



UNIVERSITÀ DEL SALENTO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

DOPPIO DECADIMENTO β SENZA NEUTRINI

Candidato:
Margherita Di Santo

Relatore:
Chiar.mo Prof. Giampaolo Co'

Indice

Prefazione	5
1 Fenomenologia del doppio decadimento β^-	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Il doppio decadimento β^-	4
2 Neutrini di Dirac e di Majorana	7
2.1 Neutrino di Dirac	9
2.1.1 Particella libera di Dirac	9
2.1.2 Neutrino di Dirac con massa nulla	12
2.2 Neutrino di Majorana	16
2.2.1 Neutrino di Majorana con massa nulla	16
2.3 Neutrini massivi e $0\nu\beta\beta$	19
2.3.1 Neutrino di Majorana massivo	21
3 Elementi di matrice per il $\beta\beta$	23
3.1 Elementi di matrice per il doppio decadimento β^-	23
3.2 Elemento di matrice di scattering per il $2\nu\beta\beta$	28
3.3 Elemento di matrice di scattering per il $0\nu\beta\beta$	34

<i>INDICE</i>	3
4 Correnti nucleari non relativistiche	43
4.1 Corrente debole adronica per il decadimento β^-	44
4.2 Riduzione non relativistica della corrente nucleonica	48
4.3 Sviluppo in multipoli della corrente nucleonica	51
5 Ampiezza di probabilità per il $0\nu\beta\beta$	55
5.1 Calcolo dell'ampiezza di probabilità	56
5.1.1 Sviluppo dei termini adronici	58
5.1.2 Calcolo dei termini elettronici	62
5.2 Aampiezza di probabilità e tempo di vita media per il $0\nu\beta\beta$	65
Conclusioni	69
A Convenzioni	72
B Particella libera di Dirac	74
C Coniugazione di carica	79
D Chiralità ed elicità	83
E Riduzione non relativistica	85
F Sviluppo in multipoli	87
G Calcolo dei coefficienti elettronici	91

Prefazione

Il *doppio decadimento β^- senza neutrini* è un fenomeno radioattivo di cruciale importanza attualmente per la Fisica Nucleare e per la Fisica delle Particelle, sia da un punto di vista teorico che sperimentale. Si tratta di un processo in cui il nucleo iniziale decade in un isobaro con due protoni in più, emettendo due elettroni. L'assenza di antineutrini elettronici nello stato finale è sintomo di una violazione della conservazione del numero leptonico. Di conseguenza, l'osservazione sperimentale di un doppio β^- senza neutrini condurrebbe irrimediabilmente a risultati di nuova Fisica oltre il Modello Standard. Inoltre, potrebbe rivelare la vera natura del neutrino, confermando, in particolare, l'ipotesi sinora più accreditata proposta da Ettore Majorana circa l'uguaglianza tra neutrino ed antineutrino. Sfortunatamente, i nuclei candidati al doppio β^- senza neutrini presentano tempi di vita media molto lunghi, superiori a 10^{18} anni, e ciò comporta una totale assenza di risultati sperimentali, almeno fino a questo momento.

L'attuale obiettivo della Fisica Nucleare è quello di sfruttare modelli teorici e strumenti della teoria della struttura nucleare per il calcolo degli elementi di matrice nucleare associati al processo. Questi ultimi gestiscono il tasso di decadimento e possono fornire informazioni sui nuclidi più inclini a decadimenti di questo tipo. In particolare, la vita media di un nucleo che decade doppio β^- senza neutrini è

direttamente proporzionale al modulo quadro dell'elemento di matrice nucleare $R_{fi}^{0\nu}$ associato al processo, secondo la relazione :

$$\frac{1}{\tau} = G^{0\nu} |R_{fi}^{0\nu}|^2 \left(\frac{m_\nu}{m_e} \right)^2 \quad (1)$$

dove $G^{0\nu}$ è un fattore che considera lo spazio delle fasi dello stato finale e tiene conto delle caratteristiche dei leptoni coinvolti nel processo, m_e è la massa dell'elettrone, mentre m_ν è la massa effettiva del neutrino, definita come modulo quadro della combinazione lineare degli autostati di massa dei neutrini pesata dalla matrice di mescolamento:

$$m_\nu = \left| \sum_k U_{ek}^2 m_k \right|^2. \quad (2)$$

Dunque, non solo l'osservazione di un doppio β^- senza neutrini chiarirebbe la natura di Dirac o di Majorana del neutrino, ma la costruzione di un modello teorico adatto alla descrizione del fenomeno permetterebbe, insieme ai risultati sperimentali, anche una misura diretta di m_ν . Si avrebbero, inoltre, importanti informazioni circa la gerarchia e la scala delle masse dei neutrini, conducendo alla risoluzione di un problema aperto dalla scoperta delle oscillazioni di sapore di queste misteriose particelle.

Il presente lavoro di tesi è incentrato sul calcolo dettagliato dell'elemento di matrice di scattering S_{fi} associato al doppio β^- senza neutrini, fino al raggiungimento di un'espressione dell'ampiezza di probabilità del processo. La nostra trattazione sarà strutturata come segue:

- Nel primo capitolo descriveremo il problema da un punto di vista prettamente fenomenologico, illustrando i diversi canali di decadimento doppio β^- e descrivendo le caratteristiche generali dei nuclei candidati al doppio

decadimento β^- senza emissione di neutrini nello stato finale del processo.

- Nel secondo capitolo ci soffermeremo sulla distinzione tra neutrino di Dirac e neutrino di Majorana. Spiegheremo le ragioni per cui la teoria di Dirac non è adatta a descrivere un neutrino coinvolto in un doppio β^- senza neutrini, per giungere, di conseguenza, alla necessità di introdurre l'ipotesi di un neutrino massivo di Majorana.
- Nel terzo capitolo sfrutteremo gli strumenti forniti dalla teoria perturbativa dipendente dal tempo per ottenere un'espressione dell'elemento di matrice di scattering associato al processo in esame.
- Nel quarto capitolo focalizzeremo l'attenzione sugli elementi di matrice adronici che compaiono nell'espressione di S_{fi} . Scriveremo gli operatori di corrente carica debole che intervengono negli elementi di matrice adronici sfruttando un'analogia con l'interazione elettromagnetica tra adroni, per poi effettuare una riduzione non relativistica degli stessi, in accordo con le energie in gioco nel processo fisico reale, utilizzando il metodo di Foldy-Wouthuysen.
- Nel quinto ed ultimo capitolo giungeremo ad una espressione finale dell'ampiezza di probabilità associata al doppio β^- senza neutrini e, quindi, del tasso di decadimento di un nucleo candidato al processo.

Capitolo 1

Fenomenologia del doppio decadimento β^-

1.1 Introduzione

Il *Doppio Decadimento β^-* è un processo fisico molto raro, il quale può essere immaginato come il susseguirsi di due transizioni nucleari virtuali. In particolare, il nucleo iniziale, nel suo stato fondamentale, decade virtualmente in un nucleo intermedio, anch'esso nel suo stato fondamentale oppure in uno stato eccitato, emettendo una coppia elettrone-antineutrino elettronico. Successivamente, il nucleo intermedio decade a sua volta β^- nel nucleo finale, emettendo uno o due leptoni.

Questo canale di decadimento è accessibile solo ai nuclei pari-pari, per i quali il β singolo risulta essere energeticamente proibito o inibito da una grande variazione del momento angolare nucleare totale dallo stato iniziale a quello finale. Il fatto che il $\beta\beta$ possa verificarsi solo per nuclei con numero di neutroni N e numero di protoni Z entrambi pari può essere compreso considerando il contributo del termine di pairing δ alla massa nucleare.

Questo termine tiene conto del fatto che l'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo aumenta quando protoni o neutroni si appaiano tra loro per formare coppie con momento angolare totale nullo, rendendo il sistema più legato. In particolare, esso è definito come segue:

$$\delta = \begin{cases} 0 \text{ MeV} & A \text{ dispari}; \\ +34 A^{-\frac{3}{4}} \text{ MeV} & A \text{ pari, } Z \text{ e } N \text{ pari}; \\ -34 A^{-\frac{3}{4}} \text{ MeV} & A \text{ pari, } Z \text{ e } N \text{ dispari.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Ciò suggerisce l'idea, confermata sperimentalmente, che coppie pp o nn siano maggiormente legate rispetto ad una coppia pn .

Rappresentando graficamente l'andamento della massa nucleare rispetto al numero atomico Z , osserviamo che per gli isobari con numero di massa A dispari ($\delta = 0$) abbiamo una singola parabola, mentre per gli isobari con A pari otteniamo due parabole, corrispondenti ai due diversi valori di δ , in cui i nuclidi dispari-dispari sono separati dai pari-pari. Osserviamo inoltre che i nuclei pari-pari sono caratterizzati da massa inferiore, energia di legame maggiore e risultano essere, quindi, più stabili.

Nel caso dei nuclei con A dispari, un solo isobaro è stabile ed i nuclidi vicini possono decadere mediante una singola transizione β per raggiungere questa configurazione di stabilità. Nel secondo caso, invece, risulta evidente che un decadimento β tra nuclei contigui collocati sulle due distinte parabole potrebbe essere energeticamente proibito se i nuclei finali hanno masse maggiori dei nuclei iniziali. In Figura 1.1 sono rappresentati con linee tratteggiate e con linee continue rispettivamente i processi proibiti e quelli permessi.

Un esempio di decadimento β^- singolo energeticamente proibito è il seguente:



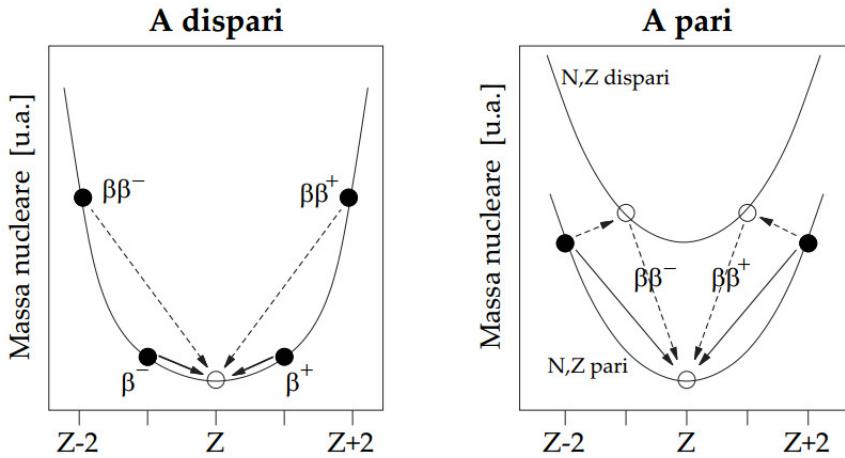


Figura 1.1: Curve degli isobari con A dispari e con A pari. Le linee continue indicano le transizioni permesse, mentre le linee tratteggiate individuano i decadimenti proibiti.

A questo processo, trascurando la massa dell'antineutrino elettronico, è associato un Q -Valore, in MeV pari a:

$$\begin{aligned}
 Q &= M(76,32) - M(76,33) - m_e = \\
 &= B(76,33) - B(76,32) + m_n - m_p - m_e = \\
 &= 659.892192 - 661.598088 + 939.565378 - 938.272030 - 0.510109 \simeq \\
 &\simeq -0.922657;
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove per i valori dell'energia di legame $B(A, Z)$ del generico nucleo ${}^A_Z X$ abbiamo utilizzato i risultati riportati in [Lbn02].

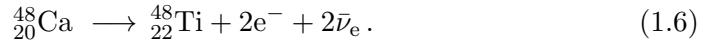
Per il ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, nucleo doppio-magico contenente 20 protoni e 28 neutroni, il seguente decadimento β^- singolo:



è invece energeticamente permesso, infatti:

$$\begin{aligned}
 Q &= M(48, 20) - M(48, 21) - m_e = \\
 &= B(48, 21) - B(48, 20) + m_n - m_p - m_e = \\
 &= 415.489968 - 415.990992 + 939.565378 - 938.272030 - 0.510109 \simeq \\
 &\simeq 0.282215,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

dove ricordiamo che Q è espresso in MeV. In questo caso, però, la transizione avverrebbe dallo stato iniziale con momento angolare totale e parità $J_i^P = 0^+$ allo stato finale $J_f^P = 6^+$, perciò risulta inibita da una grande variazione del momento angolare. Il $^{48}_{20}\text{Ca}$ decade quindi, mediante un doppio β^- , nel $^{48}_{22}\text{Ti}$:



Sottolineiamo che, in generale, quasi tutti i nuclei che decadono doppio β presentano una struttura nucleare lontana dalla più semplice struttura a shell chiusa. Inoltre, molti di essi esibiscono delle caratteristiche deformazioni.

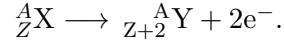
1.2 Il doppio decadimento β^-

In natura sono possibili due canali di doppio decadimento β^- , che in questo lavoro indichiamo con le seguenti sigle:

- 1) $2\nu\beta\beta$ (doppio β^- con neutrini):



- 2) $0\nu\beta\beta$ (doppio β^- senza neutrini):



N_i	Q-Value(MeV)	$T_{1/2}^{2\nu}$ (anni)	N_f	%
^{48}Ca	4.274	$(4.4_{-0.5}^{+0.6}) \cdot 10^{19}$	^{48}Ti	0.187
^{76}Ge	2.040	$(1.84_{-0.10}^{+0.14}) \cdot 10^{21}$	^{76}Se	7.8
^{82}Se	2.996	$(0.92 \pm 0.07) \cdot 10^{20}$	^{82}Kr	9.2
^{96}Zr	3.349	$(2.3 \pm 0.2) \cdot 10^{19}$	^{96}Mo	2.8
^{100}Mo	3.035	$(7.1 \pm 0.4) \cdot 10^{18}$	^{100}Ru	9.6
^{116}Cd	2.810	$(2.8 \pm 0.2) \cdot 10^{19}$	^{116}Sn	7.5
^{130}Te	2.532	$(6.8_{-1.1}^{+1.2}) \cdot 10^{20}$	^{130}Xe	34.5
^{136}Xe	2.463	$(2.11 \pm 0.21) \cdot 10^{21}$	^{136}Ba	8.9
^{150}Nd	3.369	$(8.2 \pm 0.9) \cdot 10^{18}$	^{150}Sm	5.6

Tabella 1.1: Tabella dei possibili $2\nu\beta\beta$. Abbiamo indicato con N_i e con N_f rispettivamente il nucleo iniziale ed il nucleo finale prodotto dalla transizione. Nell'ultima colonna abbiamo riportato le abbondanze in natura in percentuale dei nuclei iniziali [Bar10][Ack11][Ger76].

Al momento, solo il $2\nu\beta\beta$ è stato osservato sperimentalmente, sebbene si tratti di un processo caratterizzato da una probabilità di verificarsi molto bassa. In Tabella 1.1 abbiamo riportato alcuni esempi di $2\nu\beta\beta$ osservati per diversi isotopi ed i risultati delle misure dei tempi di vita media ad essi corrispondenti. Per ciascuno di questi isotopi abbiamo riportato il rispettivo Q -valore, quest'ultimo ottenuto dalla formula:

$$\begin{aligned} Q_{\beta\beta} &= M(A, Z) - M(A, Z + 2) - 2m_e = \\ &= B(A, Z + 2) - B(A, Z) + 2(m_n - m_p - m_e), \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove abbiamo trascurato la massa dei neutrini.

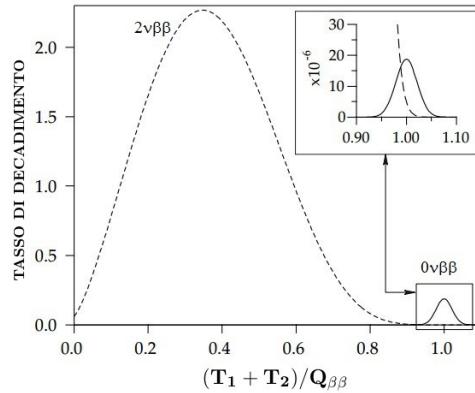


Figura 1.2: Spettri di emissione dei processi $2\nu\beta\beta$ e $0\nu\beta\beta$. Sull'asse delle ascisse sono riportati i valori dei rapporti tra la somma delle energie cinetiche dei due elettroni emessi ed il Q -valore associato alla transizione.

Eventi di questo tipo non forniscono informazioni interessanti per la ricerca di nuova Fisica oltre il Modello Standard ma, evidenziando i tempi di vita estremamente lunghi (circa 10^{19} anni) dei suddetti isotopi, tali processi costituiscono un buon test per i modelli nucleari teorici.

Sperimentalmente si può distinguere tra $2\nu\beta\beta$ e $0\nu\beta\beta$ osservando lo spettro di emissione dei due processi riportato in Figura 1.2. Si osserva che il $2\nu\beta\beta$ ha uno spettro continuo con un picco in corrispondenza di $\sim \frac{1}{3}Q$, mentre il $0\nu\beta\beta$ presenta un picco corrispondente alla somma delle energie dei due elettroni prodotti e che si sovrappone alla coda destra dello spettro del $2\nu\beta\beta$. Quest'ultimo rappresenta dunque un fondo per la rivelazione del $0\nu\beta\beta$ e, per questo motivo, sperimentalmente si cerca di aumentare la risoluzione energetica per rivelare il picco del $0\nu\beta\beta$.

Capitolo 2

Neutrini di Dirac e di Majorana

L'osservazione sperimentale di un $0\nu\beta\beta$ costituirebbe una prova tangibile dell'esistenza di processi di interazione che violano la legge di conservazione del numero leptonico, eventi non contemplati dal Modello Standard delle particelle e delle interazioni fondamentali, semplicemente chiamato Modello Standard. Questi processi possono essere spiegati interpretando il neutrino non più come una particella di Dirac, ben distinta dalla sua antiparticella, bensì come un fermione massivo di Majorana. Ciò significa essenzialmente che neutrino ed antineutrino sono due differenti stati di chiralità della stessa particella.

Come mostrato nel diagramma di Feynman in Fig. 2.1, possiamo immaginare schematicamente il $0\nu\beta\beta$ come caratterizzato da due transizioni virtuali:

- 1) emissione di un antineutrino elettronico in un primo vertice di decadimento:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e ;$$

- 2) assorbimento, per decadimento β^- inverso, di un neutrino in un secondo vertice:

$$n + \nu_e \longrightarrow p + e^- .$$

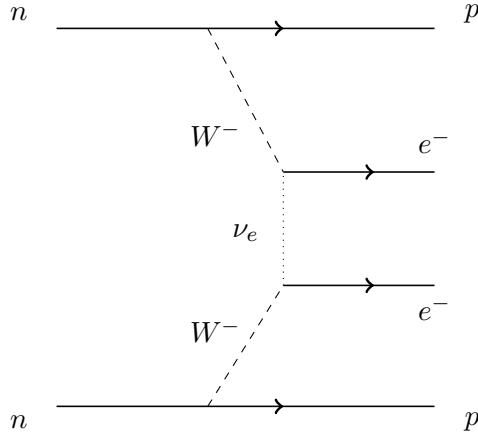


Figura 2.1: Diagramma di Feynman del $0\nu\beta\beta$ con scambio di un neutrino elettronico virtuale di Majorana.

Osserviamo che la seconda fase del doppio decadimento consiste nell’assorbitamento di un neutrino elettronico da parte di un neutrone nucleare, sebbene si abbia a disposizione solo un antineutrino, quello emesso nella prima transizione virtuale. Dunque, si intuisce sin da subito che il verificarsi di un $0\nu\beta\beta$ sarebbe compatibile con l’ipotesi di un neutrino di Majorana.

In questo capitolo partiremo dalla descrizione del neutrino con massa nulla nel contesto della teoria di Dirac. Successivamente, considereremo l’ipotesi di uguaglianza neutrino-antineutrino proposta da Majorana. Infine, vedremo che sarà necessario considerare un termine di massa non nulla affichè la descrizione di Majorana sia compatibile con il verificarsi di un $0\nu\beta\beta$. Ciò è conseguenza della proprietà secondo la quale solo le particelle con chiralità levogira possono partecipare ad un processo gestito dall’interazione debole. Sottolineiamo infine che in questo capitolo useremo le unità naturali $\hbar = c = 1$ per semplificare la scrittura delle equazioni d’interesse.

2.1 Neutrino di Dirac

2.1.1 Particella libera di Dirac

Nel contesto del Modello Standard, la dinamica di campi liberi associati a particelle di spin 1/2 e massa m è descritta matematicamente dall'equazione relativistica di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

con γ^μ matrice di Dirac (si veda Appendice A), $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\Psi(x)$ spinore di Dirac a quattro componenti associato al fermione di massa m . Le soluzioni dell'equazione (2.1) possono essere scritte come combinazioni lineari di onde piane (si veda Appendice B, equazioni (B.2) e (B.3) con fattori volumetrici di normalizzazione unitari), ad energia positiva per la descrizione dello stato di una particella:

$$\Psi_1(x) = e^{-ipx} u^{(s)}(\vec{p}) \quad (2.2)$$

e ad energia negativa nel caso di antiparticella:

$$\Psi_2(x) = e^{+ipx} v^{(s)}(\vec{p}), \quad (2.3)$$

dove $p = (E; \vec{p})$ è il quadrimpulso del fermione con $p_0 > 0$, $x = (t; \vec{x})$ è la posizione nello spazio-tempo e $px \equiv p_\mu x^\mu = p_0 x^0 + p_i x^i = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$. Gli spinori di polarizzazione $u^{(s)}(\vec{p})$ e $v^{(s)}(\vec{p})$ dipendono dallo spin s e dall'impulso \vec{p} della particella o antiparticella ad essi associate. In un sistema di riferimento generico, questi possono essere scritti come segue (si vedano le (B.24) e (B.25)):

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \xi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi^{(s)} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

e

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} A \xi^{*(s)} \\ A \xi^{*(s)} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

con $s = 1, 2$ ed A matrice convenientemente definita dalla (B.22):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Qui $\xi^{(1)} \equiv \xi^{(1)}(\vec{0})$ e $\xi^{(2)} \equiv \xi^{(2)}(\vec{0})$ costituiscono una base di bispinori convenzionalmente normalizzati ad uno e scelti in modo tale che siano ortogonali tra loro, cioè:

$$\xi^{(r)\dagger} \xi^{(s)} = \delta_{rs}, \quad \text{con } r, s = 1, 2. \quad (2.7)$$

Una possibile scelta dei bispinori di base, compatibile con le precedenti richieste, può essere la seguente:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi^{(2)} = -i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

per i quali abbiamo:

$$\sigma_3 \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi^{(1)} \quad (2.9)$$

e

$$\sigma_3 \xi^{(2)} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = +i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\xi^{(2)}. \quad (2.10)$$

Dunque, $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ sono autostati della matrice di Pauli $\sigma_3 \equiv \sigma_z$ definita in (A.4), con autovalori rispettivamente $+1$ e -1 . Ciò significa che possono essere interpretati come stati caratterizzati da impulso \vec{p} diretto lungo l'asse z e spin up (\uparrow) nel primo caso, spin down (\downarrow) nel secondo.

Una scelta più conveniente consiste nello scrivere $u^{(s)}(\vec{p})$ e $v^{(s)}(\vec{p})$ in termini di autostati dell'*operatore di elicità*, definito come segue:

$$h = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad (2.11)$$

dove $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e con elicità si intende la proiezione dello spin lungo la direzione del moto. In generale, l'elicità non è un invariante relativistico per particelle con massa non nulla. Questo perché è sempre possibile effettuare un boost di Lorentz che porti la particella nel sistema di riferimento a riposo, in cui l'elicità non è definita. Per particelle prive di massa, invece, questa operazione non è possibile. Ciò significa che nel caso $m = 0$ l'elicità è un'invariante di Lorentz.

Consideriamo gli spinori di Pauli χ_+ e χ_- , autostati di elicità:

$$h\chi_+ = \chi_+ \quad \text{e} \quad h\chi_- = -\chi_-, \quad (2.12)$$

tali che valga la seguente condizione:

$$A\chi_{\pm} = i\chi_{\mp}, \quad (2.13)$$

utile per mettere maggiormente in evidenza la differenza tra i nuovi spinori di polarizzazione corrispondenti ad energia positiva e negativa rispettivamente:

$$u_{\pm}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_{\pm} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_{\pm} \\ \pm \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{\pm} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

e

$$v_{\pm}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} A\chi_{\pm} \\ A\chi_{\pm} \end{pmatrix} = -i\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \chi_{\mp} \\ \mp \chi_{\mp} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Infatti, u_+ definito nella (2.14) descrive una particella (energia positiva) con impulso \vec{p} parallelo al suo spin (elicità positiva). Al contrario, u_- descrive una particella con impulso \vec{p} antiparallelo al suo spin (elicità negativa). Lo stesso discorso vale per v_+ e v_- definiti nella (2.15), i quali, però, descrivono antiparticelle (energia negativa).

È importante osservare che gli operatori $\frac{1}{2}(1+h)$ e $\frac{1}{2}(1-h)$ si comportano da *proiettori di elicità*, cioè proiettano rispettivamente sugli stati χ_+ e χ_- :

$$\frac{1}{2}(1+h)\chi_+ = \chi_+ \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(1+h)\chi_- = 0; \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{2}(1-h)\chi_+ = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(1-h)\chi_- = \chi_-. \quad (2.17)$$

Ricordiamo che, per quanto detto in precedenza, si tratta di operatori relativisticamente invarianti solo nel caso $m = 0$.

Infine, prima di procedere con la descrizione del neutrino di Dirac, è importante sottolineare la netta distinzione tra particelle di Dirac e loro antiparticelle. Gli spinori che le descrivono sono connessi l'un l'altro da un'operazione di coniugazione particella-antiparticella:

$$\tilde{C} : \Psi_D \longrightarrow (\Psi_D)^C = C \bar{\Psi}_D^T \quad (2.18)$$

dove C è la matrice di coniugazione di carica e $\bar{\Psi}_D = \Psi_D^\dagger \gamma^0$. Si dimostra (si veda Appendice C) che per fermioni di Dirac abbiamo:

$$\Psi_D \neq \Psi_D^C. \quad (2.19)$$

Nel caso di Majorana, invece, si ha un'uguaglianza che traduce matematicamente l'ipotesi fisica di uguaglianza fermione-antifermione.

2.1.2 Neutrino di Dirac con massa nulla

Il Modello Standard descrive il neutrino e la sua antiparticella come prive di massa. Dunque, nel contesto della teoria di Dirac, è possibile associare a neutrino ed antineutrino rispettivamente spinori di polarizzazione $u_\pm^0(\vec{p})$ e $v_\pm^0(\vec{p})$, definiti come segue (si veda Appendice B, espressioni (B.27) e (B.28)):

$$u_\pm^0(\vec{p}) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \pm \chi_\pm \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

e

$$v_\pm^0(\vec{p}) = -i\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi_\mp \\ \mp \chi_\mp \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Osserviamo immediatamente che vale la seguente relazione:

$$u_\pm^0 = iv_\mp^0, \quad (2.22)$$

perciò, in questo caso, solo due dei quattro autospinori di elicità sono linearmente indipendenti. Dunque, nell'ambito di una teoria in cui neutrino ed antineutrino siano privi di massa, è possibile descriverli semplicemente utilizzando o i soli spinori definiti nella (2.20) oppure, equivalentemente, quelli definiti nella (2.21). Gli autospinori di elicità (2.20) e (2.21) presentano un'ulteriore caratteristica di fondamentale importanza. Infatti, si dimostra che essi sono anche autospinori dei *proiettori di chiralità* (si veda Appendice D) definiti come segue:

$$\mathbb{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}. \quad (2.23)$$

Ciò equivale a dire che per $m = 0$ la chiralità coincide con l'elicità. In particolare, sfruttando la (2.22), si può dimostrare che:

$$u_L^0 = \mathbb{P}_L u^0(\vec{p}) = u_-^0 = iv_+^0 = iv_R^0, \quad (2.24)$$

$$u_R^0 = \mathbb{P}_R u^0(\vec{p}) = u_+^0 = iv_-^0 = iv_L^0. \quad (2.25)$$

Dalle (2.24) e (2.25) deduciamo che, nel caso di neutrini ed antineutrini privi di massa:

- lo spinore u_L^0 descrive sia una particella sinistrorsa che un'antiparticella destrorsa;
- lo spinore u_R^0 descrive sia una particella destrorsa che un'antiparticella sinistrorsa.

Il campo di Dirac quantizzato può essere espresso come segue [Pes95]:

$$\psi^D(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_{s=\pm 1/2} (a^{(s)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{\dagger(s)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) e^{ipx}), \quad (2.26)$$

dove a e b^\dagger sono operatori rispettivamente di annichilazione di particella e creazione della corrispondente antiparticella, entrambe con impulso \vec{p} . La somma è estesa ai due possibili autostati di elicità positiva e negativa. Dunque, il

campo ψ annichila una particella e crea la sua antiparticella, mentre ψ^\dagger opera in maniera opposta. Gli operatori fermionici a e b sono tali da soddisfare il principio di esclusione di Pauli, vincolo che si traduce nelle seguenti regole di anticommutazione:

$$\{a^{(s)}(\vec{p}), a^{(s')}(\vec{p}')\} = \{a^{\dagger(s)}(\vec{p}), a^{\dagger(s')}(\vec{p}')\} = 0; \quad (2.27)$$

$$\{a^{(s)}(\vec{p}), a^{\dagger(s')}(\vec{p}')\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{ss'}; \quad (2.28)$$

$$\{b^{(s)}(\vec{p}), b^{(s')}(\vec{p}')\} = \{b^{\dagger(s)}(\vec{p}), b^{\dagger(s')}(\vec{p}')\} = 0; \quad (2.29)$$

$$\{b^{(s)}(\vec{p}), b^{\dagger(s')}(\vec{p}')\} = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{ss'}; \quad (2.30)$$

infatti, ne discende che:

$$a^\dagger(\vec{p}, s)a^\dagger(\vec{p}, s) = \frac{1}{2}\{a^\dagger(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{p}, s)\} = 0; \quad (2.31)$$

cioè non è possibile creare contemporaneamente due fermioni nello stesso stato. Il campo quantizzato associato ad un neutrino di Dirac privo di massa, omettendo la dipendenza dall'impulso \vec{p} per semplicità di scrittura e sfruttando le (2.24) e (2.25), è dato da:

$$\psi_\nu^D(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left[a_{\nu_L} u_L^0 e^{-ipx} - i b_{\bar{\nu}_R}^\dagger u_L^0 e^{ipx} + a_{\nu_R} u_R^0 e^{-ipx} - i b_{\bar{\nu}_L}^\dagger u_R^0 e^{ipx} \right], \quad (2.32)$$

dove:

- a_{ν_L} (a_{ν_R}) annichila un neutrino sinistrorso (destrorso);
- $b_{\bar{\nu}_L}^\dagger$ ($b_{\bar{\nu}_R}^\dagger$) crea un antineutrino sinistrorso (destrorso).

Possiamo riscrivere la (2.32) nella seguente forma più compatta e conveniente:

$$\psi_\nu^D(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} (\hat{O}_L^D(p, x) + \hat{O}_R^D(p, x)), \quad (2.33)$$

dove:

$$\hat{O}_L^D(p, x) = (a_{\nu_L} e^{-ipx} - i b_{\bar{\nu}_R}^\dagger e^{ipx}) u_L^0 \quad (2.34)$$

e

$$\hat{O}_R^D(p, x) = (a_{\nu_R} e^{-ipx} - i b_{\bar{\nu}_L}^\dagger e^{ipx}) u_R^0 \quad (2.35)$$

sono operatori rispettivamente sinistrorso e destrorso, infatti:

$$\mathbb{P}_L \hat{O}_L^D(p, x) = \hat{O}_L^D(p, x) \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_R \hat{O}_R^D(p, x) = \hat{O}_R^D(p, x). \quad (2.36)$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\psi_\nu^D(x) = \psi_L^D(x) + \psi_R^D(x), \quad (2.37)$$

dove:

$$\psi_L^D(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \hat{O}_L^D(p, x) \quad (2.38)$$

e

$$\psi_R^D(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \hat{O}_R^D(p, x). \quad (2.39)$$

È importante soffermarsi sul significato fisico degli operatori definiti nella (2.34) e (2.35). L'operatore $\hat{O}_L^D(p, x)$ descrive la possibile creazione di un antineutrino di chiralità destrorsa o l'annichilazione di un neutrino con chiralità sinistrorsa. L'esistenza di entrambi è confermata dagli esperimenti sinora condotti. Si tratta perciò di un operatore che descrive particelle conosciute. Al contrario, invece, $\hat{O}_R^D(p, x)$ crea un antineutrino sinistrorso oppure distrugge un neutrino con chiralità destrorsa. Le osservazioni sperimentalistiche di processi gestiti dall'interazione debole non hanno mai dato prova dell'esistenza di un neutrino destrorso. Si può quindi pensare che quest'ultimo non esista, oppure che sia sterile (ossia non partecipa alle interazioni deboli), oppure, ancora, che il contributo ai processi di interazione debole fornito da questo neutrino sia trascurabile rispetto a quello del neutrino sinistrorso. Le precedenti sono tutte possibili spiegazioni che, se verificate sperimentalmente, confermerebbero la validità della descrizione di neutrino ed antineutrino proposta dalla teoria di Dirac. Esiste però un'ipotesi alternativa secondo la quale il neutrino non sia affatto un fermione di Dirac.

2.2 Neutrino di Majorana

2.2.1 Neutrino di Majorana con massa nulla

Nella teoria di Dirac, la descrizione del neutrino privo di massa è caratterizzata da quattro gradi di libertà, corrispondenti ai due stati di particella ed antiparticella con le relative possibili configurazioni di elicità. Tutto ciò comporta la presenza di quattro operatori di creazione e distruzione nelle definizioni (2.34) e (2.35) degli operatori di Dirac. Come già detto in precedenza, in questa formulazione è possibile che esistano particelle massive mai osservate sperimentalmente, come il neutrino destrorso.

La teoria di Majorana propone una descrizione più vantaggiosa: il concetto di antiparticella perde di significato ed il numero di gradi di libertà nella descrizione dello stato di una particella si riduce a due. Ora, consideriamo ancora il caso di neutrino privo di massa, dimodoché l'elicità sia un buon numero quantico. L'idea centrale consiste nell'interpretare il neutrino e l'antineutrino come la stessa particella in due differenti stati di elicità. In questo senso, possiamo considerare due soli operatori, che chiameremo c_{ν_L} e c_{ν_R} , in corrispondenza dei quali avremo i soli due gradi di libertà: neutrino sinistrorso e neutrino destrorso. Possiamo, quindi, definire i nuovi operatori di Majorana come segue [Gro90]:

$$\hat{O}_L^M = (c_{\nu_L} e^{-ipx} - i c_{\nu_R}^\dagger e^{ipx}) u_L^0 \quad (2.40)$$

e

$$\hat{O}_R^M = (c_{\nu_R} e^{-ipx} - i c_{\nu_L}^\dagger e^{ipx}) u_R^0. \quad (2.41)$$

Di conseguenza, costruiamo direttamente il campo quantizzato associato al neutrino di Majorana privo di massa come:

$$\psi_\nu^M(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \left(\hat{O}_L^M(p, x) + \hat{O}_R^M(p, x) \right), \quad (2.42)$$

imponendo che questo debba soddisfare la seguente richiesta:

$$(\psi_\nu^M)^C = C(\bar{\psi}_\nu^M)^T = \psi_\nu^M, \quad (2.43)$$

con C matrice di coniugazione di carica.

È proprio questa la sostanziale differenza tra campo di Majorana e campo di Dirac, dove quest'ultimo soddisfa invece la condizione (2.19). Ovviamente, dalla (2.43), segue che il campo di Majorana può descrivere solo particelle neutre. Infatti, se consideriamo l'equazione di Dirac per un fermione di carica q accoppiato con un campo elettromagnetico descritto dal quadripotenziale di gauge A_μ , otteniamo:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - q\gamma^\mu A_\mu)\Psi^M = 0 \quad (2.44)$$

e

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + q\gamma^\mu A_\mu)(\Psi^M)^C = 0. \quad (2.45)$$

Di conseguenza, affinchè sia rispettata la richiesta (2.43), i due spinori devono soddisfare la stessa equazione, condizione possibile solo per $q = 0$, cioè per particelle prive di carica.

A questo punto, scriviamo l'operatore di Majorana come segue:

$$\hat{O}^M = \hat{O}_L^M + \hat{O}_R^M, \quad (2.46)$$

ed il suo coniugato di carica:

$$(\hat{O}^M)^C = (\hat{O}_L^M)^C + (\hat{O}_R^M)^C, \quad (2.47)$$

dove abbiamo opportunamente separato le due componenti con chiralità opposta. Sfruttando la definizione della matrice C in rappresentazione standard (C.12),

calcoliamo:

$$\begin{aligned}
(\hat{O}_L^M)^C &= C(\bar{\hat{O}}_L^M)^T = i\gamma^2\gamma^0(\hat{O}_L^{M\dagger}\gamma^0)^T = \\
&= i\gamma^2\gamma^0(\gamma^0)^T(\hat{O}_L^{M\dagger})^T = \\
&= i\gamma^2(\hat{O}_L^{M\dagger})^T = \\
&= (c_{\nu_L}^\dagger e^{ipx} + ic_{\nu_R} e^{-ipx})(u_L^0)^C = \\
&= (c_{\nu_R} e^{-ipx} - ic_{\nu_L}^\dagger e^{ipx})i v_L^0 = \\
&= (c_{\nu_R} e^{-ipx} - ic_{\nu_L}^\dagger e^{ipx})u_R^0 = \\
&= \hat{O}_R^M
\end{aligned} \tag{2.48}$$

e

$$\begin{aligned}
(\hat{O}_R^M)^C &= C(\bar{\hat{O}}_R^M)^T = i\gamma^2\gamma^0(\hat{O}_R^{M\dagger}\gamma^0)^T = \\
&= i\gamma^2\gamma^0(\gamma^0)^T(\hat{O}_R^{M\dagger})^T = \\
&= i\gamma^2(\hat{O}_R^{M\dagger})^T = \\
&= (c_{\nu_R}^\dagger e^{ipx} + ic_{\nu_L} e^{-ipx})(u_R^0)^C = \\
&= (c_{\nu_L} e^{-ipx} - ic_{\nu_R}^\dagger e^{ipx})i v_R^0 = \\
&= (c_{\nu_L} e^{-ipx} - ic_{\nu_R}^\dagger e^{ipx})u_L^0 = \\
&= \hat{O}_L^M,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà $\gamma^0(\gamma^0)^T = \gamma^0\gamma^0 = \mathbb{I}$, le relazioni (2.24), (2.25) e le proprietà di trasformazione sotto coniugazione di carica degli spinori di polarizzazione (C.18) e (C.19). Dunque, dalla condizione (2.43), discende che:

$$(\hat{O}_L^M)^C = (\hat{O}_R^M)_R^C \tag{2.50}$$

e

$$(\hat{O}_R^M)^C = (\hat{O}_L^M)_L^C. \tag{2.51}$$

Di conseguenza, è utile scrivere il campo di Majorana associato al neutrino privo di massa come:

$$\psi_\nu^M = \psi_L^M + (\psi^M)_R^C. \tag{2.52}$$

La condizione (2.43) non è ancora sufficiente per definire una particella di Majorana. Infatti, indicata con P la trasformazione di parità, la quale agisce sul campo invertendo il segno delle coordinate spaziali come segue:

$$P : \psi(\vec{x}) \rightarrow \psi(-\vec{x}), \quad (2.53)$$

è necessario imporre il seguente vincolo:

$$(\psi_\nu^M)^{CP} = \eta_{CP} \psi_\nu^M, \quad (2.54)$$

cioè il neutrino di Majorana è un autostato di CP con autovalore η_{CP} . Questa condizione è necessaria in quanto si traduce fisicamente nell'uguaglianza tra neutrino ed antineutrino così come, in generale, tra particella ed antiparticella di Majorana. Osserviamo che l'operazione $(CP)^2$ corrisponde all'identità, di conseguenza $\eta_{CP}^2 = 1$ e, quindi, i due possibili autovalori nella (2.54) sono $\eta_{CP} = \pm 1$. Una soluzione della condizione (2.54) è la seguente:

$$\psi_\nu^M = \psi_{\nu_L}^M + \eta_{CP} (\psi_{\nu_L}^M)^C. \quad (2.55)$$

Infatti, dalla (2.51) abbiamo che $(\psi_\nu^M)_R^C = \psi_{\nu_R}^M$ e ricordando che $(\psi_{\nu_R}^M)^P = \psi_{\nu_L}^M$, si ottiene:

$$\begin{aligned} (\psi_\nu^M)^{CP} &= (\psi_{\nu_L}^M)^{CP} + \eta_{CP} \psi_{\nu_L}^M = \\ &= \eta_{CP} (\psi_{\nu_L}^M + \eta_{CP} (\psi_{\nu_L}^M)^C) = \\ &= \eta_{CP} \psi_\nu^M. \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.3 Neutrini massivi e $0\nu\beta\beta$

Come già detto in precedenza, nel contesto del Modello Standard, i neutrini sono descritti come particelle prive di massa. Recenti esperimenti sulle oscillazioni di sapore indicano però che i neutrini sono dotati di massa non nulla, seppur molto piccola se confrontata con le tipiche energie con le quali questi sono prodotti ed

assorbiti. Questo risultato è molto importante, non solo perché comporta una rivisitazione del Modello Standard, ma anche perché permette di ritenere che la ricerca dell'osservazione sperimentale del $0\nu\beta\beta$ sia la strada giusta da seguire per capire definitivamente se il neutrino è una particella di Dirac o di Majorana.

Nel caso $m = 0$, il doppio decadimento sarebbe proibito sia per neutrini di Dirac che di Majorana a causa del fatto che la corrente debole si accoppia solo con particelle sinistrorse. Cerchiamo di spiegare quanto detto considerando proprio il $0\nu\beta\beta$ nell'ipotesi di neutrini di Majorana con $m = 0$.

Come spiegato all'inizio di questo capitolo, il $0\nu\beta\beta$ può essere immaginato come un processo di emissione di un antineutrino destrorso da parte del primo neutrone ed assorbimento di un neutrino sinistrorso da un secondo neutrone. I due neutroni si trasformano così in due protoni ed emettono due elettroni. Il processo di emissione di un antineutrino (o neutrino) destrorso di Majorana da parte di un neutrone che decade in un protone è descritto dalla seguente corrente debole:

$$J_\mu = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi^M, \quad (2.57)$$

dove ψ^M è definito dalla (2.42). L'operatore $(1 - \gamma_5)$ seleziona la componente di chiralità sinistrorsa ψ_L^M del campo di Majorana, la quale è data da:

$$\psi_L^M(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} \hat{O}_L^M(p, x), \quad (2.58)$$

dove \hat{O}_L^M è definito dalla (2.40). Quest'ultimo contiene effettivamente l'operatore $c_{\nu_R}^\dagger$ di creazione di un antineutrino destrorso. Il successivo assorbimento dell'antineutrino emesso è descritto, invece, da una corrente che contiene l'operatore di annichilazione c_{ν_R} , il quale però è situato nella componente di chiralità destrorsa del campo ψ_R^M . Quindi, la corrente che descrive l'assorbimento è data da:

$$J'_\mu = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi^M, \quad (2.59)$$

la quale sarebbe possibile solo nel caso in cui l'interazione debole si accoppiasse con particelle destrorse. Dunque, l'assorbimento di un antineutrino destrorso di Majorana sarebbe possibile solo con conseguente emissione di un positrone (così come nel caso di Dirac) ed il $0\nu\beta\beta$ risulta incompatibile con la descrizione di Majorana del neutrino privo di massa.

Vediamo però che la situazione cambia se consideriamo un neutrino di Majorana massivo.

2.3.1 Neutrino di Majorana massivo

Per descrivere un neutrino massivo occorre esprimere l'operatore di Majorana in una forma più generale rispetto alle (2.46), (2.40) e (2.41). Ad esempio, utilizzando gli spinori di polarizzazione di Dirac u_{\pm} e v_{\pm} definiti nelle (2.14) e (2.15), ed i corrispondenti operatori c_{\pm} e c_{\pm}^{\dagger} di creazione e distruzione di particelle massive di Dirac nell'ipotesi di uguaglianza fermione-antifermione, possiamo scrivere:

$$\hat{O}^M = (c_+ u_+ + c_- u_-)e^{-ipx} + (c_+^{\dagger} v_+ + c_-^{\dagger} v_-)e^{ipx}. \quad (2.60)$$

Si può verificare che la (2.60) soddisfa la condizione (2.54) per $\eta_{CP} = \pm 1$. Possiamo scomporre il campo massivo di Majorana nelle sue componenti di chiralità sinistrorsa e destrorsa sfruttando ancora i proiettori definiti nella (2.23) come segue:

$$\hat{O}_L^M = \mathbb{P}_L \hat{O}^M = (\mathbb{P}_L c_+ u_+ + \mathbb{P}_L c_- u_-)e^{-ipx} + (\mathbb{P}_L c_+^{\dagger} v_+ + \mathbb{P}_L c_-^{\dagger} v_-)e^{ipx}, \quad (2.61)$$

e

$$\hat{O}_R^M = \mathbb{P}_R \hat{O}^M = (\mathbb{P}_R c_+ u_+ + \mathbb{P}_R c_- u_-)e^{-ipx} + (\mathbb{P}_R c_+^{\dagger} v_+ + \mathbb{P}_R c_-^{\dagger} v_-)e^{ipx}, \quad (2.62)$$

quindi riscriviamo il campo massivo di Majorana ancora come:

$$\psi_{\nu}^M(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}} (\hat{O}_L^M(p, x) + \hat{O}_R^M(p, x)). \quad (2.63)$$

Osserviamo che, a differenza del caso $m = 0$ e, in particolare, delle (2.34) e (2.35), qui gli operatori definiti nelle (2.61) e (2.62) contengono ciascuno sia gli operatori di creazione che quelli di distruzione per ogni particella. Questo è un risultato di cruciale importanza che ci permette di affermare che la distinzione tra particelle di Dirac e particelle di Majorana massive è sperimentalmente osservabile.

Infatti, un antineutrino destrorso (termine non del tutto corretto, dato che in questo caso le componenti levogire e destrogire sono in minima parte mescolate tra loro) può essere assorbito da una corrente sinistrorsa del tipo:

$$J_\mu = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi^M. \quad (2.64)$$

Ecco spiegato perchè il $0\nu\beta\beta$ ci darebbe la risposta definitiva al quesito ancora aperto riguardante la vera natura del neutrino e dell'antineutrino.

Capitolo 3

Elementi di matrice per il $\beta\beta$

In questo capitolo svolgeremo il calcolo degli elementi di matrice di scattering che descrivono il doppio decadimento β^- (che spesso indicheremo semplicemente con $\beta\beta$) sfruttando gli strumenti forniti dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo. Calcoleremo dapprima l'elemento di matrice di scattering associato al processo più semplice $2\nu\beta\beta$, per poi sfruttare i risultati ottenuti nel calcolo relativo al $0\nu\beta\beta$.

3.1 Elementi di matrice per il doppio decadimento β^-

La probabilità di transizione di un sistema da uno stato iniziale $|i\rangle$ ad uno stato finale $|f\rangle$ è pari al modulo quadro dell'ampiezza di transizione data dall'*elemento di matrice di scattering* S_{fi} , il quale è definito come segue:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}, \quad (3.1)$$

dove con $p_i = (E_i/c, \vec{p}_i)$ e $p_f = (E_f/c, \vec{p}_f)$ indichiamo i quadrimpulsi associati alle particelle coinvolte rispettivamente nello stato iniziale e finale del processo. Nell'espressione (3.1) dell'elemento di matrice S_{fi} compare innanzitutto il termi-

ne δ_{fi} , comunemente detto di “non interazione”. Il secondo addendo corrisponde invece al termine di interazione della matrice di scattering. Quest’ultimo è dato dall’elemento di matrice M_{fi} , contenente tutte le informazioni relative alla dinamica del processo, moltiplicato per i termini cinematici tra i quali:

$$\delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) = \delta^3 \left(\sum_f \vec{p}_f - \sum_i \vec{p}_i \right) \delta \left(\sum_f (E_f/c) - \sum_i (E_i/c) \right), \quad (3.2)$$

che tiene conto della conservazione del quadrimpulso.

Come accennato in precedenza, analizzeremo il decadimento $\beta\beta$ sfruttando la teoria perturbativa dipendente dal tempo. In questo contesto, l’hamiltoniana di interazione debole rappresenta il termine perturbativo, il quale si aggiunge all’hamiltoniana di interazione forte che descrive il sistema nucleare. Partiamo quindi dallo sviluppo perturbativo dell’elemento di matrice di scattering [Fet71]:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \langle f | \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n T[H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] | i \rangle = \\ &= \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar} \langle f | \int_{-\infty}^{+\infty} dt H(t) | i \rangle - \frac{1}{2\hbar^2} \langle f | \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 dt_2 T[H(t_1)H(t_2)] | i \rangle + \\ &\quad + \dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove, per la transizione in esame, $H \equiv H_W$ è l’operatore hamiltoniano di interazione debole e T il prodotto temporalmente ordinato di operatori. Quest’ultimo dispone gli operatori in modo tale che la loro posizione da sinistra verso destra sia coerente con l’ordine decrescente degli istanti temporali in cui ogni ciascuno di essi agisce. Ad esempio, al secondo ordine perturbativo abbiamo:

$$T[H(t')H(t'')] = \begin{cases} H(t')H(t'') & \text{se } t' \geq t'', \\ H(t'')H(t') & \text{se } t' \leq t''. \end{cases} \quad (3.4)$$

Come illustrato nel capitolo precedente, il decadimento $\beta\beta$ può essere schematizzato come il susseguirsi di due decadimenti β singoli virtuali. È evidente che per questo processo il termine di non interazione δ_{fi} nella (3.3) è nullo poichè lo stato

nucleare e leptonico iniziale è diverso dallo stato finale. Inoltre, anche il termine con $n = 1$ della (3.3) è soppresso, in quanto esso corrisponde ad un decadimento β singolo che, come spiegato in precedenza, è proibito per i nuclei candidati al $\beta\beta$. Di conseguenza, all'ordine più basso dello sviluppo perturbativo (3.3) dell'ampiezza di transizione S_{fi} , il processo è descritto dal termine corrispondente a $n = 2$, coerentemente con la presenza di due coppie di vertici di interazione nel diagramma di Feynman del processo mostrato in Figura 2.1 con scambio di due bosoni W^- . Possiamo allora scrivere:

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{2\beta} = \frac{i}{2\hbar^2} \langle f | \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' dt'' T[H(t') H(t'')] | i \rangle . \quad (3.5)$$

A questo punto, osserviamo che l'hamiltoniano H è definito come l'integrale nello spazio della densità hamiltoniana $\mathcal{H}(t, \vec{x})$:

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(t, \vec{x}), \quad (3.6)$$

dove, per il singolo decadimento β , la densità hamiltoniana dell'interazione corrente-corrente della teoria V-A è data da [Fey58]:

$$\mathcal{H}(x) = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} J^\mu(x) J_\mu^\dagger(x), \quad (3.7)$$

dove $x = (ct, \vec{x})$, J^μ rappresenta la densità di corrente e G_β è la costante di Fermi, caratteristica dell'accoppiamento debole, il cui valore è [Pdg14] :

$$\frac{G_\beta}{(\hbar c)^3} = 1.1663787(6) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (3.8)$$

La densità \mathcal{H} definita nella (3.7) descrive tutti i possibili processi deboli ed è una quantità Lorentz-invariante (gli indici di Lorentz sono contratti) ed hermitiana. Osserviamo che J^μ è somma di un contributo di corrente adronica h^μ , che tiene conto del decadimento debole di un nucleone in un altro, e di quello leptonico l^μ associato alla produzione di una coppia elettrone-antineutrino elettronico:

$$J^\mu(x) = h^\mu(x) + l^\mu(x), \quad (3.9)$$

dove gli operatori h^μ e l^μ sono definiti come segue:

$$h^\mu(x) = \bar{\psi}_n(x)\gamma^\mu(1 - g_A\gamma^5)\psi_p(x) \quad \text{con } \bar{\psi}_n(x) = \psi_n^\dagger(x)\gamma^0; \quad (3.10)$$

$$l^\mu(x) = \bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\psi_{\nu_e}(x) \quad \text{con } \bar{\psi}_e(x) = \psi_e^\dagger(x)\gamma^0. \quad (3.11)$$

Si tratta di correnti cariche, poiché ogni singolo processo comporta una variazione di carica tra lo stato iniziale e quello finale. Ricordiamo che ψ e $\bar{\psi}$ sono operatori di campo definiti in modo tale che ψ annichili una particella nello stato iniziale o crei un'antiparticella nello stato finale, mentre $\bar{\psi}$ annichila un'antiparticella nello stato iniziale o crea una particella nello stato finale. Sottolineiamo inoltre che $(1 - \gamma^5)$, nelle espressioni (3.10) e (3.11) delle correnti adronica e leptonica, è, a meno di un fattore $1/2$, il proiettore di chiralità sinistrorsa, il quale, agendo su entrambi gli spinori a destra ed a sinistra, seleziona solo campi con chiralità definita. Nella (3.10) compare la costante assiale g_A , diversa da 1, poiché si tiene conto degli effetti dell'interazione forte sulla corrente adronica a causa del fatto che i nucleoni non sono puntiformi, bensì presentano una struttura interna descrivibile in termini di quark e gluoni. Dall'analisi del decadimento del neutrone si ha $g_A = 1.25$ [Suh07].

Osserviamo ora che h^μ crea un neutrone distruggendo un protone, mentre l^μ crea un elettrone ed un antineutrino elettronico nello stato finale (decadimento β^-) oppure annichila un neutrino nello stato iniziale e crea un elettrone nello stato finale (decadimento β^- inverso). Si tratta quindi di operatori di abbassamento di un'unità di carica. I corrispondenti hermitiani coniugati si comportano in maniera opposta, cioè agiscono da operatori di innalzamento della carica. Dunque, scrivendo:

$$J^\mu J_\mu^\dagger = h^\mu h_\mu^\dagger + h^\mu l_\mu^\dagger + l^\mu h_\mu^\dagger + l^\mu l_\mu^\dagger, \quad (3.12)$$

notiamo che ogni termine della (3.12) è composto da un operatore di abbassamento e da uno di innalzamento, producendo così una variazione nulla della carica totale dallo stato iniziale allo stato finale del processo in esame. Calcolando, a

titolo di esempio, h_μ^\dagger otteniamo:

$$\begin{aligned}
 h_\mu^\dagger(x) &= (\bar{\psi}_n(x)\gamma_\mu(1 - g_A\gamma_5)\psi_p(x))^\dagger = \\
 &= (\psi_n^\dagger(x)\gamma_0\gamma_\mu(1 - g_A\gamma_5)\psi_p(x))^\dagger = \\
 &= \psi_p^\dagger(x)\gamma_0\gamma_0^\dagger(1 - g_A\gamma_5)^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger\psi_n(x) = \\
 &= \bar{\psi}_p(x)(1 + g_A\gamma_5)\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0\psi_n = \\
 &= \bar{\psi}_p(x)(1 + g_A\gamma_5)\gamma_0\gamma_0\gamma_\mu\psi_n = \\
 &= \bar{\psi}_p\gamma_\mu(1 - g_A\gamma_5)\psi_n,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà (A.7).

Quindi, analizzando singolarmente i termini della (3.12) troviamo che:

- $h^\mu h_\mu^\dagger$ descrive un processo caratterizzato dalle transizioni $p \rightarrow n$ e $n \rightarrow p$;
- $h^\mu l_\mu^\dagger$ descrive un decadimento β^+ ;
- $l^\mu h_\mu^\dagger$ descrive un decadimento β^- ;
- $l^\mu l_\mu^\dagger$ descrive l'emissione delle due coppie di leptoni $e^-\bar{\nu}_e$ ed $e^+\nu_e$.

L'ordinamento temporale degli operatori hamiltoniani di decadimento β^- diventa, in termini delle corrispondenti densità hamiltoniane, della forma:

$$\begin{aligned}
 T[H(t')H(t'')] &= \int d^3x' \int d^3x'' T[\mathcal{H}(t', \vec{x}')\mathcal{H}(t'', \vec{x}'')] = \\
 &= \frac{G_\beta^2}{2} \int d^3x' \int d^3x'' T[J^\mu(t', \vec{x}')J_\mu^\dagger(t', \vec{x}')J^\nu(t'', \vec{x}'')J_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'')] = \\
 &= \frac{G_\beta^2}{2} \int d^3x' \int d^3x'' T[h^\mu(t', \vec{x}')l_\mu^\dagger(t', \vec{x}')h^\nu(t'', \vec{x}'')l_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') + \\
 &\quad + h^\mu(t', \vec{x}')l_\mu^\dagger(t', \vec{x}')l^\nu(t'', \vec{x}'')h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') + \\
 &\quad + l^\mu(t', \vec{x}')h_\mu^\dagger(t', \vec{x}')l^\nu(t'', \vec{x}'')h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') + \\
 &\quad + l^\mu(t', \vec{x}')h_\mu^\dagger(t', \vec{x}')h^\nu(t'', \vec{x}'')l_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'')],
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

dove l'unico termine che descrive il doppio β^- è quello contenente la quantità operatoriale $l^\mu h_\mu^\dagger l^\nu h_\nu^\dagger$, perciò possiamo trascurare tutti gli altri addendi della (3.14).

Riscriviamo allora la (3.5) come segue:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{2\beta} &= \\ = \frac{iG_\beta^2}{4\hbar^2} &\langle f | \int dt' dt'' d^3x' d^3x'' T[l^\mu(t', \vec{x}') h_\mu^\dagger(t', \vec{x}') l^\nu(t'', \vec{x}'') h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'')] | i \rangle . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ricordando che il doppio decadimento β può essere schematizzato come successione di due decadimenti singoli virtuali, indichiamo ora con $|N_i\rangle$, $|N_\alpha\rangle$ e $|N_f\rangle$ rispettivamente gli stati nucleari iniziale, intermedio e finale. Allo stesso modo definiamo gli stati leptonici $|L_i\rangle = |0\rangle$, $|L_\alpha\rangle$ e $|L_f\rangle$. Inseriamo questi nella precedente, da cui, imponendo $t' \geq t''$ per eliminare la dipendenza dall'operatore di ordinamento temporale e sommando su tutte le possibili configurazioni dello stato nucleare intermedio, otteniamo:

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{2\beta} &= \\ = \frac{iG_\beta^2}{4\hbar^2} \sum_\alpha &\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int d^3x' \int d^3x'' \langle L_f | l^\mu(t', \vec{x}') | L_\alpha \rangle \\ \times \langle L_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle &\langle N_f | h_\mu^\dagger(t', \vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') | N_i \rangle . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vedremo ora come calcolare l'elemento di matrice di scattering dato dalla (3.16) per il $0\nu\beta\beta$ partendo dal caso, più semplice, del $2\nu\beta\beta$.

3.2 Elemento di matrice di scattering per il $2\nu\beta\beta$

Il decadimento $2\nu\beta\beta$ viene qui immaginato come la combinazione di due processi in cui, in maniera indipendente, vengono prodotte due coppie identiche di leptoni

$(e_1, \bar{\nu}_1)$ e $(e_2, \bar{\nu}_2)$. Lo stato leptonico finale $|L_f\rangle$ è quindi composto da due elettroni e due antineutrini e non è possibile distinguere quale particella di ogni coppia sia stata prodotta in un processo o nell'altro. Dunque, l'evento osservato si può presentare in 4 possibili configurazioni, tutte tra loro equivalenti a meno di permutazioni di fermioni identici. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} <e_1 e_2 \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | e_\alpha \bar{\nu}_\alpha> = & <e_2 \bar{\nu}_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | 0> <e_1 | e_\alpha> <\bar{\nu}_1 | \bar{\nu}_\alpha> \\ & + <e_1 \bar{\nu}_1 | l^\mu(t', \vec{x}') | 0> <e_2 | e_\alpha> <\bar{\nu}_2 | \bar{\nu}_\alpha> \\ & - <e_1 \bar{\nu}_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | 0> <e_2 | e_\alpha> <\bar{\nu}_1 | \bar{\nu}_\alpha> \\ & - <e_2 \bar{\nu}_1 | l^\mu(t', \vec{x}') | 0> <e_1 | e_\alpha> <\bar{\nu}_2 | \bar{\nu}_\alpha>. \end{aligned} \quad (3.17)$$

I segni meno compaiono nei casi di permutazione di una sola delle due coppie di leptoni, questo per garantire l'antisimmetria della funzione d'onda dello stato finale rispetto allo scambio di due fermioni identici.

Notiamo inoltre che, in generale, per i leptoni prodotti da un decadimento β vale la relazione:

$$\vec{p} \cdot \vec{r} \leq \frac{E_0}{c} R \simeq 1 \frac{\text{MeV}}{c} \cdot \text{fm} \ll \hbar, \quad (3.18)$$

dove \vec{p} è l'impulso del leptone uscente, E_0 è l'energia rilasciata nel decadimento ($E_0 \sim 1 \text{ MeV}$), mentre R è il raggio nucleare ($R \sim 1 \text{ fm}$). Ricaviamo allora che:

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \ll 1. \quad (3.19)$$

Ne consegue che, supponendo che la funzione d'onda del leptone sia un'onda piana, quest'ultima ha una componente spaziale $e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \simeq 1$ costante in tutto lo spazio. Ciò implica che il termine di corrente leptonica può essere considerato indipendente dalle coordinate spaziali e dipende esclusivamente dalla coordinata temporale. Possiamo quindi scrivere la (3.16) nel caso di un decadimento $2\nu\beta\beta$

come segue:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{2\nu} = \\
 & = \frac{iG_\beta^2}{4\hbar^2} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle e_2 \bar{\nu}_2 | l^\mu(t') | 0 \rangle \langle e_1 | e_\alpha \rangle \langle \bar{\nu}_1 | \bar{\nu}_\alpha \rangle \\
 & \quad \times \langle e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'') | 0 \rangle \int d^3 x' \int d^3 x'' \langle N_f | h_\mu^\dagger(t', \vec{x}') | N_\alpha \rangle \\
 & \quad \times \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') | N_i \rangle + \text{termini di scambio,}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

dove con termini di scambio intendiamo i contributi dei termini successivi che compaiono nella (3.17).

Giunti a questo punto, vogliamo esplicitare la dipendenza temporale degli elementi di matrice che compaiono nella (3.20). Ciò è possibile scrivendo ogni operatore che nella (3.3) è espresso in rappresentazione di interazione, in termini del corrispondente operatore nella rappresentazione di Schrödinger (indipendente dalla coordinata temporale) sfruttando la relazione:

$$\hat{O}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t}, \tag{3.21}$$

dove H_0 è l'Hamiltoniano non perturbato. Osserviamo che, definendo $|a\rangle$ e $|b\rangle$ autostati di H_0 con autovalori E_a ed E_b rispettivamente, abbiamo:

$$\langle a | \hat{O}_I(t) | b \rangle = \langle a | e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | b \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (E_a - E_b)t} \langle a | \hat{O}_S | b \rangle. \tag{3.22}$$

Allo stesso modo possiamo scrivere:

$$\langle e_2 \bar{\nu}_2 | l^\mu(t') | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (E(e_2) + E(\bar{\nu}_2))t'} \langle e_2 \bar{\nu}_2 | l^\mu | 0 \rangle; \tag{3.23}$$

$$\langle e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'') | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha))t''} \langle e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu | 0 \rangle; \tag{3.24}$$

$$\langle N_f | h_\mu^\dagger(t', \vec{x}') | N_\alpha \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (E(N_f) - E(N_\alpha))t'} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle; \tag{3.25}$$

$$\langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') | N_i \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} (E(N_\alpha) - E(N_i))t''} \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle. \tag{3.26}$$

dove l^μ e l^ν sono ora operatori indipendenti sia dalle coordinate spaziali che da quella temporale, mentre $h_\mu^\dagger(\vec{x}')$ e $h_\nu^\dagger(\vec{x}'')$ dipendono dalle sole coordinate

spaziali.

Allora, passando in rappresentazione di Schrödinger, la (3.20) diventa:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{2\nu} = \\
 & = \frac{iG_\beta^2}{4\hbar^2} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-iat'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ibt''} \langle e_2 \bar{\nu}_2 | l^\mu | 0 \rangle \langle e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu | 0 \rangle \langle e_1 | e_\alpha \rangle \\
 & \quad \times \langle \bar{\nu}_1 | \bar{\nu}_\alpha \rangle \int d^3x' \int d^3x'' \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle \\
 & \quad + \text{termini di scambio,}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

dove:

$$a = \frac{1}{\hbar} (E(e_2) + E(\bar{\nu}_2) + E(N_f) - E(N_\alpha)); \tag{3.28}$$

$$b = \frac{1}{\hbar} (E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha) + E(N_\alpha) - E(N_i)). \tag{3.29}$$

Al fine di calcolare gli integrali nel tempo nella (3.27), è conveniente riscriverli come segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-iat'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ibt''} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i(a+b)t'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ib(t''-t')}. \tag{3.30}$$

Il secondo integrale al secondo membro della (3.30) può essere risolto partendo dalla sostituzione $\tau = t'' - t'$, da cui otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ib(t''-t')} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^0 d\tau e^{-ib\tau} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{ib\lambda} - 1}{ib}. \tag{3.31}$$

Per b reale l'integrale non converge, ma possiamo risolvere il problema di questa divergenza con la sostituzione $b \rightarrow b + i\epsilon$ facendo poi tendere $\epsilon \rightarrow 0$, condizione che corrisponde allo *spegnimento adiabatico* dell'interazione. Scriviamo allora:

$$\int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ib(t''-t')} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^0 d\tau e^{-i(b+i\epsilon)\tau} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{b+i\epsilon} = \frac{i}{b}. \tag{3.32}$$

Per quanto riguarda il primo integrale a secondo membro della (3.30) invece, esso può essere valutato semplicemente ricordando la rappresentazione di Fourier della distribuzione delta di Dirac. Quindi, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i(a+b)t'} = 2\pi\delta(a+b). \quad (3.33)$$

Combinando i due integrali, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-iat'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ibt''} = \frac{i2\pi\delta(a+b)}{b} = \\ & = \frac{i2\pi\hbar\delta\left(\frac{1}{\hbar}(E(e_2) + E(\bar{\nu}_2) + E(N_f) + E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha) - E(N_i))\right)}{E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha) + E(N_\alpha) - E(N_i)} = \quad (3.34) \\ & = \frac{i2\pi\hbar^2\delta(E(e_2) + E(\bar{\nu}_2) + E(N_f) + E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha) - E(N_i))}{E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha) + E(N_\alpha) - E(N_i)}. \end{aligned}$$

A questo punto resta da calcolare l'integrale nello spazio per i termini adronici della (3.20). Innanzitutto, osserviamo che la componente temporale di h_μ^\dagger (h_0^\dagger) produce transizioni nucleari di Fermi, mentre quella spaziale $\vec{h}^\dagger = (h_1^\dagger, h_2^\dagger, h_3^\dagger)$ genera transizioni di Gamow-Teller. Possiamo dimostrare quanto appena detto considerando il decadimento β^- di un generico neutrone inizialmente a riposo e supponendo impulso di rinculo nullo per il protone prodotto, cioè:

$$\vec{q}_n = \vec{0}, \quad \vec{q}_p = \vec{0}, \quad E_n = m_n c^2 \simeq m_p c^2 = E_p.$$

Queste ipotesi sono ragionevoli considerando che l'energia a disposizione per i prodotti di decadimento è inferiore al MeV, da confrontare con il valore della massa a riposo del protone pari a circa 1 GeV. Sotto queste condizioni e ricordando le

espressioni (B.9) degli spinori che descrivono un fermione a riposo, abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle p | h_0^\dagger(\vec{x}') | n \rangle &= \bar{\psi}_p(\vec{x}') \gamma_0 (1 - g_A \gamma_5) \psi_n(\vec{x}') = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}[(E_p - E_n)t' + (\vec{q}_n - \vec{q}_p) \cdot \vec{x}']} \bar{u}_p^{(s_p)}(\vec{0}) \gamma_0 (1 - g_A \gamma_5) u_n^{(s_n)}(\vec{0}) = \\ &= \begin{pmatrix} \chi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \gamma_0 (1 - g_A \gamma_5) \begin{pmatrix} \chi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_p^\dagger \chi_n = \delta_{s_p, s_n}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

dove ricordiamo che con χ indichiamo gli spinori di Pauli, mentre con s_p e s_n gli spin di protone e neutrone rispettivamente. La variazione del momento angolare totale per la transizione gestita da h_0^\dagger è nulla e, quindi, si tratta di una transizione di Fermi.

Si può dimostrare, invece, che h_i^\dagger produce transizioni di Gamow-Teller, infatti:

$$\begin{aligned} \langle p | h_i^\dagger(\vec{x}') | n \rangle &= \bar{\psi}_p(\vec{x}') \gamma_i (1 - g_A \gamma_5) \psi_n(\vec{x}') = \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}[(E_p - E_n)t' + (\vec{q}_n - \vec{q}_p) \cdot \vec{x}']} \bar{u}_p^{(s_p)}(\vec{0}) \gamma_i (1 - g_A \gamma_5) u_n^{(s_n)}(\vec{0}) = \\ &= \begin{pmatrix} \chi_p^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \gamma_i (1 - g_A \gamma_5) \begin{pmatrix} \chi_n \\ 0 \end{pmatrix} = -g_A \chi_p^\dagger \sigma_i \chi_n, \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove le σ_i sono le matrici di Pauli. Dunque, nel caso del decadimento nucleare, scriviamo semplicemente gli elementi di matrice di Fermi e di Gamow-Teller utilizzando gli operatori di spin ed isospin agenti sullo stato iniziale del nucleo che decade. Nel caso del secondo processo virtuale (il β^- inverso) gli operatori agiscono sui possibili stati nucleari intermedi (su uno dei neutroni dell'eventuale nucleo intermedio):

$$M_{f\alpha}^0 = M_F = \int d^3x' \langle N_f | h_0^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle = \langle N_f | \sum_j \tau^+(j) | N_\alpha \rangle \quad (3.37)$$

e

$$\vec{M}_{f\alpha} = M_{GT} = \int d^3x' \langle N_f | \vec{h}^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle = -g_A \langle N_f | \sum_j \vec{\sigma}(j) \tau^+(j) | N_\alpha \rangle, \quad (3.38)$$

dove τ^+ è l'operatore di isospin che agisce sugli stati nucleari innalzando la carica elettrica di una unità e descrivendo così la transizione in cui un neutrone nel nucleo si trasforma in protone.

In conclusione, sostituendo le (3.34), (3.37) e (3.38) all'interno della (3.27), otteniamo:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{2\nu} = \\ & = -\frac{\pi G_\beta^2}{2} \delta(E_f - E_i) \sum_\alpha \frac{< e_2 \bar{\nu}_2 | l^\mu | 0 > < e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu | 0 >}{E(e_\alpha) + E(\bar{\nu}_\alpha) + E(N_\alpha) - E(N_i)} \delta_{1\alpha} M_{f\alpha}^\mu M_{\alpha i}^\nu \quad (3.39) \\ & + \text{termini di scambio,} \end{aligned}$$

dove:

$$E_i = E(N_i), \quad (3.40)$$

$$E_f = E(e_1) + E(e_2) + E(\bar{\nu}_1) + E(\bar{\nu}_2) + E(N_f). \quad (3.41)$$

3.3 Elemento di matrice di scattering per il $0\nu\beta\beta$

Vogliamo ora calcolare l'elemento di matrice di scattering S_{fi} per il $0\nu\beta\beta$ sfruttando alcuni dei risultati ottenuti nel caso precedente riguardante il $2\nu\beta\beta$. Partiamo sempre dalla (3.16), dove in questo caso lo stato leptonico finale è $|L_f > = |e_1 e_2 >$. L'espressione del termine di interazione di S_{fi} per il $0\nu\beta\beta$ è la seguente:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\ & = \frac{iG_\beta^2}{4\hbar^2} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int d^3 x' \int d^3 x'' < e_1 e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | e_\alpha \bar{\nu}_\alpha > \times \\ & \times < e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 > < N_f | h_\mu^\dagger(t', \vec{x}') | N_\alpha > < N_\alpha | h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') | N_i >. \quad (3.42) \end{aligned}$$

Le possibili configurazioni dello stato leptonico intermedio nel processo sono due, quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 & \langle e_1 e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | e_\alpha \bar{\nu}_\alpha \rangle \langle e_\alpha \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\
 & = \langle e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \bar{\nu}_\alpha \rangle \langle e_1 | e_\alpha \rangle \langle e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle + \langle e_1 | l^\mu(t', \vec{x}') | \bar{\nu}_\alpha \rangle \\
 & \times \langle e_2 | e_\alpha \rangle \langle e_2 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dato che le due situazioni sono esattamente equivalenti tra loro, possiamo limitarci a considerarne solo una di queste, ad esempio $e_\alpha \equiv e_1$, inserendo di conseguenza un fattore 2 nell'espressione dell'elemento di matrice S_{fi} legato alla probabilità del processo totale. Riscriviamo allora la (3.42) come segue:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\
 & = \frac{iG_\beta^2}{2\hbar^2} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int d^3x' \int d^3x'' \langle e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \bar{\nu}_\alpha \rangle \\
 & \times \langle e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle \langle N_f | h_\mu^\dagger(t', \vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(t'', \vec{x}'') | N_i \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Focalizziamo la nostra attenzione momentaneamente sui soli termini leptonicici della (3.44) e scriviamo questi ultimi in maniera più esplicita, ricordando che stiamo lavorando nell'ipotesi di Majorana $\bar{\nu}_\alpha \equiv \nu_\alpha$ e che nel secondo decadimento virtuale il nucleo intermedio assorbe un neutrino elettronico:

$$\begin{aligned}
 & \langle e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \nu_\alpha \rangle \langle e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\
 & = \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\alpha}(t', \vec{x}') \bar{\psi}_e(t'', \vec{x}'') \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \psi_{\bar{\nu}_\alpha}(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Agiamo ora sul campo $\psi_{\bar{\nu}_\alpha}$ associato all'antineutrino elettronico sfruttando l'ipotesi di Majorana (2.43) e poniamo:

$$\psi_{\bar{\nu}_\alpha} = \psi_{\bar{\nu}_\alpha}^C = C \bar{\psi}_{\nu_\alpha}^T , \tag{3.46}$$

dove ricordiamo che C è l'operatore di coniugazione di carica definito dalla (C.12). Riscriviamo quindi la (3.45) come segue:

$$\begin{aligned}
 & \langle e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \nu_\alpha \rangle \langle e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\
 & = \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\alpha}(t', \vec{x}') \bar{\psi}_e(t'', \vec{x}'') \gamma^\nu (1 - \gamma^5) C \bar{\psi}_{\nu_\alpha}^T(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\
 & = \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\alpha}(t', \vec{x}') \bar{\psi}_{\nu_\alpha}(t'', \vec{x}'') C^T (1 - \gamma^5)^T \gamma^{\nu T} \bar{\psi}_e^T(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle .
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Possiamo ora eseguire la contrazione tra ψ_{ν_α} e $\bar{\psi}_{\nu_\alpha}$ ottenendo il propagatore di Feynman per il neutrino di Majorana:

$$\begin{aligned}
 & \langle e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \nu_\alpha \rangle \langle e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\
 & = \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) i \hbar S_F(x' - x'') C^T (1 - \gamma^5)^T \gamma^{\nu T} \bar{\psi}_e^T(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\
 & = \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-\frac{i}{\hbar} q(x' - x'')}}{q^2 - m_\nu^2 c^2 + i\epsilon} (\not{q} + m_\nu c) C^T \\
 & \quad \times (1 - \gamma^5)^T \gamma^{\nu T} \bar{\psi}_e^T(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle ,
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

dove m_ν è la massa effettiva del neutrino di scambio nello stato intermedio, la quale, nella teoria delle oscillazioni di sapore dei neutrini, è definita come combinazione lineare degli autostati di massa con coefficienti della combinazione dati dagli elementi di matrice di mescolamento [Per03]:

$$m_\nu = \left| \sum_k U_{ek}^2 m_k \right|^2 . \tag{3.49}$$

Osserviamo che il propagatore del neutrino di Majorana può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned}
 i\hbar S_F(x' - x'') &= \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-\frac{i}{\hbar} q(x' - x'')}}{q^2 - m_\nu^2 c^2 + i\epsilon} (\not{q} + m_\nu c) = \\
 &= \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')} \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{i e^{-\frac{i}{\hbar} q_0 c(t' - t'')}}{q_0^2 - |\vec{q}|^2 - m_\nu^2 c^2 + i\epsilon} (q_0 \gamma^0 + q_i \gamma^i + m_\nu c) = \\
 &= \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')} \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{i e^{-\frac{i}{\hbar} q_0 c(t' - t'')}}{q_0^2 - \frac{E_{\nu\alpha}^2}{c^2} + i\epsilon} (q_0 \gamma^0 + q_i \gamma^i + m_\nu c).
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Calcoliamo ora l'integrale rispetto a q_0 . Osserviamo che la funzione integranda nel piano complesso ha due poli corrispondenti a $q_0 = +\frac{E_{\nu\alpha}}{c}$ ed a $q_0 = -\frac{E_{\nu\alpha}}{c}$ che il termine $i\epsilon$ allontana di poco dall'asse reale. Di conseguenza, possiamo sfruttare il teorema dei residui, ottenendo:

$$\begin{aligned}
 i\hbar S_F(x' - x'') &= \frac{1}{\hbar^3} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-\frac{i}{\hbar} q(x' - x'')}}{q^2 - m_\nu^2 c^2 + i\epsilon} (\not{q} + m_\nu c) = \\
 &= \frac{c}{\hbar^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu\alpha}(t' - t'')}}{2E_{\nu\alpha}} \left(\frac{E_{\nu\alpha}}{c} \gamma^0 - q_i \gamma^i + m_\nu c \right),
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

dove:

$$\frac{E_{\nu\alpha}}{c} = \sqrt{m_\nu^2 c^2 + |\vec{q}|^2}, \tag{3.52}$$

di conseguenza la (3.48) diventa:

$$\begin{aligned}
 & < e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \nu_\alpha > < e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 > = \\
 & = \frac{c}{\hbar^3} < e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')}}{2E_{\nu_\alpha}} (\not{q} + m_\nu c) \\
 & \quad \times C^T (1 - \gamma^5) \gamma^{\nu^T} \bar{\psi}_e^T(t'', \vec{x}'') | 0 > = \\
 & = \frac{c}{\hbar^3} < e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')}}{2E_{\nu_\alpha}} (\not{q} + m_\nu c) \\
 & \quad \times (1 - \gamma^5) C^T \gamma^{\nu^T} \bar{\psi}_e^T(t'', \vec{x}'') | 0 > = \\
 & = \frac{c}{\hbar^3} < e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')}}{2E_{\nu_\alpha}} (\not{q} + m_\nu c) \\
 & \quad \times (1 - \gamma^5) (-\gamma^\nu \psi_e^C(t'', \vec{x}'')) | 0 >, \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il seguente risultato:

$$C^T \gamma^{\nu^T} \bar{\psi}_e^T = C^T (-C^{-1} \gamma^\nu C) \bar{\psi}_e^T = -C^T C^{-1} \gamma^\nu \psi_e^C = -\gamma^\nu \psi_e^C \tag{3.54}$$

ricordando che $C^T C^{-1} = 1$.

Osserviamo ancora che:

$$(1 - \gamma^5)(\not{q} + m_\nu c)(1 - \gamma^5) = 2m_\nu c(1 - \gamma^5) \tag{3.55}$$

da cui otteniamo:

$$\begin{aligned}
 & < e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \nu_\alpha > < e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 > = \\
 & = -\frac{c^2}{\hbar^3} < e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu 2m_\nu \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{2E_{\nu_\alpha}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')} \\
 & \quad \times (1 - \gamma^5) \gamma^\nu \psi_e^C(t'', \vec{x}'') | 0 > = \tag{3.56} \\
 & = -\frac{c^2}{\hbar^3} < e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(t', \vec{x}') \gamma^\mu m_\nu \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')} \\
 & \quad \times \gamma^\nu (1 + \gamma^5) \psi_e^C(t'', \vec{x}'') | 0 > .
 \end{aligned}$$

A questo punto, scrivendo i campi liberi associati agli elettroni nello stato finale in rappresentazione di Schrödinger, nella (3.56) emergono gli esponenziali dipendenti dal tempo e dalle energie degli elettroni coinvolti nel processo:

$$\begin{aligned} & \langle e_2 | l^\mu(t', \vec{x}') | \nu_\alpha \rangle \langle e_1 \bar{\nu}_\alpha | l^\nu(t'', \vec{x}'') | 0 \rangle = \\ & = -\frac{c^2}{\hbar^3} m_\nu \langle e_2 e_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} E(e_2)t'} e^{-\frac{i}{\hbar} E(e_1)t''} \bar{\psi}_e(\vec{x}') \gamma^\mu \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')} \\ & \quad \times \gamma^\nu (1 + \gamma^5) \psi_e^C(\vec{x}'') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.57)$$

Inseriamo quindi i termini adronici e gli integrali che compaiono nella (3.42) e sfruttiamo i risultati ottenuti nelle (3.25) e (3.26). In questo modo, la (3.42) diventa:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\ & = i \frac{m_\nu c^2}{2\hbar^5} G_\beta^2 \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-\frac{i}{\hbar} E(e_2)t'} e^{-\frac{i}{\hbar} E(e_1)t''} e^{-\frac{i}{\hbar} (E(N_f) - E(N_\alpha))t'} \\ & \quad \times e^{-\frac{i}{\hbar} (E(N_\alpha) - E(N_i))t''} \int d^3 x' \int d^3 x'' \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{\nu_\alpha}(t' - t'')} \\ & \quad \times \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(\vec{x}') \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) \psi_e^C(\vec{x}'') | 0 \rangle \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Integrando nel tempo, come nel caso del $2\nu\beta\beta$, otteniamo una espressione analoga alla (3.34), con la differenza che in questo caso abbiamo:

$$a = \frac{1}{\hbar} (E(e_2) + E_{\nu_\alpha} + E(N_f) - E(N_\alpha)), \quad (3.59)$$

$$b = \frac{1}{\hbar} (E(e_1) - E_{\nu_\alpha} + E(N_\alpha) - E(N_i)), \quad (3.60)$$

da cui risulta:

$$a + b = \frac{1}{\hbar} (E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)). \quad (3.61)$$

Quindi, gli integrali nel tempo della (3.58) diventano:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-iat'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-ibt''} = \\ &= \frac{i2\pi\delta(a+b)}{b} = \frac{i2\pi\hbar\delta(\frac{1}{\hbar}(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)))}{E_{\nu_\alpha} + \Delta E} = \\ &= \frac{i2\pi\hbar^2\delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i))}{E_{\nu_\alpha} + \Delta E}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

dove:

$$\Delta E = E(e_1) + E(N_\alpha) - E(N_i), \quad (3.63)$$

è la differenza di energia tra lo stato intermedio e quello iniziale del processo.

La (3.58) diventa infine:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\ &= -\frac{\pi m_\nu c^2}{2\hbar^3} G_\beta^2 \delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)) \sum_\alpha \int d^3x' \int d^3x'' \\ & \times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \Delta E)} < e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(\vec{x}') \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) \psi_e^C(\vec{x}'') | 0 > \\ & \times < N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha > < N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i >. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Il termine della (3.64) riguardante i soli elettroni emessi nella transizione può essere esplicitato come segue:

$$< e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(\vec{x}') \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) \psi_e^C(\vec{x}'') | 0 > = e^{+\frac{i}{\hbar}\vec{p}_2 \vec{x}'} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}_1 \vec{x}''} \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) u(\vec{p}_1), \quad (3.65)$$

dove \vec{p}_1 e \vec{p}_2 sono gli impulsi degli elettroni prodotti rispettivamente nel primo e nel secondo decadimento β^- virtuale, calcolati quando gli elettroni si trovano a distanza infinita dal nucleo, in modo da poter considerare i leptoni come particelle libere.

A questo punto è necessario tener conto dell'interazione coulombiana attrattiva tra gli elettroni prodotti dai due decadimenti β^- virtuali ed i nuclei residui in

ciascuna delle due transizioni, entrambi carichi positivamente. I leptoni uscenti risentono infatti dell'azione di un campo elettromagnetico generato da una carica totale $Q = +Z|e|$, distribuita uniformemente su una sfera di raggio $R = r_0 A^{1/3}$ con Z numero atomico del nucleo residuo, A numero di massa e $r_0 = 1.2$ fm.

In generale, la funzione d'onda $\psi_{\vec{p},s}(\vec{r})$ associata ad un elettrone con momento asintotico \vec{p} e spin s , emesso per decadimento β^- da un nucleo, è soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un campo elettromagnetico esterno e può essere sviluppata in termini di onde sferiche come segue [Suh98]:

$$\psi_{\vec{p},s}(\vec{r}) = \psi_{\vec{p},s}^{(s1/2)}(\vec{r}) + \psi_{\vec{p},s}^{(p1/2)}(\vec{r}) + \psi_{\vec{p},s}^{(p3/2)}(\vec{r}) + \dots \quad (3.66)$$

dove con $(s1/2)$, $(p1/2)$, etc... intendiamo gli orbitali nucleari ai quali sono associate le singole funzioni d'onda dello sviluppo. In questo lavoro consideriamo solo il primo termine dello sviluppo, cioè supponiamo che gli elettroni siano emessi in onda s , in quanto questa è la situazione più probabile. In accordo con questa ipotesi, la correzione alla (3.65) può essere svolta semplicemente sostituendo ad ogni esponenziale associato al singolo leptone uscente, indipendentemente dal segno all'esponente, il fattore $\sqrt{F_0(Z; \epsilon)}$, dove $F_0(Z; \epsilon)$ è la *funzione di Fermi*, dipendente dal numero atomico del nucleo residuo del decadimento e dall'energia dell'elettrone prodotto dal processo. Questa funzione è definita come il rapporto tra il modulo quadro della funzione d'onda dell'elettrone uscente, soggetto all'interazione coulombiana con il nucleo residuo, ed il modulo quadro della funzione d'onda associata ad un elettrone libero.

La funzione di Fermi può essere scritta in *approssimazione di Primakoff-Rosen* come segue [Suh07]:

$$F_0(Z; \epsilon) \approx \frac{\epsilon}{|\vec{p}|c} F_0^{(PR)}(Z) \quad \text{con} \quad F_0^{(PR)}(Z) = \frac{2\pi\alpha Z}{1 - e^{-2\pi\alpha Z}}, \quad (3.67)$$

dove α è la *costante di struttura fine*, definita come (nel sistema c.g.s.):

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (3.68)$$

La (3.65) per i due elettroni emessi in onda s diventa così:

$$\begin{aligned} & \langle e_2 e_1 | \bar{\psi}_e(\vec{x}') \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) \psi_e^C(\vec{x}'') | 0 \rangle = \\ & = \sqrt{F_0(Z_f; E(e_2))} \sqrt{F_0(Z_\alpha; E(e_1))} \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) u(\vec{p}_1), \end{aligned} \quad (3.69)$$

da cui otteniamo un'espressione più precisa dell'elemento di matrice S_{fi} (3.64) come segue:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\ & = -\frac{\pi m_\nu c^2}{2\hbar^3} G_\beta^2 \delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)) \sqrt{F_0(Z_f; E(e_2))} \\ & \times \sqrt{F_0(Z_\alpha; E(e_1))} \langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle \sum_\alpha \int d^3 x' \int d^3 x'' \\ & \times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \Delta E)} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle, \end{aligned} \quad (3.70)$$

dove, per semplicità di scrittura, abbiamo definito l'operatore $K^{\mu\nu}$ come segue:

$$\langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle = \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) u(\vec{p}_1), \quad (3.71)$$

indipendente dalle coordinate spazio-temporali degli elettroni coinvolti nel processo.

Capitolo 4

Correnti nucleari non relativistiche

Come già detto in precedenza, in questo lavoro descriviamo il $0\nu\beta\beta$ come una transizione nucleare risultante dalla combinazione di due decadimenti β^- virtuali successivi. Nello sviluppo dell'elemento di matrice S_{fi} associato al processo $0\nu\beta\beta$ abbiamo quindi separato i termini leptonici dai due elementi di matrice adronici, questi ultimi riguardanti esclusivamente le variazioni delle configurazioni nucleari. L'analisi dei termini adronici risulta però più complicata rispetto al calcolo degli elementi leptonici, questo a causa del fatto che i nuclei sono caratterizzati da una complessa struttura interna, la quale comporta la necessità di utilizzare gli strumenti forniti da una teoria a multi-corpi.

In questo capitolo svilupperemo un modello che ci permetta di ottenere in maniera più semplice le espressioni degli elementi di matrice adronici. Ipotizzeremo innanzitutto che gli operatori di corrente carica debole agiscano singolarmente sui nucleoni candidati alle transizioni virtuali. Questa ipotesi ci permetterà di passare da operatori di corrente nucleare ad operatori di corrente nucleonica. Scriveremo poi questi ultimi sfruttando un modello teorico non relativistico, approssimazione valida in quanto le energie cinetiche dei nucleoni sono in media pari a circa 50 MeV. Infine, scriveremo lo sviluppo in multipoli degli operatori di

corrente carica debole e selezioneremo solo quei termini dello sviluppo associati a variazioni nulle del momento angolare nucleare totale tra lo stato iniziale e lo stato finale del $0\nu\beta\beta$.

4.1 Corrente debole adronica per il decadimento β^-

Alla fine del capitolo precedente, siamo giunti ad una espressione dell'elemento di matrice di scattering S_{fi} associato al $0\nu\beta\beta$ all'interno della quale compaiono i due termini adronici seguenti:

$$\langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle \quad \text{per il primo decadimento } \beta^- \text{ virtuale,} \quad (4.1)$$

$$\langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \quad \text{per il secondo decadimento } \beta^- \text{ virtuale,} \quad (4.2)$$

i quali, nella nostra trattazione, descrivono transizioni tra stati nucleari con momento angolare e parità ben definiti. Dato che, al momento, non facciamo alcuna ipotesi sulla struttura dei nuclei iniziale, intermedio e finale, i due elementi di matrice sono formalmente identici. Trattiamo allora solo uno di essi, ad esempio il (4.2) per la seconda transizione virtuale. Il ragionamento ed i risultati potranno essere estesi successivamente anche al caso dell'elemento di matrice (4.1).

Il decadimento β^- virtuale descritto dalla (4.2) coinvolge un singolo neutrone del nucleo iniziale N_α (nucleo intermedio del $0\nu\beta\beta$). Di conseguenza, l'operatore densità di corrente nucleare $h_\mu^\dagger(\vec{x}')$ è un operatore ad un corpo che quindi può essere riscritto come somma di operatori dipendenti dalle coordinate dei singoli nucleoni candidati alla transizione. In sostanza, l'operatore di corrente nucleare è somma di tutti i possibili contributi di corrente nucleonica dovuti a ciascuno degli N neutroni costituenti il nucleo:

$$h_\mu^\dagger(\vec{x}') = \sum_{i=1}^N \tilde{h}_\mu^\dagger(\vec{x}_i) \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i), \quad (4.3)$$

dove \vec{x}_i indica la posizione dell' i -esimo neutrone e $\tilde{h}_\mu^\dagger(\vec{x}_i)$ è la *densità di corrente nucleonica* ad esso associata. Per definire le espressioni delle correnti deboli as-

sociate al singolo nucleone, consideriamo il nucleone nel vuoto. Sarà poi compito del modello nucleare adottato inserire queste espressioni in un contesto nel quale i nucleoni interagiscano tra loro.

Nel calcolo dell'elemento di matrice e, in particolare, nella descrizione dell'operatore densità di corrente nucleonica, bisogna però tener conto della struttura dei nucleoni in termini di quark e gluoni costituenti e dell'interazione forte tra questi. Tutto ciò spiega, quindi, la maggiore difficoltà nello studio dei termini di interazione tra adroni rispetto al caso leptonico. Il problema può essere comunque ben risolto sfruttando un'analogia con l'interazione elettromagnetica tra adroni. In questo modo, gli elementi di matrice nucleare per l'interazione debole a corrente carica sono esprimibili in termini di funzioni scalari, dette *fattori di forma*, che tengono conto proprio della struttura interna dei nucleoni e delle interazioni forti tra quark costituenti.

Per sfruttare questa analogia, consideriamo innanzitutto l'operatore di corrente carica debole in funzione del quadrimpulso trasferito $p = k_f - k_\alpha$, dove k_α e k_f sono rispettivamente i quadrimpulsi del neutrone iniziale (intermedio nel $0\nu\beta\beta$) e del protone finale, entrambi nel vuoto.

Sappiamo che, in generale, l'operatore può essere scritto come somma della sua componente vettoriale e di quella assiale nel modo seguente:

$$h_\mu^\dagger(p) = h_\mu^{\dagger V}(p) + h_\mu^{\dagger A}(p). \quad (4.4)$$

Vogliamo scrivere la componente vettoriale come combinazione lineare di operatori vettoriali con coefficienti contenenti determinati fattori di forma. In particolare, in analogia con la corrente elettromagnetica [Pes95], di natura esclusivamente vettoriale, questa componente deve essere conservata, cioè deve valere l'equazione:

$$\partial^\mu h_\mu^{\dagger V}(p) = \frac{i}{\hbar} p^\mu h_\mu^{\dagger V}(p) = 0. \quad (4.5)$$

Possiamo ottenere una formulazione generale della componente $h_\mu^{\dagger V}$ che soddisfi la condizione (4.5) scrivendola in termini dei seguenti operatori vettoriali invarianti

di Lorentz:

$$\gamma_\mu ; \quad p_\mu ; \quad p^\nu \sigma_{\mu\nu} ; \quad (k_f + k_\alpha)_\mu .$$

Si verifica che solo tre dei precedenti operatori sono linearmente indipendenti. Dunque, in analogia con i risultati ottenuti per la corrente eletromagnetica, l'espressione generale per la componente vettoriale della corrente carica debole è:

$$h_\mu^{\dagger V}(p) = F_V(p^2)\gamma_\mu + \frac{i}{2mc}F_M(p^2)p^\nu \sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{2mc}F_S(p^2)p_\mu, \quad (4.6)$$

dove $\sigma_{\mu\nu}$ è il tensore antisimmetrico definito dalla (A.8), $m \equiv m_n$ è la massa del neutrone, mentre gli F_a sono i fattori di forma. Questi ultimi sono degli scalari di Lorentz, perciò possono dipendere solo dagli scalari k_α^2 , k_f^2 e p^2 . Dato che $k_\alpha^2 = m_n^2 c^2$ e $k_f^2 = m_p^2 c^2$, queste quantità sono costanti e la variazione dei fattori di forma dipende esclusivamente dal quadrato del quadrimpulso trasferito p^2 .

Imponendo ora che la (4.6) soddisfi la condizione (4.5), otteniamo:

$$\begin{aligned} & < N_f | \partial^\mu h_\mu^{\dagger V}(p) | N_\alpha > = 0 \Rightarrow \\ & \bar{u}(\vec{k}_f) [F_V(p^2)p^\mu \gamma_\mu + \frac{i}{2mc}F_M(p^2)p^\mu \sigma_{\mu\nu} p^\nu + \frac{1}{2mc}F_S(p^2)p^\mu p_\mu] u(\vec{k}_\alpha) = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove $u(\vec{k}_\alpha)$ ed $u(\vec{k}_f)$ sono gli spinori associati ai nucleoni iniziale e finale rispettivamente. Analizzando singolarmente i tre addendi al primo membro della (4.7), osserviamo che il primo è nullo perché gli spinori soddisfano l'equazione di Dirac, infatti:

$$\bar{u}(\vec{k}_f) p^\mu \gamma_\mu u(\vec{k}_\alpha) = \bar{u}(\vec{k}_f) (\gamma_\mu k_f^\mu - \gamma_\mu k_\alpha^\mu) u(\vec{k}_\alpha) = \bar{u}(\vec{k}_f) (mc - mc) u(\vec{k}_\alpha) = 0. \quad (4.8)$$

Il termine contenente il fattore di forma F_M è nullo a causa dell'antisimmetria del tensore $\sigma_{\mu\nu}$ definito dalla (A.8):

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{k}_f) p^\mu \sigma_{\mu\nu} p^\nu u(\vec{k}_\alpha) &= \bar{u}(\vec{k}_f) i (p^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu p^\nu - p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu) u(\vec{k}_\alpha) = \\ &= i \bar{u}(\vec{k}_f) (p^2 - p^2) u(\vec{k}_\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Infine, dato che in generale $p^2 \neq 0$, l'ultimo termine della (4.6) è nullo solo se $F_S = 0$.

Dunque, la (4.6) diventa semplicemente:

$$h_\mu^{\dagger V}(p) = F_V(p^2)\gamma_\mu + \frac{i}{2mc}F_M(p^2)p^\nu\sigma_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Nel caso di corrente elettromagnetica, il fattore di forma F_V che compare nella (4.10) può essere interpretato come una funzione scalare la cui trasformata di Fourier descrive la distribuzione spaziale della carica del protone. Il fattore F_M descrive invece la distribuzione spaziale del momento magnetico anomalo del protone.

Trattandosi di corrente carica associata ad un decadimento β^- , nella (4.10) dobbiamo inserire l'operatore di isospin τ^+ che innalza la carica, descrivendo così la transizione da uno stato di neutrone ad uno stato di protone. Questo operatore è definito come segue:

$$\tau^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau^1 + i\tau^2), \quad (4.11)$$

con $\tau^{(1,2)}$ componenti dell'operatore di isospin $\tau \equiv (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$, dove:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Dunque, l'espressione covariante della componente vettoriale dell'operatore di corrente carica debole nucleonica è la seguente:

$$h_\mu^{\dagger V}(p) = \left(F_V(p^2)\gamma_\mu + \frac{i}{2mc}F_M(p^2)p^\nu\sigma_{\mu\nu} \right) \tau^+. \quad (4.13)$$

Ragionando in maniera analoga, la componente assiale di $h_\mu^{\dagger}(p)$ può essere scritta invece come combinazione lineare degli operatori vettoriali invarianti di Lorentz precedenti, moltiplicati ciascuno per la matrice γ_5 che conferisce loro natura assiale. Quindi, possiamo scrivere l'espressione covariante più generale di $h_\mu^{\dagger A}(p)$ come segue:

$$h_\mu^{\dagger A}(p) = \left(F_A(p^2)\gamma_\mu + \frac{i}{2mc}F_T(p^2)p^\nu\sigma_{\mu\nu} + F_P(p^2)p_\mu \right) \gamma_5 \tau^+. \quad (4.14)$$

In questo caso, si può dimostrare che il comportamento della corrente assiale sotto operazioni di simmetria, come l'invarianza per coniugazione di carica e per inversione temporale, impone che F_A e F_P siano reali, mentre $F_T = 0$. Dunque, la (4.14) diventa:

$$h_\mu^{\dagger A}(p) = (F_A(p^2)\gamma_\mu + F_P(p^2)p_\mu) \gamma_5 \tau^+. \quad (4.15)$$

Le espressioni dei fattori di forma F_V vettoriale, F_M magnetico, F_A assiale e F_P pseudoscalare sono determinate dal confronto con i dati sperimentali.

4.2 Riduzione non relativistica della corrente nucleonica

Nei processi descritti dalle (4.1) e (4.2), i nucleoni all'interno del nucleo acquisiscono energie cinetiche dell'ordine di poche decine di MeV, le quali indicano che siamo in presenza di particelle in regime non relativistico. I nucleoni sono quindi descritti da funzioni d'onda di singola particella definite come segue:

$$\Psi(x') = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-\frac{i}{\hbar} kx'} u(\vec{k}, s), \quad (4.16)$$

dove V è un volume di normalizzazione, mentre k e s sono il quadrupolo e lo spin della particella. Ciò comporta quindi la convenienza di considerare una riduzione non relativistica degli operatori di corrente carica debole che intervengono negli elementi di matrice adronici in esame agendo proprio sulle suddette funzioni d'onda.

Per quanto detto nel paragrafo precedente, il termine adronico dell'elemento di matrice nello spazio degli impulsi associato al β^- inverso del singolo neutrone, è

dato dalla somma dei seguenti termini vettoriale ed assiale:

$$\begin{aligned}
 & \langle k_f, s_f | \tilde{h}_\mu^\dagger V(p) | k_\alpha, s_\alpha \rangle = \\
 & = \frac{1}{V} e^{\frac{i}{\hbar} k_f x'} e^{-\frac{i}{\hbar} k_\alpha x'} \bar{u}(\vec{k}_f, s_f) \left(F_V(p^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2mc} F_M(p^2) p^\nu \sigma_{\mu\nu} \right) \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha) = \\
 & = \frac{1}{V} \bar{u}(\vec{k}_f, s_f) \left(F_V(p^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2mc} F_M(p^2) p^\nu \sigma_{\mu\nu} \right) \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha),
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 & \langle k_f, s_f | \tilde{h}_\mu^\dagger A(p) | k_\alpha, s_\alpha \rangle = \\
 & = \frac{1}{V} e^{\frac{i}{\hbar} k_f x'} e^{-\frac{i}{\hbar} k_\alpha x'} \bar{u}(\vec{k}_f, s_f) (F_A(p^2) \gamma_\mu + F_P(p^2) p_\mu) \gamma_5 \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha) = \\
 & = \frac{1}{V} \bar{u}(\vec{k}_f, s_f) (F_A(p^2) \gamma_\mu + F_P(p^2) p_\mu) \gamma_5 \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha),
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

dove $u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha)$ e $u(\vec{k}_f, s_f)$ sono rispettivamente gli spinori di Dirac definiti dalla (B.24) associati al neutrone nello stato intermedio ed al protone nello stato finale del $0\nu\beta\beta$ e dipendenti dai loro impulsi e dagli spin. Osserviamo che nelle (4.17) e (4.18), i fattori esponenziali

$$e^{\frac{i}{\hbar} k_f x'} e^{-\frac{i}{\hbar} k_\alpha x'} = e^{\frac{i}{\hbar} [\frac{1}{c}(E_p - E_n)t' - (\vec{k}_f - \vec{k}_\alpha) \cdot \vec{x}']} \simeq e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'} \tag{4.19}$$

sono trascurabili per bassi impulsi trasferiti, come nel nostro caso. Il risultato precedente discende dall'aver imposto il limite non relativistico in quanto, considerando $m_p \simeq m_n = m$, l'energia dei nucleoni coinvolti nel processo è:

$$E_p = E_n \approx mc^2 + \frac{|\vec{k}|^2}{2m} \simeq mc^2, \tag{4.20}$$

poiché $|\vec{k}|^2/2m \ll mc^2$. Dunque, lo spinore di Dirac associato al generico nucleone nel limite non relativistico è :

$$u(\vec{k}, s) = \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{2mc^2} \chi_s \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

dove χ_s è un bispinore di Pauli. La (4.17) e la (4.18) diventano allora:

$$\begin{aligned} & \langle k_f, s_f | \tilde{h}_\mu^{\dagger V}(p) | k_\alpha, s_\alpha \rangle = \\ & = \frac{1}{V} \left(\chi_{s_f}^* \quad \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_f)^*}{2mc^2} \chi_{s_f}^* \right) \gamma_0 \left(F_V(p^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2mc} F_M(p^2) p^\nu \sigma_{\mu\nu} \right) \tau^+ \begin{pmatrix} \chi_{s_\alpha} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_\alpha}{2mc^2} \chi_{s_\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} & \langle k_f, s_f | \tilde{h}_\mu^{\dagger A}(p) | k_\alpha, s_\alpha \rangle = \\ & = \frac{1}{V} \left(\chi_{s_f}^* \quad \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_f)^*}{2mc^2} \chi_{s_f}^* \right) \gamma_0 (F_A(p^2) \gamma_\mu + F_P(p^2) p_\mu) \gamma_5 \tau^+ \begin{pmatrix} \chi_{s_\alpha} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_\alpha}{2mc^2} \chi_{s_\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

D'ora in avanti trascureremo, per semplicità di scrittura, il fattore volumetrico di normalizzazione considerandolo unitario.

Gli operatori di corrente carica debole possono essere ottenuti in approssimazione non relativistica usando il metodo di Foldy-Wouthuysen (si veda Appendice E), il quale consiste nello sviluppare gli elementi di matrice come somma di termini contenenti potenze di $|\vec{k}|/m$. In questo lavoro consideriamo esclusivamente l'ordine zero dello sviluppo, giungendo quindi ai seguenti risultati per le componenti vettoriale ed assiale degli operatori di corrente carica debole nucleonica:

$$\tilde{h}_\mu^{\dagger V}(p) = \left(\tilde{h}_0^{\dagger V}(p), \vec{\tilde{h}}^{\dagger V}(p) \right) = \left(F_V(p^2) \tau^+, \vec{0} \right);$$

$$\tilde{h}_\mu^{\dagger A}(p) = \left(\tilde{h}_0^{\dagger A}(p), \vec{\tilde{h}}^{\dagger A}(p) \right) = (0, F_A(p^2) \vec{\sigma} \tau^+).$$

Osserviamo che, nella nostra approssimazione, gli unici contributi al processo sono dati dalla componente temporale dell'operatore di corrente vettoriale e dalla componente spaziale dell'operatore assiale. Quindi, scriviamo:

$$\tilde{h}_\mu^{\dagger}(p) = \left(\tilde{h}_0^{\dagger V}(p), \vec{\tilde{h}}^{\dagger A}(p) \right) = (F_V(p^2) \tau^+, F_A(p^2) \vec{\sigma} \tau^+). \quad (4.24)$$

L'operatore di corrente carica debole nucleonica nello spazio delle coordinate può essere riscritto come segue:

$$\tilde{h}_\mu^\dagger(\vec{x}_i) = \left(\tilde{h}_0^{\dagger V}(\vec{x}_i), \tilde{h}^{\dagger A}(\vec{x}_i) \right) = (F_V(p^2)\tau^+, F_A(p^2)\vec{\sigma}\tau^+). \quad (4.25)$$

Osserviamo subito che l'azione della componente vettoriale di corrente carica debole produce una transizione nucleare di Fermi, mentre per la componente assiale si ha una transizione di Gamow-Teller:

$$\begin{aligned} M_{f\alpha}^0 &= M_F = \int d^3x' \langle N_f | h_0^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle = \\ &= \langle N_f | \int d^3x' \tilde{h}_0^\dagger(\vec{x}_i) \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) | N_\alpha \rangle = \\ &= \langle N_f | \sum_{i=1}^N F_V \tau^+(i) | N_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} \vec{M}_{f\alpha} &= M_{GT} = \langle N_f | \vec{h}^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle = \\ &= \langle N_f | \int d^3x' \tilde{h}^\dagger(\vec{x}_i) \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) | N_\alpha \rangle = \\ &= \langle N_f | \sum_{i=1}^N F_A \vec{\sigma}(i) \tau^+(i) | N_\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (4.27)$$

dove abbiamo omesso per semplicità di scrittura la dipendenza dei fattori di forma dal quadrato del quadrimpulso trasferito ed abbiamo sfruttato la relazione (4.3).

4.3 Sviluppo in multipoli della corrente nucleonica

Vogliamo ora scrivere lo sviluppo in multipoli degli operatori di corrente carica debole nucleonica. Partiamo allora dall'espressione dell'operatore densità di corrente nucleare debole come antitrasformata di Fourier dello stesso operatore nello spazio degli impulsi:

$$h_\mu^\dagger(\vec{x}') = \int d^3x' e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}'} h_\mu^\dagger(\vec{p}) \quad (4.28)$$

dove ricordiamo che \vec{p} è l'impulso trasferito nel processo.

Come accennato in precedenza, nel calcolo degli elementi di matrice nucleare supponiamo che gli stati nucleari siano caratterizzati da momento angolare e parità ben definiti. Ora, sfruttando la (4.28) riscriviamo il termine adronico come segue:

$$\langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{p}) | N_\alpha \rangle = \langle N_f | \int d^3x' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'} h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle, \quad (4.29)$$

da cui, sostituendo l'operatore di corrente carica debole nucleare con la sua espressione (4.3) in termini delle correnti nucleoniche, otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{p}) | N_\alpha \rangle &= \langle N_f | \sum_{i=1}^N \int d^3x' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'} \tilde{h}_\mu^\dagger(\vec{x}_i) \delta(\vec{x}' - \vec{x}_i) | N_\alpha \rangle = \\ &= \langle N_f | \sum_{i=1}^N e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}_i} \tilde{h}_\mu^\dagger(\vec{x}_i) | N_\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (4.30)$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà della delta di Dirac, la quale ci permette di scrivere il termine adronico in funzione delle sole coordinate nucleoniche.

A questo punto, possiamo considerare lo sviluppo in multipoli dell'onda piana che compare nella (4.30) in termini delle armoniche sferiche (si veda Appendice F). Prima di tutto consideriamo la componente temporale dell'elemento di matrice (4.25), poi calcoleremo i termini dovuti alle componenti spaziali dell'operatore di corrente debole usando il sistema di riferimento dei versori sferici ($\hat{e}_3, \hat{e}_+, \hat{e}_-$) definito come segue:

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_z = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad (4.31)$$

$$\hat{e}_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y), \quad (4.32)$$

dove abbiamo scelto l'asse z nella direzione dell'impulso trasferito.

Dunque, per $\mu = 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
 h_0^\dagger(\vec{p}) &= \sqrt{4\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{J=0}^{\infty} i^J j_J(\kappa x_i) \sqrt{2J+1} Y_{J0}(\Omega_i) \tilde{h}_0^\dagger(\vec{x}_i) = \\
 &= \sqrt{4\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{J=0}^{\infty} i^J j_J(\kappa x_i) \sqrt{2J+1} Y_{J0}(\Omega_i) \tilde{h}_0^{\dagger V}(\vec{x}_i) = \\
 &= \sqrt{4\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{J=0}^{\infty} i^J j_J(\kappa x_i) \sqrt{2J+1} Y_{J0}(\Omega_i) F_V \tau^+ = \\
 &= \sqrt{4\pi} \sum_{J=0}^{\infty} i^J \sqrt{2J+1} C_J^V(\vec{p}),
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

dove abbiamo definito:

$$C_J^V(\vec{p}) = \sum_{i=1}^N F_V \tau^+ M_J(\vec{x}_i), \tag{4.34}$$

operatore multipolare *Coulombiano* e

$$M_J(\vec{x}_i) = j_J(\kappa x_i) Y_{J0}(\Omega_i). \tag{4.35}$$

Per quanto riguarda le componenti spaziali dell'operatore di corrente carica debole, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 h_\lambda^\dagger(\vec{p}) &= \sum_{i=1}^N e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}_i} \hat{e}_\lambda \tilde{h}_\lambda^\dagger(\vec{x}_i) = \\
 &= \sum_{i=1}^N e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}_i} \hat{e}_\lambda \tilde{h}_\lambda^{\dagger A}(\vec{x}_i) = \\
 &= \begin{cases} \sqrt{4\pi} \sum_{J=0}^{+\infty} i^J \sqrt{2J+1} \mathcal{L}_J^A(\vec{p}) & \text{se } \lambda = 3 \\ \sqrt{2\pi} \sum_{J=1}^{+\infty} i^J \sqrt{2J+1} [\xi_J^A(\vec{p}) + \lambda \mathcal{M}_J^A(\vec{p})] & \text{se } \lambda = \pm 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

dove $\mathcal{L}_J^A(\vec{p})$, $\xi_J^A(\vec{p})$ e $\mathcal{M}_J^A(\vec{p})$ sono gli operatori multipolari assiali *Longitudinale*, *Trasversale Elettrico* e *Trasversale Magnetico* rispettivamente, definiti come

segue:

$$\mathcal{L}_J^A(\vec{p}) = i \sum_{i=1}^N F_A \left(-\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{M}_{J+1,J}(\vec{x}_i) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{M}_{J-1,J}(\vec{x}_i) \right) \cdot \vec{\sigma} \tau^+, \quad (4.37)$$

$$\xi_J^A(\vec{p}) = i \sum_{i=1}^N F_A \left(-\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} \mathbf{M}_{J-1,J}(\vec{x}_i) + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} \mathbf{M}_{J+1,J}(\vec{x}_i) \right) \cdot \vec{\sigma} \tau^+, \quad (4.38)$$

$$\mathcal{M}_J^A(\vec{p}) = \sum_{i=1}^N F_A \mathbf{M}_{J,J}(\vec{x}_i) \cdot \vec{\sigma} \tau^+, \quad (4.39)$$

con:

$$\mathbf{M}_{J',J}(\vec{x}_i) = j_J(\kappa x_i) \vec{\mathcal{Y}}_{JJ'}(\Omega_i). \quad (4.40)$$

In questo lavoro studiamo processi di decadimento doppio beta caratterizzati da una variazione nulla del momento angolare nucleare totale. Di conseguenza, nelle espressioni precedenti, consideriamo i soli termini che danno contributo alla corrente quando $J = 0$. Con questa ipotesi, possiamo trascurare completamente il contributo degli operatori trasversale elettrico e magnetico. Dunque, la componente spaziale della corrente carica debole che descrive i processi in esame è data da:

$$\vec{h}^\dagger(\vec{p}) = -i\sqrt{4\pi} \sum_{i=1}^N F_A \mathbf{M}_{1,0}(\vec{x}_i) \cdot \vec{\sigma} \tau^+, \quad (4.41)$$

mentre, ricordando la (4.33), la componente temporale della corrente per $J = 0$ è data da:

$$h_0^\dagger(\vec{p}) = \sqrt{4\pi} \sum_{i=1}^N F_V \tau^+ M_0(\vec{x}_i). \quad (4.42)$$

Capitolo **5**

Aampiezza di probabilità per il $0\nu\beta\beta$

In questo capitolo ci proponiamo di calcolare l'ampiezza di probabilità per il $0\nu\beta\beta$ data dal modulo quadro dell'elemento di matrice di scattering S_{fi} associato al processo, utilizzando i risultati finora ottenuti e, in particolare, la riduzione non relativistica degli operatori che compaiono negli elementi di matrice adronici.

Consideriamo inoltre decadimenti in cui la variazione del momento angolare nucleare totale tra stato iniziale e stato finale sia nulla e la parità sia conservata. Di conseguenza, i due processi virtuali che caratterizzano un $0\nu\beta\beta$ possono essere o due trasizioni di Fermi, ciascuna delle quali eccita stati a *parità naturale* $P = (-1)^J$ con J variazione del momento angolare nucleare totale, o due transizioni di Gamow-Teller che eccitano stati a *parità non naturale* $P = (-1)^{J+1}$. Ciò semplifica la trattazione del problema perché, come abbiamo visto in precedenza, la componente temporale degli operatori adronici descrive una transizione di Fermi, mentre le componenti spaziali descrivono transizioni di tipo Gamow-Teller. Di conseguenza, nel calcolo di $|S_{fi}|^2$ potremo considerare nulli tutti i termini di interferenza tra componenti che eccitano stati con parità differente.

5.1 Calcolo dell'ampiezza di probabilità

Per il calcolo dell'ampiezza di probabilità associata al $0\nu\beta\beta$ ripartiamo dall'espressione (3.70) dell'elemento di matrice S_{fi} ad esso associato:

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\
 & = -\frac{\pi m_\nu c^2}{2\hbar^3} G_\beta^2 \delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)) \sqrt{F_0(Z_f; E(e_2))} \\
 & \times \sqrt{F_0(Z_\alpha; E(e_1))} \langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle \sum_\alpha \int d^3 x' \int d^3 x'' \\
 & \times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q}(\vec{x}' - \vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \Delta E(\alpha))} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle . \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle = \bar{u}(\vec{p}_2) \gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \gamma^5) u(\vec{p}_1), \tag{5.2}$$

e che, dalla (3.63), abbiamo:

$$\Delta E(\alpha) = E(e_1) + E(N_\alpha) - E(N_i), \tag{5.3}$$

dove abbiamo messo in evidenza la dipendenza di ΔE dallo stato nucleare virtuale intermedio. Questa dipendenza può essere eliminata utilizzando l'*approssimazione di chiusura*, largamente sfruttata nell'analisi del $0\nu\beta\beta$, per la quale si pone:

$$\Delta E(\alpha) = \langle \Delta E \rangle, \tag{5.4}$$

con $\langle \Delta E \rangle$ valor medio scelto opportunamente a priori.

Prima di procedere con il calcolo del modulo quadro della (5.1), riscriviamo gli

integrali dei termini adronici in una forma più conveniente come segue:

$$\begin{aligned} & \int d^3x' \int d^3x'' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}(\vec{x}'-\vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle = \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \langle N_f | \int d^3x' h_\mu^\dagger(\vec{x}') e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{x}'} | N_\alpha \rangle \\ & \quad \times \langle N_\alpha | \int d^3x'' h_\nu^\dagger(\vec{x}'') e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{x}''} | N_i \rangle, \end{aligned} \quad (5.5)$$

da cui, sfruttando la (4.29), otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int d^3x' \int d^3x'' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{q}(\vec{x}'-\vec{x}'')}}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{x}') | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(\vec{x}'') | N_i \rangle = \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | N_i \rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Possiamo allora riscrivere l'elemento di matrice di scattering nella forma:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} = \\ &= -\frac{\pi m_\nu c^2}{2\hbar^3} G_\beta^2 \delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)) \sqrt{F_0(Z_f; E(e_2))} \\ & \quad \times \sqrt{F_0(Z_\alpha; E(e_1))} \langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle \sum_\alpha \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \\ & \quad \times \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | N_i \rangle. \end{aligned} \quad (5.7)$$

L'ampiezza di probabilità associata al $0\nu\beta\beta$ è quindi data da:

$$\begin{aligned}
 & \left| (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} \right|^2 = \\
 & = \frac{\pi^2 m_\nu^2 c^4}{4\hbar^6} G_\beta^4 \delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)) F_0(Z_f; E(e_2)) F_0(Z_\alpha; E(e_1)) \\
 & \times \langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle (\langle e_2 e_1 | K^{\sigma\rho} | 0 \rangle)^* \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \\
 & \times \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E'_{\nu_{\alpha'}}(E'_{\nu_{\alpha'}} + \langle \Delta E' \rangle)} \langle N_f | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | N_\alpha \rangle \langle N_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | N_i \rangle \\
 & \times \left(\langle N_f | h_\sigma^\dagger(\vec{q}') | N_{\alpha'} \rangle \langle N_{\alpha'} | h_\rho^\dagger(-\vec{q}') | N_i \rangle \right)^*. \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

A questo punto, impostiamo il calcolo dell'ampiezza di probabilità (5.8) partendo dal seguente prodotto tra i termini leptonici e gli elementi di matrice adronici:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{M_i, M_\alpha, M_{\alpha'}, M_f} K^{\mu\nu} (K^{\sigma\rho})^* \langle J_f M_f | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | J_\alpha M_\alpha \rangle \langle J_\alpha M_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | J_i M_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f M_f | h_\sigma^\dagger(\vec{q}') | J_{\alpha'} M_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} M_{\alpha'} | h_\rho^\dagger(-\vec{q}') | J_i M_i \rangle \right)^*, \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

dove indichiamo $K^{\mu\nu} = K^{\mu\nu}(\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2) = \langle e_2 e_1 | K^{\mu\nu} | 0 \rangle$ e, allo stesso modo, $(K^{\sigma\rho})^* = (K^{\sigma\rho})^*(\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2) = (\langle e_2 e_1 | K^{\sigma\rho} | 0 \rangle)^*$, con s_1 e s_2 spin dei due elettroni uscenti rispettivamente con impulsi \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , mentre J_i , J_α ($J_{\alpha'}$) e J_f sono i momenti angolari totali dei nuclei iniziale, intermedio e finale rispettivamente. Osserviamo che per calcolare la (5.9) dobbiamo sommare sulle terze componenti M dei momenti angolari nucleari totali.

5.1.1 Sviluppo dei termini adronici

Ricordiamo che, sviluppando gli elementi di matrice adronici in approssimazione non relativistica mediante il metodo di Foldy-Wouthuysen, abbiamo ottenuto:

$$h_\mu^\dagger(\vec{q}) = \left(h_0^{\dagger V}(\vec{q}); \vec{h}^{\dagger A}(\vec{q}) \right) \quad \text{e} \quad h_\nu^\dagger(-\vec{q}) = \left(h_0^{\dagger V}(-\vec{q}); \vec{h}^{\dagger A}(-\vec{q}) \right), \tag{5.10}$$

cioè le componenti temporali degli operatori adronici hanno natura esclusivamente vettoriale, mentre le componenti spaziali sono di tipo puramente assiale. In particolare, ricordando le (4.33) e (4.36), abbiamo:

$$h_0^\dagger(\vec{p}) = \sqrt{4\pi} \sum_{J=0}^{\infty} i^J \sqrt{2J+1} C_J^V(\vec{p}), \quad (5.11)$$

e

$$h_\lambda^\dagger(\vec{p}) = \begin{cases} \sqrt{4\pi} \sum_{J=0}^{+\infty} i^J \sqrt{2J+1} \mathcal{L}_J^A(\vec{p}) & \text{se } \lambda = 3, \\ \sqrt{2\pi} \sum_{J=1}^{+\infty} i^J \sqrt{2J+1} [\xi_J^A(\vec{p}) + \lambda \mathcal{M}_J^A(\vec{p})] & \text{se } \lambda = \pm 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

Scrivendo in forma generale $h_\mu^\dagger(\vec{q}) = \sum_J A_{\mu,J}(\vec{q})$ e $h_\nu^\dagger(-\vec{q}) = \sum_{J'} A_{\nu,J'}(-\vec{q})$ e così anche per gli operatori $h_\sigma^\dagger(\vec{q}')$ e $h_\rho^\dagger(-\vec{q}')$, ed applicando il teorema di Wigner-Eckart [Edm57] alla (5.9), otteniamo:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{M_i, M_\alpha \\ M_{\alpha'}, M_f}} K^{\mu\nu} (K^{\sigma\rho})^* < J_f M_f | \sum_J A_{\mu,J}(\vec{q}) | J_\alpha M_\alpha > < J_\alpha M_\alpha | \sum_{J'} A_{\nu,J'}(-\vec{q}) | J_i M_i > \\ & \times \left(< J_f M_f | \sum_{J''} A_{\sigma,J''}(\vec{q}') | J_{\alpha'} M_{\alpha'} > < J_{\alpha'} M_{\alpha'} | \sum_{J'''} A_{\rho,J'''}(-\vec{q}') | J_i M_i > \right)^* = \\ & = \sum_{\substack{J, J' \\ J'', J'''}} K^{\mu\nu} (K^{\sigma\rho})^* \frac{ < J_f M_f | | A_{\mu,J}(\vec{q}) | | J_\alpha M_\alpha > < J_\alpha M_\alpha | | A_{\nu,J'}(-\vec{q}) | | J_i M_i > }{(2J+1)(2J'+1)} \\ & \times \frac{ < J_f M_f | | A_{\sigma,J''}(\vec{q}') | | J_{\alpha'} M_{\alpha'} > < J_{\alpha'} M_{\alpha'} | | A_{\rho,J'''}(-\vec{q}') | | J_i M_i > }{(2J''+1)(2J'''+1)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ora, considerando le (5.11), (5.12) e (5.13), calcoliamo la (5.9) come segue:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{M_i, M_\alpha, \\ M_{\alpha'}, M_f}} K^{\mu\nu} (K^{\sigma\rho})^* \langle J_f M_f | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | J_\alpha M_\alpha \rangle \langle J_\alpha M_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | J_i M_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f M_f | h_\sigma^\dagger(\vec{q}') | J_{\alpha'} M_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} M_{\alpha'} | h_\rho^\dagger(-\vec{q}') | J_i M_i \rangle \right)^* = \\
 & = 4\pi \sum_{J=0} \sum_{J'=0} \sum_{J''=0} \sum_{J'''=0} \left[\left| K^{00} \right|^2 \langle J_f | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_{J'}^V(-\vec{q}) | J_i \rangle \right. \\
 & \times \left(\langle J_f | C_{J''}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'''}^V(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \\
 & + \left| K^{33} \right|^2 \langle J_f | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}) | J_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f | \mathcal{L}_{J''}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'''}^A(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \\
 & + K^{00} (K^{33})^* \langle J_f | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_{J'}^V(-\vec{q}) | J_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f | \mathcal{L}_{J''}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'''}^A(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \\
 & + K^{33} (K^{00})^* \langle J_f | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}) | J_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f | C_{J''}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'''}^V(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \Big] \quad (5.14) \\
 & + 2\pi \sum_{J=1} \sum_{J'=1} \sum_{J''=1} \sum_{J'''=1} \sum_{\substack{\lambda=\pm 1 \\ \lambda'=\pm 1}} K^{\lambda\lambda'} \left(K^{\lambda''\lambda'''} \right)^* \left[\langle J_f | \xi_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \right. \\
 & \times \langle J_\alpha | \xi_{J'}^A(-\vec{q}) | J_i \rangle \left(\langle J_f | \xi_{J''}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \xi_{J'''}^A(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \\
 & + \langle J_f | \lambda \mathcal{M}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \lambda' \mathcal{M}_{J'}^A(-\vec{q}) | J_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f | \lambda'' \mathcal{M}_{J''}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \lambda''' \mathcal{M}_{J'''}^A(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \\
 & + \langle J_f | \xi_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \xi_{J'}^A(-\vec{q}) | J_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f | \lambda'' \mathcal{M}_{J''}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \lambda''' \mathcal{M}_{J'''}^A(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \\
 & + \langle J_f | \lambda \mathcal{M}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \lambda' \mathcal{M}_{J'}^A(-\vec{q}) | J_i \rangle \\
 & \times \left(\langle J_f | \xi_{J''}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \xi_{J'''}^A(-\vec{q}') | J_i \rangle \right)^* \Big],
 \end{aligned}$$

dove abbiamo potuto separare i termini coulombiano e longitudinale da quelli trasversali elettrico e magnetico poichè non c'è interferenza tra loro [Bot04]. Inoltre, sono nulli tutti i prodotti misti che rappresentano l'interferenza tra C^V e \mathcal{L}^A e tra ξ^A e \mathcal{M}^A , agenti nello stesso processo, in quanto questi operatori multipolari eccitano stati con parità (naturale o non naturale) opposte, perciò la loro interferenza produrrebbe uno stato finale con parità opposta a quella dello stato iniziale, situazione non compatibile con il caso in esame.

Osserviamo che il $0\nu\beta\beta$ può verificarsi solo per nuclei iniziali pari-pari, per i quali si ha $J_i = 0$. Inoltre, in questo lavoro consideriamo decadimenti in cui $J_i^{P_i} = J_f^{P_f}$, perciò avremo che anche $J_f = 0$. Di conseguenza, i due processi virtuali intermedi sono caratterizzati dalla stessa variazione del momento angolare nucleare totale e possiamo porre $J = J'$ e $J'' = J'''$ nella (5.14), ottenendo:

$$\begin{aligned} & \sum_{M_\alpha, M_{\alpha'}} K^{\mu\nu} (K^{\sigma\rho})^* \langle 00 | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | J_\alpha M_\alpha \rangle \langle J_\alpha M_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | 00 \rangle \\ & \times \left(\langle 00 | h_\sigma^\dagger(\vec{q}') | J_{\alpha'} M_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} M_{\alpha'} | h_\rho^\dagger(-\vec{q}') | 00 \rangle \right)^* = \\ & = 4\pi \sum_{J=0} \sum_{J'=0} \left[\left| K^{00} \right|^2 \langle 0 | | C_J^V(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | C_J^V(-\vec{q}) | | 0 \rangle \right. \\ & \times \left(\langle 0 | | C_{J'}^V(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | C_{J'}^V(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \\ & + \left| K^{33} \right|^2 \langle 0 | | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | | 0 \rangle \\ & \times \left(\langle 0 | | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \\ & + K^{00} (K^{33})^* \langle 0 | | C_J^V(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | C_J^V(-\vec{q}) | | 0 \rangle \\ & \times \left(\langle 0 | | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \\ & + K^{33} (K^{00})^* \langle 0 | | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | | 0 \rangle \\ & \times \left. \left(\langle 0 | | C_{J'}^V(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | C_{J'}^V(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\pi \sum_{J=1} \sum_{J'=1} \sum_{J''=1} \sum_{J'''=1} \sum_{\substack{\lambda=\pm 1 \\ \lambda'=\pm 1}} K^{\lambda\lambda'} \left(K^{\lambda''\lambda'''} \right)^* \left[<0||\xi_J^A(\vec{q})||J_\alpha> \right. \\
& \times <J_\alpha||\xi_J^A(-\vec{q})||0> \left(<0||\xi_{J'}^A(\vec{q}')||J_{\alpha'}><J_{\alpha'}||\xi_{J'}^A(-\vec{q}')||0> \right)^* \\
& + \lambda \lambda'' \lambda''' <0||\mathcal{M}_J^A(\vec{q})||J_\alpha><J_\alpha||\mathcal{M}_J^A(-\vec{q})||0> \\
& \times \left(<0||\mathcal{M}_{J'}^A(\vec{q}')||J_{\alpha'}><J_{\alpha'}||\mathcal{M}_{J'}^A(-\vec{q}')||0> \right)^* \quad (5.15) \\
& + \lambda'' \lambda''' <0||\xi_J^A(\vec{q})||J_\alpha><J_\alpha||\xi_J^A(-\vec{q})||0> \\
& \times \left(<0||\mathcal{M}_{J'}^A(\vec{q}')||J_{\alpha'}><J_{\alpha'}||\mathcal{M}_{J'}^A(-\vec{q}')||0> \right)^* \\
& + \lambda \lambda' <0||\mathcal{M}_J^A(\vec{q})||J_\alpha><J_\alpha||\mathcal{M}_J^A(-\vec{q})||0> \\
& \times \left. \left(<0||\xi_{J'}^A(\vec{q}')||J_{\alpha'}><J_{\alpha'}||\xi_{J'}^A(-\vec{q}')||0> \right)^* \right].
\end{aligned}$$

5.1.2 Calcolo dei termini elettronici

Vogliamo ora calcolare i coefficienti elettronici $|K^{00}|^2$, $|K^{33}|^2$, ... che compaiono nella (5.15). A questo scopo, calcoliamo dapprima il generico prodotto:

$$\begin{aligned}
& K^{\mu\nu}(K^{\sigma\rho})^* = \\
& = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma^5)u(\vec{p}_1, s_1)] [\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma^\sigma\gamma^\rho(1+\gamma^5)u(\vec{p}_1, s_1)]^* = \\
& = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(\vec{p}_2, s_2)\gamma^\mu\gamma^\nu(1+\gamma^5)u(\vec{p}_1, s_1)] [\bar{u}(\vec{p}_1, s_1)(1-\gamma^5)\gamma^\rho\gamma^\sigma u(\vec{p}_2, s_2)] . \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Sfruttando la *relazione di completezza* [Pes95]:

$$\sum_s u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s) = \frac{\not{p} + mc}{2mc} , \quad (5.17)$$

riscriviamo la (5.16) come segue:

$$\begin{aligned}
 K^{\mu\nu}(K^{\sigma\rho})^* &= \\
 &= \frac{1}{4m_e^2c^2} Tr\{(\not{p}_2 + m_e c)\gamma^\mu\gamma^\nu(1 + \gamma^5)(\not{p}_1 + m_e c)(1 - \gamma^5)\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = \\
 &= \frac{1}{4m_e^2c^2} Tr\{(\not{p}_2 + m_e c)\gamma^\mu\gamma^\nu 2\not{p}_1(1 - \gamma^5)\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = \\
 &= \frac{1}{2m_e^2c^2} Tr\{(p_{2_\alpha}\gamma^\alpha + m_e c)\gamma^\mu\gamma^\nu p_{1_\chi}\gamma^\chi(1 - \gamma^5)\gamma^\rho\gamma^\sigma\},
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

dove abbiamo tenuto conto del seguente risultato:

$$(1 + \gamma^5)(\not{p}_1 + m_e c)(1 - \gamma^5) = 2\not{p}_1(1 - \gamma^5). \tag{5.19}$$

Continuando a sviluppare la (5.18) e sfruttando le proprietà della traccia del prodotto di matrici γ di Dirac [Pes95], otteniamo:

$$\begin{aligned}
 K^{\mu\nu}(K^{\sigma\rho})^* &= \\
 &= \frac{1}{2m_e^2c^2} p_{2_\alpha} p_{1_\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\rho\gamma^\sigma\} - Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\} \right],
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\rho\gamma^\sigma\} &= \\
 &= 4 \left[\eta^{\alpha\mu} (\eta^{\nu\chi}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\chi\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\chi\rho}) \right. \\
 &\quad - \eta^{\alpha\nu} (\eta^{\mu\chi}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\chi\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\chi\rho}) \\
 &\quad + \eta^{\alpha\chi} \left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} \right) \\
 &\quad - \eta^{\alpha\rho} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\chi\sigma} - \eta^{\mu\chi}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\chi}) \\
 &\quad \left. + \eta^{\alpha\sigma} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\chi\rho} - \eta^{\mu\chi}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\chi}) \right],
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

mentre:

$$\begin{aligned}
 Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\chi\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^5\} &= \\
 &= 4i \left[\eta^{\alpha\mu}\varepsilon^{\nu\chi\rho\sigma} + \eta^{\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\chi\rho\sigma} - \eta^{\alpha\nu}\varepsilon^{\mu\chi\rho\sigma} \right. \\
 &\quad \left. - \eta_{\theta\delta}\varepsilon^{\delta\alpha\mu\nu} \left(\eta^{\theta\chi}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\theta\rho}\eta^{\chi\sigma} + \eta^{\theta\sigma}\eta^{\chi\rho} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

con ε^{abcd} tensore di Levi-Civita a quattro indici.

Per calcolare i coefficienti del tipo $|K^{\mu\nu}|^2$ basta semplicemente porre $\sigma = \mu$ e $\rho = \nu$ nella (5.20). Riportiamo qui di seguito i risultati ottenuti (per i calcoli si veda Appendice G):

$$|K^{00}|^2 = |K^{33}|^2 = \frac{2p_2 \cdot p_1}{m_e^2 c^2}, \quad (5.23)$$

$$K^{00} (K^{33})^* = K^{33} (K^{00})^* = -\frac{2p_2 \cdot p_1}{m_e^2 c^2},$$

dove ricordiamo che p_1 e p_2 sono i quadrimpulsi dei due elettroni uscenti e_1 ed e_2 .

Per quanto riguarda i coefficienti leptonici del tipo $|K^{\lambda\lambda'}|^2$, cioè il caso $\lambda'' = \lambda$ e $\lambda''' = \lambda'$, con $\lambda, \lambda' = \pm 1$,abbiamo:

$$|K^{++}|^2 = |K^{--}|^2 = 0; \quad (5.24)$$

$$|K^{+-}|^2 = -\frac{16p_2^+ p_1^-}{m_e^2 c^2}; \quad (5.25)$$

$$|K^{-+}|^2 = -\frac{16p_2^- p_1^+}{m_e^2 c^2}; \quad (5.26)$$

con p^\pm definito come segue:

$$p^\pm = p^1 \pm ip^2, \quad (5.27)$$

dove sottolineiamo che gli indici in alto ai quadrimpulsi sono indici spaziali, da non confondere con gli indici 1, 2 posti in basso i quali indicano, invece, l'elettrone corrispondente.

Infine, i restanti termini non nulli del tipo $K^{\lambda\lambda'} (K^{\lambda''\lambda'''})^*$ sono i seguenti:

$$K^{+-} (K^{-+})^* = K^{-+} (K^{+-})^* = \frac{8}{m_e^2 c^2} (p_2^+ p_1^- + p_2^- p_1^+), \quad (5.28)$$

mentre tutti gli altri termini sono nulli poiché $K^{++} = K^{--} = 0$.

5.2 Ampiezza di probabilità e tempo di vita media per il $0\nu\beta\beta$

Dai risultati ottenuti nel paragrafo precedente per gli elementi di matrice leptonicici, possiamo riscrivere la (5.15) come segue:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{M_\alpha, M_{\alpha'}} K^{\mu\nu} (K^{\sigma\rho})^* \langle 00 | h_\mu^\dagger(\vec{q}) | J_\alpha M_\alpha \rangle \langle J_\alpha M_\alpha | h_\nu^\dagger(-\vec{q}) | 00 \rangle \\
 & \times \left(\langle 00 | h_\sigma^\dagger(\vec{q}') | J_{\alpha'} M_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} M_{\alpha'} | h_\rho^\dagger(-\vec{q}') | 00 \rangle \right)^* = \\
 & = \frac{8\pi}{m_e^2 c^2} (p_2 \cdot p_1) \sum_{J=0} \sum_{J'=0} \left[\langle 0 | | C_J^V(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | C_J^V(-\vec{q}) | | 0 \rangle \right. \\
 & \times \left(\langle 0 | | C_{J'}^V(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | C_{J'}^V(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \\
 & + \langle 0 | | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | | 0 \rangle \\
 & \times \left(\langle 0 | | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \\
 & - \langle 0 | | C_J^V(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | C_J^V(-\vec{q}) | | 0 \rangle \\
 & \times \left(\langle 0 | | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \\
 & - \langle 0 | | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | | 0 \rangle \\
 & \times \left. \left(\langle 0 | | C_{J'}^V(\vec{q}') | | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | | C_{J'}^V(-\vec{q}') | | 0 \rangle \right)^* \right], \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

in cui osserviamo che gli elementi di matrice adronici in cui compaiono gli operatori multipolari trasversali si annullano e sopravvivono solo i termini longitudinali e coulombiani.

Infine, inserendo il risultato (5.29) nella (5.8) giungiamo ad una espressione

dell'ampiezza di probabilità associata al $0\nu\beta\beta$:

$$\begin{aligned}
 & \left| (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) M_{fi}^{0\nu} \right|^2 = \\
 & = \frac{2\pi^3 m_e^2 c^2 (p_2 \cdot p_1)}{m_e^2 \hbar^6} G_\beta^4 \delta(E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i)) \\
 & \times F_0(Z_f; E(e_2)) F_0(Z_\alpha; E(e_1)) \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{J=0} \sum_{J'=0} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \\
 & \times \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E'_{\nu_{\alpha'}}(E'_{\nu_{\alpha'}} + \langle \Delta E' \rangle)} \left[\langle 0 | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_J^V(-\vec{q}) | 0 \rangle \right. \\
 & \times \left(\langle 0 | C_{J'}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'}^V(-\vec{q}') | 0 \rangle \right)^* \\
 & + \langle 0 | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | 0 \rangle \\
 & \times \left(\langle 0 | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | 0 \rangle \right)^* \\
 & - \langle 0 | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_J^V(-\vec{q}) | 0 \rangle \\
 & \times \left(\langle 0 | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | 0 \rangle \right)^* \\
 & - \langle 0 | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | 0 \rangle \\
 & \times \left. \left(\langle 0 | C_{J'}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'}^V(-\vec{q}') | 0 \rangle \right)^* \right]. \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

È possibile utilizzare questo risultato per calcolare il tasso di decadimento associato al $0\nu\beta\beta$, il quale è definito dalla seguente relazione [Wei95]:

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |M_{fi}^{0\nu}|^2 \frac{d^3 p_1}{\hbar^3} \frac{d^3 p_2}{\hbar^3}, \tag{5.31}$$

dove:

$$E_f - E_i = E(e_1) + E(e_2) + E(N_f) - E(N_i), \tag{5.32}$$

mentre $|M_{fi}^{0\nu}|^2$ è l'elemento di matrice nucleare che compare nell'espressione (5.30) e dato da:

$$\begin{aligned}
 |M_{fi}^{0\nu}|^2 &= \frac{m_\nu^2 c^2 (p_2 \cdot p_1)}{128\pi^5 m_e^2 \hbar^6} G_\beta^4 F_0(Z_f; E(e_2)) F_0(Z_\alpha; E(e_1)) \\
 &\times \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{J=0} \sum_{J'=0} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \Delta E)} \\
 &\times \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E'_{\nu_{\alpha'}}(E'_{\nu_{\alpha'}} + \Delta E')} \left[\langle 0 | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_J^V(-\vec{q}) | 0 \rangle \right. \\
 &\times (\langle 0 | C_{J'}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'}^V(-\vec{q}') | 0 \rangle)^* \\
 &+ \langle 0 | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | 0 \rangle \\
 &\times (\langle 0 | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | 0 \rangle)^* \\
 &- \langle 0 | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_J^V(-\vec{q}) | 0 \rangle \\
 &\times (\langle 0 | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | 0 \rangle)^* \\
 &- \langle 0 | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | 0 \rangle \\
 &\left. \times (\langle 0 | C_{J'}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'}^V(-\vec{q}') | 0 \rangle)^* \right].
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Inseriamo l'espressione (5.33) nella (5.31) ed integriamo rispetto agli impulsi \vec{p}_1 e \vec{p}_2 dei due elettroni emessi nello stato finale, ricordando che $d^3 p = |\vec{p}|^2 d\vec{p} d\Omega = |\vec{p}| E dE d\Omega$, con $d\Omega$ angolo solido infinitesimo. In questo modo, possiamo ottenere un'espressione del *tempo di vita media* τ associato al $0\nu\beta\beta$, il quale è dato dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = G^{0\nu} |R_{fi}^{0\nu}|^2 \left(\frac{m_\nu}{m_e} \right)^2, \tag{5.34}$$

dove m_ν è la massa effettiva del neutrino definita dalla (3.49), mentre $G^{0\nu}$ è il

fattore spazio delle fasi associato allo stato finale del decadimento, dato da:

$$G^{0\nu} = 16\pi^2 \int (p_1 \cdot p_2) F_0(Z_f; E(e_2)) F_0(Z_\alpha; E(e_1)) \delta(E_f - E_i) |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| E_1 E_2 dE_1 dE_2, \quad (5.35)$$

dove il fattore $16\pi^2$ compare in seguito alle integrazioni rispetto all'angolo solido. Infine, abbiamo introdotto $|R_{fi}^{0\nu}|^2$, elemento di matrice nucleare definito come segue:

$$\begin{aligned} |R_{fi}^{0\nu}|^2 &= \frac{c^2 G_\beta^4}{64\pi^4 \hbar^{13}} \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{J=0} \sum_{J'=0} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\nu_\alpha}(E_{\nu_\alpha} + \langle \Delta E \rangle)} \\ &\times \int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{E'_{\nu_{\alpha'}}(E'_{\nu_{\alpha'}} + \langle \Delta E' \rangle)} \left[\langle 0 | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_J^V(-\vec{q}) | 0 \rangle \right. \\ &\times \left. \langle 0 | C_{J'}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'}^V(-\vec{q}') | 0 \rangle \right]^* \\ &+ \langle 0 | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | 0 \rangle \\ &\times \left. \langle 0 | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | 0 \rangle \right]^* \\ &- \langle 0 | C_J^V(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | C_J^V(-\vec{q}) | 0 \rangle \\ &\times \left. \langle 0 | \mathcal{L}_{J'}^A(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | \mathcal{L}_{J'}^A(-\vec{q}') | 0 \rangle \right]^* \\ &- \langle 0 | \mathcal{L}_J^A(\vec{q}) | J_\alpha \rangle \langle J_\alpha | \mathcal{L}_J^A(-\vec{q}) | 0 \rangle \\ &\times \left. \langle 0 | C_{J'}^V(\vec{q}') | J_{\alpha'} \rangle \langle J_{\alpha'} | C_{J'}^V(-\vec{q}') | 0 \rangle \right]^*. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi abbiamo ottenuto un'espressione dell'ampiezza di probabilità associata al decadimento $0\nu\beta\beta$ di nuclei pari-pari. L'intero calcolo è stato strutturato sulla base delle seguenti ipotesi:

- Abbiamo utilizzato gli strumenti forniti dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo. In particolare, sviluppando l'elemento di matrice di scattering associato al $0\nu\beta\beta$, abbiamo considerato solo il secondo ordine nello sviluppo perturbativo, in quanto il primo non contribuisce alla descrizione di questo processo.
- Abbiamo descritto il decadimento come l'eccitazione virtuale di uno stato intermedio nel nucleo dispari-dispari adiacente al nucleo iniziale e finale della transizione.
- Abbiamo fattorizzato i termini leptonici ed adronici all'interno dell'espressione dell'elemento di matrice di scattering.
- Abbiamo corretto le funzioni d'onda piana degli elettroni emessi nello stato finale con le funzioni di Fermi, questo per tener conto della distorsione Coulombiana prodotta dall'interazione dei leptoni uscenti con il nucleo finale.

- Abbiamo utilizzato l'approssimazione di chiusura, considerando un valor medio dell'energia di eccitazione, in modo tale da eliminare la dipendenza di quest'ultima dallo specifico stato eccitato del nucleo dispari-dispari virtuale intermedio. Questa scelta permette di utilizzare la proprietà di completezza degli stati eccitati e, quindi, di ottenere un'espressione dell'ampiezza di probabilità che risulta essere anch'essa indipendente dagli stati virtuali del nucleo dispari-dispari.
- Abbiamo, infine, utilizzato un'espressione non relativistica degli operatori responsabili della transizione adronica, considerando i soli termini del primo ordine nello sviluppo di Foldy-Wouthuysen dei suddetti operatori.

Le espressioni ottenute richiedono la scelta di un modello nucleare che descrive la transizione tra i nuclei genitore e figlio per poter calcolare gli elementi di matrice adronici. In effetti, l'incertezza più grande nel calcolo dell'ampiezza di probabilità associata al decadimento $0\nu\beta\beta$ è relativa proprio agli elementi di matrice nucleari. Per questo motivo è necessario costruire un modello che permetta di avere un buon controllo degli effetti nucleari. La scelta più semplice consiste nel considerare un modello a campo medio in cui gli stati nucleari sono descritti da un singolo determinante di Slater. Nello stato fondamentale del sistema nucleare, gli stati nucleonici con energia inferiore all'energia di Fermi sono completamente occupati, mentre quelli con energia superiore risultano completamente vuoti. I primi sono detti stati di buco, i secondi sono stati di particella. Lo stato finale del $0\nu\beta\beta$ è descritto da un determinante di Slater che conterrà due stati buco di tipo neutronico e due stati particella di tipo protonico. Questo modello genera funzioni d'onda di singola particella, permettendo così di ottenere direttamente i valori numerici degli elementi di matrice adronici.

Ovviamente, è possibile scegliere modelli più complicati, i quali considerano anche le interazioni tra i vari nucleoni. Ad esempio, un modello molto utilizzato è la Quasi-particle Random Phase Approximation (QRPA). In questa teoria gli

stati eccitati del sistema sono descritti da una combinazione lineare di eccitazioni particella-buco. Questo equivale a considerare una combinazione lineare di determinanti di Slater, ciascuno composto da una sola eccitazione particella-buco. Quelli citati sono solo alcuni esempi dei numerosi modelli nucleari che sono stati applicati al problema del $0\nu\beta\beta$, mediante i quali si cerca di raggiungere una sempre più accurata descrizione teorica di questo importante fenomeno .

Appendice A

Convenzioni

In questa appendice riportiamo alcune delle convenzioni e delle proprietà utilizzate nel nostro lavoro.

Definiamo innanzitutto le matrici γ^μ (con $\mu = 0, 1, 2, 3$), matrici 4×4 tali da soddisfare l'*algebra di Clifford*:

$$\{\gamma^\mu; \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \cdot \mathbb{I}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.1})$$

dove $\eta^{\mu\nu}$ è il tensore metrico dello spazio-tempo di Minkowski, definito da:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

In questo lavoro utilizziamo le matrici γ^μ in quella che viene comunemente chiamata *rappresentazione standard*, per la quale abbiamo:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad e \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

dove le σ^i sono le matrici di Pauli 2×2 , definite come segue:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

le quali soddisfano l'identità algebrica:

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k, \quad (\text{A.5})$$

con ϵ^{ijk} tensore di Levi-Civita. Definiamo poi una la matrice γ^5 come segue:

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu; \gamma^5\} &= 0, \\ \gamma^0 &= (\gamma^0)^\dagger, \quad \gamma^i = -(\gamma^i)^\dagger \quad \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 (\gamma^0)^\dagger = \mathbb{I}_{4 \times 4}, \\ \gamma^5 &= (\gamma^5)^\dagger, \quad (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Definiamo infine il tensore antisimmetrico $\sigma^{\mu\nu}$ come segue:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \\ &= i (\gamma^\mu \gamma^\nu - \eta^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Appendice **B**

Particella libera di Dirac

La dinamica di una particella di spin 1/2 e massa m è ben descritta dall'*equazione di Dirac* (in unità naturali $\hbar = c = 1$):

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0, \quad (\text{B.1})$$

dove $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ e $\Psi(x)$ è un quadrispinore, cioè uno spinore a 4 componenti.

Le soluzioni di particella libera dell'equazione (B.1) possono essere scritte come combinazioni lineari di onde piane:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ipx} u^{(s)}(\vec{p}) \quad (\text{B.2})$$

e

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{+ipx} v^{(s)}(\vec{p}), \quad (\text{B.3})$$

con $px \equiv p_\mu x^\mu = p_0 x^0 - p_i x^i$ e $p_0 > 0$. Osserviamo che queste soluzioni libere sono composte entrambe da un fase contenente la dipendenza spazio-temporale tipica di un'onda piana, moltiplicata per un opportuno spinore di polarizzazione a quattro componenti, in particolare $u^{(s)}(\vec{p})$ e $v^{(s)}(\vec{p})$. Inoltre, sottolineiamo che d'ora in avanti considereremo unitari i fattori volumetrici di normalizzazione che compaiono nelle (B.2) e (B.3).

Per una particella di massa m , gli spinori di polarizzazione dipendono dal suo spin s e dal suo impulso \vec{p} . È importante evidenziare la sostanziale differenza tra le due soluzioni libere (B.2) e (B.3), in quanto $\Psi_1(x)$ corrisponde a soluzioni di particella (energia positiva) libera, mentre $\Psi_2(x)$ descrive lo stato di un'antiparticella (energia negativa) libera.

Inserendo la (B.2) e la (B.3) nell'equazione di Dirac (B.1), si ottiene un ulteriore vincolo sugli spinori $u^{(s)}(\vec{p})$ e $v^{(s)}(\vec{p})$, rispettivamente:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v^{(s)}(\vec{p}) = 0, \quad (\text{B.5})$$

dove p_μ è il valore della componente μ -esima del quadri-impulso.

A questo punto, calcoliamo dapprima le soluzioni $u^{(s)}(\vec{0})$ e $v^{(s)}(\vec{0})$ delle equazioni (B.4) e (B.5) nel sistema di riferimento della particella a riposo, per poi estendere la trattazione al caso di un sistema di riferimento generico ($\vec{p} \neq \vec{0}$). Consideriamo per prima l'equazione (B.4) e poniamo (in unità naturali $\hbar = c = 1$) $p = (E; \vec{0})$, da cui, ricordando che vale la relazione $p^2 = m^2$, abbiamo $p = (m; \vec{0})$. Dunque, scriviamo:

$$(\gamma^0 p_0 - m)u^{(s)}(\vec{0}) = 0, \quad (\text{B.6})$$

che, utilizzando la rappresentazione standard delle matrici γ definita in Appendice A ed indicando $\mathbb{I}_{2 \times 2} = \mathbb{I}$, può essere scritta in forma matriciale come segue:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} m - m \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi^{(s)}(\vec{0}) \\ \zeta^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{(s)}(\vec{0}) \\ \zeta^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

con $\xi^{(s)}(\vec{0})$ e $\zeta^{(s)}(\vec{0})$ bispinori a componenti costanti.

Dunque, risolvendo la (B.7) otteniamo:

$$\zeta^{(1,2)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

perciò la (B.6) ammette le seguenti due soluzioni linearmente indipendenti che descrivono due stati con opposta orientazione dello spin:

$$u^{(1,2)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \xi^{(1,2)}(\vec{0}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

dove un'opportuna scelta per $\xi^{(1)}(\vec{0})$ e $\xi^{(2)}(\vec{0})$ è la seguente:

$$\xi^{(1)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi^{(2)}(\vec{0}) = -i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Il fattore $-i$ nell'espressione di $\xi^{(2)}(\vec{0})$ è scelto per convenzione.

Per determinare $u^{(s)}(\vec{p})$ con $s = 1, 2$ in un generico sistema di riferimento, sfruttiamo innanzitutto il seguente risultato:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m)(\gamma^\nu p_\nu + m) &= \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu - m^2 = \\ &= \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 = p^2 - m^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Dalla precedente proprietà abbiamo che:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \left[K(\gamma^\nu p_\nu + m) u^{(s)}(\vec{0}) \right] = 0, \quad (\text{B.12})$$

e, di conseguenza, possiamo scrivere:

$$u^{(s)}(\vec{p}) = K(\gamma^\nu p_\nu + m) u^{(s)}(\vec{0}), \quad (\text{B.13})$$

con K costante di normalizzazione da determinare. Sviluppando la (B.13) utilizzando le espressioni (A.3) e (A.4), otteniamo:

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\vec{p}) &= K(\gamma^0 p_0 - \gamma^i p_i + m) u^{(s)}(\vec{0}) = \\ &= K(E + m) \begin{pmatrix} \xi^{(s)}(\vec{0}) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Per calcolare il valore della costante K , imponiamo la seguente condizione di normalizzazione:

$$\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) = \delta_{rs}, \quad (\text{B.15})$$

dove $\bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = u^{\dagger(r)}(\vec{p})\gamma^0$ e $r, s = 1, 2$. Effettuando gli opportuni calcoli, ricaviamo:

$$K = \frac{1}{2m\sqrt{E+m}}. \quad (\text{B.16})$$

A questo punto, sostituendo la (B.16) nella (B.14), otteniamo l'espressione dello spinore di polarizzazione $u^{(s)}(\vec{p})$ per una particella di spin 1/2 e massa m in un sistema di riferimento generico:

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \xi^{(s)}(\vec{0}) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad \text{con } s = 1, 2. \quad (\text{B.17})$$

Ripetendo l'intero ragionamento per determinare la struttura dello spinore di polarizzazione $v^{(s)}(\vec{p})$ per le soluzioni ad energia negativa, otteniamo che nel sistema di riferimento della particella a riposo ($\vec{p} = \vec{0}$) lo spinore è dato da:

$$v^{(1,2)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(1,2)}(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

dove una possibile scelta per i bispinori $\varphi^{(1,2)}(\vec{0})$ è la seguente:

$$\varphi^{(1)}(\vec{0}) = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi^{(2)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

In un sistema di riferimento generico, imponendo la condizione di normalizzazione:

$$\bar{v}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) = -\delta_{rs}, \quad (\text{B.20})$$

otteniamo che la forma dello spinore di polarizzazione è data da:

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \varphi^{(s)}(\vec{0}) \\ \varphi^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad \text{con } s = 1, 2. \quad (\text{B.21})$$

Infine, osserviamo che è utile introdurre la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

tale che:

$$\varphi^{(s)}(\vec{0}) = A\xi^{*(s)}(\vec{0}); \quad (\text{B.23})$$

da cui:

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \xi^{(s)}(\vec{0}) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \xi^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

e

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} A\xi^{*(s)}(\vec{0}) \\ A\xi^{*(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

con $s = 1, 2$.

Particelle di Dirac prive di massa

Nel caso di particelle libere di Dirac con massa nulla, le relazioni (B.15) e (B.20) non sono più valide. Le condizioni di normalizzazione nel caso $m = 0$ sono infatti le seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) &= 0, \\ \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

dalle quali discende un'assoluta arbitrarietà nella scelta delle costanti di normalizzazione da inserire nella definizione degli spinori. In questo lavoro scegliamo di descrivere particelle ed antiparticelle di Dirac con massa nulla con i seguenti spinori:

$$u^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \xi^{(s)}(\vec{0}) \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E} \xi^{(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

e

$$v^{(s)}(\vec{p}) = \sqrt{E} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E} A\xi^{*(s)}(\vec{0}) \\ A\xi^{*(s)}(\vec{0}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.28})$$

Coniugazione di carica

Nella teoria di Dirac, le particelle e le antiparticelle ad esse corrispondenti sono caratterizzate dalla stessa massa e da carica opposta (nel caso di fermioni carichi). Si definisce, allora, un operatore di coniugazione particella-antiparticella, il quale trasforma uno spinore di Dirac come segue:

$$\tilde{C} : \Psi \longrightarrow \Psi^C \quad (\text{C.1})$$

in modo tale che se Ψ soddisfa l'equazione di Dirac in presenza di un quadripotenziale elettromagnetico A_μ , valida per fermioni di massa m e carica $-q$ (in unità naturali $\hbar = c = 1$):

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\Psi = 0, \quad (\text{C.2})$$

allora Ψ^c deve soddisfare un'equazione identica ma con segno opposto per il termine elettromagnetico, in quanto quest'ultima descrive la dinamica dell'antifermione di carica $+q$ e massa m :

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]\Psi^C = 0. \quad (\text{C.3})$$

Vogliamo ottenere l'espressione dell'operatore che permette di trasformare lo spinore Ψ nel corrispondente coniugato di carica Ψ^C . A questo scopo, possiamo

agire direttamente sull'equazione (C.2) e, di conseguenza, sullo spinore Ψ fino ad ottenere, con varie operazioni, l'equazione (C.3).

Calcoliamo, innanzitutto, l'hermitiana coniugata dell'equazione di Dirac (C.2), ottenendo:

$$\Psi^\dagger [\gamma^{\mu\dagger} (-i \overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m] = 0, \quad (\text{C.4})$$

dove $\overleftarrow{\partial}_\mu$ indica che l'operatore agisce a sinistra. Ora, ricordando che $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{I}$, moltiplichiamo opportunamente la precedente equazione per le matrici γ^0 , ottenendo:

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 [\gamma^{\mu\dagger} (-i \overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m] &= 0 \Rightarrow \\ \Psi^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} (-i \overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m\gamma^0] &= 0 \Rightarrow \\ \Psi^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} (-i \overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m\gamma^0] \gamma^0 &= 0 \Rightarrow \\ \Psi^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 (-i \overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m\gamma^0 \gamma^0] &= 0 \Rightarrow \\ \Psi^\dagger \gamma^0 [\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 (-i \overleftarrow{\partial}_\mu - qA_\mu) - m] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

da cui, definendo lo spinore di Dirac aggiunto $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ e considerando la proprietà $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, otteniamo:

$$\bar{\Psi} [-\gamma^\mu (i \overleftarrow{\partial}_\mu + qA_\mu) - m] = 0. \quad (\text{C.6})$$

Effettuando l'operazione di trasposizione sull'intera equazione, otteniamo:

$$[-\gamma^{\mu T} (i \partial_\mu + qA_\mu) - m] \bar{\Psi}^T = 0. \quad (\text{C.7})$$

Per giungere all'equazione (C.3), non ci resta che agire sulla precedente con una matrice C 4x4 invertibile ($CC^{-1} = C^{-1}C = \mathbb{I}$) tale che:

$$C \gamma^{\mu T} C^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (\text{C.8})$$

Quindi, scriviamo:

$$\begin{aligned} C [-\gamma^{\mu T} (i \partial_\mu + qA_\mu) - m] C^{-1} C \bar{\Psi}^T &= 0 \Rightarrow \\ [-C \gamma^{\mu T} C^{-1} (i \partial_\mu + qA_\mu) - m C C^{-1}] C \bar{\Psi}^T &= 0 \Rightarrow \\ [-C \gamma^{\mu T} C^{-1} (i \partial_\mu + qA_\mu) - m] C \bar{\Psi}^T &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

da cui:

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]C\bar{\Psi}^T = 0. \quad (\text{C.10})$$

Dunque, lo spinore $C\bar{\Psi}^T$ è evidentemente il coniugato di carica per lo spinore di Dirac Ψ che descrive il fermione carico:

$$\Psi^C = C\bar{\Psi}^T \quad (\text{C.11})$$

e l'operatore C è detto *operatore di coniugazione di carica*. Esistono diverse espressioni matriciali di questo operatore a seconda della rappresentazione scelta per le matrici γ , tutte tali da soddisfare la proprietà (C.8). In rappresentazione standard, ad esempio, essa è definita come segue:

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Vediamo allora come si comportano gli spinori di polarizzazione u e v sotto l'azione della matrice (C.12). Per lo spinore u abbiamo:

$$u^C = C\bar{u}^T = i\gamma^2\gamma^0(u^\dagger\gamma^0)^T = i\gamma^2\gamma^0(\gamma^0)^T(u^\dagger)^T, \quad (\text{C.13})$$

ma $(\gamma^0)^T = \gamma^0$ e $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{I}$, quindi:

$$\begin{aligned} u^C &= i\gamma^2(u^\dagger)^T = i\gamma^2\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\chi^\dagger \quad \chi^\dagger \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^\dagger}{E+m} \right)^T \\ &= i\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^* \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^T}{E+m} \chi^* \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} i\sigma^2 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^T}{E+m} \chi^* \\ -i\sigma^2 \chi^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che le matrici di Pauli siano hermitiane. Ora, è facile dimostrare che, a causa dell'antisimmetria della matrice σ^2 , abbiamo:

$$\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^T}{E+m} = \sigma^1 p_1 - \sigma^2 p_2 + \sigma^3 p_3, \quad (\text{C.15})$$

da cui, sfruttando la regola di anticommutazione $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{I}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} i\sigma^2 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^T}{E + m} &= i(\sigma^2 \sigma^1 p_1 - \sigma^2 \sigma^2 p_2 + \sigma^2 \sigma^3 p_3) = \\ &= i(-\sigma^1 \sigma^2 p_1 - \sigma^2 \sigma^2 p_2 - \sigma^3 \sigma^2 p_3) = \\ &= -i(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \sigma^2. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

A questo punto, osserviamo che:

$$i\sigma^2 = -A, \quad (\text{C.17})$$

con A matrice definita in (B.22). In definitiva,abbiamo:

$$u^C = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ E+m \\ A\chi^* \end{pmatrix} = v, \quad (\text{C.18})$$

cioè sotto l'azione della coniugazione di carica, rappresentata in forma matriciale dalla (C.12), lo spinore di polarizzazione u si trasforma in v . Allo stesso modo si può dimostrare che:

$$v^C = i\gamma^2 \gamma^0 \bar{v}^T = u. \quad (\text{C.19})$$

È quindi ben evidente la differenza tra il campo di Dirac ed il suo coniugato di carica:

$$\Psi^D \neq (\Psi^D)^C. \quad (\text{C.20})$$

Appendice **D**

Chiralità ed elicità

Gli autospinori di elicità (2.20) e (2.21), i quali descrivono fermioni ed antifermioni di Dirac privi di massa, sono anche autospinori degli operatori *proiettori di chiralità* definiti come:

$$\mathbb{P}_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad e \quad \mathbb{P}_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}. \quad (\text{D.1})$$

Per dimostrare quanto detto, vediamo come agiscono questi operatori sugli spinori di polarizzazione (2.14) e (2.15) nel caso $m = 0$ (per i fattori di normalizzazione nel caso $m = 0$ si vedano le (B.27) e (B.28)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)u^0(\vec{p}) &= \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{E} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi \pm \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \pm \chi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Osserviamo che $(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi \pm \chi)$ è ancora autostato dell'operatore di elicità h , definito dalla (2.11), con autovalori ± 1 :

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi \pm \chi\right) &= \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\right)\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\right)\chi \pm \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi = \\ &= \left(\frac{\vec{\sigma}^2 \cdot \vec{p}^2}{|\vec{p}|^2}\right)\chi \pm \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi = \\ &= \chi \pm \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi = \\ &= \pm \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \pm \chi\right), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà $\vec{\sigma}^2 = 1$. Quindi, possiamo scrivere:

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}\chi \pm \chi = k_{\pm}\chi, \quad (\text{D.4})$$

con k_{\pm} costante.

Allora:

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)u^0(\vec{p}) = \frac{1}{2}k_{\pm}\sqrt{E} \begin{pmatrix} \chi \\ \pm\chi \end{pmatrix} = c_{\pm}u_{\pm}^0(\vec{p}), \quad (\text{D.5})$$

con $c_{\pm} = \frac{1}{2}k_{\pm}$. Allo stesso modo si può dimostrare che:

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)v^0(\vec{p}) = c_{\mp}v_{\mp}^0(\vec{p}). \quad (\text{D.6})$$

Appendice **E**

Riduzione non relativistica

In questo lavoro, vogliamo effettuare una riduzione non relativistica dell'operatore di corrente carica debole, somma delle sue componenti vettoriale (4.10) ed assiale (4.15). A questo scopo, sfruttiamo il procedimento di Foldy-Wouthuysen, il quale consiste nello sviluppare gli elementi di matrice (4.17) e (4.18) in potenze di $|\vec{k}|/m$, con \vec{k} impulso del nucleone, utilizzando l'espressione non relativistica degli spinori di Dirac (4.21) associati ai nucleoni. La nostra scelta consiste nel considerare esclusivamente i termini di ordine zero dello sviluppo.

A titolo di esempio, calcoliamo il contributo della sola componente temporale della (4.10) all'elemento di matrice adronico associato al decadimento del nucleo virtuale intermedio:

$$\begin{aligned}
 & < N_{k_f, s_f} | h_0^{\dagger V}(p) | N_{k_\alpha, s_\alpha} > = \\
 & = \bar{u}(\vec{k}_f, s_f) \left(F_V(p^2) \gamma_0 + \frac{i}{2m} F_M(p^2) p^\nu \sigma_{0\nu} \right) \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha) = \\
 & = u^\dagger(\vec{k}_f, s_f) \left(F_V(p^2) \gamma_0 \gamma_0 + \frac{i}{2m} F_M(p^2) p^\nu \gamma_0 \sigma_{0\nu} \right) \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha) . \tag{E.1} \\
 & = u^\dagger(\vec{k}_f, s_f) \left(F_V(p^2) - \frac{1}{2m} F_M(p^2) p^\nu (\gamma_\nu - \eta_{0\nu} \gamma_0) \right) \tau^+ u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha) .
 \end{aligned}$$

Consideriamo il termine contenente il fattore di forma F_V :

$$\begin{aligned}
 F_V(p^2) u^\dagger(\vec{k}_f, s_f) u(\vec{k}_\alpha, s_\alpha) &= \\
 = F_V(p^2) \begin{pmatrix} \chi_{s_f}^\dagger & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_f}{2mc^2} \chi_{s_f}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{s_\alpha} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_\alpha}{2mc^2} \chi_{s_\alpha} \end{pmatrix} &= \\
 = F_V(p^2) \chi_{s_f}^\dagger \left(1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_f)(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}_\alpha)}{4m^2c^4} \right) \chi_{s_\alpha} &= \\
 \approx F_V(p^2) \chi_{s_f}^\dagger \chi_{s_\alpha}, &
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

dove abbiamo trascurato il termine con potenze di $|\vec{k}|/m$ di ordine maggiore di zero.

Per quanto riguarda il termine contenente la funzione di struttura F_M , si osserva che in esso compaiono potenze di ordine non nullo di $|\vec{k}|/m$, quindi possiamo trascurarlo completamente e scrivere:

$$< N_{k_f, s_f} | h_0^{\dagger V}(p) | N_{k_\alpha, s_\alpha} > \approx F_V(p^2) \chi_{s_f}^\dagger \tau^+ \chi_{s_\alpha}. \tag{E.3}$$

Dai calcoli dei contributi dovuti alle componenti temporali e spaziali delle correnti vettoriale ed assiale [Bot04], si ottiene che, oltre al termine (E.3), l'unico contributo significativo nella nostra approssimazione all'ordine zero dello sviluppo in serie di potenze di $|\vec{k}|/m$ è:

$$< N_{k_f, s_f} | \vec{h}^{\dagger A}(p) | N_{k_\alpha, s_\alpha} > \approx F_A(p^2) \chi_{s_f}^\dagger \vec{\sigma} \tau^+ \chi_{s_\alpha}. \tag{E.4}$$

Appendice **F**

Sviluppo in multipoli

Lo sviluppo in multipoli di un'onda piana è dato da:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa x) Y_{lm}^*(\hat{\kappa}) Y_{lm}(\hat{x}), \quad (\text{F.1})$$

dove $\kappa = \frac{|\vec{p}|}{\hbar}$, $\hat{\kappa} = \Omega_\kappa = (\theta_\kappa, \varphi_\kappa)$, $x = |\vec{x}|$ e $\hat{x} = \Omega_x = (\theta_x, \varphi_x)$. Nella precedente espressione compaiono le funzioni di Bessel sferiche j_l e le armoniche sferiche Y_{lm} , dipendenti dai numeri quantici l e m . In particolare, se scegliamo l'asse z coincidente con la direzione di \vec{p} , vale la seguente proprietà:

$$Y_{lm}^*(\hat{\kappa}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}, \quad (\text{F.2})$$

e possiamo riscrivere la (F.1) come segue:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} &= 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa x) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} Y_{lm}(\hat{x}) = \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_l i^l j_l(\kappa x) \sqrt{2l+1} Y_{l0}(\hat{x}). \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

A questo punto, vogliamo calcolare lo sviluppo in multipoli della componente $e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_\lambda$ dell'onda, dove $\lambda = \pm 1, 3$ ed \hat{e}_λ è uno dei versori sferici definiti dalle

(4.31) e (4.32). A questo scopo, consideriamo la seguente relazione:

$$\sum_{JM} \sum_{m'm'_\lambda} < lm1m_\lambda | JM > < lm'1m'_\lambda | JM > = \sum_{m'm'_\lambda} \delta_{mm'} \delta_{m_\lambda m'_\lambda} = 1 \quad (\text{F.4})$$

e modifichiamo la (F.3) come segue:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} = \sqrt{4\pi} \sum_l i^l j_l(\kappa x) \sqrt{2l+1} \sum_{JM} < l01m_\lambda | JM > \sum_{m'm'_\lambda} < lm'1m'_\lambda | JM > Y_{lm'}(\hat{x}). \quad (\text{F.5})$$

Scriviamo allora la componente $e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_\lambda$ dell'onda:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_\lambda = \sqrt{4\pi} \sum_l i^l j_l(\kappa x) \sqrt{2l+1} \sum_{JM} < l01m_\lambda | JM > \sum_{m'm'_\lambda} < lm'1m'_\lambda | JM > Y_{lm'}(\hat{x}) \hat{e}_\lambda. \quad (\text{F.6})$$

È importante sottolineare che alla componente dell'onda lungo la direzione del versore $\hat{e}_3 = \hat{e}_z$ è associato il valore $m_\lambda = 0$, mentre per $\lambda = \pm 1$ abbiamo $m_\lambda = \lambda$. Ritornando alla (F.6), definiamo l'armonica sferica vettoriale:

$$\mathcal{Y}_{lJ}^M(\hat{x}) = \sum_{m_l m_s} < lm_l s m_s | JM > Y_{lm_l}(\hat{x}) \hat{e}_{m_s} \quad (\text{F.7})$$

ed osserviamo che nella (F.6) abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{m'm'_\lambda} < lm'1m'_\lambda | JM > Y_{lm'}(\hat{x}) \hat{e}_\lambda &= \sum_{m'm'_\lambda} < lm'1m'_\lambda | JM > Y_{lm'}(\hat{x}) \hat{e}_{\lambda'} \delta_{m_\lambda m'_\lambda} = \\ &= \mathcal{Y}_{lJ}^M(\hat{x}) \delta_{m_\lambda m'_\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Dunque, otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_\lambda &= \sqrt{4\pi} \sum_l i^l j_l(\kappa x) \sqrt{2l+1} \sum_{JM} < l01m_\lambda | JM > \sum_{m'} < lm'1m_\lambda | JM > Y_{lm'}(\hat{x}) \hat{e}_\lambda = \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_l i^l j_l(\kappa x) \sqrt{2l+1} \sum_{JM} < l01m_\lambda | JM > \mathcal{Y}_{lJ}^M(\hat{x}). \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

J	$m_\lambda = 1$	$m_\lambda = 0$	$m_\lambda = -1$
$ J +1$	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$\sqrt{\frac{(l-M+1)(l+M+1)}{(2l+1)(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$
$ J $	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M+1)}{2l(l+1)}}$	$\frac{M}{\sqrt{l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l-M)(l+M+1)}{2l(l+1)}}$
$ J -1$	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{2l(2l+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(l-M)(l+M)}{l(2l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l+M)}{2l(l+1)}}$

Tabella F.1: Valori dei coefficienti di Clebsh-Gordan $\langle l01m_\lambda | JM \rangle$.

Ricordiamo ora che $|J - 1| < l < J + 1$, quindi nell'espressione precedente possiamo esplicitare la sommatoria su l scrivendo semplicemente la somma dei tre termini corrispondenti ai valori $l = |J - 1|, J, J + 1$ ed otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_\lambda = & \sqrt{4\pi} \sum_{JM} \{ i^{|J-1|} j_{|J-1|}(\kappa x) \sqrt{2|J-1|+1} \langle |J-1|01m_\lambda | JM \rangle \mathcal{Y}_{|J-1|J}^M(\hat{x}) + \\ & + i^J j_J(\kappa x) \sqrt{2J+1} \langle J01m_\lambda | JM \rangle \mathcal{Y}_{JJ}^M(\hat{x}) + \\ & + i^{J+1} j_{J+1}(\kappa x) \sqrt{2(J+1)+1} \langle (J+1)01m_\lambda | JM \rangle \mathcal{Y}_{(J+1)J}^M(\hat{x}) \} . \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Nel caso $m_\lambda = 0$ i coefficienti di Clebsh-Gordan sono non nulli solo quando $M = 0$. Dunque, dalla Tabella (F.1) ricaviamo:

$$\langle |J-1|010 | J0 \rangle = \sqrt{\frac{J}{2|J-1|+1}} , \quad (\text{F.11})$$

$$\langle J010 | J0 \rangle = 0 , \quad (\text{F.12})$$

$$\langle (J+1)010 | J0 \rangle = \sqrt{\frac{J+1}{2(J+1)+1}} . \quad (\text{F.13})$$

Allora, la (F.10) per $m_\lambda = 0$ diventa:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_3 = & \sqrt{4\pi} \sum_J \{ i^{|J-1|} j_{|J-1|}(\kappa x) \sqrt{J} \mathcal{Y}_{|J-1|J}^0(\hat{x}) + \\ & + i^{J+1} j_{J+1}(\kappa x) \sqrt{J+1} \mathcal{Y}_{(J+1)J}^0(\hat{x}) \} . \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Nel caso $m_\lambda = \pm 1$ i coefficienti di Clebsh-Gordan della (F.10) sono non nulli per $M = m_\lambda$ e $J \neq 0$. In particolare, dalla Tabella (F.1) ricaviamo:

$$\langle (J-1)01m_\lambda | Jm_\lambda \rangle = \sqrt{\frac{J(J+1)}{[2(J-1)+1][2(J-1)+2]}}, \quad (\text{F.15})$$

$$\langle J01m_\lambda | Jm_\lambda \rangle = -\frac{m_\lambda}{\sqrt{2}}, \quad (\text{F.16})$$

$$\langle (J+1)01m_\lambda | Jm_\lambda \rangle = \sqrt{\frac{J}{2[2(J+1)+1]}}. \quad (\text{F.17})$$

Quindi, la (F.10) per $m_\lambda = \pm 1$ diventa:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_{\pm 1} = & \sqrt{4\pi} \sum_{J \geq 1} \left\{ i^{(J-1)} j_{(J-1)}(\kappa x) \sqrt{\frac{J+1}{2}} \mathcal{Y}_{(J-1)J}^{m_\lambda}(\hat{x}) + \right. \\ & + i^J j_J(\kappa x) \sqrt{2J+1} \frac{(-m_\lambda)}{\sqrt{2}} \mathcal{Y}_{JJ}^{m_\lambda}(\hat{x}) + \\ & \left. + i^{J+1} j_{J+1}(\kappa x) \sqrt{\frac{J}{2}} \mathcal{Y}_{(J+1)J}^{m_\lambda}(\hat{x}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

A questo punto, possiamo semplificare le (F.14) e (F.18) sfruttando la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \nabla j_J(\kappa x) Y_{JM}(\hat{x}) = & \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J+1}(\kappa x) \mathcal{Y}_{(J+1)J}^M(\hat{x}) + \\ & + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J-1}(\kappa x) \mathcal{Y}_{(J-1)J}^M(\hat{x}), \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

dalla quale otteniamo:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_3 = \frac{-i\hbar\sqrt{4\pi}}{|\vec{p}|} \sum_J i^J \sqrt{2J+1} \nabla j_J(\kappa x) Y_{J0}(\hat{x}) \quad (\text{F.20})$$

e

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \hat{e}_{\pm 1} = -\sqrt{2\pi} \sum_{J \geq 1} i^J \sqrt{2J+1} \left\{ m_\lambda j_J(\kappa x) \mathcal{Y}_{JJ}^{m_\lambda}(\hat{x}) + \frac{\hbar}{|\vec{p}|} \nabla \times j_J(\kappa x) \mathcal{Y}_{JJ}(\hat{x}) \right\}. \quad (\text{F.21})$$

Appendice **G**

Calcolo dei coefficienti elettronici

In questa appendice riportiamo i calcoli relativi ai coefficienti leptonici $|K^{00}|^2$, $|K^{33}|^2, \dots$ che compaiono nella (5.15). Sfrutteremo quindi i risultati (5.20), (5.21) e (5.22) e le proprietà delle matrici γ di Dirac presentate in Appendice A.

Per il termine $|K^{00}|^2$, dalla (5.20) abbiamo:

$$\begin{aligned}
 |K^{00}|^2 &= \\
 &= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\chi \gamma^0 \gamma^0\} - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\chi \gamma^0 \gamma^5\} \right] = \\
 &= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi\} - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^5\} \right] = \\
 &= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} (4\eta^{\alpha\chi}) = \frac{2 p_2 \cdot p_1}{m_e^2 c^2},
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

con p_1 e p_2 quadrimpulsi dei due elettroni emessi nel $0\nu\beta\beta$. Nella precedente espressione abbiamo utilizzato la relazione $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{I}_{4 \times 4}$ e le proprietà della traccia [Pes95]:

$$\begin{aligned}
 Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} &= 4\eta^{\mu\nu}; \\
 Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5\} &= 0.
 \end{aligned} \tag{G.2}$$

Osservando che dalla (A.1) discende l'uguaglianza $\gamma^3\gamma^3 = -\mathbb{I}_{4\times 4}$, si può dimostrare che anche per $|K^{33}|^2$ si giunge al risultato ottenuto nella (G.1), cioè:

$$|K^{33}|^2 = \frac{2 p_2 \cdot p_1}{m_e^2 c^2}. \quad (\text{G.3})$$

Per calcolare i termini del tipo $|K^{\lambda\lambda'}|^2$ con $\lambda, \lambda' = \pm 1$, introduciamo dapprima le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned} \gamma^+ &= \gamma^1 + i\gamma^2, \\ \gamma^- &= \gamma^1 - i\gamma^2, \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

da cui discendono le relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma^+ \gamma^+ &= \gamma^- \gamma^- = 0, \\ \gamma^+ \gamma^- &= -2(1 + i\gamma^1 \gamma^2), \\ \gamma^- \gamma^+ &= -2(1 - i\gamma^1 \gamma^2); \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

da cui discende immediatamente che $K^{++} = K^{--} = 0$.

Utilizzando le proprietà (G.5), otteniamo ancora che:

$$\begin{aligned} |K^{+-}|^2 &= \\ &= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^+ \gamma^- \gamma^\chi \gamma^- \gamma^+\} - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^+ \gamma^- \gamma^\chi \gamma^- \gamma^+ \gamma^5\} \right] = \\ &= \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi + i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi - i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 + \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\} = \\ &= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[4\eta^{\alpha\chi} + i8(\eta^{\alpha 1}\eta^{\chi 2} - \eta^{\alpha 2}\eta^{\chi 1}) + Tr\{\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\} \right] = \\ &= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[4\eta^{\alpha\chi} + i8(\eta^{\alpha 1}\eta^{\chi 2} - \eta^{\alpha 2}\eta^{\chi 1}) - 8\eta^{\alpha 1}\eta^{\chi 1} - 8\eta^{\alpha 2}\eta^{\chi 2} - 4\eta^{\alpha\chi} \right] = \\ &= -\frac{16}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} (\eta^{\alpha 1} + i\eta^{\alpha 2}) p_{1\chi} (\eta^{\chi 1} - i\eta^{\chi 2}) = \\ &= -\frac{16 p_2^+ p_1^-}{m_e^2 c^2}; \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

mentre:

$$\begin{aligned}
|K^{-+}|^2 &= \\
&= \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2_\alpha} p_{1_\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^- \gamma^+ \gamma^\chi \gamma^+ \gamma^-\} - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^- \gamma^+ \gamma^\chi \gamma^+ \gamma^- \gamma^5\} \right] = \\
&= \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2_\alpha} p_{1_\chi} Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi - i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi + i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 + \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\} = \\
&= \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2_\alpha} p_{1_\chi} \left[4\eta^{\alpha\chi} - i8(\eta^{\alpha 1}\eta^{\chi 2} - \eta^{\alpha 2}\eta^{\chi 1}) + Tr\{\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\} \right] = \\
&= \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2_\alpha} p_{1_\chi} \left[4\eta^{\alpha\chi} - i8(\eta^{\alpha 1}\eta^{\chi 2} - \eta^{\alpha 2}\eta^{\chi 1}) - 8\eta^{\alpha 1}\eta^{\chi 1} - 8\eta^{\alpha 2}\eta^{\chi 2} - 4\eta^{\alpha\chi} \right] = \\
&= -\frac{16}{m_e^2 c^2} p_{2_\alpha} (\eta^{\alpha 1} - i\eta^{\alpha 2}) p_{1_\chi} (\eta^{\chi 1} + i\eta^{\chi 2}) = \\
&= -\frac{16 p_2^- p_1^+}{m_e^2 c^2};
\end{aligned} \tag{G.7}$$

dove per calcolare la $Tr\{\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\}$ abbiamo utilizzato il risultato (5.21).

Osserviamo infine che nelle (G.6) e (G.7), i termini $Tr\{\gamma^\alpha \gamma^+ \gamma^- \gamma^\chi \gamma^- \gamma^+ \gamma^5\}$ e $Tr\{\gamma^\alpha \gamma^- \gamma^+ \gamma^\chi \gamma^+ \gamma^- \gamma^5\}$ sono entrambi nulli, infatti, ad esempio:

$$\begin{aligned}
Tr\{\gamma^\alpha \gamma^+ \gamma^- \gamma^\chi \gamma^- \gamma^+ \gamma^5\} &= \\
&= Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^5 - i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^5 + i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 \gamma^5 + \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 \gamma^5\} = \tag{G.8} \\
&= -i4\varepsilon^{\alpha 1 2 \chi} + i4\varepsilon^{\alpha \chi 1 2} = 0
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà di totale antisimmetria del tensore di Levi-Civita a quattro indici, la relazione (5.22), le proprietà (G.2) e la seguente:

$$Tr\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5\} = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{G.9}$$

Inoltre,abbiamo:

$$\begin{aligned}
& K^{+-} (K^{-+})^* = \\
& = \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^+ \gamma^- \gamma^\chi \gamma^+ \gamma^-\} - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^+ \gamma^- \gamma^\chi \gamma^+ \gamma^- \gamma^5\} \right] = \\
& = \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi + i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi + i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 - \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\} \right. \\
& \quad \left. - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^5 + i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^5 + i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 \gamma^5 - \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 \gamma^5\} \right] = \\
& = \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[4\eta^{\alpha\chi} + i4(\eta^{\alpha 1} \eta^{2\chi} - \eta^{\alpha 2} \eta^{1\chi}) + i4(-\eta^{\alpha 1} \eta^{2\chi} + \eta^{\alpha 2} \eta^{1\chi}) \right. \quad (G.10) \\
& \quad \left. - 4(-2\eta^{\alpha 1} \eta^{1\chi} - 2\eta^{\alpha 2} \eta^{2\chi} + \eta^{\alpha\chi}) - 4\varepsilon^{\alpha 1 2\chi} - 4\varepsilon^{\alpha\chi 12} \right] = \\
& = \frac{16}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} (\eta^{\alpha 1} \eta^{1\chi} + 2\eta^{\alpha 2} \eta^{2\chi} - \varepsilon^{\alpha\chi 12}) = \\
& = \frac{16}{m_e^2 c^2} (p_2^1 p_1^1 + p_2^2 p_1^2) = \\
& = \frac{8}{m_e^2 c^2} (p_2^+ p_1^- + p_2^- p_1^+)
\end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
& K^{-+} (K^{+-})^* = \\
& = \frac{1}{2m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^- \gamma^+ \gamma^\chi \gamma^- \gamma^+\} - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^- \gamma^+ \gamma^\chi \gamma^- \gamma^+ \gamma^5\} \right] = \\
& = \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi - i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi - i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 - \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2\} \right. \\
& \quad \left. - Tr\{\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^5 - i\gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^5 - i\gamma^\alpha \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 \gamma^5 - \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^\chi \gamma^1 \gamma^2 \gamma^5\} \right] = \\
& = \frac{2}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} \left[4\eta^{\alpha\chi} - i4(\eta^{\alpha 1} \eta^{2\chi} - \eta^{\alpha 2} \eta^{1\chi}) - i4(-\eta^{\alpha 1} \eta^{2\chi} + \eta^{\alpha 2} \eta^{1\chi}) \right. \quad (G.11) \\
& \quad \left. - 4(-2\eta^{\alpha 1} \eta^{1\chi} - 2\eta^{\alpha 2} \eta^{2\chi} + \eta^{\alpha\chi}) + 4\varepsilon^{\alpha 1 2\chi} + 4\varepsilon^{\alpha\chi 12} \right] = \\
& = \frac{16}{m_e^2 c^2} p_{2\alpha} p_{1\chi} (\eta^{\alpha 1} \eta^{1\chi} + 2\eta^{\alpha 2} \eta^{2\chi} + \varepsilon^{\alpha\chi 12}) = \\
& = \frac{16}{m_e^2 c^2} (p_2^1 p_1^1 + p_2^2 p_1^2) = \\
& = \frac{8}{m_e^2 c^2} (p_2^+ p_1^- + p_2^- p_1^+).
\end{aligned}$$

dove abbiamo considerato $p_{2\alpha} p_{1\chi} \varepsilon^{\alpha\chi 12} = 0$ sfruttando la proprietà secondo la quale il prodotto di un tensore simmetrico per un tensore antisimmetrico, come quello di Levi-Civita, è sempre nullo.

Bibliografia

- [Ack11] N. Ackerman et al. (EXO Collaboration). Observation of Two-Neutrino Double-Beta Decay in Xe-136 with EXO-200. *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011).
- [Bar10] A. S. Barabash. Precise half-life values for two neutrino double beta decay. *Phys. Rev. C* 81 (2010).
- [Bot04] A. Botrugno, *Interazione neutrino-nucleo*, PhD thesis, University of Salento, (2004).
- [Edm57] A.R.Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press , Princeton, (1957)
- [Fet71] A.L.Fetter, J.D.Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, Mc Graw-Hill, New York (1971).
- [Fey58] R. P. Feynman, M. Gell-Mann, *Theory of the Fermi Interaction*, *Phys. Rev.*, 109, 193–198 (1958).
- [Ger76] The GERDA Collaboration et al., Measurement of the half-life of the two-neutrino double beta decay of ^{76}Ge with the GERDA experiment, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 40 035110 (2013).

- [Gro90] K.Grotz, H.V.Klapdor, *The weak interaction in Nuclear, Particle and Astrophysics*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [Lbn02] LBNL Isotopes Project Nuclear Data Dissemination Home Page.
Retrieved March 11, 2002, from <http://ie.lbl.gov/toi.html>
- [Men08] J.Menendez, A.Poves, E.Caurier and F.Nowacki, Nucl. Phys. A818 (2009) 139.
- [Pdg14] K. A. Olive et al., Particle Data Group Collaboration, Chin. Phys. C, 38, 090001, (2014) .
- [Per03] D. Perkins, *Particle Astrophysics*, Oxford University Press, (2003).
- [Pes95] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Perseus Books, (1995).
- [Suh07] J. Suhonen, *From Nucleons to Nucleus*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York (2007).
- [Suh98] J. Suhonen, O. Civitarese, *Weak-interaction and nuclear-structure aspects of nuclear double beta decay*, Phys. Rept. 300 (1998) 123-214.
- [Wei95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, (1995).