f_l(\delta_l) = e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (3.10)$$

La validità dell'espressione asintotica (3.9) è legata al fatto che all'interno dell'hamiltoniana di singola particella h_p il potenziale di campo medio è a corto range.

Nell'equazione (3.4), dal momento che si ha sempre $\epsilon_h - E < 0$, si ha un problema di stato legato ed il comportamento asintotico della soluzione $g_{ph}(r)$ è il seguente:

$$g_{ph}(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow e^{-\chi r} \quad (3.11)$$

con:

$$\chi^2 = \frac{2m}{\hbar^2} |\epsilon_h - E| \quad (3.12)$$

le soluzioni del sistema di equazioni differenziali devono essere regolari nell'origine:

$$f_{ph}(r)_{r \rightarrow 0} \longrightarrow g_{ph}(r)_{r \rightarrow 0} \longrightarrow \sim \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \sim r^l \quad (3.13)$$

Nel caso dei protoni è necessario considerare la presenza del campo coulombiano anche nel comportamento asintotico.

Le soluzioni delle equazioni differenziali possono essere scritte in termini di *funzioni ipergeometriche confluenti*.

Le espressioni precedenti vengono modificate secondo lo schema:

$$j_l \longrightarrow F_l$$

$$n_l \longrightarrow G_l$$

dove F_l e G_l sono dette *funzioni coulombiane* e il loro comportamento è rispettivamente regolare e irregolare nell'origine.

Si pone inoltre:

$$e^{-\chi r} = W(\chi r) \quad (3.14)$$

dove $W(\chi r)$ indica la *funzione di Witthaker*.

Quando l'interazione residua è attivata, è necessario tenere conto, nella definizione delle condizioni al contorno, dell'esistenza di correlazioni tra i diversi canali (ph).

Tra le coppie particella-buca distinguiamo i *canali aperti*, in cui è soddisfatta la relazione $\epsilon_p = \epsilon_h + E > 0$, e i *canali chiusi* per i quali invece si ha $\epsilon_p = \epsilon_h + E < 0$.

Per i primi la condizione al contorno sulla soluzione $f_{ph}(r)$ diventa:

$$f_{ph}(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow \sum_{p'h'} \{ F_{ph}(kr) \delta_{ph,p'h'} + K_{ph,p'h'} [G_{p'h'}(k'r) + iF_{p'h'}(k'r)] \} \quad (3.15)$$

$$\text{con } k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \epsilon_p.$$

Per un canale chiuso si ha invece:

$$f_{ph}(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow \sum_{p'h'} K_{ph,p'h'} W_{ph}(\chi r) \quad (3.16)$$

La condizione al contorno per la soluzione $g_{ph}(r)$ è, per canali chiusi e per canali aperti, la seguente:

$$g_{ph}(r)_{r \rightarrow \infty} \longrightarrow \sum_{p'h'} U_{ph,p'h'} W_{ph}(\chi r) \quad (3.17)$$

Nelle precedenti espressioni i coefficienti $K_{ph,p'h'}$ e $U_{ph,p'h'}$ sono numeri complessi.

3.3 Normalizzazione delle soluzioni numeriche

In questo paragrafo descriveremo il metodo adottato per normalizzare le soluzioni numeriche facendo uso delle condizioni al contorno stabilite nel precedente paragrafo. Nel seguito, per comodità, useremo le lettere a, b, c, d, e per indicare l'indice (ph), cioè i numeri quantici della coppia particella-buca.

Indichiamo rispettivamente con $\xi_{c,b}$ e $\eta_{c,b}$ le soluzioni numeriche delle equazioni (2.19) e (2.21).

Le equazioni RPA sono risolte n volte, dove n è il numero di coppie (ph), utilizzando le seguenti condizioni al contorno:

$$\xi_{c,b}(0) = 0 \quad (3.18)$$

$$\xi_{c,b}(\Delta r) = \delta_{c,b}(\Delta r)^l \quad (3.19)$$

Ogni soluzione f e g è caratterizzata da un doppio indice. Il primo indice, rappresentato dalla lettera a , indica il *canale elastico aperto* e dà un'indicazione della condizione al contorno mediante la quale la soluzione è normalizzata; il secondo indice rappresenta il canale (ph) delle equazioni (2.19) e (2.21).

Le soluzioni f e g possono essere espresse come combinazioni lineari delle soluzioni numeriche:

$$f_b^a(r) = \sum_c A_{a,c} \xi_{c,b}(r) \quad (3.20)$$

$$g_b^a(r) = \sum_c B_{a,c} \eta_{c,b}(r) \quad (3.21)$$

dove A e B sono matrici complesse i cui elementi saranno ricavati facendo uso delle condizioni al contorno.

Anche ξ ed η presentano un doppio indice, derivante dalle diverse condizioni al contorno.

Il raccordo tra le equazioni (3.20) e (3.21) e le condizioni al contorno (3.15) – (3.17) si effettua in un punto $r = R$, nel quale si valuteranno f e la sua derivata.

Si ha:

$$f_b^a(R) = \sum_c A_{a,c} \xi_{c,b}(R) = F_b \delta_{a,b} + K_{a,b} [G_b + iF_b] \quad (3.22)$$

(Nella precedente espressione le funzioni coulombiane F e G sono calcolate in $r = R$).

Il terzo termine dell'uguaglianza (3.22) è un addendo della somma riportata nell'espressione (3.15).

Per la definizione di F e G si ha che:

$$\frac{d}{dr} F = \frac{d(kr)}{dr} \frac{dF}{d(kr)} = kF' \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dr} G = kG' \quad (3.24)$$

quindi la derivata di f nel punto $r = R$ può essere scritta come:

$$\frac{d}{dr} f_b^a(R) = \sum_c A_{a,c} \xi'_{c,b}(R) = k_b F'_b \delta_{a,b} + K_{a,b} k_b [G'_b + iF'_b] \quad (3.25)$$

Spostando al primo membro i termini con $\delta_{a,b}$ e facendo il rapporto tra le espressioni (3.22) e (3.25) otteniamo:

$$\frac{\sum_c A_{a,c} \xi_{c,b} - F_b \delta_{a,b}}{\sum_c A_{a,c} \xi'_{c,b} - k_b F'_b \delta_{a,b}} = \frac{K_{a,b} [G_b + iF_b]}{K_{a,b} k_b [G'_b + iF'_b]} \quad (3.26)$$

da cui si ricava:

$$[\sum_c A_{a,c} \xi_{c,b} - F_b \delta_{a,b}] k_b (G'_b + iF'_b) = [\sum_c A_{a,c} \xi'_{c,b} - k_b F'_b \delta_{a,b}] (G_b + iF_b) \quad (3.27)$$

Scriviamo esplicitamente per ogni elemento della matrice A parte reale e parte immaginaria ponendo:

$$A_{a,c} = R_{a,c} + iI_{a,c}$$

La (3.27) diventa quindi:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_c [R_{a,c} + iI_{a,c}] \xi_{c,b} - F_b \delta_{a,b} \right\} k_b (G'_b + iF'_b) = \\ & = \left\{ \sum_c [R_{a,c} + iI_{a,c}] \xi'_{c,b} - k_b F'_b \delta_{a,b} \right\} (G_b + iF_b) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Eguagliando separatamente parte reale e parte immaginaria della (3.28) si ha, per la parte reale:

$$\begin{aligned} & \sum_c [R_{a,c} \xi_{c,b} - F_b \delta_{a,b}] k_b G'_b - \sum_c [I_{a,c} \xi_{c,b} k_b F'_b] = \\ & = \sum_c [R_{a,c} \xi'_{c,b} - k_b F'_b \delta_{a,b}] G_b - \sum_c [I_{a,c} \xi'_{c,b} F_b] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Raggruppando i coefficienti delle incognite $R_{a,c}$ e $I_{a,c}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} & \sum_c R_{a,c} [k_b \xi_{c,b} G'_b - \xi'_{c,b} G_b] - \delta_{a,b} [k_b F_b G'_b - k_b F'_b G_b] + \\ & - \sum_c I_{a,c} [\xi_{c,b} k_b F'_b - \xi'_{c,b} F_b] = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si ha cioè

$$\begin{aligned} & \sum_c R_{a,c} [k_b \xi_{c,b} G'_b - \xi'_{c,b} G_b] - \sum_c I_{a,c} [\xi_{c,b} k_b F'_b - \xi'_{c,b} F_b] = \\ & = \delta_{a,b} [k_b F_b G'_b - k_b F'_b G_b] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Con un procedimento analogo si ottiene per la parte immaginaria la seguente equazione:

$$\sum_c I_{a,c} [k_b \xi_{c,b} G'_b - \xi'_{c,b} G_b] + \sum_c R_{a,c} [\xi_{c,b} k_b F'_b - \xi'_{c,b} F_b] = 0 \quad (3.32)$$

Le equazioni (3.31) e (3.32) rappresentano un sistema che può essere riscritto mediante un'unica equazione matriciale, avente come incognita un vettore colonna delle parti

reali e delle parti immaginarie degli elementi della matrice A .

Per i canali chiusi abbiamo invece le seguenti espressioni per f e la sua derivata nel punto $r = R$:

$$f_b^a(R) = \sum_c A_{a,c} \xi_{c,b} = K_{a,b} W_b \quad (3.33)$$

$$f_b'^a(R) = \sum_c A_{a,c} \xi'_{c,b} = K_{a,b} k_b W'_b \quad (3.34)$$

Esplicitando parte reale e parte immaginaria degli elementi della matrice A e facendo il rapporto tra la (3.33) e la (3.34) otteniamo:

$$\frac{\sum_c [R_{a,c} \xi_{c,b} + i I_{a,c} \xi_{c,b}]}{\sum_c [R_{a,c} \xi'_{c,b} + i I_{a,c} \xi'_{c,b}]} = \frac{W_b}{k_b W'_b} \quad (3.35)$$

si ha quindi:

$$\sum_c [R_{a,c} \xi_{c,b} + i I_{a,c} \xi_{c,b}] k_b W'_b = \sum_c [R_{a,c} \xi'_{c,b} + i I_{a,c} \xi'_{c,b}] W_b \quad (3.36)$$

Infine, separando parte reale e parte immaginaria della (3.36) otteniamo le due seguenti equazioni:

$$\sum_c R_{a,c} (\xi_{c,b} k_b W'_b - \xi'_{c,b} W_b) = 0 \quad (3.37)$$

$$\sum_c I_{a,c} (\xi_{c,b} k_b W'_b - \xi'_{c,b} W_b) = 0 \quad (3.38)$$

Per la soluzione g_{ph} si ottengono equazioni simili alle (3.37) e (3.38) con la matrice complessa B al posto di A .

3.4 Elemento di matrice di transizione

In questo paragrafo otterremo l'espressione dell'elemento di matrice di transizione di un operatore ad un corpo utilizzando le soluzioni delle equazioni RPA formulate nello

spazio delle coordinate.

Per un operatore ad un corpo $T = O(\Omega)Q(r)$ si ha:

$$\begin{aligned}
 & \langle J \parallel T \parallel 0 \rangle = \\
 & = \frac{1}{\hat{J}} \sum_{j_p j_h} [X_{ph}^J \langle j_p \parallel O(\Omega) \parallel j_h \rangle \int dr r^2 R_p(r, \epsilon_p) R_h(r) Q(r) + \\
 & + (-1)^{J+j_p+j_h} Y_{ph}^J \langle j_h \parallel O(\Omega) \parallel j_p \rangle \int dr r^2 R_p(r, \epsilon_p) R_h(r) Q(r)] \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Per le funzioni radiali di singola particella vale la seguente relazione di ortogonalità:

$$\int dr r^2 R_p(r, \epsilon_p) R_{p'}(r, \epsilon_{p'}) = \delta_{pp'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) \quad (3.40)$$

e dalle seguenti definizioni:

$$f_{ph}(r) = \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p X_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) \quad (3.41)$$

$$g_{ph}(r) = \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_p Y_{ph}(\epsilon_p) R_p(r, \epsilon_p) \quad (3.42)$$

seguono le relazioni:

$$\int dr r^2 R_p(r, \epsilon_p) f_{ph}(r) = \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_{p'} X_{p'h'}(\epsilon_{p'}) \delta_{pp'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) = X_{ph}(\epsilon_p) \quad (3.43)$$

$$\int dr r^2 R_p(r, \epsilon_p) g_{ph}(r) = \sum_{\epsilon_f}^{\infty} d\epsilon_{p'} Y_{p'h'}(\epsilon_{p'}) \delta_{pp'} \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'}) = Y_{ph}(\epsilon_p) \quad (3.44)$$

Inserendo le precedenti espressioni all'interno della (3.39) e indicando con a il canale elastico che definisce le condizioni al contorno delle soluzioni normalizzate f e g , otteniamo:

$$\begin{aligned}
 & \langle J \parallel T \parallel 0 \rangle_a = \\
 & = \frac{1}{\hat{J}} \sum_{ph} \left[\int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) f_{ph}^a(r_1) \int dr_2 r_2^2 R_p(r_2, \epsilon_p) R_h(r_2) Q(r_2) \right. \\
 & \left. \langle j_p \parallel O(\Omega) \parallel j_h \rangle + \right. \\
 & + (-1)^{J+j_p+j_h} \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) g_{ph}^a(r_1) \int dr_2 r_2^2 R_p(r_2, \epsilon_p) R_h(r_2) Q(r_2) \\
 & \left. \langle j_h \parallel O(\Omega) \parallel j_p \rangle \right] \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

La probabilità di transizione è definita come:

$$\begin{aligned}
 M_{fi} &= \sum_a | \langle J || T || 0 \rangle_a |^2 = \\
 &= \frac{1}{2J+1} \left\{ \sum_a \left[\sum_{ph} \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) f_{ph}^a(r_1) \int dr_2 r_2^2 R_p(r_2, \epsilon_p) R_h(r_2) Q(r_2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. < j_p || O(\Omega) || j_h > + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^{J+j_p+j_h} \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) g_{ph}^a(r_1) \int dr_2 r_2^2 R_p(r_2, \epsilon_p) R_h(r_2) Q(r_2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. < j_h || O(\Omega) || j_p > \right] [c.c.] \right\} \tag{3.46}
 \end{aligned}$$

dove $[c.c.]$ indica il complesso coniugato di $\langle J || T || 0 \rangle_a$.

Scriviamo esplicitamente gli stati di buca e di particella che formano il canale aperto a , sia $a = (mi)$.

Nel limite per $V \rightarrow 0$ si ha $X_{ph}^a \rightarrow \delta_{a,ph}$ e $Y_{ph}^a \rightarrow 0$, cioè, dalle (3.41) e (3.42), $f_{ph}^a \rightarrow R_a$ e $g_{ph}^a \rightarrow 0$.

Dalla (3.40) si ottiene:

$$\int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) R_m(r_1, \epsilon_m) = \delta_{pm} \delta(\epsilon_p - \epsilon_m) \tag{3.47}$$

La (3.46) riproduce quindi, nel limite di un'interazione residua nulla, la probabilità di transizione tra due stati del nucleo nel *modello a campo medio*:

$$M_{fi}^{cm} = \frac{1}{2J+1} \sum_{mi} \left[\int dr r^2 R_m(r) R_i(r) Q(r) \langle j_m || O(\Omega) || j_i \rangle \right] [c.c.] \tag{3.48}$$

Capitolo 4

Soluzione numerica dell'equazione differenziale

4.1 Introduzione

In questo capitolo presenteremo un metodo di calcolo che ci consentirà di ottenere soluzioni numeriche ξ ed η del sistema di equazioni RPA nel continuo presentate nel Capitolo 2.

In particolare, nel prossimo paragrafo ricaveremo un algoritmo numerico, tenendo conto del fatto che il sistema è formato da due equazioni differenziali del secondo ordine non omogenee.

Nell'ultimo paragrafo riporteremo i risultati di alcune verifiche effettuate per confermare la validità del metodo di calcolo numerico usato.

4.2 Descrizione del metodo di calcolo numerico

Il sistema di equazioni RPA del quale vogliamo calcolare le soluzioni è il seguente:

$$\begin{aligned}
 & (h_p - \epsilon_h - E) f_{ph}(r) + \\
 & + \sum_{p'h'} \{ < v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) > R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) + \\
 & - \sum_l < v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) >_l f_{p'h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V_l(r, r_2) R_h(r_2) + \\
 & + < u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) > R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
 & - \sum_l < u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) >_l R_{h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) \} = \\
 & = B.S.T. \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (h_p - \epsilon_h + E) g_{ph}(r) + \\
 & + \sum_{p'h'} \{ < v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) > R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
 & - \sum_l < v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) >_l g_{p'h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) R_{h'}(r_2) + \\
 & + < u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) > R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) + \\
 & - \sum_l < u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) >_l R_{h'}(r) \int dr_2 r_2^2 R_h(r_2) V_l(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) = \\
 & = B.S.T. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 B.S.T. = & \\
 & \sum_{p'h'} \sum_{\epsilon_p < \epsilon_f} R_p(r, \epsilon_p) \{ \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 [< v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) > R_p(r_1) R_{h'}(r_2) \\
 & V(r_1, r_2) R_h(r_1) f_{p'h'}(r_2) + \\
 & - \sum_l < v_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) >_l R_p(r_1) R_{h'}(r_2) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) f_{p'h'}(r_1) + \\
 & \dots]
 \} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle u_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_p(r_1) R_h(r_1) V(r_1, r_2) R_{h'}(r_2) g_{p'h'}(r_2) + \\
& - \sum_l \langle u_{ph,p'h'}^{exch}(\Omega) \rangle_l R_{h'}(r_1) R_p(r_1) V_l(r_1, r_2) R_h(r_2) g_{p'h'}(r_2) \}
\end{aligned} \quad (4.3)$$

l'operatore h_p è l'*hamiltoniana di singola particella*, che descrive il moto di un nucleone soggetto solo ad un potenziale di campo medio $V^{CM}(r)$.

L'azione di h_p su una funzione d'onda radiale $R(r)$ è data da:

$$h_p R(r) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l_p(l_p+1)}{r^2} \right) + V^{CM}(r) \right] R(r) = \epsilon_p R(r) \quad (4.4)$$

dove l_p è il momento angolare orbitale del nucleone ed ϵ_p la sua energia.

Osserviamo quindi che il sistema è formato da due equazioni differenziali del secondo ordine non omogenee della forma:

$$a(x) \frac{d^2}{dx^2} f(x) + b(x) \frac{d}{dx} f(x) + c(x) f(x) + d(x) = 0 \quad (4.5)$$

Ci proponiamo di ricavare un algoritmo che consenta di calcolare soluzioni della precedente equazione su un numero finito di punti equispaziati. Otterremo una formula di ricorrenza che legherà il valore approssimato della f in uno dei punti della griglia a quello nei due punti precedenti. Sarà quindi possibile, dopo aver stabilito delle condizioni iniziali (il valore della funzione nei primi due punti della griglia), ottenere la soluzione numerica dell'equazione in tutto l'insieme di punti.

Sia h il passo di integrazione, cioè la distanza tra un punto della griglia e il successivo. Mediante sviluppi in serie di Taylor è possibile approssimare derivata prima e seconda della f nel punto x nei seguenti modi:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] + O(h^4) \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + O(h^4) \quad (4.7)$$

Sostituendo le due precedenti espressioni approssimate di derivata prima e seconda nella (4.5) otteniamo:

$$a(x) \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + b(x) \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)] + + c(x)f(x) + d(x) = 0 \quad (4.8)$$

Ponendo a fattor comune i termini $f(x+h)$, $f(x)$ e $f(x-h)$ si ha:

$$[\frac{a(x)}{h^2} + \frac{b(x)}{2h}]f(x+h) + [c(x) - \frac{2a(x)}{h^2}]f(x) + [\frac{a(x)}{h^2} - \frac{b(x)}{2h}]f(x-h) + + d(x) = 0 \quad (4.9)$$

da cui si ottiene infine la seguente formula di ricorrenza:

$$[\frac{a(x)}{h^2} - \frac{b(x)}{2h}]f(x+h) = [\frac{2a(x)}{h^2} - c(x)]f(x) + [\frac{b(x)}{2h} - \frac{a(x)}{h^2}]f(x-h) - d(x) \quad (4.10)$$

L'errore locale commesso utilizzando il metodo numerico appena descritto per il calcolo della soluzione della (4.5) è proporzionale ad h^4 .

4.3 Verifiche sulla validità del metodo numerico

Per studiare la validità dell'algoritmo ricavato nel precedente paragrafo, abbiamo effettuato due tipi di verifiche di cui riportiamo i risultati in questa sezione.

La prima verifica consiste nel calcolare con il nostro algoritmo la soluzione numerica di un'equazione differenziale del secondo ordine di cui si conosca la soluzione analitica, per avere la possibilità di effettuare un confronto tra le due.

In particolare, è noto che le funzioni di Bessel sferiche $j_l(kr)$ sono soluzioni della

seguente equazione differenziale omogenea del secondo ordine:

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] y_l(\rho) = 0 \quad (4.11)$$

dove $\rho = rk$ con:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \epsilon_p$$

Moltiplicando la (4.11) per k^2 si ottiene:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] y_l(kr) = 0 \quad (4.12)$$

È possibile calcolare numericamente le soluzioni della (4.12) usando il nostro algoritmo e confrontare tali soluzioni con le funzioni di Bessel sferiche $j_l(kr)$.

Abbiamo considerato un intervallo che va da $x_0 = 0$ fm a $x_N = 11$ fm e lo abbiamo diviso in una griglia di 110 punti; il passo d'integrazione è quindi $h = 0.1$ fm.

Questi sono parametri tipici per calcoli in nuclei medio-pesanti.

Per un valore del momento angolare l abbiamo attribuito al valore della funzione nei primi due punti della griglia quello assunto dalle funzioni di Bessel sferiche, $j_l(kr)$, negli stessi punti.

Diversi confronti tra soluzioni numeriche dell'equazione e funzioni di Bessel, per diversi valori di ϵ_p e di l sono illustrati nelle figure (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5).

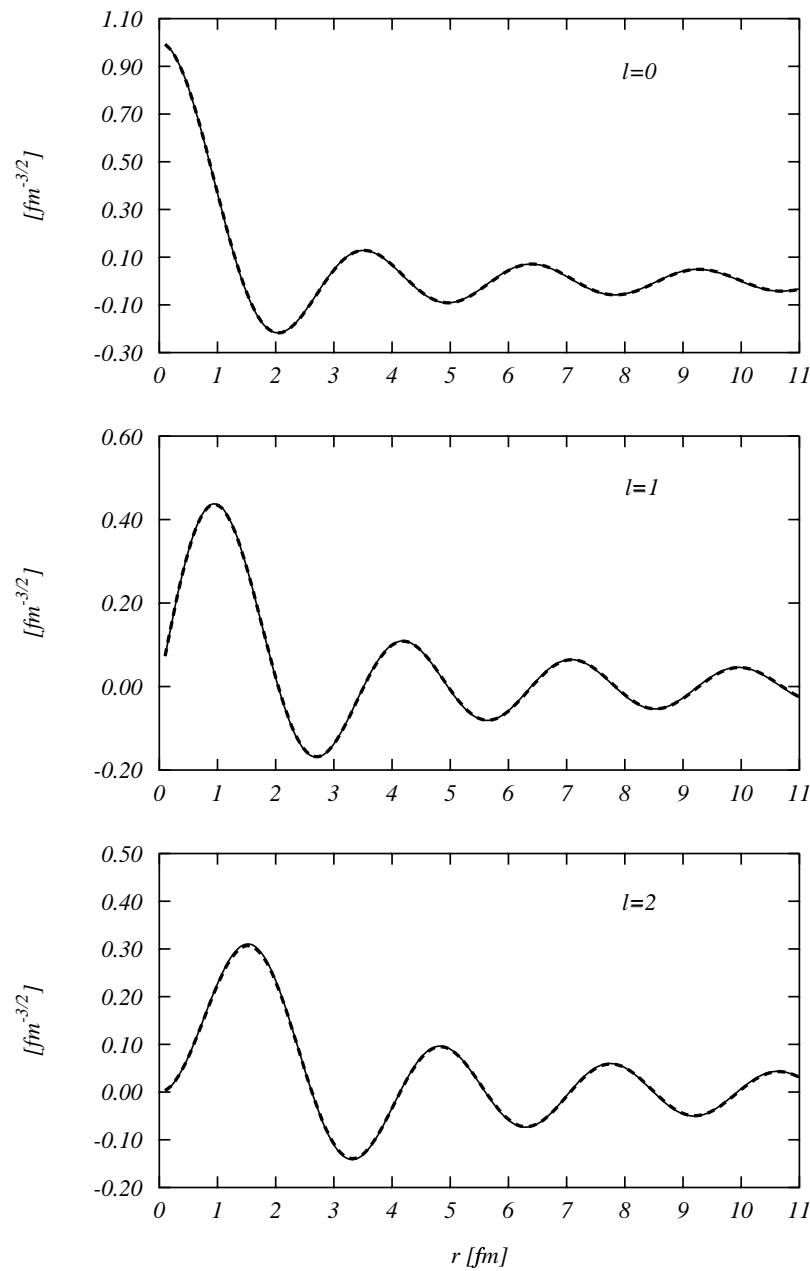


Figura 4.1: confronto tra soluzione numerica (linea continua) e funzione di Bessel (linea tratteggiata); $\epsilon_p = 100 \text{ MeV}$

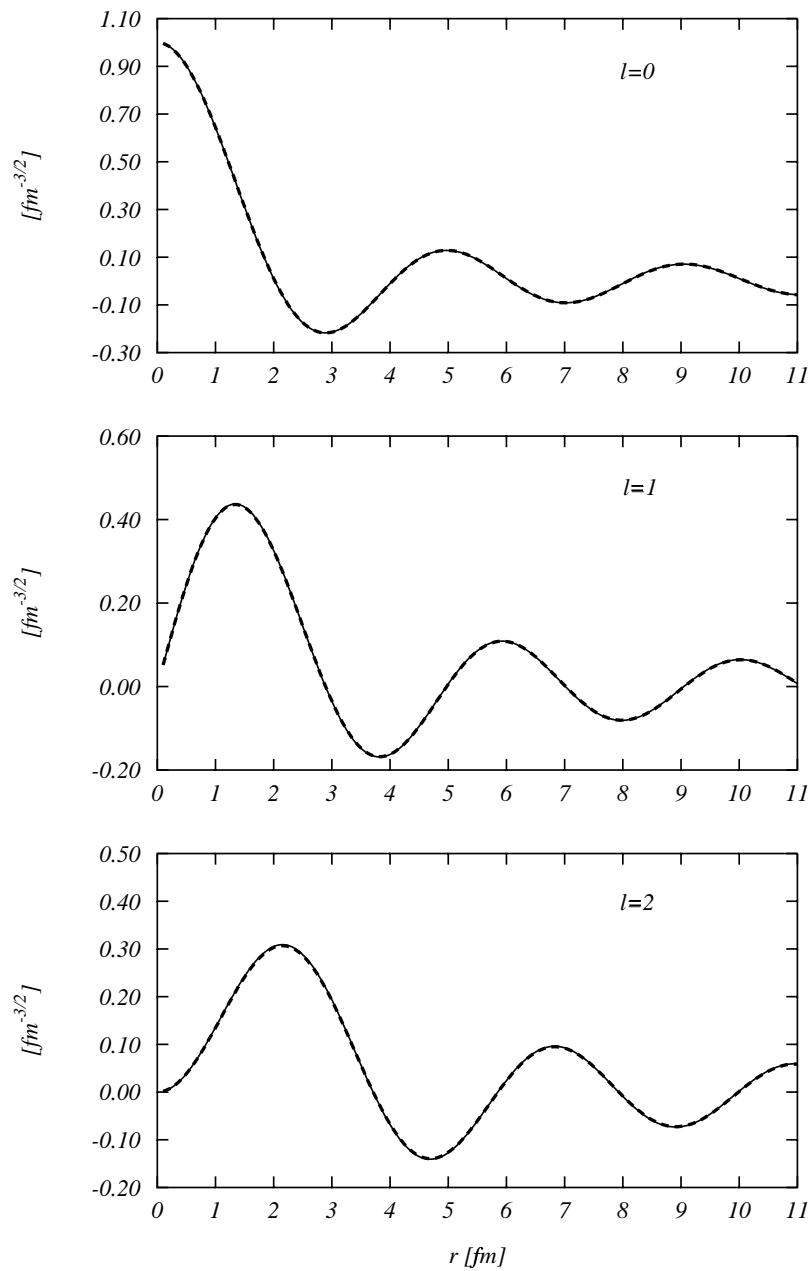


Figura 4.2: Confronto tra soluzione numerica (linea continua) e funzione di Bessel (linea tratteggiata); $\epsilon_p = 50 \text{ MeV}$

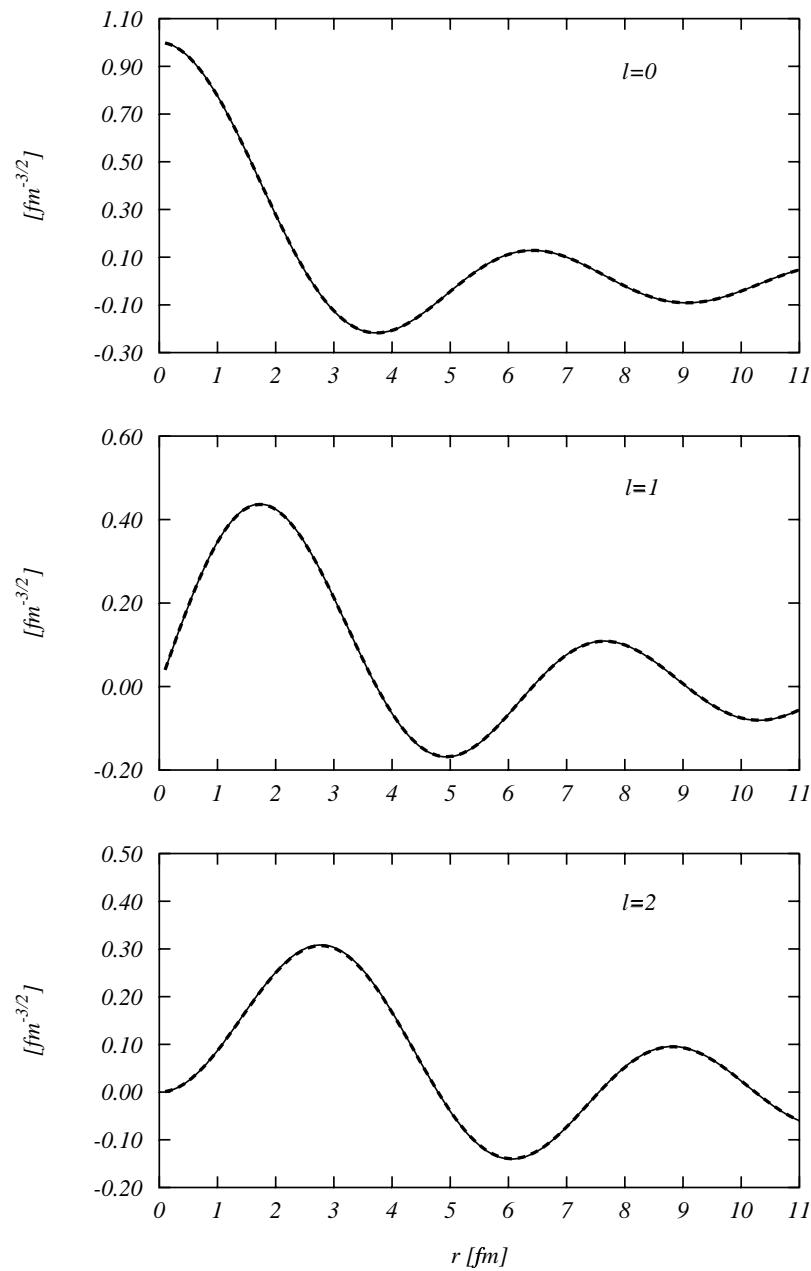


Figura 4.3: Confronto tra soluzione numerica (linea continua) e funzione di Bessel (linea tratteggiata); $\epsilon_p = 30$ MeV

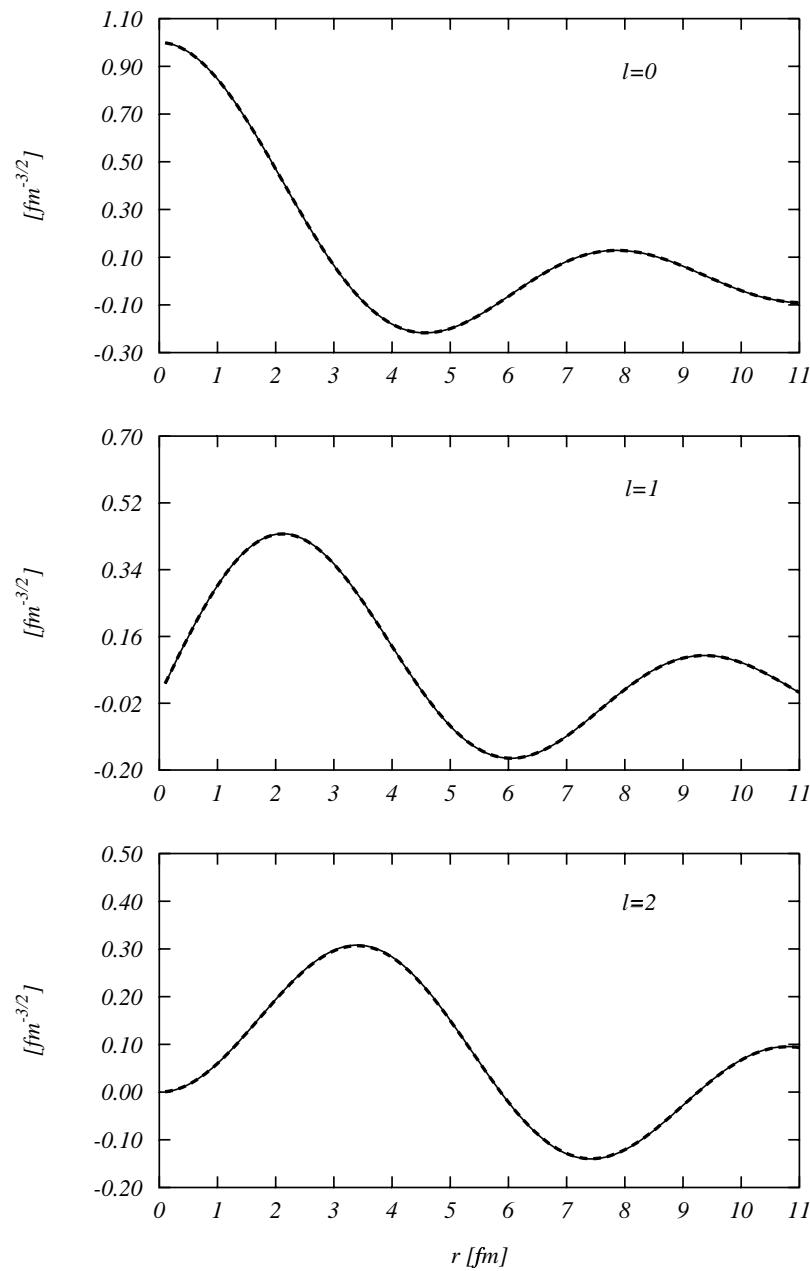


Figura 4.4: Confronto tra soluzione numerica (linea continua) e funzione di Bessel (linea tratteggiata); $\epsilon_p = 20 MeV$

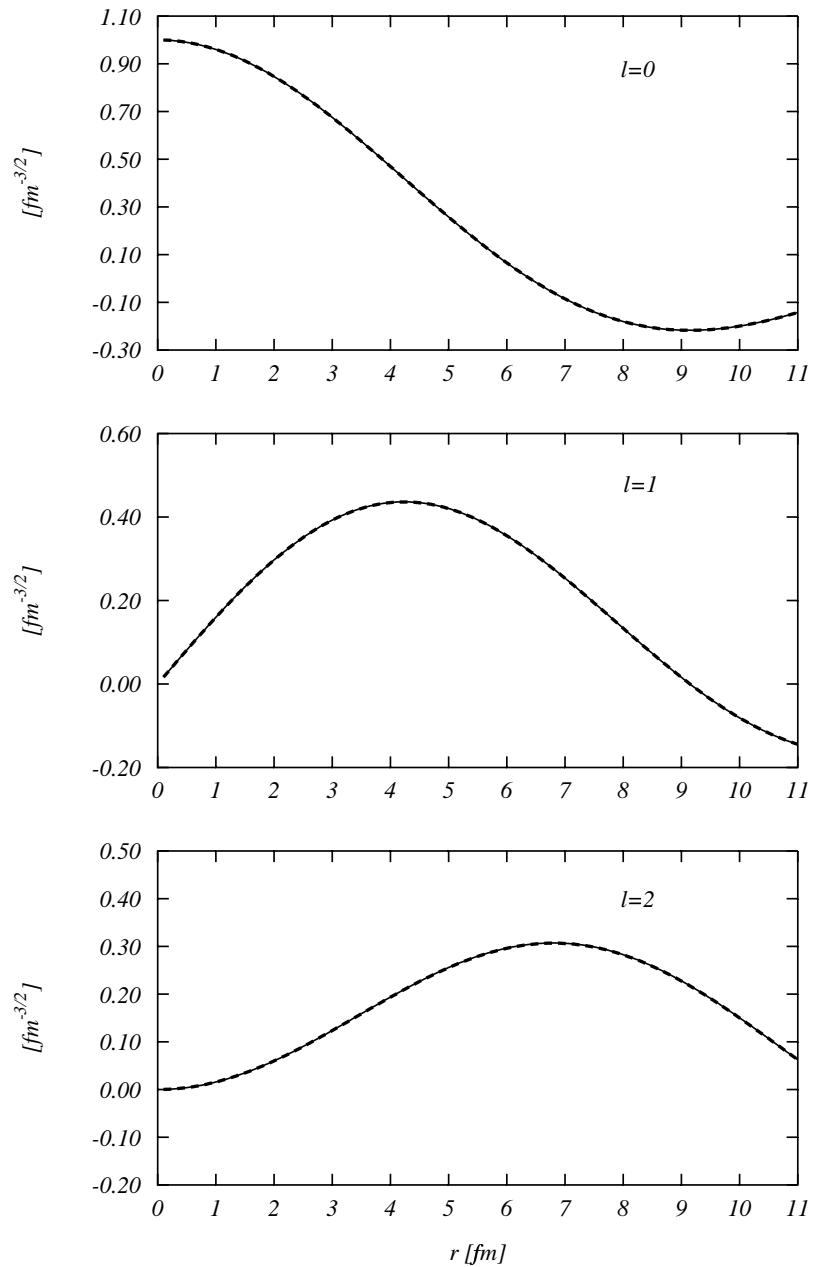


Figura 4.5: Confronto tra soluzione numerica (linea continua) e funzione di Bessel (linea tratteggiata); $\epsilon_p = 5 \text{ MeV}$

Nei cinque casi illustrati gli andamenti presentano un buon accordo ed anche per valori di l superiori a 2 la soluzione numerica presenta un accordo con la soluzione analitica fino alla quarta cifra decimale.

4.4 Confronto con il *metodo di Numerov*

Consideriamo il primo termine della (4.1) e scriviamo l'equazione omogenea:

$$(h_p - \epsilon_h - E)R(r) = 0 \quad (4.13)$$

dove l'azione di h_p su $R(r)$ è descritta dalla (4.4).

La (4.13) è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea.

Ci proponiamo di trovare soluzioni numeriche dell'equazione con il nostro algoritmo e di confrontarle con quelle ottenute mediante l'*algoritmo di Numerov* [Koo 86].

Quest'ultimo è utile per calcolare numericamente soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine avente la seguente forma:

$$\frac{d^2}{dx^2}y + k^2(x)y = S(x) \quad (4.14)$$

Anche in questo caso si ottiene una formula di ricorrenza che lega il valore approssimato della soluzione in un punto di una griglia equispaziata al valore assunto nei due punti precedenti, dopo aver fissato il valore della soluzione nei primi due punti dell'insieme. L'errore che si commette risolvendo la (4.14) mediante l'algoritmo di Numerov è proporzionale ad h^6 , quindi questo metodo ha un grado di accuratezza superiore a quello del nostro algoritmo (il cui errore locale è proporzionale ad h^4).

È possibile trovare soluzioni della (4.13) risolvendo un'equazione differenziale avente la forma (4.14).

Definiamo infatti la *funzione radiale ridotta*:

$$u(r) = rR(r) \quad (4.15)$$

Si può dimostrare, partendo dall'equazione (4.13) che essa è soluzione della seguente equazione:

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l_p(l_p + 1)}{r^2} \right) + (V^{CM}(r) - \epsilon_p) \right] u(r) = 0 \quad (4.16)$$

che ha la stessa forma della (4.14).

È possibile calcolare soluzioni numeriche della (4.16) mediante il metodo di Numerov e ricondurle a funzioni radiali $R(r)$ dividendole per r .

Sarà quindi possibile procedere ad un confronto con soluzioni numeriche della (4.13) calcolate con il nostro algoritmo.

Nell'espressione (4.4) della h_p e nella (4.16) sceglieremo come potenziale di campo medio $V^{CM}(r)$ un *potenziale di Woods-Saxon* avente la seguente forma:

$$V^{CM}(r) = \frac{U_0}{1 + e^x} + \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} \frac{U_{SO}}{ar} \frac{e^x}{1 + e^x} \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\sigma} - V_C(r) \quad (4.17)$$

dove:

$x = \frac{r-R}{a}$ con a ed R che indicano, rispettivamente, *diffusività* e *raggio d'azione*;

U_0 rappresenta la profondità massima del termine centrale del potenziale;

U_{SO} è il fattore moltiplicativo del termine di spin-orbita;

V_C indica il termine coulombiano;

m_π è la massa del pion.

Sceglieremo per i diversi parametri del potenziale valori relativi all'¹⁶O.

Come nella precedente verifica, abbiamo un intervallo che va da $x_0 = 0$ fm a $x_1 = 11$ fm diviso in una griglia di 110 punti ($h = 0.1$ fm).

Confronti tra soluzioni numeriche della (4.13) ottenute con il nostro algoritmo e con

l'algoritmo di Numerov sono stati effettuati per protoni e neutroni con diversi valori del momento angolare l e di ϵ_p . I risultati dei confronti sono illustrati nelle figure (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8), nelle quali è possibile osservare che nei quattro casi considerati e per ogni valore di ϵ_p esiste un buon accordo tra la soluzione numerica della (4.13) ottenuta con il metodo di Numerov e quella ottenuta con il nostro algoritmo. Questo costituisce un'ulteriore conferma dell'efficacia del nuovo metodo.

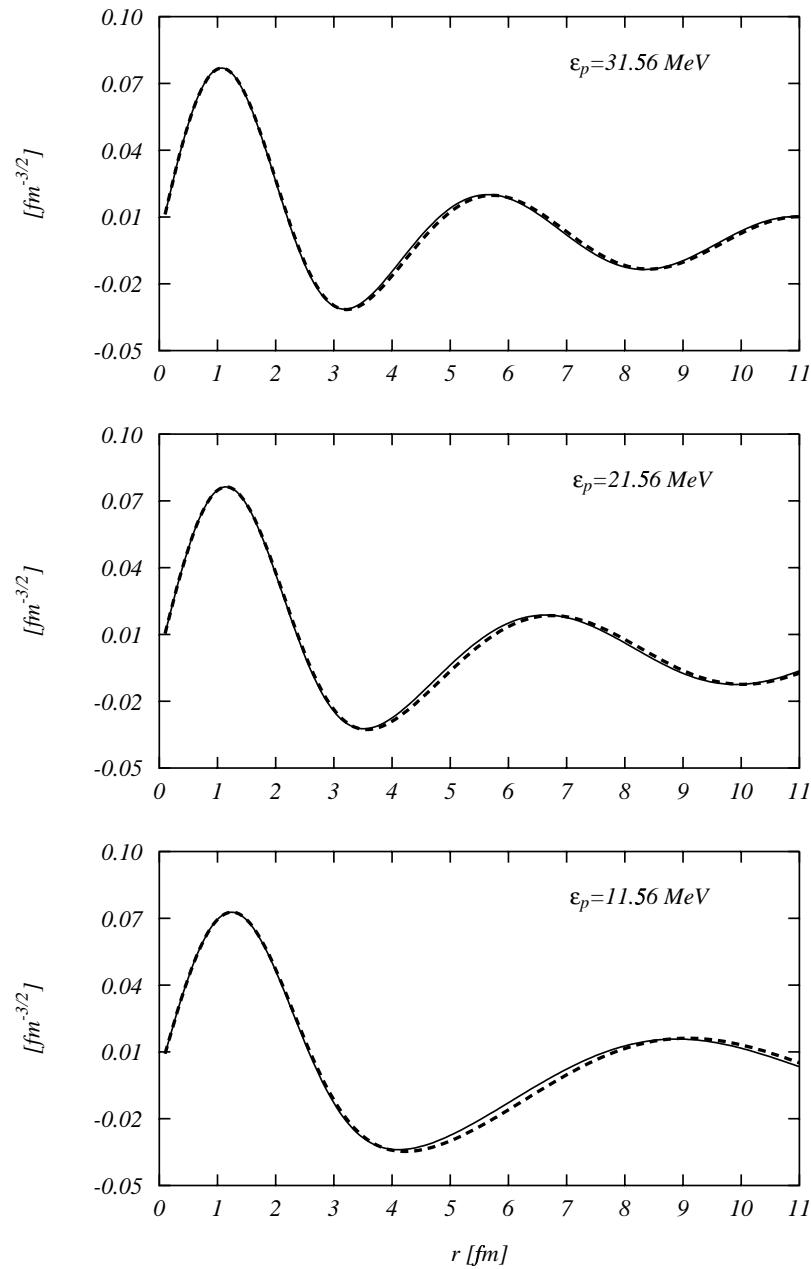


Figura 4.6: Confronto tra soluzione ottenuta con il metodo di Numerov (linea tratteggiata) e soluzione ottenuta con il nostro algoritmo (linea continua). Protone con $l = 1$

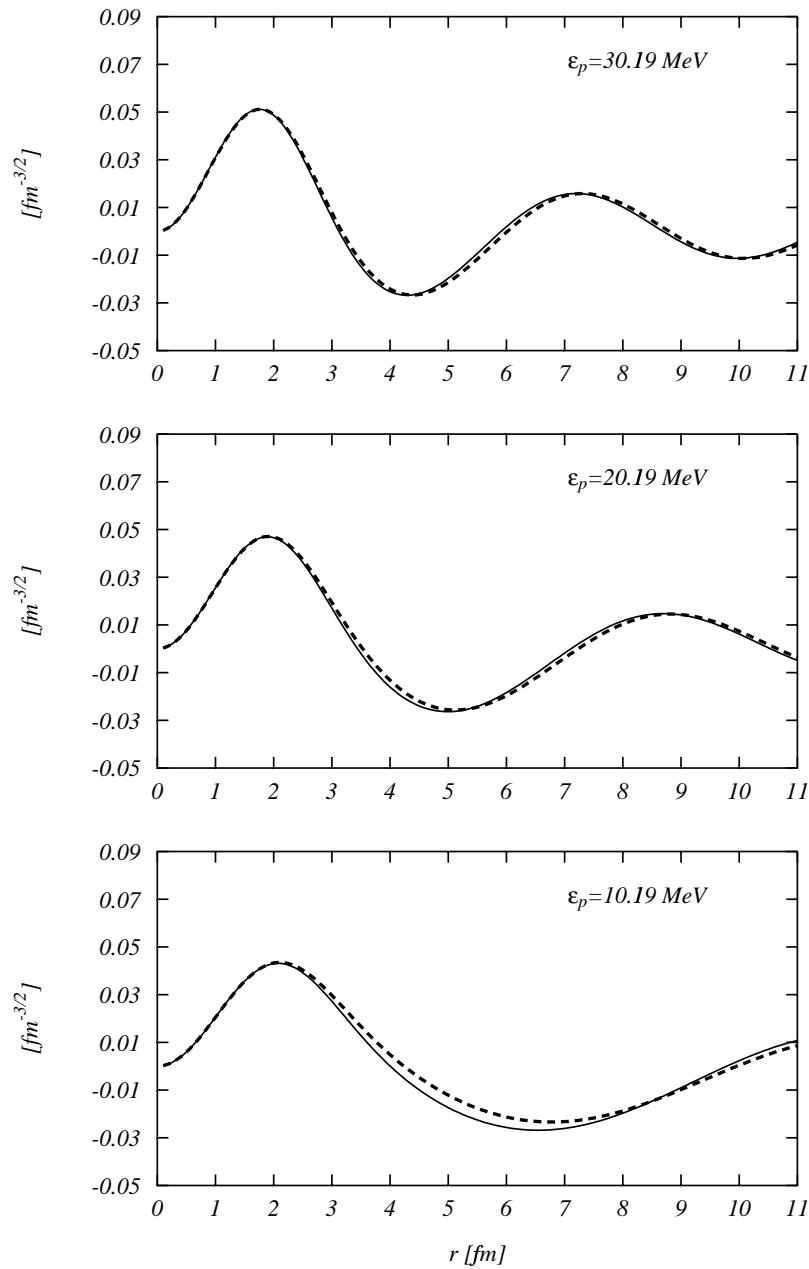


Figura 4.7: Confronto tra soluzione ottenuta con il metodo di Numerov (linea tratteggiata) e soluzione ottenuta con il nostro algoritmo (linea continua). Protone con $l = 2$

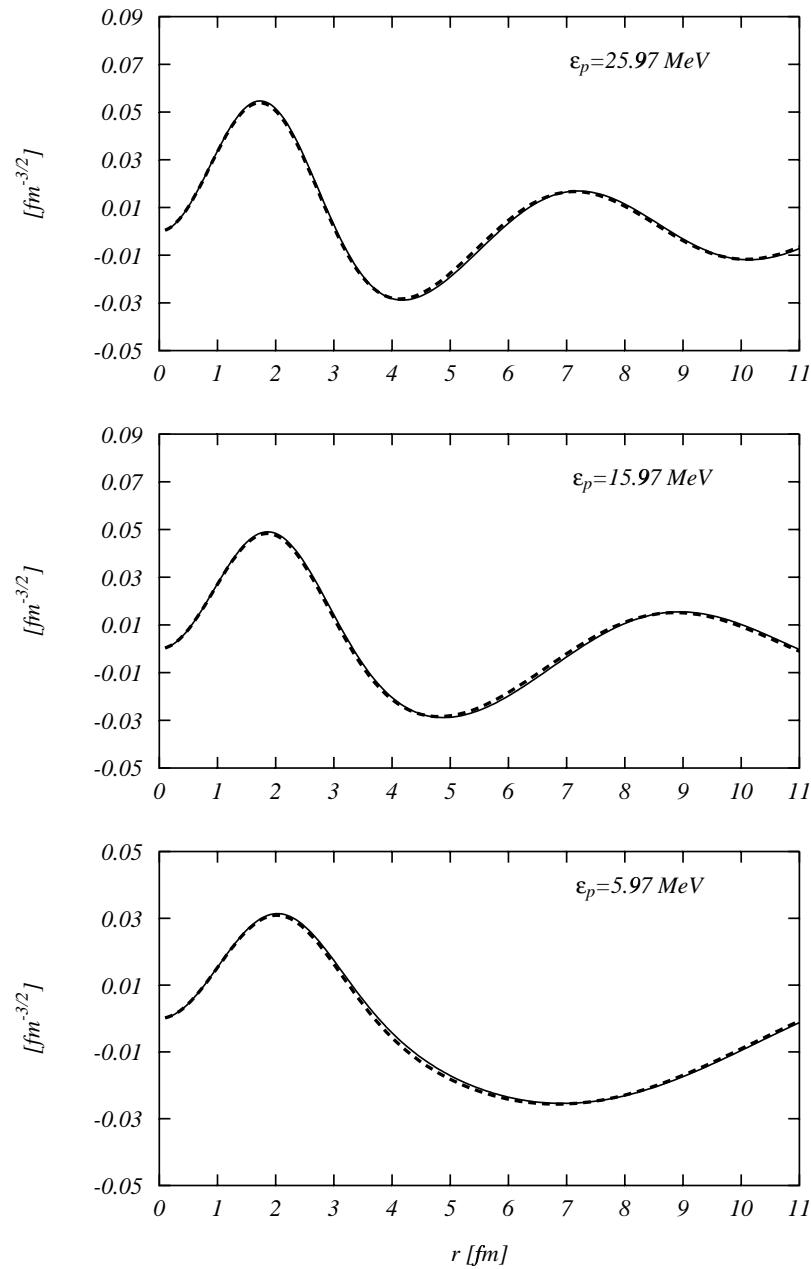


Figura 4.8: Confronto tra soluzione ottenuta con il metodo di Numerov (linea tratteggiata) e soluzione ottenuta con il nostro algoritmo (linea continua). Neutrone con $l = 2$

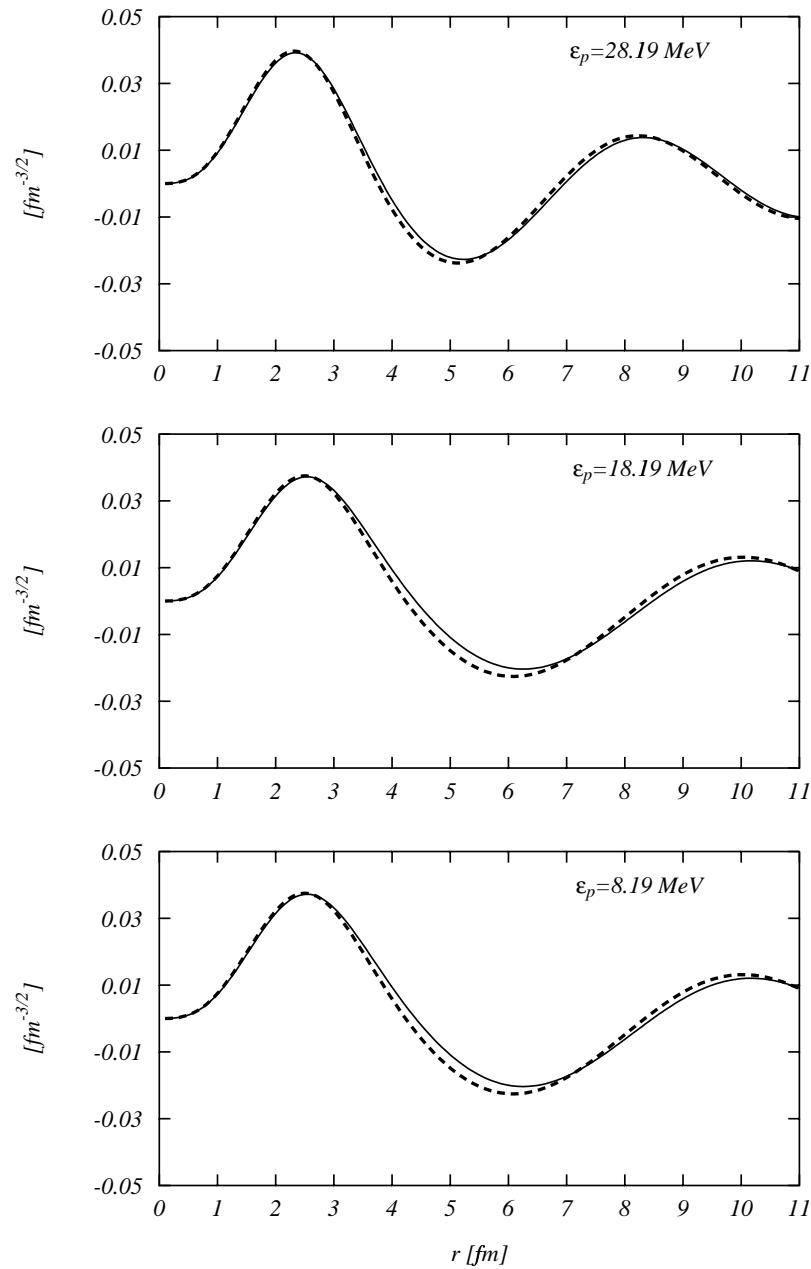


Figura 4.9: Confronto tra soluzione ottenuta con il metodo di Numerov (linea tratteggiata) e soluzione ottenuta con il nostro algoritmo (linea continua). Neutrone con $l = 3$

Capitolo 5

Metodo di risoluzione delle equazioni

5.1 Introduzione

Lo scopo del nostro lavoro di tesi è quello di studiare la validità di un metodo di risoluzione delle equazioni RPA formulate nello spazio delle coordinate.

Per effettuare questo studio semplifichiamo le equazioni da risolvere, ipotizzando, nell'equazione (2.19), $g_{ph} = 0$. Questo equivale a ridurre l'RPA all'*Approssimazione di Tamm Dankoff*, TDA. Trascuriamo inoltre nella (2.19) i termini di scambio e ipotizziamo che siano nulli i termini *B.S.T.*

È ovviamente probabile che eventuali problemi incontrati nel corso della risoluzione delle equazioni semplificate si accentuino quando si prendono in considerazione le equazioni complete.

L'equazione che ci proponiamo di risolvere è quindi la seguente:

$$(h_p - \epsilon_h - E)f_{ph}(r) +$$

$$+ \sum_{p'h'} \{ \langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle R_h(r) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V(r, r_2) f_{p'h'}(r_2) \} = 0 \quad (5.1)$$

con:

$$h_p R(r) = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l_p(l_p+1)}{r^2} \right) + V^{WS}(r) \right] R(r) = \epsilon_p R(r) \quad (5.2)$$

dove $V^{WS}(r)$ è un potenziale di Woods-Saxon avente la forma (4.17).

Dopo aver trovato una soluzione la normalizzeremo secondo quanto visto nel Capitolo 3 e calcoleremo la probabilità di transizione, detta anche *B-value*, definita come:

$$\begin{aligned} B(E) &= \\ &= \frac{1}{2J+1} \sum_a \left\{ \sum_{ph} \left[\int dr_1 r_1^2 R_p(r_1, \epsilon_p) f_{ph}^a(r_1, E) \int dr_2 r_2^2 R_p(r_2) R_h(r_2) Q(r_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. < j_p || O(\Omega) || j_h > < j_p || O(\Omega) || j_h > \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nei nostri calcoli consideriamo per l'interazione residua solo un termine centrale del tipo:

$$V(1, 2) = v(r_{12}) \quad (5.4)$$

con v funzione scalare dipendente solo dalla distanza tra due nucleoni $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Per separare le variabili \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 è conveniente riscrivere l'interazione residua come trasformata di Fourier:

$$v(r_{12}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} V(q) d^3 q \quad (5.5)$$

Sviluppando in multipoli le funzioni esponenziali contenute nelle precedenti espressioni e sfruttando la seguente relazione di ortogonalità che lega le funzioni armoniche sferiche:

$$\int d\hat{q} Y_{l_1\mu_1}(\hat{q}) Y_{l_2\mu_2}^*(\hat{q}) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{\mu_1 \mu_2} \quad (5.6)$$

otteniamo:

$$v(r_{12}) = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\mu} Y_{l\mu}^*(\hat{r}_1) Y_{l\mu}(\hat{r}_2) \int dq q^2 j_l(qr_1) j_l(qr_2) V(q) \quad (5.7)$$

Sostituendo la precedente espressione dell'interazione residua nell'elemento di matrice $v_{ph,p'h'}$ definito dalla (1.54), si ottiene la seguente espressione per la parte angolare $\langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle$ (i calcoli dettagliati sono riportati in Appendice C):

$$\langle v_{ph,p'h'}^{dir}(\Omega) \rangle = \frac{(-)^{j_{p'}+j_{h'}+J}}{\hat{J}^2} \langle j_p || Y_l || j_h \rangle \langle j_{h'} || Y_l || j_{p'} \rangle \quad (5.8)$$

5.2 Il metodo iterativo

Osserviamo che anche nel termine integrale dell'equazione (5.1) compare la f , soluzione della stessa equazione. Il termine integrale non è quindi noto in partenza e non è dunque possibile risolvere direttamente l'equazione.

Per trovare la soluzione dell'equazione utilizziamo un *metodo iterativo*, considerando il termine integrale come termine non omogeneo di un'equazione differenziale.

Risolviamo prima l'equazione omogenea associata alla (5.1) e sostituiamo la soluzione di quest'ultima all'interno del termine non omogeneo. Procediamo risolvendo equazioni ottenute sostituendo nel termine non omogeneo le soluzioni delle equazioni precedenti. La procedura si arresta quando, applicando a due soluzioni successive un criterio di convergenza stabilito, otteniamo una differenza inferiore ad un certo valore fissato ϵ . Possiamo quindi normalizzare l'ultima soluzione ottenuta e procedere al calcolo del B-value.

Indichiamo con $Z_{ph}(r)$ e $W_{ph}(r)$ due soluzioni numeriche successive ottenute nel corso dell'iterazione. I due criteri di convergenza presi in considerazione sono i seguenti:

$$C1^{ZW} = 1 - \frac{|\sum_{ph} \int W_{ph}(r) dr|}{|\sum_{ph} \int Z_{ph}(r) dr|} < \epsilon \quad (5.9)$$

$$C2^{ZW} = \frac{|\sum_{ph} \int W_{ph}(r)dr| - |\sum_{ph} \int Z_{ph}(r)dr||}{|\sum_{ph} \int W_{ph}(r)dr| + |\sum_{ph} \int Z_{ph}(r)dr|} < \epsilon \quad (5.10)$$

Nel corso del calcolo è anche fissato un numero massimo di iterazioni, pari a 100 ; se non si ottiene una convergenza prima dell'ultima iterazione consentita, la soluzione numerica da normalizzare è quella ottenuta dalla centesima iterazione.

5.3 Risultati del metodo iterativo

In questo paragrafo discuteremo la validità del metodo iterativo usato per risolvere la (5.1), riportando i risultati ottenuti per quattro diversi nuclei: 4He , ^{16}O , ^{40}Ca e ^{208}Pb .

Nella seguente tabella sono riportati i parametri del potenziale di Woods-Saxon $V^{WS}(r)$, la cui espressione è data dalla (4.17), per ognuno dei quattro nuclei:

		U_0 (MeV)	U_{SO} (MeV)	a_0 (fm)	a_{SO} (fm)	R_0 (fm)	R_{0SO} (fm)	R_{0C} (fm)
4He	p	-52.50	-7.00	0.53	0.53	3.2	3.2	3.22
	n	-52.50	-6.54	0.53	0.53	3.2	3.2	
^{16}O	p	-52.50	-7.00	0.53	0.53	3.2	3.2	3.22
	n	-52.50	-6.54	0.53	0.53	3.2	3.2	
^{40}Ca	p	-57.50	-11.11	0.53	0.53	4.1	4.1	4.1
	n	-55.00	-8.50	0.53	0.53	4.1	4.1	
^{208}Pb	p	-59.26	-9.219	0.77	0.77	7.48	7.48	7.48
	n	-42.0853	-8.837	0.733	0.733	7.8	7.8	

Applichiamo il metodo iterativo per ognuno dei quattro nuclei e per diverse multipolarità (2^+ , 1^- , 0^+), trovando una soluzione numerica in corrispondenza di diversi valori dell'energia di eccitazione. Scegliamo $\epsilon = 10^{-5}$.

Normalizziamo quindi le soluzioni numeriche trovate per calcolare i B-value.

Nel seguito riportiamo gli andamenti dei B-value per i quattro nuclei, indicando con un punto i casi in cui nel corso della ricerca della soluzione numerica si è raggiunto il numero massimo di iterazioni, pari a 100.

In Appendice E sono riportati i valori numerici dei B-value per i quattro nuclei ed inoltre, nel caso della multipolarità 0^+ dell' 4He è effettuato un confronto tra i valori dei B-value calcolati mediante i due diversi criteri di convergenza ed emerge un notevole accordo tra i valori ottenuti. Per le altre multipolarità e per gli altri tre altri nuclei usiamo solo il criterio *C2*.

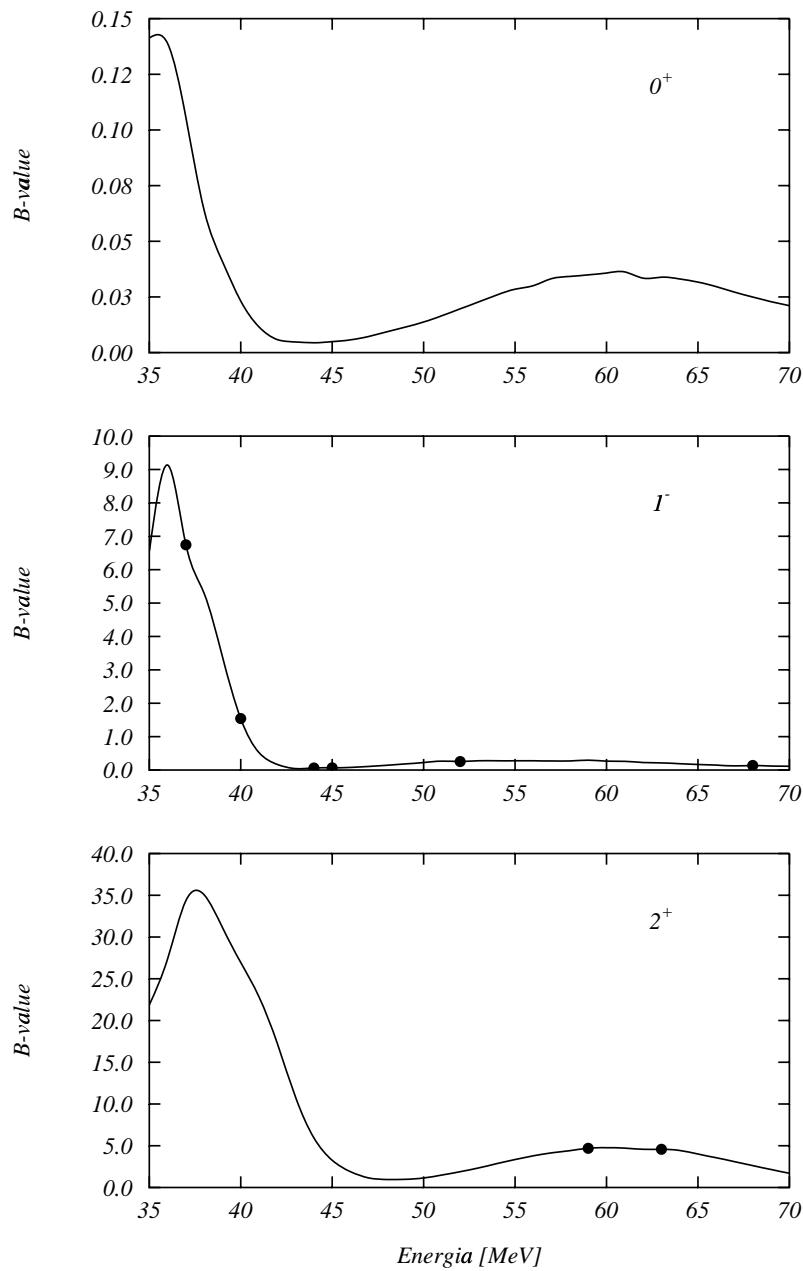


Figura 5.1: Andamento dei B-value per diverse multipolarità dell' 4He . I punti indicano valori dei B-value ottenuti dopo il massimo numero di iterazioni.

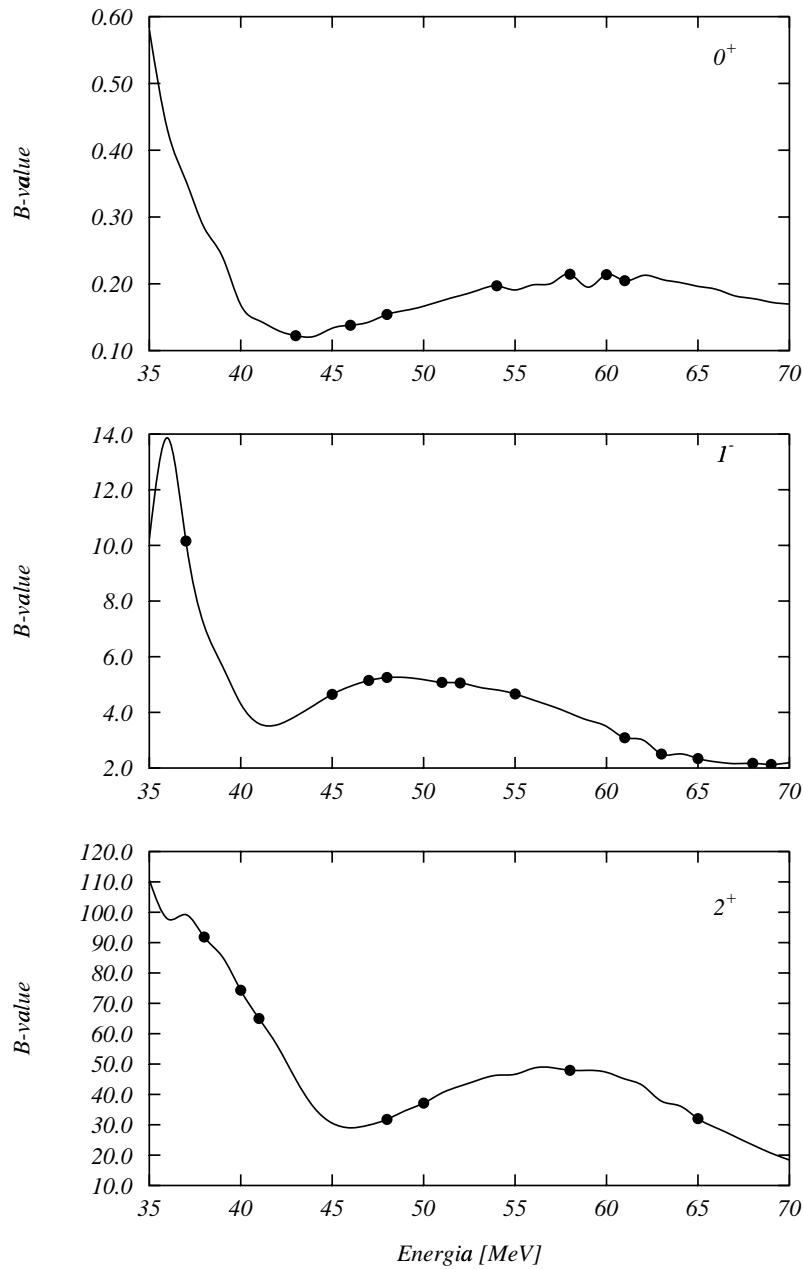


Figura 5.2: Andamento dei B-value per diverse multipolarità dell' ^{16}O . I punti indicano valori dei B-value ottenuti dopo il massimo numero di iterazioni.

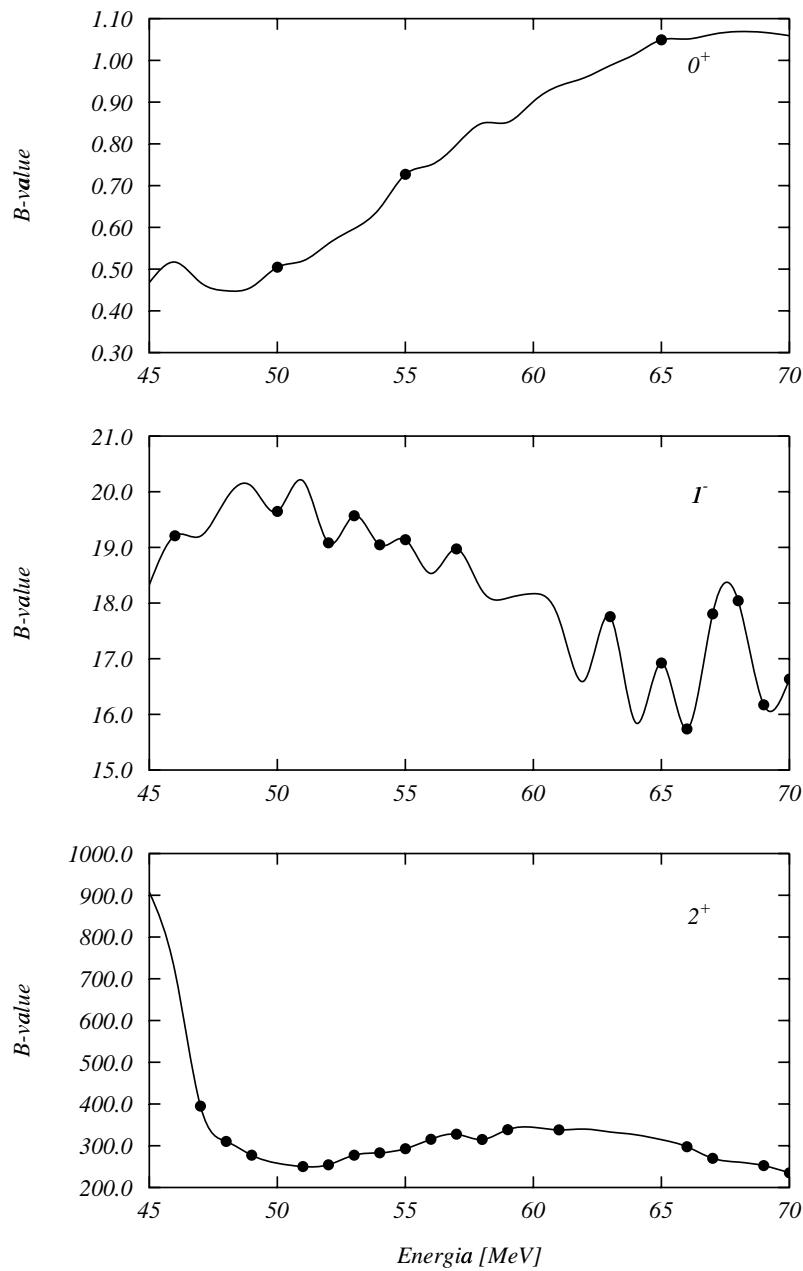


Figura 5.3: Andamento dei B-value per diverse multipolarità del ^{40}Ca . I punti indicano valori dei B-value ottenuti dopo il massimo numero di iterazioni.

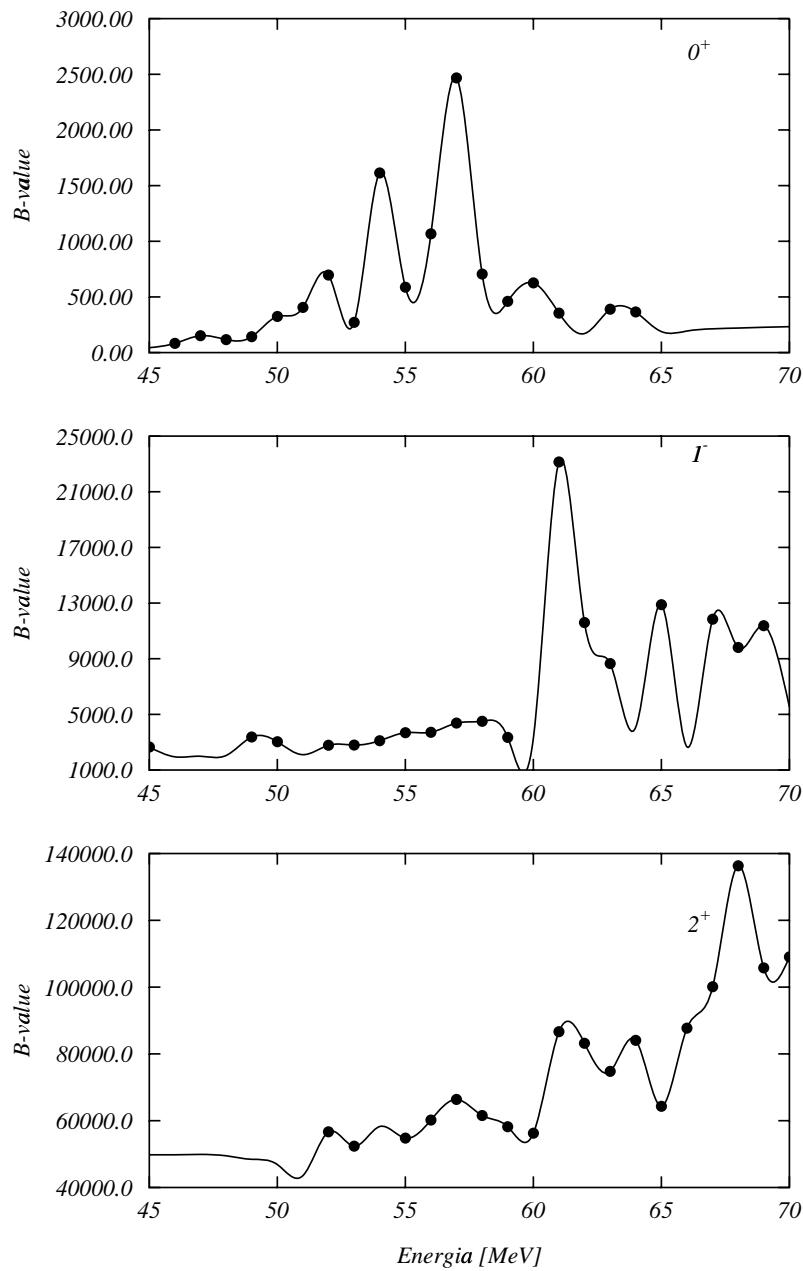


Figura 5.4: Andamento dei B-value per diverse multipolarità del ^{208}Pb . I punti indicano valori dei B-value ottenuti dopo il massimo numero di iterazioni.

Dagli andamenti dei B-value riportati nelle precedenti figure è possibile osservare come, in corrispondenza delle energie di eccitazione in cui il metodo iterativo non arriva alla convergenza prima del massimo numero di iterazioni, vi siano delle lievi discontinuità che comunque non deviano completamente dall'andamento generale del B-value.

Risulta interessante analizzare il comportamento del parametro di convergenza $C2$, in funzione del numero di iterazioni, in un caso di convergenza e in diversi casi di non convergenza.

Prendiamo il caso 1^- dell' ^{16}O . Come si osserva nelle figure riportate nel seguito, in corrispondenza di $E = 39\text{ MeV}$ si ha la convergenza della soluzione dopo 40 iterazioni e $C2$ ha in questo caso un andamento decrescente abbastanza rapido.

Per le energie $E = 37\text{ MeV}$ ed $E = 65\text{ MeV}$ non si ha la convergenza, ma il parametro di convergenza ha un comportamento diverso nei due casi. Nel primo caso il parametro inizia, da un certo numero di iterazioni in poi, a compiere piccole oscillazioni attorno ad un valore costante e ciò sta ad indicare che nel corso delle ultime iterazioni le soluzioni tendono ad oscillare tra due soli valori e si ha quindi in qualche modo una situazione di stabilità. Nell'altro caso invece l'andamento del parametro $C2$ è più imprevedibile e ciò rivela l'instabilità e quindi l'inefficacia del metodo iterativo usato per risolvere l'equazione non omogenea.

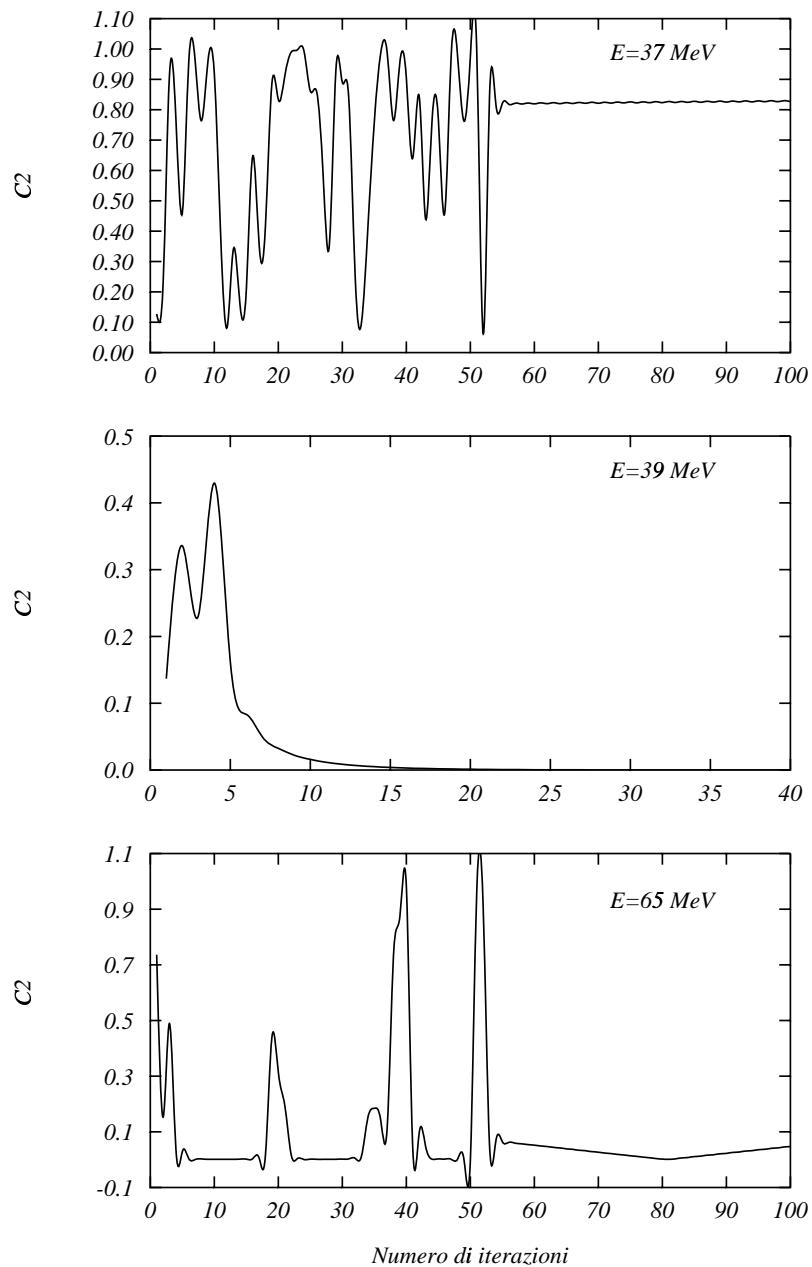


Figura 5.5: Andamenti del parametro di convergenza $C2$ in funzione del numero di iterazioni, per diverse energie di eccitazione dell' ${}^{16}\text{O}$, multipolarità 1^- .

5.4 Calcolo con un'interazione a zero-range

Un'interazione residua a *zero-range* ha la seguente forma:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (5.11)$$

con V_0 costante.

È possibile separare la dipendenza radiale da quella angolare sfruttando la seguente proprietà della δ di Dirac:

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r^2} \sum_{l\mu} Y_{l\mu}^*(\hat{r}_1) Y_{l\mu}(\hat{r}_2) \quad (5.12)$$

Inserendo la (5.11) nella (5.1) otteniamo:

$$(h_p - \epsilon_h - E) f_{ph}(r) + \sum_{p'h'} V_{ph,p'h'} f_{p'h'}(r) = 0 \quad (5.13)$$

con:

$$V_{ph,p'h'} = R_h(r) R_{h'}(r) V_0 \frac{(-1)^{j_{p'}+j_{h'}+J}}{\hat{J}^2} \langle j_p || Y_l || j_h \rangle \langle j_{h'} || Y_l || j_{p'} \rangle \quad (5.14)$$

Si ha infatti, nella (5.1) :

$$\int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) V_0 \frac{\delta(r - r_2)}{r^2} f_{p'h'}(r_2) = R_{h'}(r) V_0 f_{p'h'}(r) \quad (5.15)$$

Esplcitando l'espressione dell'hamiltoniana h_p otteniamo:

$$\begin{aligned} & \sum_{p'h'} \left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} f_{p'h'}(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{r} \frac{d}{dr} f_{p'h'}(r) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} + V^{WS}(r) - \epsilon_h - E \right) f_{p'h'}(r) \right] \delta_{ph,p'h'} + V_{ph,p'h'} f_{p'h'}(r) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

La (5.13) è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea della forma:

$$\sum_{p'h'} \left[a_{ph,p'h'}(x) \frac{d^2}{dx^2} f_{p'h'}(x) + b_{ph,p'h'}(x) \frac{d}{dx} f_{p'h'}(x) + c_{ph,p'h'}(x) f_{p'h'}(x) \right] = 0 \quad (5.17)$$

Per la ricerca di una soluzione dell'equazione (5.17) è possibile applicare direttamente il metodo numerico presentato nel Capitolo 4. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_{ph}(x)}{h^2} + \frac{b_{ph}(x)}{2h} \right) f_{p'h'}(x+h) &= \left(\frac{b_{ph}(x)}{2h} - \frac{a_{ph}(x)}{h^2} \right) f_{p'h'}(x-h) + \\ &+ \sum_{p'h'} \left(\frac{2a_{ph}(x)}{h^2} \delta_{ph,p'h'} - c_{ph,p'h'}(x) \right) f_{p'h'}(x) \end{aligned} \quad (5.18)$$

La precedente formula di ricorrenza permette di trovare numericamente la soluzione della (5.13) su una griglia di punti equispaziati, con passo di integrazione h .

L'errore locale che si commette applicando quest'algoritmo è proporzionale ad h^4 .

Il metodo numerico appena descritto ci consente di risolvere la (5.1) con un'interazione a zero-range, senza bisogno di ricorrere al metodo iterativo; si tratta semplicemente di trasformare preliminarmente, sulla base di considerazioni matematiche, la (5.1) in un'equazione differenziale omogenea.

In alternativa è possibile inserire, nel corso della risoluzione dell'equazione non omogenea, delle condizioni al contorno che riproducano il comportamento di un'interazione residua di contatto; si tratta quindi di inserire nella nostra equazione non omogenea (5.1) un'interazione a zero-range.

È possibile calcolare soluzioni della (5.1) con interazione di contatto, usando i due metodi descritti. Si può poi effettuare un confronto tra le soluzioni ottenute mediante l'algoritmo descritto nel precedente paragrafo e le soluzioni ottenute mediante il metodo iterativo in seguito all'inserimento di un'interazione di contatto.

Prendiamo in considerazione diverse multipolarità dell' ${}^{16}O$ e alla costante V_0 attribuiamo prima un valore nullo, poi -1 MeV fm^3 e infine prendiamo un'interazione di Landau-Migdal, con $V_0 = -612.21 \text{ MeV fm}^3$.

Andamenti dei valori dei B-value ottenuti con i due metodi, in funzione dell'energia di eccitazione, sono riportati nelle seguenti figure.

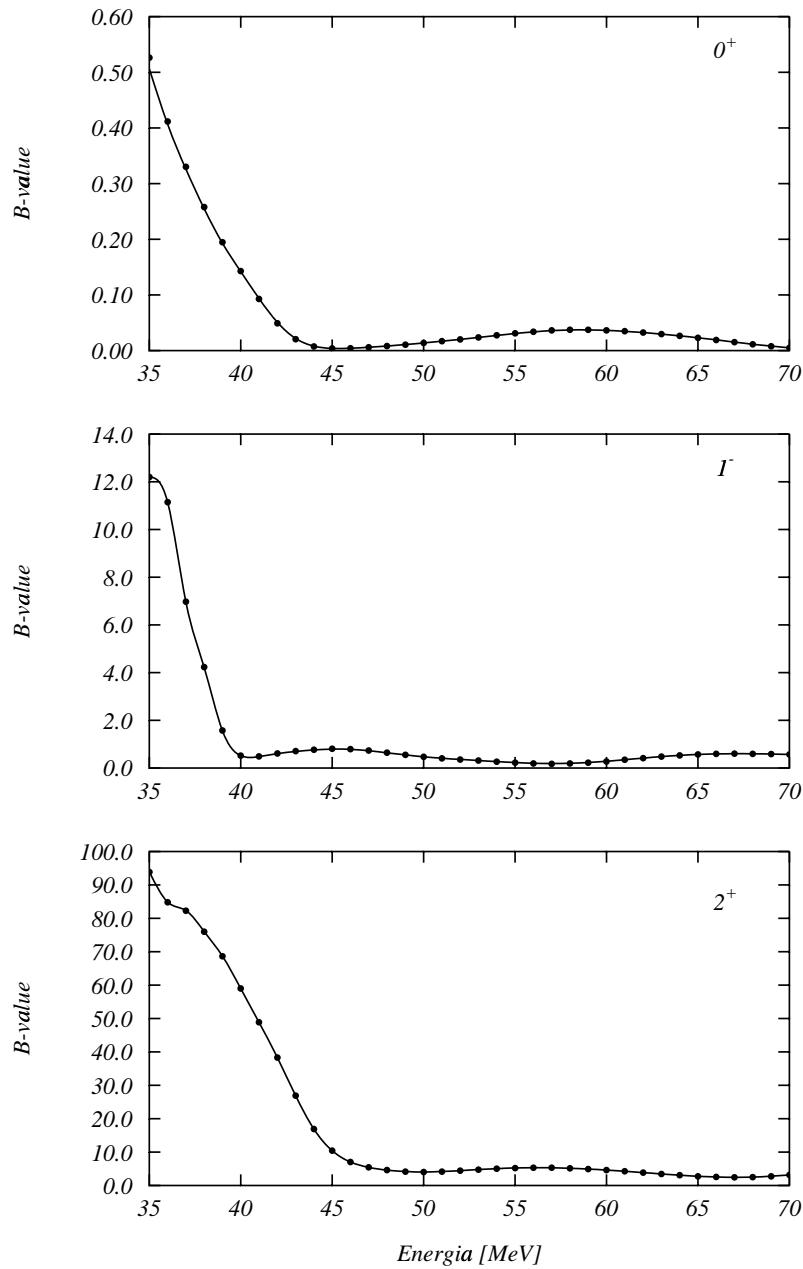


Figura 5.6: Confronto tra gli andamenti dei B-value ottenuti risolvendo l'equazione omogenea (linea continua) e l'equazione non omogenea (punti), per diverse multipolarità dell' ^{16}O . $V_0 = 0$.

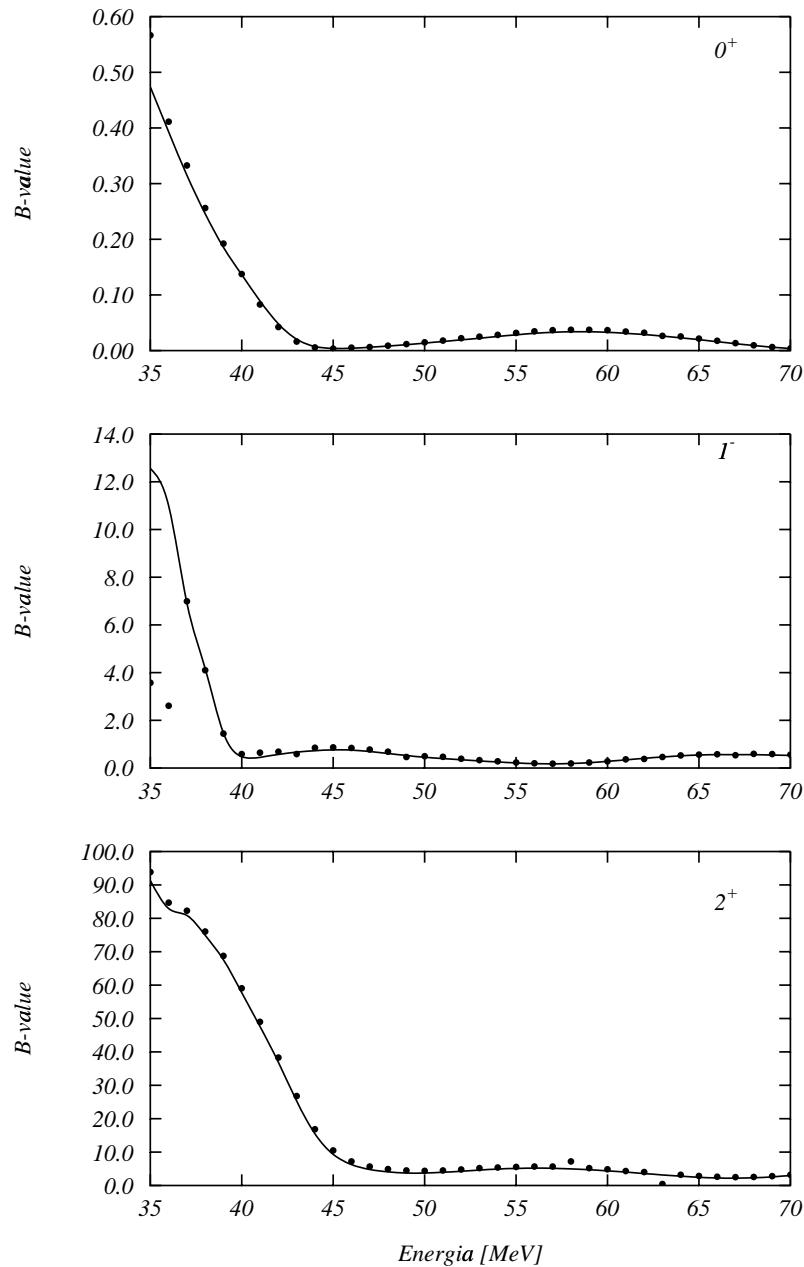


Figura 5.7: Confronto tra gli andamenti dei B-value ottenuti risolvendo l'equazione omogenea (linea continua) e l'equazione non omogenea (punti), per diverse multipolarità dell' ^{16}O . $V_0 = -1 \text{ MeV fm}^3$.

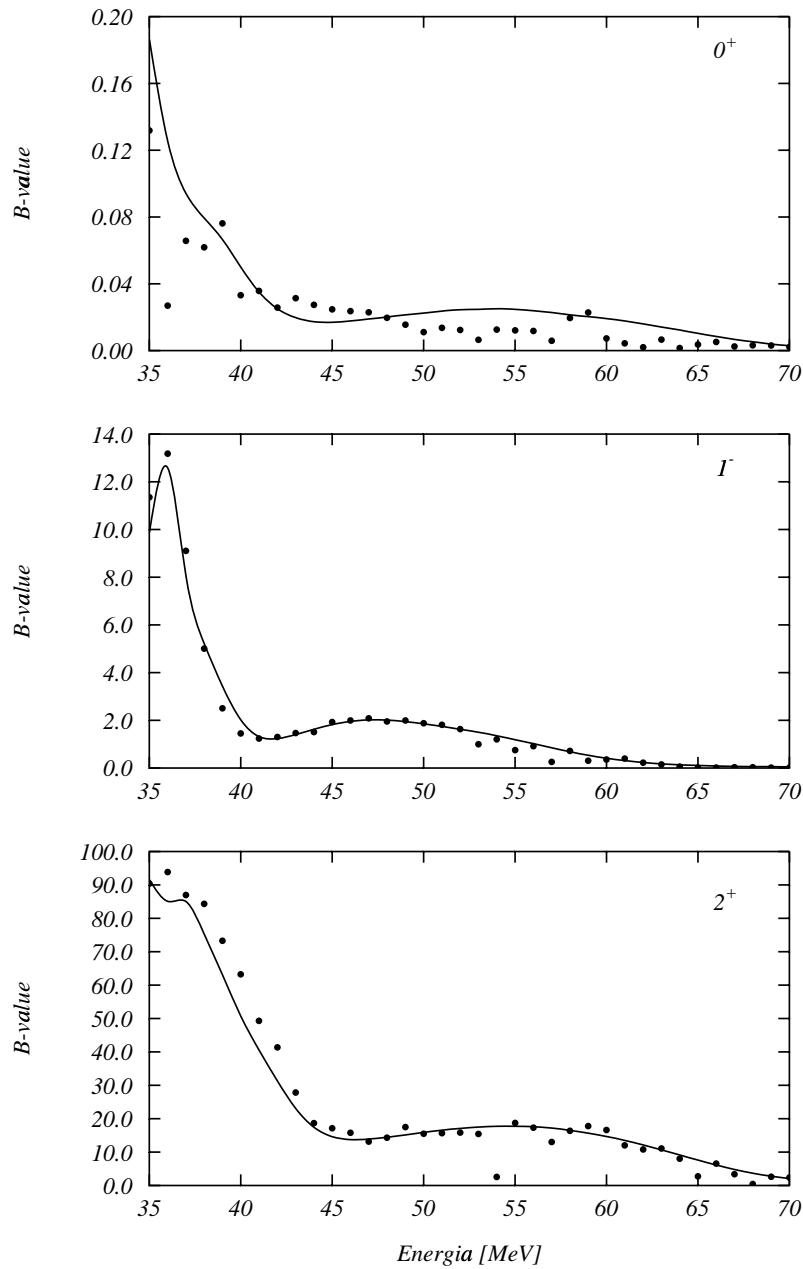


Figura 5.8: Confronto tra gli andamenti dei B-value ottenuti risolvendo l'equazione omogenea (linea continua) e l'equazione non omogenea (punti), per diverse multipolarità dell' ^{16}O . $V_0 = -621.1 \text{ MeV fm}^3$.

Nelle precedenti figure è possibile osservare l'ottimo accordo tra i B-value ottenuti mediante i due diversi metodi per bassissimi valori della costante dell'interazione di contatto. Per $V_0 = -1 \text{ MeV fm}^3$ l'accordo tra i due andamenti è meno netto rispetto al caso in cui l'interazione è nulla, mentre quando si accende l'interazione di Landau-Migdal i valori dei B-value ottenuti con i due metodi sono a tratti notevolmente differenti.

La causa di tale disaccordo è da ricercarsi nell'instabilità del metodo numerico usato per risolvere l'equazione non omogenea. Come abbiamo già osservato, infatti, il metodo iterativo non risulta essere particolarmente efficace per risolvere l'equazione differenziale (5.1), dal momento che in numerosi casi non si raggiunge la convergenza verso un'unica soluzione.

Se la costante dell'interazione residua di contatto non è molto elevata, il termine integrale dell'equazione diventa pressoché trascurabile ai fini della ricerca della soluzione e gli effetti dell'inefficacia del metodo iterativo non sono rilevanti. Al contrario, nel caso di una costante V_0 elevata, come nel caso dell'interazione di Landau-Migdal, il termine integrale contribuisce notevolmente alla ricerca della soluzione dell'equazione e il metodo iterativo rivela la sua inefficacia (ciò è evidente anche dal maggior numero di discontinuità negli andamenti dei B-value nel caso di interazione di Landau-Migdal rispetto al caso $V_0 = -1 \text{ MeV fm}^3$).

Capitolo 6

Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro di tesi era uno studio di fattibilità per la soluzione delle equazioni RPA nel continuo formulate nello spazio delle coordinate, utilizzando un’interazione a range finito.

Abbiamo formulato il problema nella sua generalità, ma lo studio numerico è stato fatto applicando l’Approssimazione di Tamm-Dankoff e trascurando i termini di scambio dell’interazione residua. Le equazioni ottenute sono di tipo integro-differenziali in cui anche il termine integrale contiene la soluzione cercata. Le equazioni Hartree-Fock formulate nello spazio delle coordinate [Rin 80] hanno la stessa forma e vengono risolte applicando un metodo iterativo. Abbiamo quindi tentato di risolvere anche le equazioni RPA usando tale metodo. Nel nostro caso, come abbiamo visto nel capitolo 5, il metodo si è dimostrato instabile e quindi inefficiente, dal momento che spesso non giunge a convergenza nella ricerca delle soluzioni delle equazioni.

La causa di una tale differenza nel comportamento del metodo nei due casi potrebbe risiedere nella mancanza di un principio variazionale alla base delle nostre equazioni,

a differenza di quanto accade per le equazioni Hartree-Fock, che sono ottenute minimizzando il funzionale energia.

Un'altra causa potrebbe inoltre risiedere nella maggiore complessità delle funzioni d'onda da noi utilizzate, che rappresentano stati nel continuo, rispetto a quelle usate nella teoria Hartree-Fock, che sono invece funzioni d'onda di stati legati.

Un modo alternativo per risolvere le equazioni RPA nello spazio delle coordinate potrebbe essere quello di sviluppare la soluzione su un'opportuna base di funzioni, che consenta di trasformare il problema integro-differenziale in un problema algebrico. Tentativi di questo tipo sono stati fatti in passato utilizzando ad esempio uno sviluppo della soluzione su una base di funzioni di Green [Kno 91] e di stati di Weinberg [Bub 90].

Appendice A

Alcune equazioni relative alla teoria RPA

A.1 Derivazione dell'equazione del moto

Azione dei commutatori $[H, Q_\nu^+]$ e $[H, Q_\nu]$ sullo stato fondamentale

Partendo dal problema agli autovalori definito dall'equazione di Schrödinger:

$$H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle \quad (\text{A.1})$$

e dall'azione dei due operatori Q_ν^+ e Q_ν :

$$Q_\nu^+|0\rangle = |\nu\rangle \quad (\text{A.2})$$

$$Q_\nu|0\rangle = 0 \quad (\text{A.3})$$

si ottengono le espressioni dell'azione dei commutatori $[H, Q_\nu^+]$ e $[H, Q_\nu]$ sullo stato fondamentale nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 [H, Q_\nu^+] |0\rangle &= \\
 &= (HQ_\nu^+ - Q_\nu^+ H) |0\rangle = H|\nu\rangle - Q_\nu^+ E_0 |0\rangle = E_\nu |\nu\rangle - E_0 |0\rangle = \\
 &= (E_\nu - E_0) Q_\nu^+ |0\rangle
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 [H, Q_\nu] |0\rangle &= \\
 &= (HQ_\nu |0\rangle - Q_\nu H |0\rangle) = 0 - E_0 Q_\nu |0\rangle = \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Derivazione dell'equazione del moto con un generico operatore A

Partendo dal problema agli autovalori (A.1) e ricordando come agiscono gli operatori Q_ν^+ e Q_ν sullo stato fondamentale (espressioni (A.2) e (A.3)) si ha:

$$\begin{aligned}
 <0| [A, [H, Q_\nu^+]] |0\rangle &= \\
 &= <0| A[H, Q_\nu^+] |0\rangle - <0| [H, Q_\nu^+] A |0\rangle = \\
 &= (E_\nu - E_0) <0| AQ_\nu^+ |0\rangle - <0| HQ_\nu^+ A |0\rangle + <0| Q_\nu^+ HA |0\rangle = \\
 &= (E_\nu - E_0) <0| [A, Q_\nu^+] |0\rangle
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2 Derivazione delle due equazioni accoppiate

Inserendo la variazione:

$$\delta Q_\nu = \sum_{mi} (\delta X_{mi}^\nu a_i^+ a_m - \delta Y_{mi}^\nu a_m^+ a_i) \tag{A.7}$$

nell'equazione del moto:

$$\langle 0 | [\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^+]] | 0 \rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0 | [\delta Q_\nu, Q_\nu^+] | 0 \rangle \quad (\text{A.8})$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \left[\sum_{mi} (\delta X_{mi}^\nu a_i^+ a_m - \delta Y_{mi}^\nu a_m^+ a_i), [H, Q_\nu^+] \right] | 0 \rangle = \\ & = (E_\nu - E_0) \langle 0 | \left[\sum_{mi} (\delta X_{mi}^\nu a_i^+ a_m - \delta Y_{mi}^\nu a_m^+ a_i), Q_\nu^+ \right] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Estraendo i simboli di sommatoria e le variazioni δX e δY dalle parentesi e inserendo lo stato fondamentale RPA $|\Psi_0\rangle$, si ha:

$$\begin{aligned} & \sum_{mi} \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle \delta X_{mi}^\nu + \\ & - \sum_{mi} \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle \delta Y_{mi}^\nu = \\ & = \sum_{mi} (E_\nu - E_0) \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \delta X_{mi}^\nu + \\ & - \sum_{mi} (E_\nu - E_0) \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \delta Y_{mi}^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Separando i termini in δX e in δY si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} & \sum_{mi} \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle \delta X_{mi}^\nu = \\ & = \sum_{mi} (E_\nu - E_0) \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \delta X_{mi}^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{mi} \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle \delta Y_{mi}^\nu = \\ & = \sum_{mi} (E_\nu - E_0) \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \delta Y_{mi}^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Le variazioni δX e δY sono linearmente indipendenti; è quindi possibile nelle precedenti equazioni eguagliare i coefficienti di ciascun termine della sommatoria, ottenendo così il sistema di due equazioni accoppiate:

$$\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \quad (\text{A.13})$$

$$\langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \quad (\text{A.14})$$

dove con ω_ν si indica l'energia di eccitazione $E_\nu - E_0$ dello stato $|\nu\rangle$.

Rielaborazione delle equazioni accoppiate

In questa sezione ci proponiamo di illustrare tutti i passaggi che portano ad una nuova forma dell'equazione:

$$\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \quad (\text{A.15})$$

Il primo membro dell'equazione può essere esplicitato inserendo all'interno dell'elemento di matrice $\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle$ l'espressione dell'operatore Q_ν^+ :

$$Q_\nu^+ = \sum_{mi} (X_{mi}^\nu a_m^+ a_i - Y_{mi}^\nu a_i^+ a_m) \quad (\text{A.16})$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle &= \\ &= \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | \Psi_0 \rangle - \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]] | \Psi_0 \rangle = \\ &= \sum_{nj} (X_{nj}^\nu A_{minj} + Y_{nj}^\nu B_{minj}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

con:

$$A_{minj} = \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | \Psi_0 \rangle \quad (\text{A.18})$$

e

$$B_{minj} = - \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]] | \Psi_0 \rangle \quad (\text{A.19})$$

Anche per rielaborare il secondo membro della (A.15) è necessario esplicitare nell'elemento di matrice l'operatore Q_ν^+ ; otteniamo:

$$\langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, \sum_{nj} X_{nj}^\nu a_n^+ a_j - \sum_{nj} Y_{nj}^\nu a_j^+ a_n] | \Psi_0 \rangle = \\
&= \sum_{nj} \{ X_{nj}^\nu j \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, a_n^+ a_j] | \Psi_0 \rangle - Y_{nj}^\nu j \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, a_j^+ a_n] | \Psi_0 \rangle \}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Gli elementi di matrice dell'ultimo membro sono valutati nel Capitolo 1, paragrafo 1.2, effettuando l'Approssimazione Quasi Bosonica.

Si ottiene infine l'equazione:

$$\sum_{nj} [X_{nj}^\nu A_{minj} + Y_{nj}^\nu B_{minj}] = \omega_\nu X_{mi}^\nu \tag{A.21}$$

Ci proponiamo ora di illustrare tutti i passaggi che portano ad una nuova forma dell'equazione:

$$\langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \omega_\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle \tag{A.22}$$

Per rielaborare l'equazione (A.22), dopo aver esplicitato all'interno degli elementi di matrice l'operatore Q_ν^+ , è possibile sfruttare alcune proprietà dei commutatori.

Si ha infatti:

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \\
&= \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, a_n^+ a_j]] | \Psi_0 \rangle - \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, a_j^+ a_n]] | \Psi_0 \rangle
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Poiché si ha:

$$[H, a_n^+ a_j] = [a_j^+ a_n, H]^+ \quad e \quad [a_m^+ a_i, [H, a_n^+ a_j]] = [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]]^+$$

è possibile scrivere il primo membro nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \\
 & = \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_j^+ a_n]]^+ | \Psi_0 \rangle + \\
 & - \sum_{nj} Y_{nj}^\nu \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]]^+ | \Psi_0 \rangle
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Per ogni tensore sferico di rango k vale la proprietà:

$$\langle a | T_b^k | a \rangle = \langle b | T_b^{k+} | a \rangle^* \tag{A.25}$$

si ottiene quindi per il primo membro l'espressione:

$$\langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, [H, Q_\nu^+]] | \Psi_0 \rangle = \sum_{nj} [X_{nj}^\nu (-B_{minj}^*) + Y_{nj}^\nu (-A_{minj}^*)] \tag{A.26}$$

Per il secondo membro si ha:

$$\begin{aligned}
 & \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, Q_\nu^+] | \Psi_0 \rangle = \\
 & = \sum_{nj} X_{mi}^\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, a_n^+ a_j] | \Psi_0 \rangle - Y_{mi}^\nu \langle \Psi_0 | [a_m^+ a_i, a_j^+ a_n] | \Psi_0 \rangle = \\
 & = Y_{mi}^\nu
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

dove per il calcolo degli elementi di matrice è applicata l'Approssimazione Quasi Bosonica (dal momento che non si conosce l'azione degli operatori di creazione e di distruzione sullo stato fondamentale RPA).

Si ottiene infine la seguente equazione:

$$\sum_{nj} [X_{nj}^\nu B_{minj}^* + Y_{nj}^\nu A_{minj}^*] = -\omega_\nu Y_{mi}^\nu \tag{A.28}$$

A.3 Calcolo dei coefficienti A e B

Calcolo dell'espressione esplicita del coefficiente A mediante l'uso della QBA

Il punto di partenza per il calcolo dell'espressione esplicita del coefficiente A è quello di sostituire all'interno dell'elemento di matrice

$$A_{minj} = \langle \Psi_0 | [a_i^+ a_m, [H, a_n^+ a_j]] | \Psi_0 \rangle \quad (\text{A.29})$$

l'espressione di H scritta in Rappresentazione dei Numeri di Occupazione:

$$H = \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} a_{\alpha}^+ a_{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{ijij} \bar{V}_{ijij} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} N[a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}] \quad (\text{A.30})$$

Applicando l'Approssimazione Quasi Bosonica otteniamo:

$$\begin{aligned} A_{minj} &= \\ &= \langle \Phi_0 | \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} [a_i^+ a_m, [a_{\alpha}^+ a_{\beta}, a_n^+ a_j]] + \\ &\quad - \frac{1}{2} [a_i^+ a_m, [\sum_{ijij} \bar{V}_{ijij}, a_n^+ a_j]] + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} [a_i^+ a_m, [N[a_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}], a_n^+ a_j]] | \Phi_0 \rangle \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

Il commutatore più interno del primo termine della somma presente nell'espressione del coefficiente, ricordando le regole di anticommutazione degli operatori a e a^+ , può essere facilmente calcolato:

$$\begin{aligned} [a_{\alpha}^+ a_{\beta}, a_n^+ a_j] &= a_{\alpha}^+ a_{\beta} a_n^+ a_j - a_n^+ a_j a_{\alpha}^+ a_{\beta} = a_{\alpha}^+ a_{\beta} a_n^+ a_j - a_n^+ [\delta_{j\alpha} - a_{\alpha}^+ a_j] a_{\beta} = \\ &= a_{\alpha}^+ a_{\beta} a_n^+ a_j - a_n^+ a_{\beta} \delta_{j\alpha} + a_n^+ a_{\alpha}^+ a_j a_{\beta} = a_{\alpha}^+ a_{\beta} a_n^+ a_j - a_n^+ a_{\beta} \delta_{j\alpha} - a_{\alpha}^+ a_n^+ a_j a_{\beta} = \\ &= a_{\alpha}^+ a_{\beta} a_n^+ a_j - a_n^+ a_{\beta} \delta_{j\alpha} + (a_{\alpha}^+ (\delta_{n\beta} - a_{\beta} a_n^+) a_j) = -a_n^+ a_{\beta} \delta_{j\alpha} + a_{\alpha}^+ a_j \delta_{n\beta} \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Wick, l'espressione dell'elemento di matrice contenente il primo termine della somma diventa:

$$\begin{aligned} <\Phi_0 | [a_i^+ a_m, [a_\alpha^+ a_\beta, a_n^+ a_j]] | \Phi_0> &= <\Phi_0 | [a_i^+ a_m, (-a_n^+ a_\beta \delta_{j\alpha} + a_\alpha^+ a_j \delta_{n\beta})] | \Phi_0> = \\ &= \delta_{ij} \delta_{m\alpha} \delta_{\beta n} - \delta_{mn} \delta_{j\alpha} \delta_{i\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Se si utilizzano come base gli autostati di $h_{\alpha\beta}$, il primo termine del coefficiente A può essere scritto come:

$$\begin{aligned} <\Phi_0 | \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} [a_i^+ a_m, [a_\alpha^+ a_\beta, a_n^+ a_j]] | \Phi_0> &= \epsilon_m \delta_{ij} \delta_{mn} - \epsilon_i \delta_{mn} \delta_{ij} = \\ &= (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{ij} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Il secondo termine della somma contiene un operatore scalare, \bar{V}_{ijij} , che commuta con gli operatori di creazione e di distruzione. L'elemento di matrice è quindi nullo. Calcoliamo ora, applicando sempre il teorema di Wick, il terzo termine della somma:

$$\begin{aligned} <\Phi_0 | [a_i^+ a_m, [N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}], a_n^+ a_j]] | \Phi_0> &= \\ &= <\Phi_0 | a_i^+ a_m N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}] a_n^+ a_j | \Phi_0> - <\Phi_0 | a_i^+ a_m a_n^+ a_j N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}] | \Phi_0> = \\ &= <\Phi_0 | a_i^+ a_m a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'} a_n^+ a_j | \Phi_0> = \\ &= -\delta_{m\alpha} \delta_{j\beta} \delta_{n\alpha'} \delta_{i\beta'} + \delta_{j\alpha} \delta_{m\beta} \delta_{n\alpha'} \delta_{i\beta'} - \delta_{j\alpha} \delta_{m\beta} \delta_{i\alpha'} \delta_{n\beta'} + \delta_{m\alpha} \delta_{j\beta} \delta_{i\alpha'} \delta_{n\beta'} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} <\Phi_0 | \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} [a_i^+ a_m, [N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}], a_n^+ a_j]] | \Phi_0> &= \\ &= \frac{1}{4} (\bar{V}_{mjin} + \bar{V}_{jmni} - \bar{V}_{mjni} - \bar{V}_{jmni}) \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\bar{V}_{mjin} = -\bar{V}_{mjni} = \bar{V}_{jmni} = -\bar{V}_{jmni}$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{4}(\bar{V}_{mjin} + \bar{V}_{jmin} - \bar{V}_{mjni} - \bar{V}_{jmni}) = \bar{V}_{mjin} \quad (\text{A.36})$$

Infine dunque l'espressione di A è la seguente:

$$A_{mijn} = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{ji} \delta_{nm} + \bar{V}_{mjin} \quad (\text{A.37})$$

Calcolo dell'espressione esplicita del coefficiente B mediante l'uso della QBA

Anche in questa sezione, come in quella precedente, per il calcolo esplicito del coefficiente B sarà necessario sostituire nell'elemento di matrice l'hamiltoniana H scritta in RNO. Anche in questo caso il termine contenente l'operatore scalare \bar{V}_{ijij} darà contributo nullo.

Si vede facilmente come in questo caso anche il primo termine della somma, quello derivante dall'operatore ad un corpo $\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} a_{\alpha}^{+} a_{\beta}$ presente nell'hamiltoniana, dia un contributo nullo.

Infatti si ha:

$$[a_{\alpha}^{+} a_{\beta}, a_{\beta}^{+} a_{\alpha}] = a_{\alpha}^{+} a_{\beta} a_{\beta}^{+} a_{\alpha} - a_{\beta}^{+} a_{\alpha} a_{\alpha}^{+} a_{\beta} = \delta_{j\beta} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} - \delta_{n\alpha} a_{\beta}^{+} a_{\beta}$$

Sostituendo nell'elemento di matrice otteniamo:

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_0 | [a_i^{+} a_m, \delta_{j\beta} a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} - \delta_{n\alpha} a_{\beta}^{+} a_{\beta}] | \Phi_0 \rangle = \\ & = \delta_{j\beta} \langle \Phi_0 | a_i^{+} a_m a_{\alpha}^{+} a_{\alpha} | \Phi_0 \rangle - \delta_{n\alpha} \langle \Phi_0 | a_i^{+} a_m a_{\beta}^{+} a_{\beta} | \Phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Applicando il teorema di Wick si vede che i due elementi di matrice sono nulli.

Passiamo ora al calcolo del terzo termine della somma.

Si ha:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \langle \Phi_0 | [a_i^+ a_m, [N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}], a_j^+ a_n]] | \Phi_0 \rangle = \\
 & = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \langle \Phi_0 | a_i^+ a_m N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}] a_j^+ a_n | \Phi_0 \rangle + \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \bar{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \langle \Phi_0 | a_i^+ a_m a_j^+ a_n N[a_\alpha^+ a_\beta^+ a_{\beta'} a_{\alpha'}] | \Phi_0 \rangle = \\
 & = \bar{V}_{mni} \tag{A.39}
 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$B_{mijn} = \bar{V}_{mni} \tag{A.40}$$

Appendice B

Equazioni RPA in accoppiamento angolare

B.1 Derivazione dei coefficienti $v_{ph,p'h'}$ e $u_{ph,p'h'}$

Ci proponiamo di riscrivere i coefficienti contenenti l'interazione residua nelle equazioni RPA, in funzione del nuovo set di osservabili descritti nel Capitolo 1, paragrafo 1.3. Le espressioni di partenza sono le seguenti:

$$v_{ph,p'h'} = \langle p'h | V | h'p \rangle - \langle p'h | V | ph' \rangle \quad (B.1)$$

$$u_{ph,p'h'} = \langle hh' | V | pp' \rangle - \langle hh' | V | p'p \rangle \quad (B.2)$$

Effettueremo i calcoli solo per il coefficiente $v_{ph,p'h'}$ dal momento che l'espressione per il coefficiente $u_{ph,p'h'}$ si ricava in modo molto simile.

Si ha:

$$\begin{aligned} v_{ph,p'h'} &= \\ &= S_h S_{h'} (\langle j_{p'} m_{p'} j_h - m_h | V | j_{h'} - m_{h'} j_p m_p \rangle + \dots) \end{aligned}$$

$$- \langle j_{p'} m_{p'} j_h - m_h | V | j_p m_p j_{h'} - m_{h'} \rangle \quad (B.3)$$

Utilizzando la trasformazione:

$$|j_a m_a j_b m_b \rangle = \sum_{JM} \langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle |j_a j_b JM \rangle \quad (B.4)$$

la precedente espressione diventa:

$$\begin{aligned} v_{ph,p'h'} &= \\ &= \sum_{JM} S_h S_{h'} [\langle j_{p'} m_{p'} j_h - m_h | JM \rangle \langle j_{h'} - m_{h'} j_p m_p | JM \rangle \\ &\quad \langle j_{p'} j_h JM | V | j_{h'} j_p JM \rangle + \\ &\quad - \langle j_{p'} m_{p'} j_h - m_h | JM \rangle \langle j_p m_p j_{h'} - m_{h'} | JM \rangle \\ &\quad \langle j_{p'} j_h JM | V | j_p j_{h'} JM \rangle] \end{aligned} \quad (B.5)$$

Sfruttando la seguente proprietà dei coefficienti di Clebsh Gordan:

$$\langle j_a m_a j_b m_b | JM \rangle = (-)^{j_a + j_b - J} \langle j_b m_b j_a m_a | JM \rangle \quad (B.6)$$

si ottiene infine:

$$\begin{aligned} v_{ph,p'h'} &= \sum_{JM} S_h S_{h'} \langle j_{p'} m_{p'} j_h - m_h | JM \rangle \langle j_{h'} - m_{h'} j_p m_p | JM \rangle \\ &\quad \{ \langle j_{p'} j_h J | V | j_{h'} j_p J \rangle - (-)^{j_p + j_{h'} - J} \langle j_{p'} j_h J | V | j_p j_{h'} J \rangle \} \end{aligned} \quad (B.7)$$

Con un procedimento del tutto analogo a quello appena visto per il coefficiente $v_{ph,p'h'}$, si ottiene per $u_{ph,p'h'}$ la seguente espressione:

$$\begin{aligned} u_{ph,p'h'} &= \sum_{JM} S_h S_{h'} \langle j_h - m_h j_{h'} - m_{h'} | JM \rangle \langle j_p - m_p j_{p'} m_{p'} | JM \rangle \\ &\quad \{ \langle j_h j_{h'} J | V | j_p j_{p'} J \rangle - (-)^{j_p + j_{p'} - J} \langle j_h j_{h'} J | V | j_{p'} j_p J \rangle \} \end{aligned} \quad (B.8)$$

B.2 Equazioni RPA in accoppiamento angolare

In questa sezione saranno sviluppati i passaggi attraverso i quali dalle equazioni RPA scritte nella forma:

$$(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega_\nu)X_{ph}^\nu + \sum_{p'h'}(v_{php'h'}X_{p'h'}^\nu + u_{php'h'}Y_{p'h'}^\nu) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$(\epsilon_p - \epsilon_h + \omega_\nu)Y_{ph}^\nu + \sum_{p'h'}(v_{php'h'}^*Y_{p'h'}^\nu + u_{php'h'}^*X_{p'h'}^\nu) = 0 \quad (\text{B.10})$$

si giunge alle equazioni RPA in accoppiamento angolare.

Moltiplichiamo le equazioni (B.9) e (B.10) rispettivamente per i fattori

$\sum_{m_p m_h} < j_p m_p j_h m_h | JM >$ e $\sum_{m_p m_h} S_{-J} < j_p m_p j_h m_h | J - M >$ e otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{m_p m_h} < j_p m_p j_h m_h | JM > \{(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega_\nu)X_{ph}^\nu + \\ + \sum_{p'h'}(v_{php'h'}X_{p'h'}^\nu + u_{php'h'}Y_{p'h'}^\nu)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m_p m_h} S_{-J} < j_p m_p j_h m_h | J - M > \{(\epsilon_p - \epsilon_h + \omega_\nu)Y_{ph}^\nu + \\ + \sum_{p'h'}(v_{php'h'}^*Y_{p'h'}^\nu + u_{php'h'}^*X_{p'h'}^\nu)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Separando i termini delle somme e scambiando i simboli di sommatoria si ottiene:

$$\begin{aligned} (\epsilon_p - \epsilon_h - \omega_\nu) \sum_{m_p m_h} < j_p m_p j_h m_h | JM > X_{ph}^\nu + \\ + \sum_{p'h'} \left[\sum_{m_p m_h} < j_p m_p j_h m_h | JM > v_{php'h'}X_{p'h'}^\nu + \right. \\ \left. + \sum_{m_p m_h} < j_p m_p j_h m_h | JM > u_{php'h'}Y_{p'h'}^\nu \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} (\epsilon_p - \epsilon_h + \omega_\nu) \sum_{m_p m_h} S_{-J} < j_p m_p j_h m_h | J - M > Y_{ph}^\nu + \\ + \sum_{p'h'} \left[\sum_{m_p m_h} S_{-J} < j_p m_p j_h m_h | J - M > v_{php'h'}^*Y_{p'h'}^\nu + \right. \\ \left. + \sum_{m_p m_h} S_{-J} < j_p m_p j_h m_h | J - M > u_{php'h'}^*X_{p'h'}^\nu \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Dal momento che valgono le relazioni (viste nel paragrafo 1.3):

$$\sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle v_{ph, p'h'} = \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | JM \rangle v_{ph, p'h'}^J \quad (B.15)$$

$$\sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle u_{ph, p'h'} = \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | JM \rangle u_{ph, p'h'}^J \quad (B.16)$$

le due equazioni diventano:

$$\begin{aligned} & (\epsilon_p - \epsilon_h - \omega) \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle X_{ph}^\nu + \\ & + \sum_{p'h'} [v_{php'h'}^J \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | JM \rangle X_{p'h'}^\nu + \\ & + u_{php'h'}^J \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | JM \rangle Y_{p'h'}^\nu] = 0 \end{aligned} \quad (B.17)$$

$$\begin{aligned} & (\epsilon_p - \epsilon_h + \omega) \sum_{m_p m_h} S_{-J} \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle Y_{ph}^\nu + \\ & + \sum_{p'h'} [v_{php'h'}^{J*} S_{-J} \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | J - M \rangle Y_{p'h'}^\nu + \\ & + u_{php'h'}^{J*} S_{-J} \langle j_{p'} m_{p'} j_{h'} m_{h'} | J - M \rangle X_{p'h'}^\nu] = 0 \end{aligned} \quad (B.18)$$

Ponendo:

$$X_{ph}^J = \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle X_{ph} \quad (B.19)$$

$$Y_{ph}^J = \sum_{m_p m_h} S_{-J} \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle Y_{ph} \quad (B.20)$$

otteniamo infine:

$$(\epsilon_p - \epsilon_h - \omega_J) X_{ph}^J + \sum_{p'h'} (v_{php'h'}^J X_{p'h'}^J + u_{php'h'}^J Y_{p'h'}^J) = 0 \quad (B.21)$$

$$(\epsilon_p - \epsilon_h + \omega_J) Y_{ph}^J + \sum_{p'h'} (v_{php'h'}^{J*} Y_{p'h'}^J + u_{php'h'}^{J*} X_{p'h'}^J) = 0 \quad (B.22)$$

Appendice C

Elemento di matrice dell'interazione

In questo paragrafo riporteremo in dettaglio tutti i calcoli mediante i quali si elabora l'espressione dell'elemento di matrice $v_{ph,p'h'}^J$ in seguito all'introduzione di un'interazione residua $V(1, 2)$ del tipo:

$$V(1, 2) = v(r_{12}) \quad (\text{C.1})$$

dove v è una funzione dipendente solo dalla distanza r_{12} tra due nucleoni.

L'interazione può essere riscritta sotto forma di trasformata di Fourier per separare le due variabili \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 :

$$V(1, 2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} V(q) d^3 q \quad (\text{C.2})$$

In seguito ad uno sviluppo in multipoli delle funzioni esponenziali contenute nella precedente espressione, otteniamo:

$$\begin{aligned} V(1, 2) = & \int \frac{dq q^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\hat{q} 4\pi \sum_{l_1 \mu_1} i^{l_1} j_{l_1}(qr_1) Y_{l_1 \mu_1}(\hat{q}) Y_{l_1 \mu_1}^*(\hat{r}_1) \\ & 4\pi \sum_{l_2 \mu_2} i^{l_2} j_{l_2}(qr_2) Y_{l_2 \mu_2}(\hat{q}) Y_{l_2 \mu_2}^*(\hat{r}_2) V(q) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Per le funzioni armoniche sferiche vale la seguente relazione di ortogonalità:

$$\int d\hat{q} Y_{l_1\mu_1}(\hat{q}) Y_{l_2\mu_2}^*(\hat{q}) = \delta_{l_1l_2} \delta_{\mu_1\mu_2} \quad (\text{C.4})$$

Si ha quindi:

$$V(1, 2) = \int dq q^2 \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \sum_l j_l(qr_1) j_l(qr_2) \sum_{\mu} Y_{l\mu}^*(\hat{r}_1) Y_{l\mu}(\hat{r}_2) V(q) \quad (\text{C.5})$$

Dal momento che le funzioni armoniche sferiche sono tensori sferici irriducibili e vale in generale la seguente proprietà per il prodotto scalare:

$$T^p \cdot U^q = \sum_m (-)^m T_m^p U_{-m}^q = (-)^p \hat{p} [T^p \otimes U^q]_0^0 \quad (\text{C.6})$$

è possibile esprimere la somma sulle terze componenti in termini di prodotto tensoriale:

$$V(1, 2) = \sum_l (-)^l \hat{l} [Y_l(\hat{r}_1) \otimes Y_l(\hat{r}_2)]_0^0 \int dq q^2 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} j_l(qr_1) j_l(qr_2) V(q) \quad (\text{C.7})$$

Procederemo inserendo l'interazione residua (C.7) nell'elemento di matrice $v_{ph,p'h'}^J$, ricavato nel Capitolo 1 (sez.1.3), avente la seguente espressione:

$$v_{ph,p'h'}^J = \sum_{J'} (-)^{j_{p'}+j_h+J} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \{ < j_p j_{h'} J' | V | j_h j_{p'} J' > + \\ - (-)^{j_h+j_{p'}-J} < j_p j_{h'} J' | V | j_{p'} j_h J' > \} \quad (\text{C.8})$$

Separeremo nella precedente espressione termine diretto (primo addendo) e termine di scambio (secondo addendo).

Inserendo la (C.7) nel termine diretto e separando parte radiale e parte angolare otteniamo:

$$\begin{aligned}
 v_{ph,p'h'}^{J,dir} = & \sum_l (-)^l \hat{l} \sum_{J'} (-)^{j_{p'}+j_h+J} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \\
 & < j_p j_{h'} J' | [Y_l(\hat{r}_1) \otimes Y_l(\hat{r}_2)]_0^0 | j_h j_{p'} J' > \int dq q^2 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} V(q) \\
 & \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1) R_h(r_1) j_J(qr_1) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2) j_J(qr_2) \quad (C.9)
 \end{aligned}$$

L'elemento di matrice del prodotto tensoriale può essere espresso in termini di un elemento di matrice ridotto dal momento che vale la seguente relazione (per il teorema di Wigner-Eckart):

$$< j_p j_{h'} J' | [Y_l \otimes Y_l]_0^0 | j_h j_{p'} J' > = \frac{1}{\hat{J}'} < j_p j_{h'} J' | [Y_l \otimes Y_l]_0^0 | j_h j_{p'} J' > \quad (C.10)$$

Per tensori che agiscono su spazi diversi (come le due armoniche sferiche che compaiono nell'elemento di matrice) è inoltre possibile utilizzare la proprietà:

$$\begin{aligned}
 & < j_a j_b J | [T^p \otimes T^q]^r | j_c j_d J' > = \\
 & = \hat{J} \hat{r} \hat{J}' \left\{ \begin{array}{ccc} j_a & j_b & J \\ j_c & j_d & J' \\ p & q & r \end{array} \right\} < j_a | T^p | j_c > < j_b | T^q | j_d > \quad (C.11)
 \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\hat{J}'} < j_p j_{h'} J' | [Y_l \otimes Y_l]_0^0 | j_h j_{p'} J' > = \\
 & = \frac{1}{\hat{J}'} \hat{J}' \hat{J}' \hat{0} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_h & j_{p'} & J' \\ l & l & 0 \end{array} \right\} < j_p | Y_l | j_h > < j_{h'} | Y_l | j_{p'} > =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{J}' \frac{1}{\hat{J}'} \frac{1}{\hat{l}} (-)^{j_{h'} + J + j_h + l} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_{p'} & j_h & l \end{array} \right\} \langle j_p || Y_l || j_h \rangle \langle j_{h'} || Y_l || j_{p'} \rangle = \\
&= \frac{(-)^l}{\hat{l}} (-)^{j_{h'} + j_h + J'} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_{p'} & j_h & l \end{array} \right\} \langle j_p || Y_l || j_h \rangle \langle j_{h'} || Y_l || j_{p'} \rangle
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Inserendo la (C.12) nella (C.9) otteniamo:

$$\begin{aligned}
v_{ph,p'h'}^{J,dir} = & \sum_l (-)^l \hat{l} \sum_{J'} (-)^{j_{p'} + j_h + J} \hat{J}'^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \frac{(-)^l}{\hat{l}} (-)^{j_{h'} + j_h + J} \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_{p'} & j_h & l \end{array} \right\} \langle j_p || Y_l || j_h \rangle \langle j_{h'} || Y_l || j_{p'} \rangle \int dq q^2 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} V(q) \\
& \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1) R_h(r_1) j_J(qr_1) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2) j_J(qr_2)
\end{aligned} \tag{C.13}$$

Per i simboli 6j valgono le seguenti proprietà di simmetria e ortogonalità:

$$\begin{aligned}
& \sum_{J'} \hat{J}'^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_{p'} & j_h & l \end{array} \right\} = \\
&= \sum_{J'} \hat{J}'^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & l \\ j_{p'} & j_h & J' \end{array} \right\} = \frac{\delta_{l,J}}{\hat{J}^2}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Otteniamo quindi la seguente espressione finale per il termine diretto del coefficiente

$v_{ph,p'h'}^J$:

$$\begin{aligned}
v_{ph,p'h'}^{J,dir} = & \frac{(-)^{j_{p'} + j_{h'} + J}}{\hat{J}^2} \int dq q^2 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} V(q) \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1) R_h(r_1) j_J(qr_1) \\
& \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_{p'}(r_2) j_J(qr_2) \langle j_p || Y_J || j_h \rangle \\
& \langle j_{h'} || Y_J || j_{p'} \rangle
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Per ottenere il termine di scambio procederemo inserendo l'espressione dell'interazione residua riportata nella (C.7) nel secondo addendo dell'espressione dell'elemento di matrice $v_{ph,p'h'}^J$ riportato nella (C.8).

Il termine di scambio ha la seguente espressione:

$$v_{ph,p'h'}^{J,exch} = \sum_{J'} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \langle j_p j_{h'} J' | V | j_{p'} j_h J' \rangle \quad (C.16)$$

Inserendo la (C.7) otteniamo:

$$\begin{aligned} v_{ph,p'h'}^{J,exch} &= \\ &= \sum_l (-)^l \hat{l} \sum_{J'} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \langle j_p j_{h'} J' | [Y_l(\hat{r}_1) \otimes Y_l(\hat{r}_2)]_0^0 | j_{p'} j_h J' \rangle \\ &\quad \int dq q^2 V(q) 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1) R_{p'}(r_1) j_l(qr_1) \\ &\quad \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_h(r_2) j_l(qr_2) \end{aligned} \quad (C.17)$$

Sfruttando le proprietà (C.10) e (C.11) la precedente espressione diventa:

$$\begin{aligned} v_{ph,p'h'}^{J,exch} &= \sum_l (-)^l \hat{l} \sum_{J'} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} (-)^{j_{h'}+j_{p'}+J'} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_h & j_{p'} & l \end{array} \right\} \\ &\quad \langle j_p || Y_l || j_{p'} \rangle \langle j_{h'} || Y_l || j_h \rangle \frac{(-)^l}{\hat{l}} \int dq q^2 V(q) 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\quad \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1) R_{p'}(r_1) j_l(qr_1) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_h(r_2) j_l(qr_2) \end{aligned} \quad (C.18)$$

Infine, dal momento che valgono le relazioni:

$$\sum_{J'} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{h'} & J' \\ j_h & j_{p'} & l \end{array} \right\} (-)^{J'+j_{h'}+j_{p'}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{J'} \hat{J'}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{p'} & j_{h'} & J' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_{p'} & l \\ j_h & j_{h'} & J' \end{array} \right\} (-)^{J'+l+J} (-)^{j_{h'}+j_{p'}+l+J} = \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{h'} & j_{p'} & l \end{array} \right\} (-)^{j_{h'}+j_{p'}+l+J}
\end{aligned} \tag{C.19}$$

l'espressione finale del termine di scambio è la seguente:

$$\begin{aligned}
v_{ph,p'h'}^{J,exch} &= \sum_l (-)^{j_{p'}+j_{h'}+J+l} \left\{ \begin{array}{ccc} j_p & j_h & J \\ j_{h'} & j_{p'} & l \end{array} \right\} \int dq q^2 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} V(q) \\
&\quad \int dr_1 r_1^2 R_p(r_1) R_{p'}(r_1) j_l(qr_1) \int dr_2 r_2^2 R_{h'}(r_2) R_h(r_2) j_l(qr_2) < j_p || Y_l || j_{p'} > \\
&\quad < j_{h'} || Y_l || j_h >
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Appendice D

Elemento di matrice di transizione in accoppiamento angolare

Per calcolare l'elemento di transizione dell'operatore ad un corpo T nell'ambito della teoria RPA in accoppiamento angolare, riscriviamo l'operatore Q_ν^+ .

Poniamo $\xi_{ph}^+ = a_p^+ a_h$.

$$\begin{aligned} Q_\nu^+ &= \sum_{ph} (X_{ph}^\nu \xi_{ph}^+ - Y_{ph}^\nu \xi_{ph}) = \\ &= \sum_{ph} \sum_{JM} (\langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle X_{ph}^J \xi_{ph}^+ + \\ &\quad - \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle S_{-J} Y_{ph}^J \xi_{ph}) = \\ &= \sum_{JM} [\sum_{ph} (X_{ph}^J \xi_{ph}^+(JM) - Y_{ph}^J S_{-J} \xi_{ph}(J - M))] = \\ &= \sum_{JM} Q^{+JM} \end{aligned} \tag{D.1}$$

dove $S_{-J} = (-1)^{J-M}$.

I coefficienti X_{ph}^J e Y_{ph}^J sono definiti nelle (1.58) e (1.59), dalle quali seguono le

espressioni inverse:

$$X_{ph}^\nu = \sum_{JM} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle X_{ph}^J \quad (D.2)$$

$$Y_{ph}^\nu = \sum_{JM} \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle S_{-J} Y_{ph}^J \quad (D.3)$$

Nella (D.1) abbiamo inoltre posto:

$$\xi_{ph}^+(JM) = \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle \xi_{ph}^+ \quad (D.4)$$

$$\xi_{ph}(J - M) = \sum_{m_p m_h} \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle \xi_{ph} \quad (D.5)$$

Possiamo quindi scrivere l'elemento di transizione dell'operatore T , usando l'approssimazione QBA, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \langle \Psi^{J_f M_f} | T | \Psi^{J_i M_i} \rangle &= \langle \Psi^{J_i M_i} | Q^{J_f M_f} T | \Psi^{J_i M_i} \rangle \simeq \\ &\simeq \langle \Phi^{J_i M_i} | [Q^{J_f M_f}, T] | \Phi^{J_i M_i} \rangle \end{aligned} \quad (D.6)$$

dove $|\Phi^{J_i M_i}\rangle$ indica lo stato fondamentale di campo medio.

Esplorando le espressioni dei due operatori otteniamo:

$$\begin{aligned} &\langle \Phi^{J_f M_f} | T | \Phi^{J_i M_i} \rangle = \\ &= \langle \Phi^{J_i M_i} | \left[\sum_{ph} (X_{ph}^{J_f} \xi_{ph}(J_f M_f) - Y_{ph}^{J_f} S_{-J_f} \xi_{ph}^+(J_f - M_f)) \right. \\ &\quad \left. \sum_{\sigma \lambda} \langle \sigma | T | \lambda \rangle a_\sigma^+ a_\lambda \right] | \Phi^{J_i M_i} \rangle = \\ &= \langle \Phi^{J_i M_i} | \sum_{ph} \sum_{\sigma \lambda} [X_{ph}^{J_f} \langle \sigma | T | \lambda \rangle \\ &\quad (\xi_{ph}(J_f M_f) a_\sigma^+ a_\lambda - a_\sigma^+ a_\lambda \xi_{ph}(J_f M_f)) - Y_{ph}^{J_f} S_{-J_f} \langle \sigma | T | \lambda \rangle \\ &\quad (\xi_{ph}^+(J_f - M_f) a_\sigma^+ a_\lambda - a_\sigma^+ a_\lambda \xi_{ph}^+(J_f - M_f))] | \Phi^{J_i M_i} \rangle \end{aligned} \quad (D.7)$$

Poniamo per semplicità $J_i = 0$, $M_i = 0$, $J_f = J$, $M_f = M$.

Esplorando gli operatori $\xi_{ph}^+(JM)$ e $\xi_{ph}(J - M)$ otteniamo:

$$\langle \Psi^{JM} | T | \Psi^{00} \rangle \simeq$$

$$\begin{aligned}
& \simeq \sum_{ph} \sum_{\sigma\lambda} \{ X_{ph}^J \langle \sigma | T | \lambda \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle \\
& \quad \langle \Phi^{00} | (a_h^+ a_p a_\sigma^+ a_\lambda - a_\sigma^+ a_\lambda a_h^+ a_p) | \Phi^{00} \rangle S_h + \\
& \quad - Y_{ph}^J \langle \sigma | T | \lambda \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle \\
& \quad \langle \Phi^{00} | (a_p^+ a_h a_\sigma^+ a_\lambda - a_\sigma^+ a_\lambda a_p^+ a_h) | \Phi^{00} \rangle S_h S_{-J} \} \quad (D.8)
\end{aligned}$$

Applicando nella precedente espressione il teorema di Wick ed esplicitando le fasi ($S_h = (-1)^{j_h+m_h}$ ed $S_{-J} = (-1)^{J-M}$) otteniamo:

$$\begin{aligned}
& \langle \Psi^{JM} | T | \Psi^{00} \rangle \simeq \\
& \simeq \sum_{ph} \sum_{\sigma\lambda} \{ X_{ph}^J \langle \sigma | T | \lambda \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle \delta_{p\sigma} \delta_{h\lambda} (-1)^{j_h+m_h} + \\
& \quad - Y_{ph}^J \langle \sigma | T | \lambda \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle \delta_{h\sigma} \delta_{p\lambda} (-1)^{j_h+m_h} (-1)^{J-M} \} = \\
& = \sum_{ph} \{ X_{ph}^J \langle p | T | h \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle (-1)^{j_h+m_h} + \\
& \quad - Y_{ph}^J \langle h | T | p \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle (-1)^{j_h+m_h} (-1)^{J-M} \} = \\
& = \sum_{ph} \{ X_{ph}^J \langle j_p m_p | T | j_h - m_h \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | JM \rangle (-1)^{j_h+m_h} + \\
& \quad - Y_{ph}^J \langle j_h - m_h | T | j_p m_p \rangle \langle j_p m_p j_h m_h | J - M \rangle (-1)^{j_h+m_h} (-1)^{J-M} \} \quad (D.9)
\end{aligned}$$

Per il *teorema di Wigner-Eckart* si ha in generale la seguente relazione:

$$\langle j_a m_a | T_q^k | j_b m_b \rangle = (-1)^{2k} \frac{\langle j_b m_b k q | j_a m_a \rangle}{\hat{j}_a} \langle j_a | | T^k | | j_b \rangle \quad (D.10)$$

Tenendo conto della relazione (1.46), che lega coefficienti di Clebsh-Gordan ai simboli 3-j di Wigner, e delle proprietà di simmetria dei 3-j espresse dalle (1.48) e (1.49), l'espressione dell'elemento di transizione diventa:

$$\langle \Psi^{JM} | T | \Psi^{00} \rangle \simeq$$

$$\begin{aligned}
& \simeq \sum_{j_p m_p j_h m_h} \left\{ X_{ph}^J \frac{< j_p m_p j_h m_h | J M >}{\hat{J}} < j_p m_p j_h m_h | J M > \right. \\
& < j_p | | T | | j_h > + \\
& - Y_{ph}^J \frac{< j_p m_p j_h m_h | J - M >}{\hat{J}} < j_p m_p j_h m_h | J - M > \\
& \left. (-1)^{j_h + m_h + J - M + j_p - m_p} < j_h | | T | | j_p > \right\} = \\
& = \sum_{j_p j_h} \left\{ X_{ph}^J \frac{1}{\hat{J}} < j_p | | T | | j_h > \sum_{m_p m_h} < j_p m_p j_h m_h | J M > \right. \\
& < j_p m_p j_h m_h | J M > + \\
& - Y_{ph}^J < j_h | | T | | j_p > \frac{(-1)^{j_h + J + j_p}}{\hat{J}} \sum_{m_p m_h} (-1)^{m_h - m_p - (m_p + m_h)} \\
& \left. < j_p m_p j_h m_h | J - M > < j_p m_p j_h m_h | J - M > \right\} \quad (D.11)
\end{aligned}$$

Applicando la proprietà di ortogonalità dei coefficienti di Clebsh-Gordan otteniamo:

$$\begin{aligned}
& < \Psi^{JM} | T | \Psi^{00} > \simeq \\
& \simeq \frac{1}{\hat{J}} \sum_{j_p j_h} [X_{ph}^J < j_p | | T | | j_h > + (-1)^{J + j_p + j_h} Y_{ph}^J < j_h | | T | | j_p >] \quad (D.12)
\end{aligned}$$

Per il teorema di Wigner Eckart vale inoltre la seguente relazione:

$$< \Psi^{JM} | T | \Psi^{00} > = (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & J & 0 \\ -M & M & 0 \end{pmatrix} < J | | T | | 0 > \quad (D.13)$$

dove

$$\begin{pmatrix} J & J & 0 \\ -M & M & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{J-M}}{\hat{J}} \quad (D.14)$$

Si ha quindi infine:

$$< \Psi^{JM} | T | \Psi^{00} > = (-1)^{J-M} \frac{(-1)^{J-M}}{\hat{J}} < J | | T | | 0 > \quad (D.15)$$

con

$$\begin{aligned}
& < J | | T | | 0 > = \\
& = \sum_{j_p j_h} [X_{ph}^J < j_p | | T | | j_h > + (-1)^{J + j_p + j_h} Y_{ph}^J < j_h | | T | | j_p >] \quad (D.16)
\end{aligned}$$

Se separiamo le dipendenze radiali e angolari dell'operatore T , $T = O(\Omega)Q(r)$, la (D.16) può essere scritta come:

$$\begin{aligned}
 & \langle J \parallel T \parallel 0 \rangle = \\
 & = \frac{1}{\hat{J}} \sum_{j_p j_h} [X_{ph}^J \langle j_p \parallel O(\Omega) \parallel j_h \rangle \int dr r^2 R_p(r) R_h(r) Q(r) + \\
 & + (-1)^{J+j_p+j_h} Y_{ph}^J \langle j_h \parallel O(\Omega) \parallel j_p \rangle \int dr r^2 R_p(r) R_h(r) Q(r)] \quad (D.17)
 \end{aligned}$$

dove $R_p(r)$ e $R_h(r)$ sono funzioni radiali di singola particella e di buca relative agli stati p ed h .

Appendice E

Valori numerici dei B-value

In questa sezione riportiamo i valori dei B-value ottenuti utilizzando il metodo iterativo. Prendiamo in considerazione diverse multipolarità dei nuclei 4He , ${}^{16}O$, ${}^{40}Ca$ e ${}^{208}Pb$.

Con un asterisco sono indicati i casi in cui il metodo raggiunge il massimo numero di iterazioni, pari a 100, nel corso del calcolo della soluzione dell'equazione differenziale. Nel caso della multipolarità 0^+ dell' 4He sono riportati valori dei B-value ottenuti applicando nel metodo iterativo due diversi criteri di convergenza, $C1$ e $C2$, descritti nelle espressioni (5.9) e (5.10). Per le altre multipolarità e gli altri nuclei applichiamo solo il criterio $C2$.

Valori relativi all' 4He :

Energia (MeV)	(0+)		(1-)		(2+)	
	B-value con $C1$	B-value con $C2$	B-value	B-value	B-value	B-value
35.000	1.41394E-01	1.41394E-01	6.55392E+00	2.18980E+01		
36.000	1.38767E-01	1.38767E-01	9.13115E+00	2.74064E+01		

37.000	1.05578E-01	1.05578E-01	6.74728E+00(*)	3.43662E+01
38.000	6.38450E-02	6.38450E-02	5.28617E+00	3.50406E+01
39.000	4.09145E-02	4.09145E-02	3.39377E+00	3.11407E+01
40.000	2.32109E-02	2.32109E-02	1.54301E+00(*)	2.69508E+01
41.000	1.15454E-02	1.15454E-02	5.22537E-01	2.28557E+01
42.000	5.85555E-03	5.85555E-03	1.67967E-01	1.72163E+01
43.000	4.78851E-03	4.78851E-03	4.03656E-02	1.07721E+01
44.000	4.41022E-03	4.41022E-03	6.27825E-02(*)	5.94201E+00
45.000	4.90671E-03	4.90671E-03	6.49781E-02(*)	3.26727E+00
46.000	5.69736E-03	5.69736E-03	7.94759E-02	1.89661E+00
47.000	7.26751E-03	7.26751E-03	1.08849E-01	1.15208E+00
48.000	9.37114E-03	9.37114E-03	1.44113E-01	9.57355E-01
49.000	1.14797E-02	1.14797E-02	1.83347E-01	9.78430E-01
50.000	1.37319E-02	1.37319E-02	2.23514E-01	1.14278E+00
51.000	1.65569E-02	1.65569E-02	2.67325E-01	1.49017E+00
52.000	1.96259E-02	1.96259E-02	2.56410E-01(*)	1.88646E+00
53.000	2.27122E-02	2.27122E-02	2.79819E-01	2.34258E+00
54.000	2.58805E-02	2.58805E-02	2.75810E-01	2.84634E+00
55.000	2.84423E-02	2.84423E-02	2.78836E-01	3.34325E+00
56.000	3.00949E-02	3.00949E-02	2.75690E-01	3.78915E+00
57.000	3.32089E-02	3.32089E-02	2.71823E-01	4.14666E+00
58.000	3.41947E-02	3.41947E-02	2.73660E-01	4.41100E+00
59.000	3.48982E-02	3.48982E-02	2.92679E-01	4.70107E+00(*)
60.000	3.57560E-02	3.57560E-02	2.68702E-01	4.77105E+00
61.000	3.62197E-02	3.62197E-02	2.58654E-01	4.70998E+00

62.000	3.34237E-02	3.34237E-02	2.25969E-01	4.57290E+00
63.000	3.38543E-02	3.38543E-02	2.12344E-01	4.57472E+00(*)
64.000	3.30780E-02	3.30780E-02	1.90202E-01	4.44000E+00
65.000	3.16926E-02	3.16926E-02	1.67839E-01	4.00237E+00
66.000	2.96399E-02	2.96399E-02	1.46104E-01	3.56121E+00
67.000	2.71205E-02	2.71205E-02	1.23417E-01	3.09403E+00
68.000	2.49550E-02	2.49550E-02	1.34472E-01(*)	2.61844E+00
69.000	2.28788E-02	2.28788E-02	1.21591E-01	2.14983E+00
70.000	2.10984E-02	2.10984E-02	1.12600E-01	1.70621E+00

Valori relativi all' ^{16}O :

Energia (MeV)	(0+)	(1-)	(2+)
	B-value	B-value	B-value
35.000	5.79810E-01	1.02469E+01	1.10566E+02
36.000	4.29618E-01	1.38583E+01	9.77731E+01
37.000	3.54201E-01	1.01597E+01(*)	9.91857E+01
38.000	2.84149E-01	7.12094E+00	9.18243E+01(*)
39.000	2.40527E-01	5.66411E+00	8.52747E+01
40.000	1.68459E-01	4.30982E+00	7.43387E+01(*)
41.000	1.44854E-01	3.59495E+00	6.50109E+01(*)
42.000	1.30444E-01	3.55698E+00	5.59577E+01
43.000	1.22327E-01(*)	3.85816E+00	4.49986E+01
44.000	1.21199E-01	4.25393E+00	3.57078E+01
45.000	1.33476E-01	4.64765E+00(*)	3.05226E+01
46.000	1.37999E-01(*)	4.93901E+00	2.90122E+01

47.000	1.42709E-01	5.14650E+00(*)	2.98546E+01
48.000	1.54157E-01(*)	5.25262E+00(*)	3.17884E+01(*)
49.000	1.60210E-01	5.25162E+00	3.46486E+01
50.000	1.66462E-01	5.17545E+00	3.71275E+01(*)
51.000	1.74766E-01	5.07752E+00(*)	4.04670E+01
52.000	1.82417E-01	5.05942E+00(*)	4.27481E+01
53.000	1.90559E-01	4.90961E+00	4.47654E+01
54.000	1.96875E-01(*)	4.80710E+00	4.63370E+01
55.000	1.90803E-01	4.66380E+00(*)	4.66063E+01
56.000	1.98567E-01	4.44028E+00	4.86385E+01
57.000	2.00943E-01	4.22432E+00	4.88252E+01
58.000	2.14301E-01(*)	3.96863E+00	4.79338E+01(*)
59.000	1.94814E-01	3.71394E+00	4.79176E+01
60.000	2.13902E-01(*)	3.49408E+00	4.72886E+01
61.000	2.04595E-01(*)	3.08638E+00(*)	4.50848E+01
62.000	2.12607E-01	3.00618E+00	4.28133E+01
63.000	2.06684E-01	2.50088E+00(*)	3.77537E+01
64.000	2.02083E-01	2.51020E+00	3.62371E+01
65.000	1.96200E-01	2.34143E+00(*)	3.19884E+01(*)
66.000	1.91747E-01	2.21848E+00	2.89988E+01(*)
67.000	1.82096E-01	2.15995E+00	2.61901E+01
68.000	1.78010E-01	2.16777E+00(*)	2.61901E+01
69.000	1.72393E-01	2.13026E+00(*)	2.06671E+01
70.000	1.69705E-01	2.19467E+00	1.83647E+01

Valori relativi al ^{40}Ca :

Energia (MeV)	(0+)	(1-)	(2+)
	B-value	B-value	B-value
45.000	4.67966E-01	1.83303E+01	9.06991E+02
46.000	5.16612E-01	1.92093E+01(*)	7.18227E+02
47.000	4.68003E-01	1.92024E+01	3.95009E+02(*)
48.000	4.48138E-01	1.98710E+01	3.10380E+02(*)
49.000	4.57077E-01	2.00976E+01	2.77259E+02(*)
50.000	5.04364E-01(*)	1.96454E+01(*)	2.58083E+02
51.000	5.19461E-01	2.01984E+01	2.49893E+02(*)
52.000	5.61202E-01	1.90807E+01(*)	2.54491E+02(*)
53.000	5.96896E-01	1.95691E+01(*)	2.77513E+02(*)
54.000	6.45611E-01	1.90481E+01(*)	2.83024E+02(*)
55.000	7.26819E-01(*)	1.91385E+01(*)	2.93016E+02(*)
56.000	7.49588E-01	1.85319E+01	3.15630E+02(*)
57.000	7.98042E-01	1.89710E+01(*)	3.27670E+02(*)
58.000	8.49100E-01	1.82212E+01	3.14845E+02(*)
59.000	8.51774E-01	1.80923E+01	3.38686E+02(*)
60.000	9.01630E-01	1.81680E+01	3.44370E+02
61.000	9.38806E-01	1.77182E+01	3.38105E+02(*)
62.000	9.58555E-01	1.66102E+01	3.39721E+02
63.000	9.87633E-01	1.77571E+01(*)	3.33066E+02
64.000	1.01591E+00	1.58494E+01	3.26439E+02
65.000	1.04909E+00(*)	1.69220E+01(*)	3.14514E+02
66.000	1.05098E+00	1.57380E+01(*)	2.97449E+02(*)

67.000	1.06258E+00	1.78054E+01(*)	2.69883E+02(*)
68.000	1.06899E+00	1.80398E+01(*)	2.60736E+02
69.000	1.06723E+00	1.61731E+01(*)	2.52388E+02(*)
70.000	1.05922E+00	1.66353E+01(*)	2.34884E+02(*)

Valori relativi al ^{208}Pb :

Energia (MeV)	(0+) B-value	(1-) B-value	(2+) B-value
45.000	4.44719E+01	2.65805E+03(*)	4.98154E+04
46.000	8.25696E+01(*)	1.94555E+03	4.97879E+04
47.000	1.52176E+02(*)	1.98976E+03	4.98826E+04
48.000	1.16786E+02(*)	2.04159E+03	4.94727E+04
49.000	1.42474E+02(*)	3.36695E+03(*)	4.84126E+04
50.000	3.24791E+02(*)	3.03679E+03(*)	4.68351E+04
51.000	4.05051E+02(*)	2.09850E+03	4.35543E+04
52.000	6.96949E+02(*)	2.77895E+03(*)	5.66530E+04(*)
53.000	2.71839E+02(*)	2.80107E+03(*)	5.23587E+04(*)
54.000	1.61290E+03(*)	3.11064E+03(*)	5.82427E+04
55.000	5.87541E+02(*)	3.68913E+03(*)	5.47998E+04(*)
56.000	1.06773E+03(*)	3.71195E+03(*)	6.02034E+04(*)
57.000	2.46811E+03(*)	4.37393E+03(*)	6.63883E+04(*)
58.000	7.05595E+02(*)	4.50670E+03(*)	6.15649E+04(*)
59.000	4.60948E+02(*)	3.34762E+03(*)	5.81675E+04(*)
60.000	6.26497E+02(*)	3.31917E+03	5.62370E+04(*)

61.000	3.53877E+02(*)	2.31407E+04(*)	8.66296E+04(*)
62.000	1.70255E+02	1.15932E+04(*)	8.31887E+04(*)
63.000	3.88957E+02(*)	8.65031E+03(*)	7.47927E+04(*)
64.000	3.64264E+02(*)	4.07509E+03	8.40393E+04(*)
65.000	1.88721E+02	1.28802E+04(*)	6.43138E+04(*)
66.000	1.93237E+02	2.67290E+03	8.77302E+04(*)
67.000	2.14125E+02	1.18379E+04(*)	1.00103E+05(*)
68.000	2.20753E+02	9.80766E+03(*)	1.36310E+05(*)
69.000	2.27380E+02	1.13698E+04(*)	1.05784E+05(*)
70.000	2.33426E+02	5.53893E+03	1.09034E+05(*)

Bibliografia

- [Row 70] D.J.Rowe, *Nuclear Collective Motion* , Methuen & Co, LTD, London, (1970)
- [Rin 80] P.Ring, P.Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer Verlag, Berlin, (1980)
- [Fet 71] A.L.Fetter, J.D.Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle-System*, McGraw-Hill, New York, (1991)
- [Kno 91] D.Knobles, T.Udagawa, Nucl. Phys. **A533** (1991) 189
- [Co' 85] G.Co', S.Krewald, Nucl. Phys. **A433** (1985) 392
- [Koo 86] S.E.Koonin, *Computational Physics*, Addison-Wesley, Redwood City, (1986)
- [Co' 90] G.Co', A.M.Lallena, Nucl. Phys. **A510** (1990) 139
- [Ama 01] J.E.Amaro, G.Co', A.M.Lallena, in *Electromagnetic Response Function of Nuclei*, Nova science, Huntington, NY, (2001)
- [Sar 93] A.M.Saruis, Phys. Rep. **235** (1993) 57
- [Bub 90] M.Buballa et al., Nucl. Phys. **A517** (1990) 61

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il prof. Giampaolo Co' per la sua immensa disponibilità, grazie alla quale ho potuto lavorare con molta serenità alla preparazione e alla stesura di questa tesi.

Ringrazio i miei genitori che mi sono stati molto vicini e Andrea, che ha praticamente condiviso con me ogni momento del lavoro.

Un piccolo grazie anche a Gina, "fedelissima" compagna di giochi e di studio.

E infine ringrazio tutti i miei compagni del "Fiorini", che hanno contribuito a far sì che gli ultimi quattro anni siano stati per me indimenticabili.