



Università del Salento

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Correlazioni tra diversi tipi di osservazioni nella ricerca di materia oscura

Candidato:

Francesco Foggetti

Relatore:

Giampaolo Co

Correlatori:

Paolo Ciafaloni

Luca Girlanda

Sommario

Sin dagli anni '30 del secolo scorso si è accumulata evidenza di anomalie di tipo gravitazionale su scale galattiche ed oltre. È ormai chiaro che tali anomalie non sono spiegabili mediante i modelli standard cosmologico e delle particelle. La spiegazione più accreditata dalla comunità scientifica per questo tipo di anomalia è l'esistenza di un tipo di materia le cui proprietà sono ancora sconosciute, la materia oscura.

In questa tesi si suppone che la materia oscura sia composta da una particella neutra pesante (massa maggiore di circa 100 GeV), fermione di Dirac e singoletto del gruppo di gauge del Modello Standard. Nell'ambito di un modello originale per le interazioni fra materia oscura e materia ordinaria, si analizzano le correlazioni fra la storia termica dell'Universo e i possibili segnali diretti di laboratorio.

Nel dettaglio, dopo aver descritto il modello preso in esame (nel quale l'interazione fra materia oscura e materia ordinaria avviene tramite lo scambio di una particella scalare), si calcola la sezione d'urto di annichilazione della materia oscura e quindi la densità fossile, cioè la densità di materia oscura prodotta nelle prime fasi del Big Bang. Tenendo conto dei vincoli sui parametri del modello che derivano dal richiedere che la densità così calcolata sia pari a quella osservata, si calcola la sezione d'urto di diffusione elastica materia oscura - nuclei, rilevante per calcolare il tasso di interazione di esperimenti di ricerca diretta, quali "Darkside" e "Xenon100". Per via della presenza di scale di energia enormemente diverse (ad esempio la scala di massa della materia oscura 100 GeV e l'energia caratteristica degli esperimenti di rivelazione diretta, 1 – 100 keV), nella tesi si fa largo uso del formalismo delle Lagrangiane effettive.

Le conclusioni di questo lavoro sono che, nell'ambito del modello considerato, se supponiamo che la materia oscura sia stata prodotta con un meccanismo legato alla storia termica dell'Universo, la predizione per il numero di eventi di ricerca diretta è paragonabile ai limiti derivanti dagli esperimenti attuali di laboratori sotterranei. In particolare in questo lavoro si pone un limite inferiore alla massa della materia oscura dell'ordine dei 100 – 150 GeV.

Abstract

A great number of gravitational anomalies has been detected since the '30s of last century on galactic scales and over. These anomalies can't be explained with the cosmological standard model and the standard model of particles. In the scientific community the most popular explanation for this kind of anomaly is the existence of a new type of particle whose properties are still unknown, the dark matter.

In this thesis dark matter is supposed to be made of a neutral heavy (with mass greater than 100 GeV) particle that is a Dirac's fermion and a singlet of the gauge group of the Standard Model. By using an original model for the interactions between dark matter and ordinary matter, correlations between the thermal history of the Universe and possible direct signal in the laboratory are analysed.

After building and describing the considered model (in which dark matter interacts with ordinary matter by exchanging a scalar particle), the annihilation cross section of dark matter and its relic density, the density of dark matter made after the first phases of the Big Bang, are calculated. The parameters of the model are bounded by imposing that the calculated relic density is equal to the observed one, then the elastic scattering cross section between dark matter and nuclei is calculated. This cross section is needed to calculate the interaction rate of direct detection experiment, such as "Darkside" and "Xenon100". Because of the greatly different energy scales (e.g. the mass scale of dark matter is about 100 GeV while the energy range of direct detection experiment may be 1 – 100 keV) effective lagrangians are widely used.

In conclusion, according to the used model, if dark matter is supposed to be made with a mechanism related to the thermal history of the Universe, the prediction for direct detection interaction rate is comparable with experimental limits obtained by actual experiments. Finally a lower limit to the mass of dark matter of 100 – 150 GeV is given.

Indice

Introduzione	5
1 Indicazioni non cosmologiche di Materia Oscura	8
1.1 Curve di rotazione ed ipotesi di DM	8
1.2 Osservazione stellare e spettroscopia	9
1.2.1 Spettroscopia di stelle e galassie	9
1.2.2 Effetto Doppler e il moto delle galassie	10
1.3 Misure di velocità	11
1.4 Discrepanza tra curve di rotazione e previsione teorica	12
1.5 Lensing Gravitazionale	12
1.5.1 Lensing gravitazionale nel Bullet Cluster	14
1.6 Altre evidenze di materia oscura	15
2 Indicazioni cosmologiche di Materia Oscura	17
2.1 L'Universo e la sua evoluzione	17
2.1.1 Espansione dell'Universo e redshift	17
2.1.2 Isotropia ed Omogeneità dell'Universo	20
2.1.3 Termodinamica e storia termica dell'Universo	21
2.1.4 Entropia dell'Universo	22
2.1.5 Legame tra tempo e temperatura	26
2.2 Radiazione cosmica di fondo	26
2.2.1 Densità di materia a partire dalla CMB	27
3 L'ipotesi WIMP	31
3.1 L'ipotesi particellare	31
3.2 Il ruolo dei neutrini e la hot dark matter	32
3.3 Possibili candidati di materia oscura non barionica	33
3.4 Densità fossile di particelle non relativistiche	34
3.4.1 Modello di Densità fossile	34
3.5 Interpretazione fisica del freeze-out	40
4 Il modello di DM	42
4.1 Lagrangiana di interazione con la materia ordinaria	42
4.2 Lagrangiana effettiva di materia oscura	44
4.2.1 Teorie effettive	46
4.2.2 Costruire una lagrangiana effettiva	46
4.2.3 La lagrangiana effettiva di DM	48
4.3 Sezione d'urto d'annichilazione	49
4.4 Vincoli dettati dalla Relic Density	54

5	Rivelazione diretta	56
5.1	Interazione DM-Nucleone	56
5.2	Interazione tra nucleoni a bassa energia	57
5.2.1	Simmetria Chirale	57
5.2.2	Proprietà di trasformazione dei Bosoni di Goldstone	59
5.2.3	Lagrangiana Chirale	59
5.3	Composizione della lagrangiana effettiva e della lagrangiana chirale	62
5.4	Lagrangiana chirale nello spazio $SU(3)$	64
5.4.1	Termine vettoriale	64
5.4.2	Termine assiale e Lagrangiana Chirale	66
5.5	Sezione d'urto DM-nucleone	69
5.6	Flusso di materia oscura sulla Terra	74
5.7	Tasso di interazione	74
5.8	Risultati e confronto con i dati sperimentali	77
5.8.1	Tassi di interazione	77
5.8.2	Confronto con i dati sperimentali	78
6	Sintesi e Conclusioni	84
A	Acronimi e simboli	88
B	Matrici di Dirac	90
C	Red shift cosmologico	91
D	Equazione di evoluzione per la densità di una particella	93
E	Ordine successivo della lagrangiana effettiva	96
F	Sviluppo in v della sezione d'urto d'annichilazione	99
G	Scomposizione di Fierz	102
	Bibliografia	104

Introduzione

Un gran numero di misure fatte su scale galattiche e superiori sembra suggerire che la quantità di materia presente nell'Universo sia molto maggiore della materia luminosa che siamo in grado di osservare; per materia luminosa intendiamo tutta quella materia che è possibile osservare mediante la radiazione elettromagnetica da essa emessa, ad esempio stelle, galassie e gas interstellare.

Storicamente si tratta di un problema emerso attorno gli anni '30. Il problema nasce con le osservazioni di Fritz Zwicky che stava studiando la dinamica di grandi ammassi di galassie, detti cluster, in cui le galassie si muovono come fossero particelle all'interno di un gas. Dalle sue osservazioni emerse che le velocità delle galassie erano troppo elevate per rimanere legate gravitazionalmente all'interno del cluster in esame. Dal moto delle galassie gli fu possibile stimare la massa totale del cluster ed osservò che la quantità di massa stimata era molto maggiore di quella visivamente osservabile. È infatti possibile stimare la massa M di un oggetto mediante la sua luminosità L : per una stella vale la relazione $L/L_{\odot} = (M/M_{\odot})^a$, dove a varia in base al tipo di stella ed L_{\odot} e M_{\odot} sono la luminosità e massa del Sole. La massa "luminosa" di una galassia si ottiene confrontando la luminosità della galassia con quelle delle singole stelle che la compongono, la composizione di una galassia in termini di stelle è nota da misure e considerazioni di tipo statistico. Il ragionamento è analogo per la massa visibile di un cluster. Gli effetti gravitazionali osservati da Zwicky non potevano essere giustificati con la sola massa visibile per cui egli ipotizzò che esistesse una grande quantità di materia che non era in grado di osservare e che battezzò Dark Matter (DM) o materia oscura. Le prove a favore dell'ipotesi di DM divennero con il passare del tempo sempre più numerose ed incoraggianti, ne citiamo alcuni esempi.

- Curve di rotazione. È possibile studiare il moto delle stelle all'interno delle galassie, riportando in un grafico la velocità di rotazione delle stelle rispetto al centro galattico al variare della distanza da quest'ultimo è possibile costruire una curva di rotazione. Dallo studio delle curve di rotazione di diverse galassie, supponendo valida la gravità Newtoniana, si osserva un andamento delle velocità delle stelle molto diverso da quello previsto in base alla quantità totale di massa visibile [1].
- Lensing gravitazionale. La relatività generale prevede che la presenza di una massa curvi lo spazio, la luce che viaggia nello spazio risente di questa curvatura variando la sua traiettoria. Così come una comune lente curva un fascio di luce, un oggetto molto massivo, ad esempio un ammasso di galassie, può fungere da lente gravitazionale curvando la luce emessa da una sorgente lontana, ad esempio una galassia. L'entità della curvatura è legata alla massa [2] dell'oggetto che funge da lente; considerando valida la relatività generale si è costretti a supporre che sia presente molta più massa di quella osservata ai fini di giustificare le curvature osservate della luce emessa da galassie ed altre sorgenti luminose.

- Radiazione cosmica di fondo (CMB). La CMB è composta dai fotoni emessi poco dopo il Big Bang quando la materia è diventata trasparente alla radiazione. Lo studio della CMB fornisce informazioni sulla struttura dell'Universo al tempo dell'emissione, come se fosse una fotografia dell'Universo scattata in quel momento. Lo spettro della CMB si adatta perfettamente allo spettro d'emissione di corpo nero a circa $3K$, ma nelle varie direzioni sono presenti delle lievi anisotropie di temperatura dell'ordine di $10^{-4} - 10^{-5} K$. La correlazione angolare di tali fluttuazioni può essere spiegata supponendo che, oltre alla materia ordinaria, esista altra materia non barionica in quantità molto maggiore della prima.

È interessante notare che ognuno di questi problemi potrebbe essere risolto singolarmente anche senza introdurre la materia oscura, ad esempio modificando la gravità per il problema del moto delle galassie. Tuttavia, le soluzioni costruite *ad hoc* risolverebbero uno solo di questi problemi, lasciando gli altri irrisolti. L'introduzione della materia oscura risulta essere una valida risposta a tutti questi problemi contemporaneamente.

In questa tesi adottiamo l'ipotesi di DM particellare che consiste nel supporre che la DM sia costituita da un tipo di particella non presente nel Modello Standard, in particolare si suppone si tratti di un fermione di Dirac neutro, molto massivo (con una massa dell'ordine del centinaio di GeV o superiore) e interagente poco intensamente con la materia ordinaria. In questa ipotesi si suppone che le particelle di DM siano state create durante il Big Bang assieme a tutte le altre particelle, e che con esse si trovassero in condizione di equilibrio termico. Queste particelle hanno interagito con tutte le particelle presenti finché l'Universo espandendosi non è diventato rarefatto al punto da rendere queste interazioni troppo rare. Una volta cessate le interazioni la quantità di DM nell'Universo è rimasta pressoché invariata fino ad oggi, lasciando una densità fossile (relic density) di DM che produce gli effetti che oggi osserviamo. Lo studio della CMB ha permesso di ottenere una stima della relic density (v. capitolo 2). L'interazione della DM con la materia ordinaria è descritta attraverso un modello appositamente costruito. In questo modello si suppone che l'interazione tra materia oscura e materia ordinaria avvenga mediante lo scambio di uno scalare la cui massa Λ è molto maggiore della scala di energia cui supponiamo che le interazioni considerate avvengano. Sotto questa ipotesi si sfrutta il formalismo delle lagrangiane effettive: si scrive la più generale lagrangiana di bassa energia (rispetto a Λ) in cui lo scalare scambiato non compare e si impone che le sue predizioni siano coerenti con quelle del modello scelto. In questo modo è possibile ottenere dal modello scelto una lagrangiana di facile utilizzo che permetta di calcolare le grandezze di interesse del sistema, nel nostro caso la sezione d'urto di annichilazione della materia oscura. L'obiettivo di questa tesi è quindi di analizzare l'interazione tra materia oscura e materia ordinaria. In questa tesi si ottiene un'espressione per la densità fossile di materia oscura ed imponendo che tale espressione sia uguale a quella ottenuta dallo studio della CMB è possibile vincolare i valori dei parametri che compaiono nel modello di interazione adottato. Si introduce poi il formalismo delle lagrangiane chirali che permette la descrizione dell'interazione tra i nucleoni senza ricorrere alla QCD che, a basse energie, non è perturbativa. Tramite le lagrangiane chirali si generalizza il modello adottato affinché possa descrivere l'interazione tra DM e nucleoni, quindi si ottiene un'espressione per la sezione d'urto tra DM e nucleoni. Infine a partire da quest'ultimo risultato si ricavano i tassi di interazione (numero di interazioni al secondo) relativi alla collisione di materia oscura con nuclei atomici di diversi elementi e si confrontano con i risultati di ricerca diretta. Per ricerca diretta si intendono i tentativi della fisica sperimentale di rivelare la presenza di materia oscura nel seguente modo: la Terra è investita da un flusso di materia oscura dovuto al moto relativo del nostro pianeta rispetto al centro della galassia; a causa di tale flusso alcune particelle di materia oscura collidono con la materia ordinaria sul nostro pianeta. Negli esperimenti di

ricerca diretta si costruiscono rivelatori che, investiti dal flusso di materia oscura, cercano di osservare i segnali di interazione attraverso il rinculo dei nuclei atomici colpiti dalla materia oscura.

La struttura della tesi è la seguente:

- Nel capitolo 1 sono descritte le evidenze che hanno portato all'ipotesi dell'esistenza della materia oscura. Si introducono le curve di rotazione delle galassie come prova di maggior rilevanza a favore dell'ipotesi dell'esistenza della materia oscura. Si considera poi il caso del lensing gravitazionale come ulteriore prova dell'esistenza di DM, in particolare viene considerato il caso del lensing provocato da un sistema formato dalla collisione di due ammassi di galassie. Nella fine del capitolo sono presenti altre evidenze della presenza di materia oscura.
- nel capitolo 2 si fornisce una descrizione generale dell'Universo e della sua storia termica. In particolare, si presentano alcune grandezze necessarie al calcolo della relic density. Alla fine del capitolo è considerato il caso della CMB e di come l'analisi delle sue anisotropie di temperatura fornisca una ulteriore prova della presenza di DM nell'Universo.
- Nel capitolo 3 è descritta l'ipotesi particellare secondo la quale la materia oscura è costituita da un particolare tipo di particella massiva e interagente poco intensamente detta WIMP (Weakly Interacting Massive Particle). Si considera separatamente anche il caso del neutrino, non come WIMP ma come *hot dark matter*, materia oscura relativistica, e vengono forniti argomenti che escludono tale particella come unico candidato di materia oscura. Infine si presenta un'espressione analitica della densità fossile che una particella WIMP non relativistica può generare.
- La prima parte del capitolo 4 è dedicata alla presentazione del modello adottato per descrivere l'interazione tra DM e i quark di cui è costituita la materia ordinaria. Subito dopo si introduce il formalismo delle lagrangiane effettive e si costruisce una lagrangiana effettiva coerente con il modello adottato. Questa lagrangiana è poi usata per ottenere la sezione d'urto di annichilazione dello WIMP. La sezione d'urto è inserita nell'espressione della densità fossile ottenuta nel capitolo precedente al fine di ottenere informazioni sui parametri del modello.
- Nel capitolo 5 applichiamo il modello per fare previsioni sulle probabilità di identificare WIMP e confrontarle con i dati di Xenon100 e Darkside, due esperimenti per la rivelazione diretta. Il primo passo consiste nell'introdurre una lagrangiana, detta chirale, che descrive l'interazione tra nucleoni a bassa energia. Utilizzando questa lagrangiana e la lagrangiana che descrive l'interazione WIMP-quark, che è la base del nostro modello, è possibile ottenere l'interazione WIMP-nucleone. Il secondo passo consiste nell'usare questa interazione per ottenere la sezione d'urto WIMP-nucleo. Ottenuta questa sezione d'urto ricaviamo i tassi di interazione che poi confrontiamo con i limiti sperimentali. Il secondo passo consiste nel definire il tasso di interazione di un flusso di WIMP che incide su un generico rivelatore. Si generalizza poi la sezione d'urto WIMP-nucleone, trovata precedentemente, per ottenere la sezione d'urto WIMP-nucleo. Ottenuta questa sezione d'urto ricaviamo i tassi di interazione che poi confrontiamo con i limiti sperimentali.
- Nel capitolo 6 sono riportati in maniera sintetica i risultati di questa tesi e si effettuano le eventuali considerazioni a riguardo.

In questa tesi si utilizza il sistema di unità naturali $\hbar = c = 1$.

Capitolo 1

Indicazioni non cosmologiche di Materia Oscura

L'ipotesi che nell'Universo sia presente una grande quantità di massa non osservata nasce da un gran numero di evidenze sperimentali; in questo capitolo analizzeremo le più importanti, le *curve di rotazione* delle galassie e l'effetto di *lensing gravitazionale* che si osserva nei pressi di grandi ammassi di galassie (cluster).

Nella prima parte del capitolo ci soffermiamo sui dettagli delle misure delle curve di rotazione. L'andamento di queste curve non è spiegabile secondo la legge di gravitazione di Newton e porta all'ipotesi dell'esistenza di un tipo di materia non ancora osservato, la DM che si stima contribuire circa per il 24% alla densità totale di energia dell'Universo [3].

Nella seconda parte del capitolo si forniscono altre evidenze sperimentali. Il caso del *lensing gravitazionale*, in particolare relativamente al Bullet Cluster, è considerato in maggiore dettaglio.

1.1 Curve di rotazione ed ipotesi di DM

Nella figura 1.1 mostriamo la *curva di rotazione* di una galassia a spirale. Si misura la velocità di rotazione di una stella o del gas di cui è composta la galassia in funzione della distanza dal centro galattico e si costruisce un grafico delle velocità così misurate.

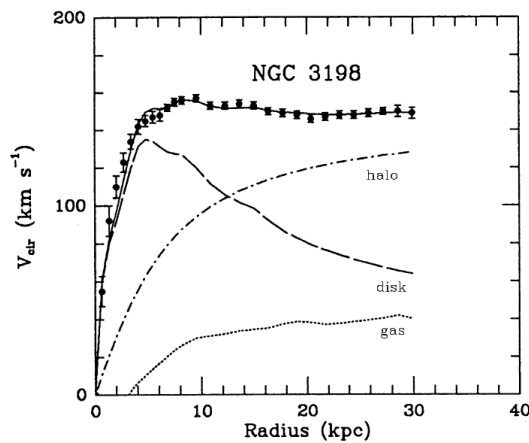


Figura 1.1: Curva di rotazione di NGC 3198 [1]. Dal basso verso l'alto sono rappresentati rispettivamente i contributi del gas di polveri interstellari, del disco visibile della galassia, dell'alone di DM e infine la loro somma.

Poiché la massa di una galassia sembra essere maggiormente concentrata al suo centro e sempre più rarefatta allontanandosi da esso ci si aspetta un andamento della velocità del tipo $v \approx 1/\sqrt{r}$ in quelle zone in cui la densità di stelle è molto rarefatta, similmente a come avviene nel sistema solare. In figura 1.1 invece osserviamo che all'aumentare della distanza la distribuzione si appiattisce, come se un alone di materia non visibile riempisse la galassia. La linea continua è la curva costruita a partire dai dati sperimentali e rappresenta le velocità misurate sperimentalmente, le linee tratteggiate invece rappresentano separatamente quelle che dovrebbero essere le velocità dell'alone di DM (halo), del disco visibile della galassia (disk) e del gas di polveri interstellari (gas).

Elenchiamo alcune ipotesi che spieghino la presenza di queste anomalie, quasi tutte introducono DM.

- Idrogeno molecolare. L' H_2 è presente nelle nubi di gas che compongono il mezzo interstellare, ed essendo difficile da rilevare può fornire un contributo alla quantità totale di DM. Tuttavia esso non è presente ovunque [4] ed il suo contributo alla quantità totale di materia oscura è esiguo. Se chiamiamo Ω la densità di una certa specie di particella, per l'idrogeno molecolare risulta $\Omega_{H_2} \leq 0.01$ mentre per la DM $\Omega_\chi = 0.235$.
- MACHO (*Massive Astrophysical Compact Halo Objects*). Si tratta di oggetti poco luminosi presenti negli aloni delle galassie, esempi di MACHO possono essere pianeti, stelle di neutroni, buchi neri e stelle a bassa luminosità. I MACHO possono rappresentare una piccola percentuale (1 – 2%) della massa dell'alone galattico in cui si trovano [5], per cui possono contribuire solo per una piccola percentuale alla quantità totale di DM.
- MOND (MODified Newtonian Dynamics) [6]. Piuttosto che postulare l'esistenza di un nuovo tipo di materia è possibile costruire un modello fenomenologico che considera non più valida la gravità newtoniana a grandi distanze e descrive i dati sperimentali. Per considerare valido questo modello occorre però violare l'invarianza di Lorentz e principio di equivalenza.
- Ipotesi WIMP. Si suppone che la materia oscura sia prevalentemente costituita da un tipo di particella non presente nel Modello Standard, cui ci si riferisce spesso con WIMP (Weakly Interacting Massive Particle). Non si tratta quindi di materia barionica e tale ipotesi può spiegare gran parte della densità odierna di DM. Prove a favore di queste ipotesi sono date anche dall'attuale modello di Universo in cui è prevista la presenza di materia oscura “fredda” (non relativistica) non barionica. Nella sezione 3.3 mostriamo alcuni dei possibili candidati di materia oscura, ma in questo elaborato non ne selezioniamo uno in particolare.

1.2 Osservazione stellare e spettroscopia

La maggior parte delle informazioni che ci giungono dallo spazio arrivano sotto forma di radiazione, è quindi naturale discutere delle modalità secondo cui è possibile analizzare tali informazioni. In questa sezione forniamo i concetti più importanti al fine di saper interpretare l'informazione fornita dalla luce stellare.

1.2.1 Spettroscopia di stelle e galassie

È possibile ottenere informazioni su stelle e galassie analizzando la luce da esse emessa. Analizzando, ad esempio, lo spettro di una stella è possibile notare la presenza di righe di

emissione e di assorbimento dovute al fatto che i gas che la compongono assorbono energia solo in certe lunghezze d'onda e una volta eccitati la riemettono (fig.1.2).



Figura 1.2: spettro di emissione ed assorbimento dell'idrogeno

Fondamentalmente tale analisi avviene canalizzando, attraverso un collimatore e un telescopio, la luce del corpo celeste da osservare verso un prisma che ne separa le differenti lunghezze d'onda. Un rivelatore poi analizza l'intensità della radiazione al variare della lunghezza d'onda (fig. 1.3).

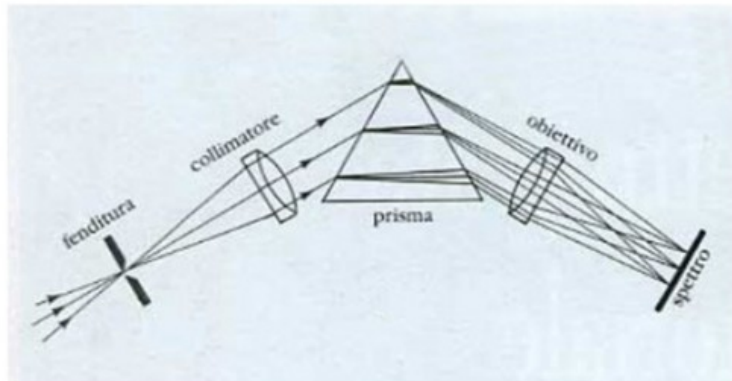


Figura 1.3: Riproduzione schematizzata di un apparato per scomporre ed analizzare la luce

Identificando le righe dello spettro è possibile avere informazioni su quali elementi compongono gli oggetti osservati; mostriamo ora come è anche possibile ottenere informazioni sul moto di stelle e galassie analizzandone lo spettro.

1.2.2 Effetto Doppler e il moto delle galassie

La radiazione emessa da sorgenti in movimento ad una certa lunghezza d'onda λ è soggetta all'effetto doppler. La lunghezza d'onda osservata risente del moto relativo di sorgente ed osservatore, aumentando se la sorgente si allontana e diminuendo se si avvicina. La relazione tra lunghezza d'onda osservata λ_0 ed emessa dalla sorgente λ è descritta dall'equazione

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{v_s}{c}, \quad (1.1)$$

dove v_s è la velocità della sorgente nella direzione dell'osservatore definita positiva se in allontanamento e negativa se in avvicinamento e c è la velocità della luce nel vuoto (la velocità dell'onda soggetta all'effetto doppler nel mezzo in cui si propaga).

Studiando lo spettro delle galassie (in maniera più evidente in quelle a spirale) si osserva un doppio spostamento delle righe (fig. 1.4).

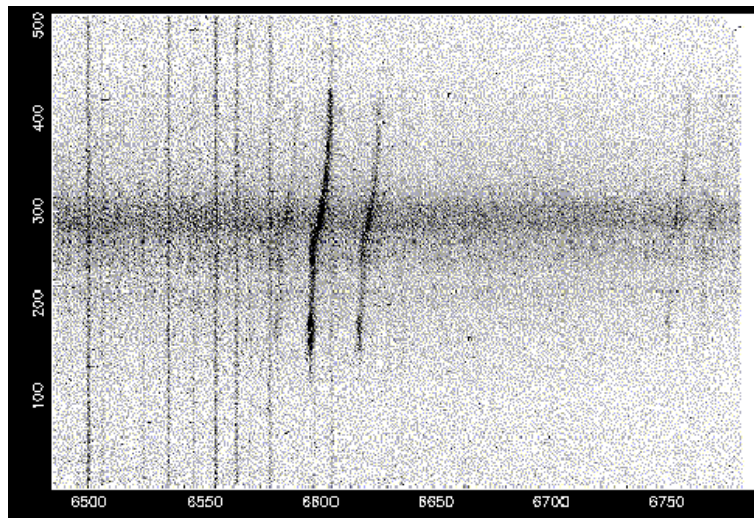


Figura 1.4: Spostamento delle righe di una galassia a spirale, in ascissa è riportata la lunghezza d'onda delle righe osservate (in Angstrom) in ordinata la distanza tra i due estremi della galassia (in kPc). Le righe dello spettro di una galassia appaiono inclinate a causa dell'effetto Doppler, le stelle che contribuiscono alle righe osservate hanno velocità differenti nel piano dell'osservatore. Le stelle che risultano avvicinarsi all'osservatore causano lo spostamento verso sinistra (verso il blu) delle righe dello spettro, le stelle invece che si allontanano dall'osservatore causano lo spostamento verso destra (verso il rosso) delle righe.

Sulle ascisse compare la lunghezza d'onda delle righe osservate, sulle ordinate invece la distanza lungo l'asse maggiore della galassia in corrispondenza del quale è posizionata la fenditura per catturare la luce. Osserviamo che le righe dello spettro appaiono inclinate, come a formare una S, questo perché nei diversi punti della galassia considerata le stelle che la compongono hanno velocità radiali differenti; le stelle che contribuiscono alle righe nella parte superiore dello spettro si stanno allontanando dall'osservatore, quelle nella parte inferiore si avvicinano.

La presenza di righe inclinate ci fa comprendere quindi che gli oggetti all'interno della galassie ruotano attorno il centro della galassia stessa. Eliminando dall'equazione (1.1) il contributo del redshift (che mostreremo nel prossimo capitolo) causato dall'espansione dell'Universo è possibile misurare le velocità dei corpi osservati confrontando le lunghezze d'onda misurate con quelle che gli spettri dovrebbero avere se non ci fosse il moto.

1.3 Misure di velocità

La misura delle velocità nelle galassie avviene mediante l'effetto doppler, elenchiamo alcune delle righe più utilizzate in questo tipo di misura.

- La linea $H\alpha$ dell'idrogeno di lunghezza d'onda $\lambda = 656 \text{ nm}$, emessa quando l'idrogeno ionizzato presente nelle stelle o nelle nubi galattiche si ricombina ad un elettrone liberando energia.

- La linea HI di lunghezza d'onda $\lambda = 21,11\text{ cm}$, è dovuta ad un fotone emesso dall'idrogeno neutro durante la transizione in cui gli spin di elettrone e protone passano da paralleli ad antiparalleli. Tale transizione avviene circa ogni 10^7 anni per cui non si osserva tale riga in laboratorio, ma il grande numero di atomi di idrogeno nello spazio permette la sua osservazione. Lo spostamento doppler di questa linea è largamente utilizzato per misurare la velocità di ammassi di gas lì dove non sono presenti stelle inoltre le polveri interstellari sono opache alla luce visibile ma trasparenti a questa lunghezza d'onda.
- Le righe emesse da altri gas ionizzati; ad esempio NII dell'azoto, SII dello zolfo, SiVI del silicio [7].
- Linee di emissione appartenenti a spettri di molecole formatasi in stelle più fredde e nel mezzo interstellare (es. CO, SiO).

A queste righe vanno aggiunte tutte quelle appartenenti allo spettro visibile rilevabili analizzando la luce di una stella.

1.4 Discrepanza tra curve di rotazione e previsione teorica

Confrontiamo ora le curve di rotazione osservate con quelle previste teoricamente. Consideriamo valida la gravità Newtoniana. Detta $M(r)$ la massa racchiusa in sfera di raggio r dal centro di gravità della galassia e $v(r)$ la velocità di rotazione attorno al centro risulta

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (1.2)$$

Se supponiamo che la massa di una galassia sia maggiormente concentrata al centro di essa (dove probabilmente è situato un enorme buco nero), il moto delle stelle in una galassia dovrà essere simile a quello dei pianeti nel nostro sistema solare, con una velocità che decresce con la distanza come $1/\sqrt{r}$.

Contrariamente a questa previsione, misurando le velocità dei vari oggetti che compongono la galassia in esame si osserva, al crescere della distanza, una distribuzione che tende ad un valore costante. Un tale comportamento della distribuzione dovrebbe implicare una massa che cresce con la distanza dal centro del sistema a dispetto dell'osservazione diretta che invece non osserva corpi celesti a sufficienza per giustificare tali velocità. Questa discrepanza implica quindi l'esistenza di un alone di materia che, pur non essendo osservato direttamente, riempie le galassie e compensa al difetto di massa osservato dando quindi forza all'ipotesi dell'esistenza di materia oscura. Con il tempo sempre più misure hanno presentato la stessa caratteristica, confermando la ragionevolezza dell'ipotesi. La figura (1.1) riportata all'inizio del capitolo mostra la curva di rotazione relativa alla galassia NGC 3198 separando i contributi di materia visibile e DM.

1.5 Lensing Gravitazionale

Per "lensing gravitazionale" si intende il fenomeno secondo il quale un fascio di luce viene deflesso dalla presenza di una massa. Secondo la relatività generale un raggio luminoso che

passa ad una distanza R da una massa M verrà deflesso di un angolo [2]

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R}, \quad (1.3)$$

dove G è la costante di Newton e c la velocità della luce. In pratica, la presenza di una massa curva la traiettoria della luce che ad essa passa vicina comportandosi in maniera analoga ad una lente ottica.

La presenza di G al numeratore e c^2 al denominatore della (1.3) fa sì che gli effetti di curvatura siano osservabili solo in presenza di masse relativamente grandi. Stelle, galassie ed ammassi di galassie sono oggetti talmente massivi da permettere l'osservazione di questi fenomeni. Tipicamente il lensing gravitazionale è classificato in tre categorie.

- *Strong lensing*: si tratta dell'effetto più evidente, la curvatura della luce è tale da permettere la formazione immagini di ben definite ai bordi della lente. Si verifica quando la lente è molto massiva (una galassia o un ammasso di galassie) e la sorgente la lente e l'osservatore sono sufficientemente allineati (fig.1.5).
- *Weak lensing*: è l'effetto per cui si osservano piccole distorsioni delle immagini situate vicino alla lente. Si verifica in presenza di lenti massive, come galassie e ammassi, tuttavia sorgente di luce, lente ed osservatore non sono allineati come nel caso precedente (fig.1.6).
- *Micro lensing*: quest'effetto è causato da lenti gravitazionali relativamente piccole, quali ad esempio stelle e pianeti. La deflessione della luce che è soggetta a microlensing è troppo piccola affinché sia identificabile mediante gli attuali telescopi. Spesso però accade che sorgente e lente siano in moto relativo, per cui è possibile osservare e misurare le variazioni della luminosità della sorgente.

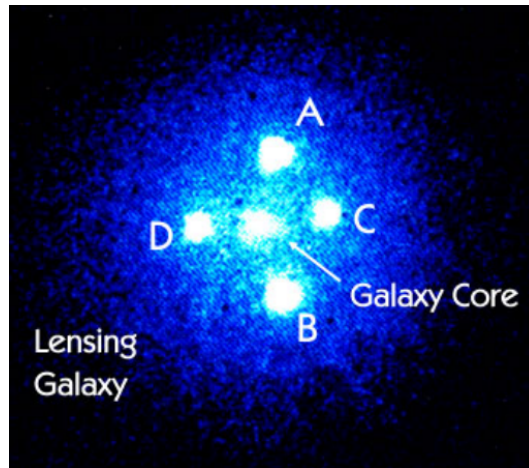


Figura 1.5: Esempio di *strong lensing*: la presenza di una galassia interposta tra l'osservatore e la sorgente luminosa osservata fa sì che si produca un'immagine multipla ai bordi della lente. Una figura di questo tipo è anche detta *croce di Einstein*.

Il motivo per cui siamo interessati al fenomeno del lensing gravitazionale è che grazie ad esso è possibile stimare la distribuzione della massa in una galassia o in un ammasso di galassie (per un'analisi più dettagliata a riguardo si può consultare [8]).

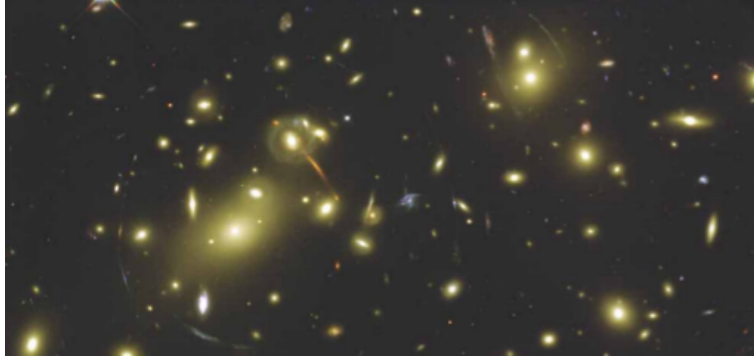


Figura 1.6: Esempio di *weak lensing*: la materia interposta tra le sorgenti osservate e l'osservatore funge da lente gravitazionale provocando distorsioni nelle forme delle galassie. Nella figura in questione è possibile notare un gran numero di archi luminosi dovuto a quest'effetto di deformazione.

1.5.1 Lensing gravitazionale nel Bullet Cluster

Gli ammassi di galassie, anche detti cluster, sono tra gli oggetti più massivi nell'Universo; per questo motivo costituiscono degli ottimi candidati per osservare effetti di lensing gravitazionale.

In particolare considereremo il caso dell'ammasso 1E0657-558, anche detto "Bullet Cluster" [9]. Esso consiste di due ammassi separati che sono entrati in collisione (fig.1.7). Questa colli-

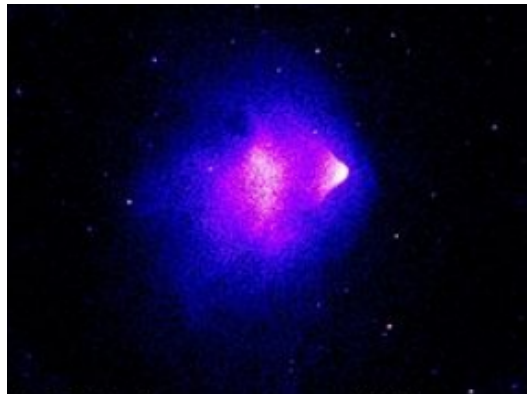


Figura 1.7: Fotografia a raggi X di 1E0657-558; le parti in viola rappresentano il gas dei due ammassi che sono entrati in collisione. Il gas in questione rappresenta la maggior parte della materia barionica nel cluster.

sione dei due cluster produce effetti differenti in base alla tipologia della materia che compone il cluster.

- Le stelle e le galassie possono interagire solo gravitazionalmente. Per questo motivo, durante la collisione, si comportano come fossero particelle non interagenti all'interno di un gas e procedono nella direzione del moto dei rispettivi cluster.
- Supponendo che nel cluster sia presente una grande quantità di DM essa partecipa alla collisione allo stesso modo di stelle e galassie, quasi senza interagire.
- Il gas ionizzato diffuso all'interno dei due ammassi costituisce la maggior parte della materia barionica ed interagisce elettromagneticamente con il gas dell'altro cluster. L'in-

terazione provoca un forte rallentamento delle masse di gas rispetto al resto della materia che invece interagisce solo gravitazionalmente.

La collisione dei due cluster ha quindi generato uno scenario in cui stelle, galassie e DM si sono separate spazialmente dalla maggior parte della materia barionica costituita dal gas ionizzato che riempiva i due cluster (fig. 1.8).

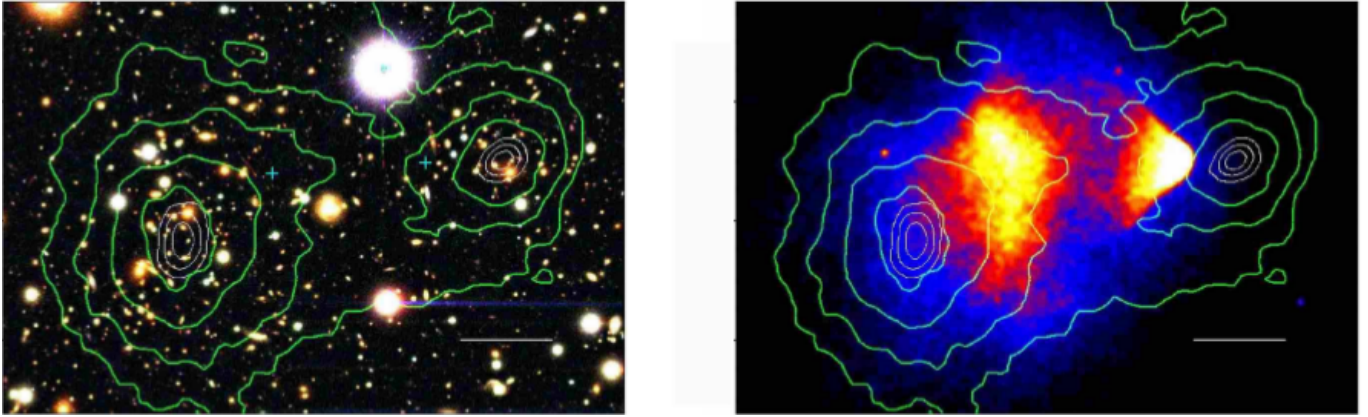


Figura 1.8: In figura è mostrata una mappa del lensing gravitazionale osservato nel Bullet Cluster [9]. La linea bianca indica una distanza di 200 kPc. Le linee verdi indicano regioni in cui la luce è curvata della stessa quantità, più interne sono le linee, maggiore è la curvatura. È possibile osservare due regioni distinte in cui il lensing è massimo, in tali regioni sono situati i centri di massa dei due cluster che si sono fusi. La figura a destra mostra la stessa situazione nello spettro dei raggi X, è possibile notare due zone molto calde corrispondenti al gas ionizzato. In queste zone è concentrata la maggior parte della materia barionica per cui per giustificare la posizione dei due centri di massa occorre supporre che sia presente una gran quantità di materia non visibile.

Il cluster in questione esibisce effetti di weak lensing. Le osservazioni confermano l'ipotesi di materia oscura. È possibile infatti distinguere il centro di massa che produce weak lensing da quello del gas ionizzato che contiene la maggior parte della materia barionica, confermando la presenza di una grande quantità di materia non visibile.

Le informazioni ottenute dal Bullet Cluster, oltre a confermare l'ipotesi di materia oscura, hanno contribuito a scartare le attuali teorie di tipo MOND. Secondo le teorie MOND infatti l'unica massa presente è quella visibile per cui le sorgenti di lensing non possono che essere le stelle e l'insieme di gas. Tuttavia abbiamo appena mostrato che i punti in cui il lensing è maggiore sono separati spazialmente dalla materia visibile così tanto da non poter essere in alcun modo ricondotti ad un effetto dovuto a tale materia in aperta contraddizione con l'ipotesi MOND.

1.6 Altre evidenze di materia oscura

Oltre alle curve di rotazione elenchiamo altre indicazioni a favore dell'ipotesi dell'esistenza della DM. Tali evidenze si manifestano in diversi modi osservando oggetti di dimensioni enormi, ben più grandi del nostro sistema solare (all'interno del quale ancora non abbiamo trovato delle evidenze di questo tipo).

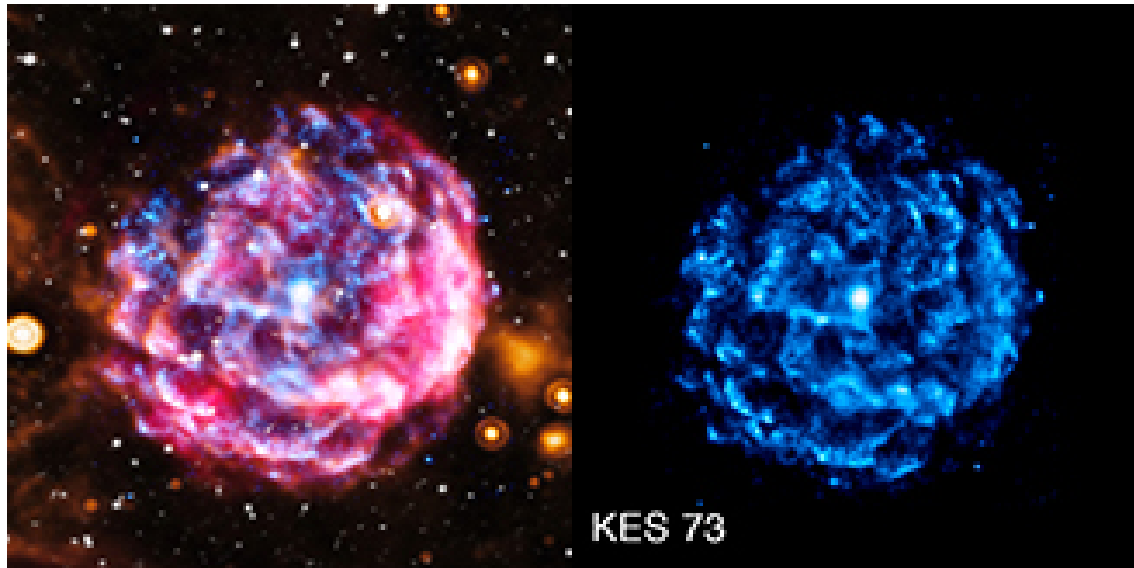


Figura 1.9: Fotografia della galassia KES 73: a sinistra la foto è scattata nello spettro del visibile mentre a destra la fotografia è vista ai raggi X.

- Osservazioni nello spettro dei raggi X. Osservando ai raggi X alcune galassie si nota la presenza di un gas caldo la cui temperatura dipende dall'attrazione gravitazionale della galassia. Stimando la temperatura è possibile avere un'idea dell'attrazione gravitazionale della galassia stessa, quindi della sua massa che risulta maggiore di quella visibile (figura 1.9);
- Considerazioni sull'equilibrio idrostatico dei cluster. Gli ammassi di galassie possono essere considerati come gas in equilibrio idrostatico. Imponendo questa condizione è possibile ricavare una relazione tra la temperatura del Cluster e la sua massa. Ancora una volta accade che affinché la stima teorica si accordi con i dati sperimentali occorre supporre che la massa dell'oggetto sia maggiore di quella visibile.
- Considerazioni cosmologiche. Le fluttuazioni della CMB permettono di ricavare l'abbondanza di una certa specie di materia nell'Universo. Questa particolare fonte di informazioni è analizzata in maggior dettaglio nel prossimo capitolo. Il risultato fondamentale che si ottiene è che, per giustificare la forma di tali fluttuazioni, occorre supporre ancora una volta l'esistenza di DM.

Capitolo 2

Indicazioni cosmologiche di Materia Oscura

2.1 L'Universo e la sua evoluzione

In questo capitolo si descrive il modello dell'evoluzione dell'Universo oggi maggiormente accettato. Nella prima parte del capitolo si introduce il concetto di espansione dell'Universo e se ne descrivono le fasi della sua evoluzione.

Nella seconda parte del capitolo invece ci si sofferma sulla radiazione cosmica di fondo che pervade l'intero Universo. Se ne illustrano le caratteristiche alla luce dell'attuale modello di Universo e si punta l'attenzione su delle fluttuazioni che si misurano analizzandone lo spettro. Tali fluttuazioni forniscono informazioni fondamentali sul rapporto tra materia oscura e materia ordinaria nel nostro Universo e permettono di stimare l'attuale densità di materia oscura diffusa nell'Universo.

2.1.1 Espansione dell'Universo e redshift

L'Universo si espande, le prime prove a favore di questa ipotesi provengono dalle misure di Edwin Hubble [10] che scoprì che le galassie si allontanavano tutte da noi, ed a velocità v tanto crescente quanto maggiore era la loro distanza d da noi secondo una relazione lineare

$$v = Hd. \quad (2.1)$$

Il valore di H è il coefficiente angolare della retta che interpola i dati di Hubble (fig.2.1), ed è interpretato come il tasso di espansione dell'Universo, più avanti vedremo che esso dipende dal tempo. Poiché H lega velocità a distanze la sua dimensione sarà quella di una frequenza. Il valore che H assume oggi definisce la costante di Hubble $H_0 \simeq 67 \text{ km/s/Mpc} \simeq 25 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1}$, il suo inverso ci da una stima dell'età dell'Universo. Per spiegare come questa legge implichi che l'Universo si stia espandendo consideriamo un esempio classico: immaginiamo l'Universo come fosse un panettone, le varie galassie sono rappresentate dai canditi presenti in esso (fig.2.2). Mano a mano che il panettone lievita il suo volume aumenta e le galassie risultano sempre più distanti, inoltre la velocità con cui la distanza aumenta è tanto più grande quanto più sono distanti tra di loro.

Questo è proprio il comportamento previsto dalla legge di Hubble. Se si potessero fare misure da altre galassie si osserverebbe lo stesso tipo di comportamento, infatti la struttura lineare dell'equazione fa sì che cambiando sistema di riferimento la legge mantenga la stessa

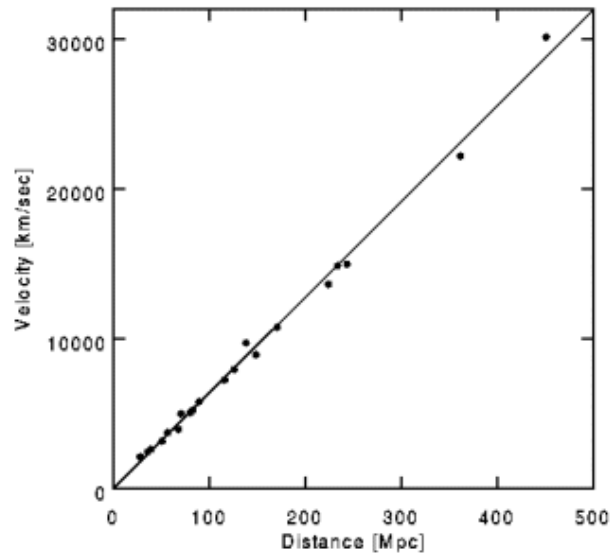


Figura 2.1: Relazione tra velocità di allontanamento delle galassie e distanza

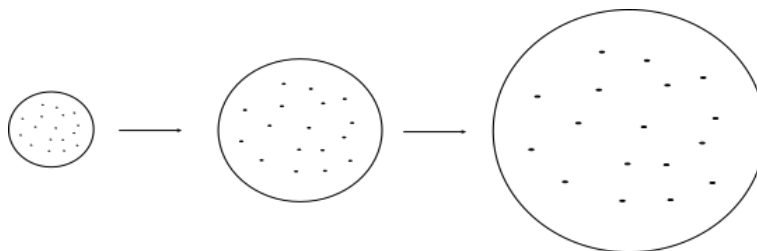


Figura 2.2: Modello schematizzato dell'espansione dell'Universo

forma. È importante osservare che l'espansione di Hubble è di tipo omogeneo, cioè otteniamo le stesse misure in tutte le direzioni; se la legge di Hubble non fosse lineare si misurerebbero velocità differenti in base alla posizione e alla direzione alle galassie osservate. L'unico sistema di riferimento per cui, nel caso di una legge non lineare, si possano avere le stesse misure in tutte le direzioni sarebbe quello del centro dell'Universo. Poiché questo è il genere di misure che otteniamo e poiché riteniamo che la Terra non sia al centro dell'Universo possiamo affermare che l'Universo si espande e lo fa omogeneamente in tutte le direzioni.

All'interno di tale contesto è possibile utilizzare due tipi di sistemi di coordinate

- **Coordinate comoventi:** un sistema di coordinate che si espande assieme all'Universo stesso. In un sistema del genere la posizione degli oggetti che si espandono con esso non varia.
- **Coordinate fisiche:** un sistema di coordinate che rimane fisso all'interno di uno spazio in espansione, quindi non è comovente.

Un sistema di riferimento che abbia una certa velocità rispetto all'Universo in espansione non è comovente, il sistema solare ha una velocità rispetto al sistema di riferimento comovente di circa 370 km/s così come la nostra galassia che ha una velocità di circa 600 km/s [11], per cui questi sistemi non sono comoventi. All'interno di questo modello di Universo in espansione la metrica che permette di calcolare la distanza tra due punti dello spazio-tempo è la metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.2)$$

dove ds è la distanza quadridimensionale tra due punti considerati, t è la coordinata temporale (ricordiamo che stiamo usando unità in cui $c=1$), r , θ e ϕ sono le tre coordinate polari sferiche, k è un parametro legato alla curvatura dell'Universo e $a(t)$ ed è detto *fattore di scala*. Il fattore di scala permette di ottenere la distanza tra due oggetti al tempo t

$$d(t) = a(t)d_0, \quad (2.3)$$

dove d_0 è la distanza in coordinate comoventi ad un tempo t_0 (tipicamente la presente età dell'Universo) per il quale si normalizza $a(t_0) = 1$.

Il fatto che le galassie si allontanino con velocità crescente implica la presenza di un “redshift cosmologico” z , cioè uno spostamento verso il rosso della radiazione emessa da stelle e galassie molto lontane dovuto all'aumento della distanza tra sorgente di radiazione e osservatore, z sarà inoltre tanto maggiore quanto le galassie sono lontane. È importante conoscere il valore di z poiché, come visto nel precedente capitolo, nelle misure delle curve di rotazione delle galassie si utilizza l'effetto Doppler e il contributo di z deve essere eliminato dalle misure.

Integrando la metrica FRW è possibile ottenere un'espressione per z in termini del fattore di scala*

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1. \quad (2.4)$$

λ_0 è la lunghezza d'onda che osserviamo e λ è quella emessa nel sistema di riferimento della sorgente. Conoscendo il redshift di una galassia è possibile stimarne la distanza d_L , dalla relazione che lega queste due quantità [12]

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \quad (2.5)$$

*In appendice C mostriamo come ottenere l'espressione (2.4) per z

che al primo ordine è proprio la legge di Hubble, q_0 è un parametro legato all'espansione Universo e la distanza d_L è legata alla luminosità L del corpo osservato (l'energia irradiata nell'unità di tempo) e al flusso F misurato

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Isotropia ed Omogeneità dell'Universo

Continuiamo a considerare le osservazioni di Hubble come punto di partenza. Egli ha conteggiato le galassie che osservava in varie direzioni, misurandone circa lo stesso numero in ogni direzione.

Ricordiamo che la luminosità di una sorgente diminuisce con il quadrato della distanza, infatti se per una sorgente luminosa a distanza d dalla Terra misuriamo un flusso F il flusso che misureremmo a distanza $2d$ risulta $F/4$. Quando Hubble ha cercato galassie con un flusso luminoso maggiore di $F/4$ ha trovato un numero di galassie 8 volte maggiore rispetto a quelle con flusso maggiore di F . Poiché ad una distanza doppia corrisponde proprio un volume 8 volte maggiore, questo implica che la densità di galassie nell'Universo è uniforme.

Tali osservazioni implicano quindi che l'Universo sia complessivamente omogeneo ed isotropo.

- *Isotropia*: significa che esso appare sempre uguale qualunque sia la direzione di osservazione. Quest'ipotesi è stata sfruttata ad esempio nella costruzione della metrica FRW la cui parte spaziale ha simmetria sferica.
- *Omogeneità*: Dire che l'Universo è omogeneo significa che le sue proprietà fisiche sono le stesse in ogni suo punto, in particolare l'omogeneità si verifica se lo spazio è isotropo in ogni suo punto.

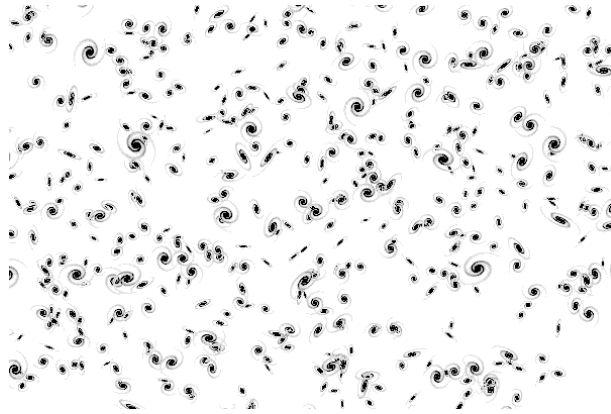


Figura 2.3: la presenza di galassie ed ampi spazi vuoti contribuisce ad una densità media uniforme

Ovviamente però l'Universo non è perfettamente isotropo ed omogeneo, la presenza in alcuni punti di strutture come stelle e galassie e del vuoto cosmico in altri ne è infatti una prova immediata. Queste variazioni però si mediano a zero su grandi distanze ($\geq 100 \text{ Mpc}$) permettendoci di tenere come valida l'ipotesi assunta (fig.2.3).

Una delle prove più evidenti dell'isotropia dell'Universo è data dallo studio della CMB. Puntando un'antenna radio in ogni direzione dello spazio si ottiene un perfetto spettro di corpo nero. La temperatura associata a tale spettro è pressoché la stessa ovunque, circa 3 K , con delle piccole variazioni dell'ordine di $10^{-4} - 10^{-5}\text{ K}$ (fig. 2.4). L'immagine dell'Universo che ne ricaviamo è quindi quella di un Universo in ottima approssimazione isotropo.

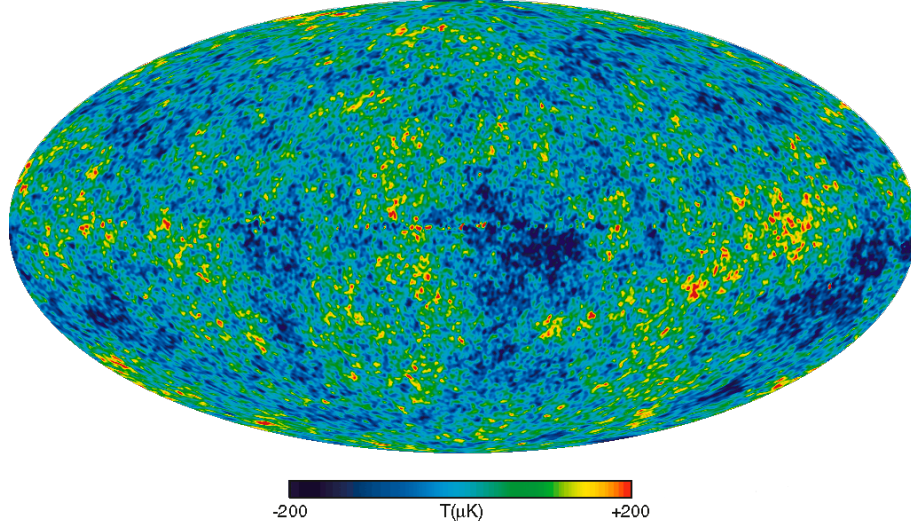


Figura 2.4: Anisotropie di temperatura nella radiazione cosmica di fondo. L'immagine è presa dal sito <https://map.gsfc.nasa.gov/>.

Il grafico di CMB rispecchia l'immagine dell'Universo al tempo in cui la radiazione di fondo è stata libera di propagarsi (circa 300.000 anni dopo il Big Bang [13]). Se fossero state presenti delle grandi anisotropie o se l'espansione dell'Universo non fosse stata uniforme allora si sarebbero dovute osservare nello spettro della CMB delle grandi anisotropie di temperatura che invece non sono presenti.

2.1.3 Termodinamica e storia termica dell'Universo

Poco dopo il big Bang l'Universo ha subito cominciato ad espandersi, la densità d'energia era tale da permettere la creazione di tutte le specie di particelle possibili e le loro energie erano sufficientemente alte da permettere loro di interagire molto frequentemente, scambiare energia, ed uniformare le loro distribuzioni ad un unico valore di temperatura, quello dell'equilibrio termico. L'Universo ha poi mantenuto questa condizione di equilibrio anche nei tempi successivi, mentre continuava ad espandersi, finché le interazioni tra particelle potevano avvenire abbastanza rapidamente da permettere la termalizzazione delle loro distribuzioni.

Quantitativamente la condizione di equilibrio per le varie specie di particelle presenti si verifica confrontando il tasso di interazione $\Gamma = n\sigma v$ di queste con il tasso di espansione H dell'Universo, dove n è la densità di particelle, σ la sezione d'urto di interazione e v la velocità relativa tra le particelle che interagiscono. Finché per una certa specie di particelle vale la condizione $\Gamma \geq H$ essa resta in equilibrio termico con il resto dell'Universo, se invece l'Universo si espande più velocemente di quanto questa specie possa termalizzare allora essa esce dall'equilibrio termodinamico.

Entriamo più nel dettaglio fornendo un sommario della storia termica dell'Universo [12].

1. $t \simeq 10^{-43}s$, $kT \simeq 10^{19}GeV$. Subito dopo il Big Bang, l'Universo era un plasma composto da tutte le particelle possibili, probabilmente esisteva un'unica interazione che unificava tutte quelle oggi note.
2. $t \simeq 10^{-36}s$, $kT \simeq 10^{14} - 10^{16}GeV$. L'interazione unica cessa di essere valida, l'Universo incorre in transizioni di fase in cui avviene la rottura spontanea della simmetria della teoria, compare la distinzione fra materia ed antimateria.
3. $t \simeq 10^{-12}s$, $kT \simeq TeV$. L'interazione elettrodebole si separa in interazione elettromagnetica e debole, durante questa fase avviene anche il meccanismo di Higgs per cui i bosoni di gauge acquisiscono massa.
4. $t \simeq 10^{-6}s$, $kT \simeq GeV$. I quark e gluoni, prima liberi all'interno del plasma, adronizzano.
5. $t \simeq 1s$, $kT \simeq MeV$. Avviene la nucleosintesi, vengono prodotti nuclei di idrogeno, elio-3, elio-4, deuterio e Litio.
6. $t \simeq 10^{12}s$, $kT \simeq keV - eV$. La radiazione si disaccoppia dalla materia generando quella che oggi è la CMB. Iniziano a formarsi le prime strutture su scale galattiche e gli atomi più complessi.
7. $t \simeq 10^{17} - 10^{18}s$, $kT \simeq meV$. Epoca odierna, le galassie e i sistemi di stelle e pianeti hanno preso forma, il fondo cosmico è popolato solo da fotoni con $T \simeq 2.75K$ e neutrini con $T \simeq 1.95K$.

Come mostreremo nella prossima sezione finché l'Universo è rimasto in equilibrio termodinamico la sua entropia, in un volume comovente, è rimasta costante. Nello studio sulla relic density che porteremo avanti nei prossimi capitoli sarà necessario conoscere questa quantità, di seguito ne ricaviamo l'espressione.

2.1.4 Entropia dell'Universo

In questa sezione si ricava un'espressione per l'entropia dell'Universo e per la densità di energia a partire da considerazioni di tipo termodinamico. Necessiteremo di queste grandezze nei prossimi capitoli, dove effettueremo una stima dell'attuale valore della relic density.

Consideriamo un generico gas rarefatto e debolmente interagente, densità di numero n , densità d'energia ρ , pressione P , e composto da particelle che hanno gradi di libertà $g = 2s + 1$, con s spin della particella. Detta $f(\vec{p})$ la sua funzione di distribuzione risulta

$$\begin{aligned}
n &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p \\
\rho &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p \\
P &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p}) d^3p
\end{aligned} \tag{2.7}$$

con $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$ dove E è l'energia \vec{p} il momento ed m massa delle particelle che compongono il gas. A seconda che le particelle siano fermioni o bosoni la funzione di distribuzione è

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1} \tag{2.8}$$

dove μ è il potenziale chimico della particella, k la costante di Boltzmann e T la temperatura del gas. Esprimiamo gli integrali in funzione dell'energia

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1} E^2 dE \\ n &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1} E dE \\ P &= \frac{g}{6\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1} dE\end{aligned}\tag{2.9}$$

da cui, nel limite relativistico ($kT \gg m$) e con $kT \gg \mu$ risulta

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{g(kT)^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x \pm 1} dx \\ n &= \frac{g(kT)^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x \pm 1} dx \\ P &= \frac{g(kT)^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x \pm 1} dx\end{aligned}\tag{2.10}$$

dove abbiamo posto $x = E/T$. Risolvendo gli integrali risulta

$$\begin{aligned}\rho &= \begin{cases} (\pi^2/30)g(kT)^4, & \text{bosoni} \\ 7/8(\pi^2/30)g(kT)^4, & \text{fermioni} \end{cases} \\ n &= \begin{cases} (\zeta(3)/\pi^2)g(kT)^3, & \text{bosoni} \\ 3/4(\zeta(3)/\pi^2)g(kT)^3, & \text{fermioni} \end{cases} \\ P &= \rho/3\end{aligned}\tag{2.11}$$

dove ζ è la Zeta di Riemann. Se $\mu \gg kT$ si ha per i fermioni il gas degenero e per i bosoni il condensato di Bose ma non è questo ciò cui siamo interessati. Nel limite non relativistico ($kT \ll m$) possiamo sviluppare l'energia di una particella di massa m e momento p come $E \approx m + p^2/2m$ dove $p \ll m$. Segue che

$$\begin{aligned}\rho &= m \frac{g}{2\pi^2} e^{-\frac{m-\mu}{kT}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp \\ n &= \frac{g}{2\pi^2} e^{-\frac{m-\mu}{kT}} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp \\ P &= \frac{1}{m} \frac{g}{6\pi^2} e^{-\frac{m-\mu}{kT}} \int_0^\infty p^4 e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Integrali di questo tipo possono essere scritti come

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int e^{-\alpha x^2} dx\tag{2.13}$$

e

$$\int x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int e^{-\alpha x^2} dx\tag{2.14}$$

dove $\alpha = (2mkT)^{-1}$. Inoltre è noto il risultato

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\tag{2.15}$$

per cui possiamo risolvere gli integrali per n , ρ e P

$$\begin{aligned} n &= g \left(\frac{mkT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/kT} \\ \rho &= mn \\ P &= nkT. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La pressione e densità di energia nell'Universo generate da tutte le specie di particelle in equilibrio si possono esprimere sommando pressione e densità dei singoli gas di particelle in equilibrio. Esiste la possibilità che un gas si disaccoppi dal resto dell'Universo, in tal caso è possibile dimostrare che la sua distribuzione mantiene la stessa forma della distribuzione all'equilibrio, ma identificata da un'altra temperatura T_i . Tenendo conto di questo fatto possiamo sommare su tutte le specie presenti nell'Universo, esprimeremo tutto in rapporto alla temperatura T dei fotoni

$$\begin{aligned} \rho_{tot} &= \sum_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{g_i}{2\pi^2} \int_{m_i}^{\infty} \frac{(E^2 - m_i^2)^{1/2}}{e^{(E-\mu_i)/kT} \pm 1} E^2 dE \\ P_{tot} &= \sum_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{g_i}{6\pi^2} \int_{m_i}^{\infty} \frac{(E^2 - m_i^2)^{1/2}}{e^{(E-\mu_i)/kT} \pm 1} E^2 dE \end{aligned} \quad (2.17)$$

poiché il contributo delle specie non relativistiche è esponenzialmente più piccolo di quelle relativistiche possiamo trascurare le prime nella somma ed ottenere

$$\begin{aligned} \rho_{tot} &= \frac{\pi^2}{30} g_*(kT)^4 \\ P_{tot} &= \frac{\pi^2}{90} g_*(kT)^4 \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove in g_* abbiamo racchiuso il contributo della somma su tutte le specie di particelle i per cui $m_i \ll KT$, cioè le particelle che possono essere create nell'Universo quando questo ha temperatura T . In questo senso diciamo che la quantità g_* racchiude i *gradi di libertà relativistici* ed ha espressione

$$g_* = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T} \right)^4. \quad (2.19)$$

b ed f sono indici che corrono su tutte le famiglie fermioniche e bosoniche possibili e $T_{b/f}$ rappresenta la loro temperatura mentre T quella dei fotoni del fondo cosmico.

Nella sua prima fase di vita l'Universo è stato in una condizione detta di "equilibrio termico locale". Cioè le grandezze termodinamiche dell'Universo variano in ogni punto dello spazio e del tempo, ma lo fanno lentamente. In questo modo è possibile considerare valida, in ogni punto dello spazio-tempo, la condizione di equilibrio termodinamico. Il nostro obiettivo è ricavare un'espressione per l'entropia dell'Universo. Consideriamo la prima legge della termodinamica

$$dE = \delta Q - pdV \quad (2.20)$$

E e P sono la pressione e l'energia dell'Universo e V è il volume fisico che è legato al volume comoviente V_c attraverso il fattore di scala dell'Universo a (di cui al momento omettiamo la dipendenza dal tempo). Considerando un volume comoviente unitario sarà $V = a^3$. δQ è la quantità di calore che l'Universo scambia durante la sua evoluzione. Poiché siamo nell'ipotesi

di equilibrio termico locale risulta $\delta Q = TdS$, dove S è l'entropia dell'Universo e T la sua temperatura e scrivendo l'energia in funzione del volume V e della sua densità ρ otteniamo

$$TdS = d(\rho V) + PdV = d[(\rho + P)V] - VdP, \quad (2.21)$$

Da quest'equazione ricaviamo che

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\rho + P}{T}. \quad (2.22)$$

È utile definire l'energia libera $F = E - TS$, da cui

$$dF = -SdT - pdV \quad (2.23)$$

da cui possiamo ricavare

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (2.24)$$

inoltre vale per la F

$$\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \quad (2.25)$$

e dalla (2.23) ricaviamo anche

$$\frac{\partial F}{\partial V} = -P. \quad (2.26)$$

Combinando le equazioni (2.24), (2.25) e (2.26) otteniamo

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V}. \quad (2.27)$$

Confrontando questa equazione con la (2.22) si ricava

$$dP = \frac{\rho + P}{T} dT \quad (2.28)$$

e sostituendo nell'equazione (2.21) otteniamo

$$dS = d \left[\frac{(\rho + P)V}{T} \right]. \quad (2.29)$$

Quindi l'entropia per volume comovente è $S = V(P + \rho)/T$. Poiché mentre l'Universo si espande non esiste un esterno con cui scambiare calore risulta $TdS = 0$, per cui è possibile riscrivere la (2.21) come

$$d[(P + \rho)V] = VdP \quad (2.30)$$

sostituendo l'espressione appena trovata per dP otteniamo

$$d \left[\frac{(P + \rho)V}{T} \right] = dS = 0 \quad (2.31)$$

cioè l'entropia, per volume comovente, si conserva. Definiamo a questo punto la densità di entropia s

$$s = \frac{S}{V} = \frac{\rho + P}{T} \quad (2.32)$$

le espressioni per ρ e P sono quelle trovate nella (2.17) per cui

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{s*} (kT)^3 \quad (2.33)$$

dove abbiamo definito

$$g_{s*} = \sum_b g_b \left(\frac{T_b}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_f g_f \left(\frac{T_f}{T} \right)^3 \quad (2.34)$$

che all'equilibrio termico è uguale a g_* .

Possiamo anche ottenere un valore per la densità di entropia oggi, essendo presenti nel fondo cosmico solo fotoni ($T = 2.725 K$) e le tre famiglie di neutrini ($T = 1.96 K$) risulta $g_{s*} = 43/11$ per cui si ottiene $s_0 \approx 3000 cm^{-3}$ (unità naturali).

2.1.5 Legame tra tempo e temperatura

Nel capitolo 3 calcoleremo il valore odierno di densità di materia oscura nell'Universo, a tale scopo occorre avere una relazione tra l'età dell'Universo e la sua temperatura relativa al periodo in cui la densità di energia dovuta alla radiazione era dominante rispetto a quella di materia.

È possibile trovare tale relazione conoscendo l'espressione del tasso di espansione dell'Universo H espresso in relazione della densità dell'Universo ρ , tale espressione si ottiene risolvendo l'equazione di Einstein per la relatività generale utilizzando la metrica FRW[14]

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} \quad (2.35)$$

dove G è la costante di gravitazione universale. La densità ρ è ottenuta nell'equazione (2.18), per cui otteniamo

$$H = 2\pi \sqrt{\frac{\pi}{45}} g_*^{1/2} \frac{(kT)^2}{M_P} = 1.66 g_*^{1/2} \frac{(kT)^2}{M_P} \quad (2.36)$$

dove in unità naturali $G = 1/M_P^2$, con M_P massa di Planck. Ricordando inoltre che il legame tra fattore di scala e tasso di espansione è $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ e che nel periodo di vita dell'Universo in cui la densità di energia era prevalentemente dovuta alla radiazione $a(t) \approx t^{1/2}$ [12], per cui risulta $H \approx 1/(2t)$ e quindi

$$t = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi}} g_*^{-1/2} \frac{M_P}{(kT)^2} = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{M_P}{(kT)^2} \quad (2.37)$$

2.2 Radiazione cosmica di fondo

La radiazione cosmica di fondo, anche detta CMB (Cosmic microwave background), è un segnale elettromagnetico nello spettro delle onde radio diffuso in tutto l'Universo cui è possibile associare una temperatura di circa $3 K$. È formata dai fotoni prodotti durante il Big Bang e costituisce la più importante fonte di informazioni riguardo alla storia dell'Universo. Tali fotoni sono stati liberi di propagarsi quando le cariche libere nell'Universo si sono *ricombinate* per generare i primi atomi.

L'idea che della radiazione elettromagnetica dovesse essere presente sin dalle prime fasi di vita dell'Universo era stata già presa in considerazione nel 1948 da George Gamow [15]. Le altissime temperature delle prime fasi dell'Universo avrebbero dovuto innescare reazioni nucleari così rapidamente che la maggior parte dell'idrogeno allora presente si sarebbe dovuto fondere in elementi via via più pesanti, in contraddizione con le osservazioni odierne in cui l'idrogeno costituisce circa i tre quarti della materia visibile dell'Universo. Questa apparente contraddizione poteva essere risolta supponendo che l'Universo primordiale fosse permeato da

una radiazione altamente energetica, cui associamo una temperatura molto alta ($T \approx 10^{11} K$), i cui fotoni potessero spaccare i nuclei più pesanti non appena questi si formavano. Tale fondo di radiazione poteva poi continuare ad essere presente durante le fasi successive dell'Universo, raffreddandosi con l'espansione di quest'ultimo ed essere rilevabile ai giorni nostri come segnale radio.

La scoperta della radiazione di fondo avvenne nel 1964 ad opera di Arno Penzias e Robert Wilson [16]; la radiazione appariva diffusa uniformemente da tutte le direzioni e vi si poteva associare una temperatura di circa $3 K$.

Da quel momento le successive analisi della CMB hanno permesso di ottenere informazioni fondamentali sulle prime fasi di vita dell'Universo.

2.2.1 Densità di materia a partire dalla CMB

Il fatto che durante l'evoluzione dell'Universo si siano formate strutture complesse come stelle, galassie e ammassi di galassie sta ad indicare che, nel plasma primordiale di cui era costituito l'Universo, erano presenti fluttuazioni di densità generando zone a densità maggiore e zone a densità minore. La maggiore densità di queste zone comporta anche una maggiore attrazione gravitazionale permettendo di accumulare sufficiente materia per la formazione di grandi strutture quali quelle che oggi osserviamo.

I fotoni che compongono la CMB hanno continuato ad interagire con la materia finché nel plasma primordiale erano presenti cariche libere. Quando l'Universo è stato abbastanza freddo da permettere ad elettroni e protoni di legarsi e formare atomi di idrogeno esso è diventato trasparente alla radiazione elettromagnetica, da quel momento la CMB è stata libera di diffondersi liberamente. Questa fase della vita dell'Universo è detta *ricombinazione*.

Prima della ricombinazione però la radiazione e la materia interagivano continuamente e, come già detto, esistevano delle zone in cui l'attrazione gravitazionale era maggiore di altre. La presenza di un campo gravitazionale doveva quindi alterare la lunghezza d'onda della radiazione. Tali alterazioni dovevano manifestarsi nello spettro della CMB attraverso delle lievi anisotropie di temperatura. Se si misura in ogni direzione lo spettro della CMB si ottiene un perfetto esempio di corpo nero al quale è possibile associare una certa temperatura T ; la temperatura misurata è di $2.725 K$ e le variazioni attese sono osservate sulla quarta e quinta cifra decimale (fig. 2.4).

La posizione e l'estensione di tali anisotropie fornisce informazioni sulle fluttuazioni di densità nell'Universo primordiale. Esiste però un'altro meccanismo che ha contribuito alle anisotropie di temperatura della CMB: nelle zone in cui l'attrazione gravitazionale era maggiore, il plasma di cui era costituito l'Universo veniva compresso e quindi scaldato e il gas di fotoni con esso. La compressione del gas di fotoni ne causava l'aumento di temperatura e contribuiva ad aumentare la pressione di radiazione che esso esercitava tanto da vincere la gravità in quella zona, provocando una rarefazione del plasma primordiale; una volta rarefatto però il plasma era di nuovo soggetto alla compressione da parte della gravità. Questo continuo meccanismo di compressione e rarefazione del plasma primordiale è stato "registrato" nella forma della CMB che, dopo la ricombinazione, è stata libera di propagarsi liberamente trasportando anche quest'informazione sotto forma di anisotropie di temperatura.

Per cui la CMB trasporta con sé l'immagine delle fluttuazioni di densità dell'Universo primordiale e tiene anche traccia delle oscillazioni del plasma che sono avvenute successivamente. Nella letteratura tali oscillazioni sono dette "acustiche" poiché si propagano longitudinalmente rispetto alla direzione di propagazione della CMB in una maniera analoga a quella delle onde sonore nell'aria. È possibile distinguere le anisotropie dovute alle fluttuazioni primordiali di

densità da quelle dovute alle oscillazioni in base alla loro dimensione angolare nella mappa della CMB. La dimensione angolare delle regioni che presentano anisotropie di temperatura dovute alle fluttuazioni dell'Universo primordiale può arrivare fino alla decina di gradi; la dimensione delle anisotropie dovute ad oscillazioni acustiche è invece dell'ordine del grado (fig. 2.5).

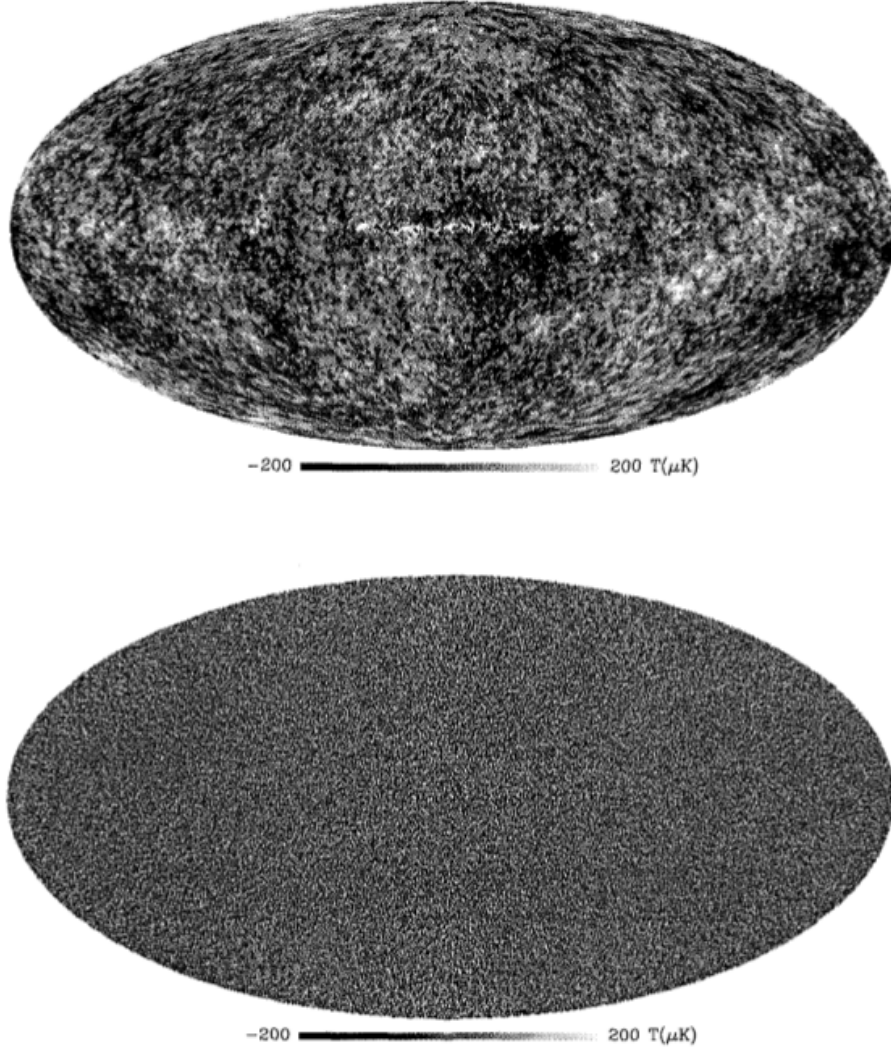


Figura 2.5: La mappa della CMB della figura 2.4 è stata scomposta in due. Nella figura in alto compaiono solo le anisotropie di temperatura di dimensione angolare superiore al grado, esse sono dovute alle fluttuazioni di densità che si sono verificate nell'Universo nelle sue prime fasi di vita. La figura in basso invece raccoglie solo le zone in cui le anisotropie hanno dimensione angolare dell'ordine del grado dovute alle oscillazioni acustiche dell'Universo.

È possibile analizzare le fluttuazioni di temperatura della radiazione di fondo effettuando uno sviluppo in multipoli della mappa delle anisotropie

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_l \sum_m a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.38)$$

dove a_{lm} sono i coefficienti dello sviluppo e Y_{lm} le armoniche sferiche. Tipicamente le fluttuazioni sono supposte di tipo gaussiano, in questo caso il valor medio delle quantità a_{lm} risulta nullo; a

questo punto la quantità più interessante da studiare è la varianza $|a_{lm}|^2$. In questo particolare caso tutta l'informazione è contenuta nella quantità

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{ml}|^2. \quad (2.39)$$

La distribuzione di C_l rispetto ad l è detta *power spectrum*. Tipicamente nelle figure si rappresenta la quantità $l(l+1)C_l/2\pi$ in funzione di l (fig.2.6). È possibile notare nella figura 2.6 la presenza di un picco principale e di altri picchi secondari. Il picco principale, situato in corrispondenza di $l \approx 100$ rappresenta le anisotropie di circa $10^{-5}K$ che nella CMB hanno dimensione angolare inferiore al grado. I picchi secondari sono legati ad anisotropie più piccole sempre presenti nella CMB.

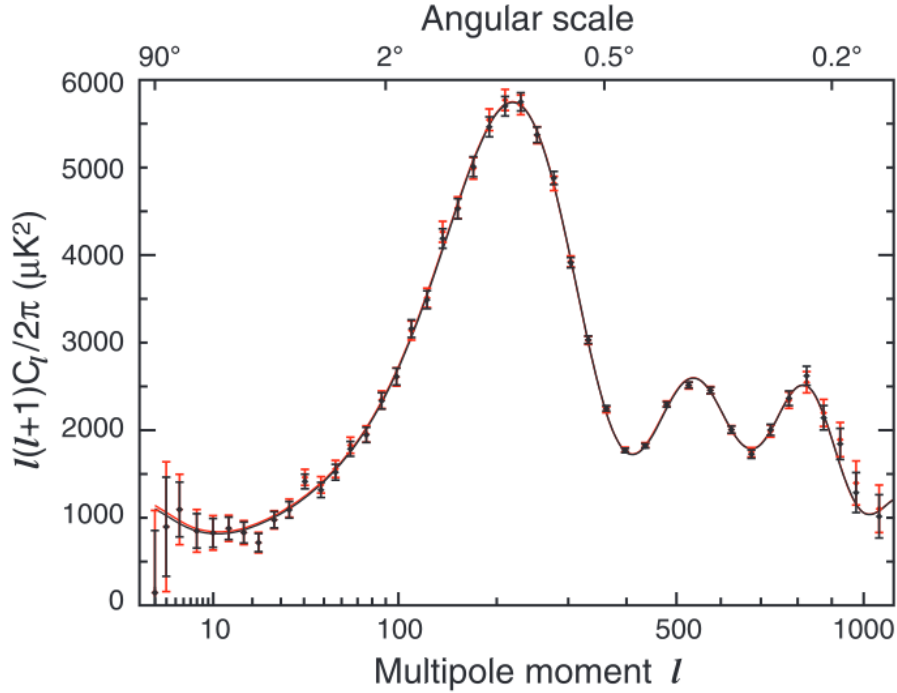


Figura 2.6: Distribuzione di C_l in funzione di l . In alto è indicata la dimensione angolare delle fluttuazioni, essa è tanto minore quanto più grande è il valore di l . La distribuzione presenta dei picchi e delle valli, le cui posizioni e altezze danno informazioni sulla quantità di materia presente nell'Universo al tempo in cui la CMB è stata libera di propagarsi. La figura è presa da [3].

Per ottenere informazioni dalle anisotropie della CMB occorre fissare un certo tipo di modello di Universo con un certo numero di parametri liberi e ricavare delle stime dei valori di questi parametri attraverso un fit dei dati ottenuti dalla CMB.

È importante notare che per spiegare le anisotropie osservate occorre supporre l'esistenza di un tipo di materia differente dalla comune materia barionica, non relativistica (la cui massa è maggiore della temperatura dell'Universo al momento della ricombinazione) e che non interagisca elettromagneticamente ma solo gravitazionalmente e debolmente, compatibile quindi con l'ipotesi di DM. Se esistesse solo materia barionica le anisotropie dovrebbero essere molto più ampie di quelle osservate. Questo si osserva in particolare dall'ampiezza dei picchi acustici,

cioè i picchi delle oscillazioni del plasma primordiale dovute all'azione alternata della compressione gravitazionale e della rarefazione dovuta alla pressione di radiazione dei fotoni. La DM non interagisce con i fotoni di CMB non risentendo della pressione di radiazione che tende a rarefare il plasma dell'Universo. In questo modo la DM si addensa prima della materia barionica non contribuendo alle oscillazioni acustiche. Se tale materia fosse stata invece barionica le oscillazioni sarebbero state più ampie di almeno uno o due ordini di grandezza.

Le analisi della CMB hanno dato maggiore credibilità all'attuale modello dell'Universo noto come Λ CDM, dove Λ sta ad indicare il rapporto tra la densità dell'Universo e la densità critica per cui esso è piatto ed è considerata essere $\Lambda = 1$ mentre CDM sta per *cold dark matter*, ovvero materia oscura non relativistica. Riportiamo in tabella 2.1 i valori dei parametri del modello, alcuni dei quali verranno utilizzato nei prossimi capitoli.

Parametro	Simbolo	Stima
Costante di Hubble	H_0	67.3 km/s/Mpc
Parametro di Hubble ridotto	h	0.673
Densità di fotoni di CMB	Ω_γ	410 cm^{-3}
Densità di neutrini	Ω_ν	$< 0.0055, 95\% \text{ CL}$
Densità barionica	Ω_b	0.048
Energia oscura	Ω_Λ	0.685
Densità DM	Ω_χ	0.26
Densità totale	Ω	1
Età dell'Universo	t_0	13.81 Gyr

Tabella 2.1: alcuni parametri del modello Λ CDM presi da [17].

Capitolo 3

L'ipotesi WIMP

In questo capitolo è descritta l'ipotesi WIMP secondo la quale la DM consiste di particelle neutre massive ($m_\chi \geq 100 \text{ GeV}$, con m_χ massa delle particelle che compongono la DM) e interagenti poco intensamente con la materia ordinaria. Prima di approfondire l'ipotesi WIMP però considereremo il caso dei neutrini che potrebbero sembrare il candidato ideale di DM e forniremo delle motivazioni per cui, invece, non possono assumere questo ruolo. Elencheremo alcuni dei più popolari candidati di materia oscura proposti in letteratura. Presenteremo poi una stima analitica della densità fossile di particelle non relativistiche. Considereremo un tipo di particella relativistico o meno a seconda che la sua massa sia molto maggiore o minore della temperatura del resto dell'Universo con cui si trova in equilibrio termico.

Nella fine del capitolo si illustra il meccanismo attraverso il quale un tipo di particella in equilibrio termico con il resto dell'Universo si disaccoppia cessando di interagire e congelando la sua densità ad un determinato valore. Questo accade poiché l'Universo, inizialmente in equilibrio termico, tende ad espandersi diminuendo la sua temperatura e diventando sempre più rarefatto. Raggiunto un certo grado di rarefazione alcune particelle non riescono ad avere un numero sufficiente di interazioni per mantenersi in equilibrio termico fissando la densità della loro specie al valore di quel momento, questo fenomeno è detto *freeze out*.

3.1 L'ipotesi particellare

Nei due capitoli precedenti abbiamo fornito prove a favore dell'esistenza di DM. Nonostante le numerose prove della sua esistenza non è stato possibile identificare cosa costituisca la DM poiché essa interagisce solo gravitazionalmente. In questa sede assumeremo l'ipotesi che la DM sia costituita da un tipo di particelle non previste dal Modello Standard, quindi finora sconosciuta.

È possibile ricavare alcune delle proprietà della DM a partire dai dati in nostro possesso presentati nel capitolo precedente.

- L'analisi della CMB suggerisce che la DM non può avere origine barionica, ma si tratta di un altro tipo di particelle non previste dall'attuale Modello Standard (Sezione 2.2.1).
- Le curve di rotazione delle galassie e gli effetti di lensing gravitazionale ci dicono che la DM interagisce gravitazionalmente e che è presente in grandi quantità ancora oggi nell'Universo. La DM dovrà essere quindi composta da particelle stabili la cui vita media è superiore all'attuale età dell'Universo.
- I dati sulla formazione delle strutture indicano che le particelle che compongono la DM non possono essere troppo leggere ($m_\chi < \text{keV}$, con m_χ massa delle particelle di DM).

Se così fosse la materia oscura sarebbe relativistica e si sarebbe disaccoppiata dal resto dell'Universo prima di quanto stimato per poi diffondersi dalle zone a maggiore densità a quelle a densità inferiore mediandone le fluttuazioni. In questo modo le galassie e ammassi stellari sarebbero molto più grandi di quanto osservato.

- Dai dati sulla collisione dei cluster galattici osserviamo che la materia barionica interagisce e rallenta mentre la materia oscura all'interno dei cluster procede praticamente senza interagire. Sulla base di questo dato possiamo affermare che l'interazione tra DM e materia ordinaria non può essere forte o elettromagnetica (Sezione 1.5.1).

Queste informazioni contribuiscono ad identificare la DM come formata da un tipo di particelle sufficientemente massive ($m_\chi \geq 100 \text{ GeV}$) e che interagisce poco intensamente con la materia ordinaria, tipicamente chiamata WIMP (*Weakly Interacting Massive Particle*).

3.2 Il ruolo dei neutrini e la hot dark matter

L'ipotesi WIMP descrive la DM come composta da particelle molto massive ($m_\chi \geq 100 \text{ GeV}$). I dati provenienti dalla CMB indicano che la maggior parte della materia dell'Universo è composta da questo tipo DM molto massiva che è anche chiamata *cold dark matter* (CDM).

È possibile tuttavia che particelle più leggere rispetto ai WIMP contribuiscano alla quantità totale di DM dell'Universo. Particelle di questo tipo formano la cosiddetta *hot dark matter* (HDM).

Un tipo di particella che contribuisce alla quantità totale di HDM nell'Universo è il neutrino. I neutrini sono senza dubbio interessanti, la loro proprietà più importante è il fatto che sappiamo già che esistono, al contrario della CDM i cui candidati più studiati devono essere ancora osservati. Altra caratteristica a favore dei neutrini è il fatto che possiedono molte delle proprietà che attribuiamo alla materia oscura, hanno una massa (seppur molto piccola), interagiscono debolmente, e sono difficili da rilevare. Calcoliamo la densità di neutrini nell'Universo.

Nelle prime fasi di vita dell'Universo i neutrini erano in equilibrio termico con il resto delle particelle. Durante l'espansione dell'Universo esso diventa sufficientemente rarefatto da far ridurre il numero di interazioni dei neutrini con il resto delle particelle al punto che non possono più rimanere in equilibrio. I neutrini tenderanno ad espandersi adiabaticamente raffreddandosi. Successivamente gli elettroni e i positroni presenti nel plasma dell'Universo si annichilano in fotoni aggiungendosi ai già presenti fotoni di CMB. Durante questo processo di annichilazione la temperatura dei neutrini T_ν non subisce variazioni mentre quella dei fotoni T_γ aumenta, la relazione tra le due è [12]

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \quad (3.1)$$

per cui essendo $T_\gamma \approx 2.75 \text{ K}$ risulta $T_\nu \approx 1.93 \text{ K}$. Nota la temperatura dei neutrini possiamo scrivere la loro densità numerica e la densità di energia come ricavato nella sezione 2.1.4

$$n = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g(kT_\nu)^3$$

$$\rho_\nu = \begin{cases} 7/8(\pi^2/30)g(kT)^4 & \text{se } m_\nu \ll kT_\gamma \\ \sum_i m_i n & \text{se } m_\nu \gg kT_\gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

dove $kT_\gamma \approx 10^{-4} \text{ eV}$, ζ è la funzione Zeta di Riemann, g i gradi di libertà, k la costante di Boltzmann e T_ν la temperatura media dei neutrini.

Il limite superiore alla somma delle masse dei neutrini fissato sperimentalmente è, al 95% di confidenza, $\sum m_\nu \leq 0.23 \text{ eV}$ [18], per cui la densità

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\rho_\nu}{\rho_c} h^2 = \frac{\sum_i m_i n}{\rho_c} h^2 = \frac{\sum_i m_i}{93.2 \text{ eV}} \quad (3.3)$$

dove $\Omega_\nu = \rho_\nu/\rho_c$, ρ_c è la densità critica di energia dell'Universo e $h = H_0/100$ è il parametro di Hubble ridotto. Considerando il limite superiore alle masse dei neutrini otteniamo un limite superiore al contributo di neutrini alla densità fossile

$$\Omega_\nu h^2 \leq 0.023. \quad (3.4)$$

Confrontando questo valore con la densità di CDM stimata dalla CMB ($\Omega_\chi h^2 \approx 0.12$) osserviamo che la quantità di neutrini rispetto alla quantità di CDM nell'Universo è molto piccola. Questo risultato rafforza l'idea che la maggior parte della materia oscura dell'Universo è del tipo CDM, mentre la HDM fornisce un contributo piccolo.

3.3 Possibili candidati di materia oscura non barionica

Nella sezione 1.1 abbiamo mostrato il problema delle curve di rotazione delle galassie e abbiamo illustrato alcune delle ipotesi che sono state fatte per spiegare il problema. Una delle ipotesi fatte era quella particellare di cui abbiamo appena discusso, qui vogliamo citare una serie di candidati relativi a tale ipotesi:

- Neutrini. Nonostante abbiamo l'indiscussa qualità di esistere non possiamo accettare i neutrini come unico candidato di DM per i motivi citati nella sezione precedente.
- Assioni. Gli assioni sono stati introdotti per inserire la violazione di CP nell'ambito della teoria delle interazioni forti. Non sono mai stati identificati. I vincoli sulla massa impongono che siano particelle molto leggere ($\leq 0.01 \text{ eV}$) ed il calcolo della loro densità residua dipende dal modello considerato per cui, in mancanza di vincoli più stringenti, restano tra le possibili risposte al problema della DM [19].
- Supersimmetria[20]. La supersimmetria associa ad ogni fermione (bosone) del Modello Standard un partner supersimmetrico bosonico (fermionico). Tra le varie possibili particelle ipotizzate ne emergono alcune con caratteristiche interessanti ma il *neutralino*, partner supersimmetrico del neutrino e la più leggera e stabile di queste particelle. Risulta il miglior candidato ed è ampiamente studiato.
- Particelle di Kaluza-Klein. Si tratta di particelle che emergono in modelli in cui si suppone esistano dimensioni extra oltre alle tre spaziali e quella temporale. Nell'ambito di modelli questo tipo è prevista l'esistenza di nuove particelle, la più leggera di esse appare stabile e potrebbe essere un candidato di materia oscura.
- DM super massiva. Esiste la possibilità che le particelle che compongono la DM possano avere elevati valori di massa ($m_\chi > 10^{10} \text{ GeV}$). Tali particelle sono dette *wimpzilla*, la loro abbondanza dipende dal meccanismo con cui sono prodotte nei primi periodi di vita dell'Universo quando l'energia era tale da creare particelle così massive. L'esistenza dei *wimpzilla* spiegherebbe la presenza di raggi cosmici di energia superiore a $7 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ [21], limite oltre il quale un protone interagisce con un fotone di CMB per cui non potremmo rivelarlo.

3.4 Densità fossile di particelle non relativistiche

Nel capitolo 2 abbiamo descritto quale sia stata l'evoluzione dell'Universo nel suo complesso. Ora possiamo concentrarci sul ruolo che la DM ha avuto in essa. Nei primi periodi di vita dell'Universo tutte le particelle sono state create in abbondanza e, finché la temperatura dell'Universo era sufficientemente alta, esse erano tutte in equilibrio termico interagendo tra di loro. In particolare le particelle di DM si annichilavano per produrre altre particelle, ma anche queste ultime avevano energia sufficientemente alta da produrre di nuovo DM. Tuttavia nella sua evoluzione l'Universo si è espanso raffreddandosi, in questo modo la densità n di una generica particella di massa m diminuiva secondo una distribuzione del tipo Boltzmann

$$n \propto e^{-m/kT}. \quad (3.5)$$

Nel caso delle particelle di DM si suppone che la loro densità abbia continuato a diminuire secondo la (3.5) finché la temperatura dell'Universo kT era notevolmente maggiore della loro massa. Quando kT ha raggiunto valori dell'ordine di m_χ la densità di particelle di DM è diminuita a tal punto da abbassare drasticamente il tasso di interazione con le altre particelle. Questa situazione ha comportato l'uscita della DM dall'equilibrio termico che aveva con il resto dell'Universo congelando il valore della sua densità.

Se la DM fosse rimasta nella condizione di equilibrio termico fino ad oggi, la sua abbondanza sarebbe pressoché nulla a causa del fattore esponenziale legato alla temperatura. Poiché è avvenuto il freeze out della sua densità, essa ha risentito solo della diluizione dovuta all'espansione dell'Universo per cui oggi è possibile osservare gli effetti della presenza di DM.

Nella sezione 2.2.1 abbiamo visto che, al fine di interpretare al meglio i dati di CMB, occorre supporre l'esistenza di materia oscura *fredda*, cioè non relativistica. In questa sezione otterremo un'espressione per la densità fossile di particelle non relativistiche che si trovino in condizioni simili a quelle in cui supponiamo si sia trovata la DM nei primi periodi di vita dell'Universo.

3.4.1 Modello di Densità fossile

Consideriamo un gruppo di particelle massive χ presente nell'Universo primordiale e in equilibrio termico con esso. Supponiamo che χ interagisca con le altre particelle presenti e anche che sia una particella stabile. Poiché supponiamo che χ sia stabile il suo numero di particelle potrà variare solo attraverso reazioni di annichilazione e annichilazione inversa

$$\chi\bar{\chi} \longleftrightarrow X\bar{X} \quad (3.6)$$

dove X è una generica particella che può prodursi nell'annichilazione. La variazione nel tempo di n , la densità di particelle χ , è [14]

$$\frac{dn(t)}{dt} + 3H(t)n(t) = -\langle\sigma(t)v(t)\rangle(t)(n^2(t) - n_{eq}^2(t))^* \quad (3.7)$$

dove $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ è il tasso d'espansione dell'Universo, $a(t)$ è il fattore di scala ed $\dot{a}(t)$ ne è la derivata temporale. In questa fase di vita dell'Universo $a(t) \approx t^{1/2}$ [12]. Nella (3.7) σ è la sezione d'urto di annichilazione, v la velocità relativa delle particelle $\langle\sigma v\rangle$ è la media termica calcolata rispetto alla distribuzione di Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m_\chi}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_\chi v^2}{2kT}} \quad (3.8)$$

*In appendice D forniamo i dettagli per ottenere l'equazione che descrive la variazione nel tempo di n .

ed n_{eq} è la densità di equilibrio della particella χ

$$n_{eq} = g \left(\frac{m_\chi kT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_\chi/kT}. \quad (3.9)$$

La dipendenza dal tempo di n_{eq} è dovuta alla variazione di temperatura durante l'evoluzione dell'Universo, più avanti in questa sezione esplicheremo la relazione tra n_{eq} e t .

Analizziamo nel dettaglio l'equazione (3.7):

- Il termine H è legato alla diminuzione di densità n a causa dell'espansione dell'Universo.
- Il termine $-\langle\sigma v\rangle n^2$ rappresenta l'annichilazione delle χ infatti contiene la sezione d'urto di annichilazione ed è proporzionale al numero di particelle χ .
- Il termine $\langle\sigma v\rangle n_{eq}^2$ invece rappresenta la produzione di χ , questo poiché la sezione d'urto d'annichilazione è uguale alla sezione d'urto di produzione di χ ad opera di tutte le altre particelle. La densità all'equilibrio è infatti uguale alla densità di tutte le altre particelle che a loro volta possono produrre χ annichilandosi.
- Se $n > n_{eq}$, e supponendo il contributo di $H(t)n(t)$ trascurabile, la densità tende a diminuire e viceversa tende ad aumentare se $n < n_{eq}$ raggiungendo il valore d'equilibrio con il resto dell'Universo.
- Quando $n = n_{eq}$, cioè χ è in equilibrio, il secondo membro si annulla. La densità di particelle varia solo a causa dell'espansione dell'Universo che, aumentando in volume, la fa decrescere.
- La decrescita di n evidenziata nel punto sopra tende a ridurre sempre più il contributo del termine $\langle\sigma v\rangle n^2$ riducendo di fatto il tasso di interazione tra χ e il resto delle particelle.

In sintesi durante la sua evoluzione χ ad un certo punto cesserà di interagire con il resto delle particelle. Il suo valore di densità sarà fissato al valore d'equilibrio che aveva quando ciò è avvenuto, l'unico fattore che influirà sul valore di densità n sarà quindi l'espansione dell'Universo.

A questo punto, a partire dall'equazione (3.7), vogliamo ottenere un'espressione di quel valore di densità che è ormai fuori dall'equilibrio con l'Universo e che quindi forma la così detta *relic density*. Nel cercare una soluzione risulta comodo usare

$$Y = \frac{n}{s}, \quad Y_{eq} = \frac{n_{eq}}{s}. \quad (3.10)$$

All'equilibrio termico

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_*(kT)^3 \quad (3.11)$$

è la densità di entropia nell'Universo ricavata nella sezione 2.1.4 e $g_* = g_{s*}$ (2.34). Ricordiamo che $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, con $a(t)$ fattore di scala dell'Universo, e che l'entropia per il volume comovante (sa^3) resta costante. Con queste informazioni

$$Y = \frac{n}{s} = \frac{na^3}{sa^3} \quad (3.12)$$

quindi

$$\dot{Y} = \frac{\dot{n}a^3 + 3na^2}{sa^3} \quad (3.13)$$

da cui

$$s\dot{Y} = \dot{n} + 3Hn \quad (3.14)$$

il punto indica derivata temporale. Segue che la (3.7) si riscrive come

$$\frac{dY}{dt} = -s(t) \langle \sigma(t)v(t) \rangle [Y^2(t) - Y_{eq}^2(t)] \quad (3.15)$$

Richiamiamo inoltre l'equazione (2.37) che lega tempo e temperatura

$$t = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi}} g_*^{-1/2} \frac{M_P}{(kT)^2} = 0.301 \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{M_P}{T^2} \quad (3.16)$$

attraverso di essa possiamo esprimere l'equazione di evoluzione in termini della temperatura dell'Universo e poi effettuare un ulteriore cambio di variabile ponendo $x = m_\chi/kT$. Risulta

$$t = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi}} g_*^{-1/2} \frac{M_P}{(kT)^2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{45}{\pi}} g_*^{-1/2} \frac{M_P}{m_\chi^2} \frac{m_\chi^2}{(kT)^2} = Ax^2 \quad (3.17)$$

dove $A = 1/4\pi \sqrt{45/\pi} g_*^{-1/2} M_P/m_\chi^2$. Segue che

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2Ax} \quad (3.18)$$

per cui

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2Ax} \frac{dY}{dx} \quad (3.19)$$

quindi

$$\frac{dY}{dx} = -2Ax [s(t) \langle \sigma(t)v(t) \rangle (Y^2(t) - Y_{eq}^2(t))] \quad (3.20)$$

ma confrontando l'espressione di A con la (2.36) osserviamo che $2A = 1/(Hx^2)$ per cui l'equazione d'evoluzione risulta

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{s(x) \langle \sigma(x)v(x) \rangle}{H(x)x} (Y^2(x) - Y_{eq}^2(x)). \quad (3.21)$$

Poiché supponiamo che all'inizio χ fosse in equilibrio termico con il resto dell'Universo, la condizione iniziale per risolvere quest'equazione è $Y \simeq Y_{eq}$ per alte temperature (bassi valori di x). Poiché ci aspettiamo anche che l'Universo diventi sempre più freddo e rarefatto, e che χ si disaccoppi molto prima che questo accada fissiamo la condizione al contorno $Y \gg Y_{eq}$ basse temperature (alti valori di x). Chiamiamo x_F il valore di x che separa la regione di bassi valori di x dalla regione ad alti valori di x . L'equazione (3.21) può essere risolta numericamente, tuttavia per poter calcolare la relic density basta conoscere il comportamento della Y solo per grandi valori di x . Attraverso una stima asintotica della soluzione potremo anche ottenere un'espressione analitica della densità fossile, cosa che invece la soluzione numerica non avrebbe permesso. Quindi studiamo il comportamento asintotico della (3.21).

- In $x \ll x_F$ risulta $Y \simeq Y_{eq}$, per cui

$$Y^2 - Y_{eq}^2 = (Y + Y_{eq})(Y - Y_{eq}) \simeq 2Y_{eq}(Y - Y_{eq}) \quad (3.22)$$

quindi l'equazione (3.21) diventa

$$Y = -\frac{Y'_{eq}}{2F(x)Y_{eq}} + Y_{eq}, \quad x \ll x_F \quad (3.23)$$

- Nella regione in cui $x \gg x_F$ risulta $Y \gg Y_{eq}$ e la (3.21) diventa

$$Y' = -F(x)Y^2, \quad x \gg x_F \quad (3.24)$$

dove $F(x) = \frac{s\langle\sigma v\rangle}{H(x)x}$ e l'apice indica la derivata in x . La quantità x_F è detta valore di *freeze out*, e nella prossima sezione se ne analizza il significato fisico. Le due soluzioni che è possibile trovare si raccordano ad un unico valore in x_F . In figura 3.4.1 mostriamo l'andamento di Y .

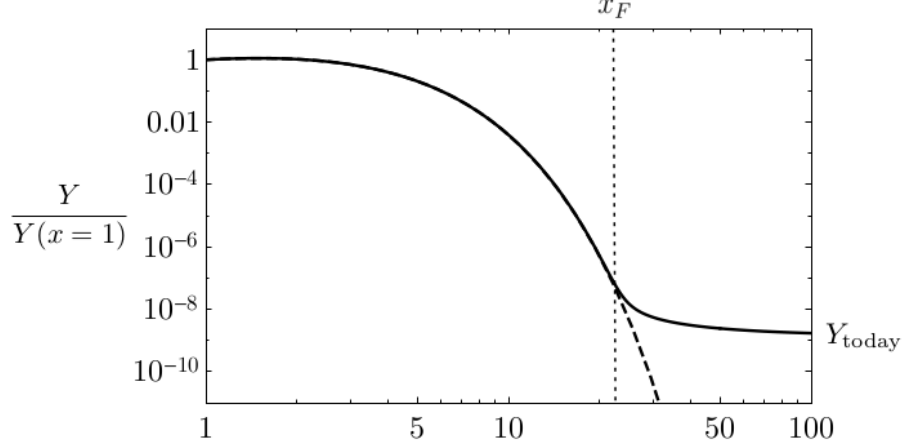


Figura 3.1: Andamento della densità in funzione di $x = m_\chi/kT$ per una particella di massa $m_\chi = 100 GeV$. La linea tratteggiata mostra come si sarebbe evoluta la densità Y se la χ fosse rimasta in equilibrio termico con il resto dell'Universo, x_F separa le due regioni in cui è possibile risolvere analiticamente l'equazione d'evoluzione.

Ricaviamo analiticamente una stima di x_F , raccordando la condizione $Y \simeq Y_{eq}$ valida in $x \ll x_F$ con la soluzione valida per $x \gg x_F$, cioè

$$Y'_{eq} = -F(x_F)Y_{eq}^2. \quad (3.25)$$

Dalla (3.9), dalla definizione di Y_{eq} e dall'espressione di s (2.34) ricaviamo

$$Y_{eq}(x) = \frac{g}{g_*} \frac{45}{(2\pi)^{3/2} 2\pi^2} x^{3/2} e^{-x} \quad (3.26)$$

dove $g_* = g_{s*}$ all'equilibrio termico. Sostituendo nella (3.25) otteniamo

$$(x_F^{3/2} - \frac{3}{2}x_F^{1/2}) = F(x_F)Kx_F^3 e^{-x_F} \quad (3.27)$$

dove abbiamo posto per semplicità $K = \frac{g}{g_*} \frac{45}{(2\pi)^{3/2} 2\pi^2}$. Da quest'espressione è possibile ottenere

$$x_F = \log \left(\frac{KF(x)}{(x_F^{-3/2} - x_F^{-5/2})} \right) \quad (3.28)$$

Esplicitiamo ora la forma della $F(x)$, poiché supponiamo che le particelle χ siano non relativistiche la sezione d'urto d'annichilazione può essere sviluppata attorno bassi valori della velocità relativa v_R delle particelle che collidono

$$\langle\sigma v_R\rangle|_{v_R \simeq 0} = a + b\langle v_R^2\rangle + \mathcal{O}(v_R^4), \quad (3.29)$$

la media $\langle \sigma v_R \rangle$ va calcolata mediante la distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m_\chi}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_\chi v^2}{2kT}}, \quad (3.30)$$

la distribuzione è espressa in funzione di v , la velocità della particella χ nel sistema del centro di massa. Il legame tra la velocità relativa e quella nel sistema del centro di massa è $v_R = 2v$ per cui

$$\langle \sigma v_R \rangle = 2 \langle \sigma v \rangle .. \quad (3.31)$$

Inoltre la distribuzione di Maxwell-Boltzmann è normalizzata ad uno

$$\int f(\vec{v}) d^3v = 1. \quad (3.32)$$

Osserviamo che è possibile utilizzare la distribuzione di Maxwell-Boltzmann nonostante la DM non sia in equilibrio termodinamico poiché la DM resta in *equilibrio cinetico*. Nonostante non sia più in equilibrio con l'Universo la sua distribuzione mantiene la forma di una distribuzione all'equilibrio poiché non avvengono più interazioni che ne possono variare la forma.

La media termica $\langle h(\vec{v}) \rangle$ di una funzione $h(\vec{v})$ rispetto alla distribuzione $f(v)$ è definita

$$\langle h(\vec{v}) \rangle = \int h(\vec{v}) f(\vec{v}) d^3v. \quad (3.33)$$

Segue che

$$\langle cost \rangle = cost \quad (3.34)$$

se mediamo su una distribuzione dispari di \vec{v} otteniamo zero, per cui

$$\langle \vec{v} \rangle = 0. \quad (3.35)$$

Calcoliamo ora la quantità $\langle v^2 \rangle$

$$\langle v^2 \rangle = \left(\frac{m_\chi}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int v^2 e^{-\frac{m_\chi v^2}{2kT}} d^3v \quad (3.36)$$

in coordinate sferiche

$$\langle v^2 \rangle = \left(\frac{m_\chi}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{m_\chi v^2}{2kT}} dv \quad (3.37)$$

è possibile risolvere quest'integrale ponendo

$$I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\frac{m_\chi v^2}{2kT}} dv = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (3.38)$$

dove $\alpha = m_\chi/(2kT)$. In questo modo l'equazione (3.37) si riscrive

$$\langle v^2 \rangle = \left(\frac{m_\chi}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha v^2} dv \quad (3.39)$$

quindi otteniamo

$$\langle v^2 \rangle = 3 \frac{kT}{m_\chi} = \frac{3}{x} \quad (3.40)$$

quindi risulta

$$\langle \sigma v \rangle |_{v \simeq 0} = a + \frac{3b}{x} + ... \quad (3.41)$$

e dalla (3.31) otteniamo

$$\langle \sigma v_R \rangle|_{v_R \simeq 0} = a + \frac{6b}{x} + \dots \quad (3.42)$$

dove il fattore 2 di fronte al coefficiente a è stato riassorbito nella definizione di a . Richiamiamo ora un risultato della sezione 2.1.3 riguardo alla densità di energia di un gas, nel nostro caso il plasma dell'Universo primordiale, a temperatura T

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} (kT)^4 \quad (3.43)$$

mentre nella sezione 2.1.5 abbiamo espresso il fattore di espansione dell'Universo in termini di ρ

$$H^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho \quad (3.44)$$

G è la costante di gravitazione universale ed è legata alla massa di Plank $M_P = 1/\sqrt{G}$. Sfruttando le espressioni di H , di ρ e di s risulta [22]

$$\frac{s}{H(x)x} = \sqrt{\frac{\pi g_*}{45}} \frac{M_P m_\chi}{x^2}. \quad (3.45)$$

per cui

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi g_*}{45}} \frac{M_P m_\chi}{x^2} \left(a + \frac{6b}{x} \right). \quad (3.46)$$

sostituendo nell'espressione di x_F (3.28) otteniamo

$$x_F = \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{g m_p m_\chi}{1.66 g_*^{1/2}} \frac{a + 6b/x_F}{x_F^{1/2}} \right). \quad (3.47)$$

Nella prossima sezione mostriamo come ottenere x_F mediante considerazioni fisiche, tale espressione coinciderà con l'espressione appena ricavata.

Torniamo al valore di densità fossile delle particelle χ , siamo interessati solo alla soluzione per grandi valori di x per cui prenderemo la soluzione dell'equazione per la densità di χ solo per valori $x \gg x_F$, l'equazione diventa quindi

$$\frac{dY}{dx} = -\sqrt{\frac{\pi g_*}{45}} \frac{M_P m_\chi}{x^2} \left(a + \frac{6b}{x} \right) Y^2. \quad (3.48)$$

da cui

$$\int_{Y(x_F)}^{Y(\infty)} \frac{dY}{Y^2} = - \int_{x_F}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{\pi g_*}{45}} \frac{M_P m_\chi}{x^2} \left(a + \frac{6b}{x} \right) \right] dx \quad (3.49)$$

Quindi

$$\frac{1}{Y(\infty)} - \frac{1}{Y(x_F)} = \left[\sqrt{\frac{\pi g_*}{45}} \frac{m_p m_\chi}{x_F} \left(a + \frac{3b}{x_F} \right) \right] \quad (3.50)$$

ma $Y(x_F) \gg Y(\infty)$ per cui è possibile trascurare in termine $1/Y(x_F)$. A questo punto possiamo finalmente ottenere un'espressione per la relic density di χ . In generale l'abbondanza di una certa sostanza nell'Universo la cui densità di energia è ρ_i si indica in unità di ρ_c , dove

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (3.51)$$

è la densità critica per cui avremmo un Universo piatto. H_0 è la costante di Hubble. La densità di una generica sostanza è espressa rispetto alla densità critica

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (3.52)$$

Per χ sarà $\rho_\chi = m_\chi n = m_\chi s Y(\infty)$, inoltre la densità d'entropia è $s \approx 3000 \text{ cm}^{-3}$ (sez. 2.1.4), quindi otteniamo l'espressione per la relic density di χ

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1}}{M_P} \frac{x_F}{\sqrt{g_*}} \frac{1}{a + 3b/x_F} \quad (3.53)$$

dove abbiamo usato il parametro di Hubble ridotto $h = H_0/100$.

3.5 Interpretazione fisica del freeze-out

Nella sezione precedente abbiamo ricavato un'espressione per la relic density di un oggetto non relativistico χ . Per farlo abbiamo considerato un'equazione d'evoluzione di cui abbiamo trovato due soluzioni asintotiche calcolate per valori della variabile x molto grandi o molto piccoli rispetto ad un certo valore x_F detto di freeze out.

Prima di procedere riscriviamo l'equazione (3.21) in un'altra forma

$$\frac{x}{Y_{eq}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma}{H} \left[\left(\frac{Y}{Y_{eq}} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.54)$$

dove

$$\Gamma = n_{eq} \langle \sigma v \rangle \quad (3.55)$$

è il numero di interazioni al secondo cui la particella χ va incontro ed è detto tasso di interazione. È possibile vedere da quest'equazione come la variazione della densità sia strettamente legata al rapporto tra il tasso di interazione Γ ed il tasso di espansione dell'Universo H . Il rapporto tra queste due grandezze fornisce informazioni sull'equilibrio delle particelle χ con il resto dell'Universo. Se $\Gamma \gg H$ le particelle χ interagiscono molto spesso annichilandosi, la densità Y quindi decresce portandosi ad un valore vicino a quello di equilibrio Y_{eq} ; se invece $\Gamma \ll H$ le interazioni sono molto rare e la densità Y smette di variare uscendo dall'equilibrio termico con il resto dell'Universo, in questo caso si genera una densità fossile. Il fenomeno per cui le particelle χ , a causa delle poche interazioni, si portano fuori dall'equilibrio termodinamico con il resto dell'Universo è chiamato proprio *freeze out*. Il valore x_F , introdotto per raccordare le due soluzioni analitiche che richiamano le situazioni appena analizzate, è il valore cui avviene il freeze out.

Possiamo stimare il valore di x_F , il disaccoppiamento avviene infatti quando le interazioni di χ sono poco frequenti rispetto al tasso di interazione dell'Universo, per cui x_F sarà quel valore di x per cui $\Gamma \approx H$, quindi ci basterà porre

$$\Gamma(x_F) = H(x_F) \quad (3.56)$$

in particolare $\Gamma = n_{eq} \langle \sigma v \rangle$ dove

$$n_{eq} = g \left(\frac{m_\chi T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_\chi}{kT}} \quad (3.57)$$

m_χ e g sono la massa e i gradi di libertà della particella (per particelle di spin s risulta $g = 2s+1$). La sezione d'urto è invece espressa come

$$\langle \sigma v \rangle = a + \frac{6b}{x} \quad (3.58)$$

mentre dall'equazione (3.45) è possibile ricavare

$$H(x_F) = \frac{1.66 g_*^{1/2} m_\chi^2}{x_F M_P} \quad (3.59)$$

g_* rappresenta i gradi di libertà relativistici ed M_P è la massa di Planck. Sostituendo la (3.59) e la (3.55) nella (3.56) otteniamo un'espressione per x_F

$$x_F = \log \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{g M_P m_\chi}{1.66 g_*^{1/2}} \frac{a + 6b/x_F}{x_F^{1/2}} \right] \quad (3.60)$$

l'equazione si risolve numericamente per ricorrenza. Quindi sostituiamo l'espressione appena trovata per x_F nell'espressione (3.53) per ottenere un'espressione per la densità fossile che dipenda solo dai parametri a e b di cui troviamo un'espressione nel prossimo capitolo.

Capitolo 4

Il modello di DM

Nel capitolo precedente abbiamo ricavato l'espressione della densità fossile prodotta da una certa particella χ non relativistica lasciando come non noti dei parametri (a e b) che dipendevano dalla sezione d'urto di annichilazione in altre particelle.

In questo capitolo vogliamo utilizzare tale espressione per calcolare la densità fossile di materia oscura nell'Universo, per fare questo necessitiamo della sezione d'urto con le particelle che compongono la materia ordinaria. A tale scopo adottiamo un modello che possa descrivere l'interazione tra materia oscura e materia standard. Introducendo il formalismo delle lagrangiane effettive possiamo ottenere, a partire dal modello adottato, una lagrangiana che, alle scale di energia cui lavoriamo, fornisca una descrizione dei fenomeni cui siamo interessati in una forma che permetta calcoli più semplici. Sfruttando questa nuova teoria è possibile ricavare la sezione d'urto di annichilazione da inserire nell'espressione della relic density. Infine, imponendo che l'espressione da noi ottenuta fornisca lo stesso risultato della stima di densità fossile ottenuta mediante la CMB ricaviamo informazioni sul modello utilizzato.

4.1 Lagrangiana di interazione con la materia ordinaria

Immaginiamo che le particelle che compongono la dark matter abbiano massa superiore a quella di qualunque particella del Modello Standard (SM). Descriviamo l'interazione di queste particelle con quelle della materia ordinaria adottando una densità di lagrangiana del tipo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \mathcal{L}_{SM} + \bar{\chi}(i\not{D} - m_\chi)\chi + \sum_{\alpha} (D_\mu S_\alpha^a)^\dagger (D^\mu S_\alpha^a) \\ & - \sum_{\alpha} \Lambda^2 S_\alpha^{*a} S_\alpha^a + g_\chi \sum_i \sum_{\alpha} (\bar{\chi} f_{Li\alpha}^a S_\alpha^{*a} + S_\alpha^a \bar{f}_{Ri\alpha}^a \chi)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Questa lagrangiana gode delle stesse simmetrie del Modello Standard $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$, ma nella nostra analisi basterà considerare la simmetria di gauge $U(1) \otimes SU(2)$. Spieghiamo la notazione con cui è scritto il modello

- \mathcal{L}_{SM} è la lagrangiana del Modello Standard.
- La particella di DM χ è un fermione di Dirac e ha spin $1/2$, ha massa m_χ e non ha carica elettrica. Il termine χ rappresenta il campo associato alla particella di DM e gode della simmetria $SU(2) \otimes U(1)$.

- $\not{\partial}$ è la contrazione dell'operatore derivata ∂_μ con le matrici di Dirac* γ^μ
- D_μ è la derivata covariante sotto simmetria di $SU(2) \otimes U(1)$ definita come

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu - i\frac{g'}{2}YB_\mu \quad (4.2)$$

dove abbiamo indicato con \vec{W}_μ e B_μ sono gli operatori che descrivono i bosoni mediatori dell'interazione elettrodebole e g e g' le rispettive costanti di accoppiamento dell'interazione. \vec{I} è l'operatore di isospin debole rappresentato dalle matrici di Pauli $\sigma/2$ quando applicato ad un certo campo ψ . Y è l'operatore di *ipercarica debole* e ne analizzeremo in seguito le proprietà.

- L'operatore di campo $f_{Li\alpha}^a$, doppietto di $SU(2)$, descrive un fermione sinistrorso. L'indice a identifica l'elemento del doppietto. L'indice i invece identifica le tre famiglie di quark, per cui al variare di i $f_{Li\alpha}^a$ rappresenta i doppietti dei quark $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$. L'indice α invece è un indice di colore che corre su r, b e g .
- L'operatore S_α^a , doppietto di $SU(2)$, rappresenta uno scalare di massa Λ . Nel modello supponiamo S_α^a sia il mediatore dell'interazione tra quark e χ , gli indici hanno lo stesso significato di $f_{i\alpha}^a$.
- g_χ è la costante di accoppiamento dell'interazione tra χ e quark.

Il nostro modello non fa distinzione di colore o di famiglia dei quark per cui nelle considerazioni successive elimineremo gli indici i e α per alleggerire la notazione. Mostriamo quali sono le proprietà di χ nel modello appena adottato. Richiamiamo le proprietà di trasformazione di un generico campo ψ sotto $SU(2)$

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow e^{-ig\alpha_i(x)I^i} \psi_L \\ \psi_R &\rightarrow \psi_R \end{aligned} \quad (4.3)$$

si adotta la notazione degli indici ripetuti. I termini $\alpha_i(x)$ e I^i rappresentano al variare di i le componendi dei vettori $\vec{\alpha}$ e \vec{I} . Il vettore \vec{I} rappresenta l'operatore di isospin debole del campo ψ mentre $\vec{\alpha}$ contiene le costanti che identificano la trasformazione ψ_L e ψ_R sono la parte sinistra (left) e la parte destra (right) di ψ che possiamo esprimere mediante l'uso di proiettori P_L e P_R

$$\psi = \psi_L + \psi_R = P_L\psi + P_R\psi = \frac{1 - \gamma^5}{2}\psi + \frac{1 + \gamma^5}{2}\psi \quad (4.4)$$

Imporre che χ sia singoletto di $SU(2)$ implica che si trasformi banalmente sotto una trasformazione del tipo (4.3), cioè

$$\chi \rightarrow \chi \quad (4.5)$$

da cui osserviamo che il termine $e^{-ig\alpha_i(x)I^i}$ deve essere uguale all'identità. Poiché la costante g_χ è diversa da zero e $\vec{\alpha}(x)$ varia per identificare tutte le possibili trasformazioni l'unico modo affinché χ si trasformi banalmente qualunque sia α è che l'operatore di isospin \vec{I} applicato al campo della χ abbia autovalore nullo, cioè l'isospin della χ è nullo

$$\vec{I}\chi = 0. \quad (4.6)$$

*La forma delle matrici di Dirac da noi usata è mostrata in appendice B.

Un'altra ipotesi che abbiamo fatto nel nostro modello è che χ sia anche singoletto di $U(1)$, la cui generica trasformazione ha forma

$$\psi \rightarrow e^{-\frac{i}{2}g'\beta(x)Y}\psi \quad (4.7)$$

indipendentemente dal fatto che i fermioni siano left o right. $\beta(x)$ è la costante che identifica la trasformazione e l'operatore Y è detto *ipercarica debole* ed è definito

$$Y = 2(Q - I_z), \quad (4.8)$$

dove Q è la carica elettrica della particella in esame ed I_z la terza componente dell'isospin debole. Abbiamo già mostrato che χ ha isospin nullo, mentre una delle ipotesi di partenza del modello è che sia un fermione neutro per cui $Q = 0$ e poiché $\vec{I} = 0$ anche la terza componente I_z sarà nulla. Dalla (4.8) risulta quindi che la sua ipercarica debole Y dovrà essere nulla. In questo modo anche la trasformazione (4.7) risulta essere, come atteso, un'identità.

Cerchiamo ora di identificare le proprietà dello scalare S_α^a . Possiamo ottenere informazioni analizzando il termine $\bar{\chi}f_L^aS^{*a}$ della lagrangiana (4.1). Ricordiamo che f_L^a rappresenta un fermione left doppietto di $SU(2)$ dove l'indice a identifica l'elemento del doppietto ed abbiamo ommesso gli indici di colore e della famiglia dei quark. Consideriamo ora una trasformazione $U(1)$. I singoli oggetti che compongono il termine considerato si trasformano come

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &\rightarrow \bar{\chi} \\ f_L &\rightarrow e^{-ig'\beta(x)Y}f_L \\ S^* &\rightarrow e^{ig'\beta(x)Y}S^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

Globalmente la lagrangiana è invariante sotto trasformazioni $U(1)$ quindi lo è anche ognuno dei suoi termini. Affinché il termine $\bar{\chi}f_L^aS^{*a}$ sia invariante sotto questa trasformazione è necessario che sia $YS^* = Yf$, cioè i due oggetti devono avere la stessa ipercarica. Per cui il fatto che f_L e S^* abbiano la stessa ipercarica, unito all'essere doppietti di isospin, implica che S^* ha la stessa carica e isospin di f_L . Poiché il campo S è il complesso coniugato di S^* è possibile conoscere carica e isospin dello scalare

S	Q	I_z	Y
S_1	-2/3	-1/2	-1/3
S_2	1/3	1/2	-1/3

Il termine $g_\chi(\bar{\chi}f_L^aS^{*a} + S^a\bar{f}_R^a\chi)$ descrive l'interazione tra χ e i quark. Nei diagrammi delle figure (4.1) e (4.2) indichiamo le regole di Feynman per questo tipo di interazione.

Potremmo già usare questo modello per scrivere una sezione d'urto di annichilazione tra χ e $\bar{\chi}$ per poi inserirla nella relic density, tuttavia possiamo adottare un approccio più conveniente.

Nella prossima sezione ricaviamo una *lagrangiana effettiva* che deriva dall'equazione (4.1). Essa ha il vantaggio semplificare i calcoli di sezione d'urto che andremo a fare e, alle energie cui lavoriamo, fornisce gli stessi risultati della lagrangiana completa.

4.2 Lagrangiana effettiva di materia oscura

In questa sezione si discutono i punti chiave della costruzione di una teoria effettiva. Si parte con una discussione generale sulle motivazioni che ci spingono alla costruzione di una

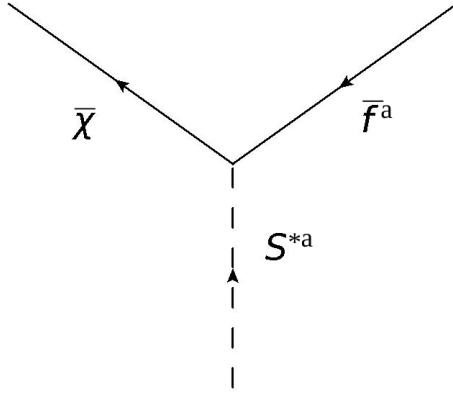


Figura 4.1: Al vertice di S^{*a} associamo un termine $-ig_\chi P_L$.

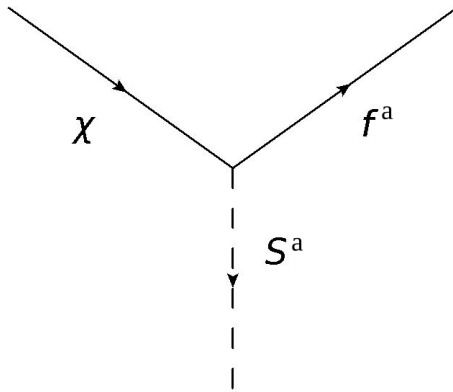


Figura 4.2: Al vertice di S associamo un termine $-ig_\chi P_R$.

lagrangiana effettiva, poi viene illustrato il procedimento generale da utilizzare. Infine si torna sul modello di interazione tra χ e materia ordinaria precedentemente descritto per ottenere in riferimento ad esso la lagrangiana effettiva da utilizzare nella nostra analisi.

4.2.1 Teorie effettive

Il modello introdotto nella sezione 4.1 descrive l'interazione con la materia ordinaria. La lagrangiana del modello contiene la lagrangiana del Modello Standard (MS), quindi tiene conto di un gran numero di particelle. La situazione che però vogliamo descrivere è l'interazione delle particelle χ , che compongono la DM, con la materia ordinaria a basse energie. Le energie sono talmente basse da far sì che la maggior parte delle particelle del MS non possa essere prodotta durante l'interazione. In questo caso una teoria come quella descritta dal nostro modello risulta essere inutilmente complessa e può essere semplificata per tenere in considerazione solo le particelle che compaiono. Una teoria che, a partire da una più generale, descrive alcuni fenomeni in maniera matematicamente più semplice è detta *teoria effettiva*.

Nel caso della fisica delle particelle la grandezza cui è legata la validità della teoria è la massa invariante del sistema in esame. Tale teoria sarà valida solo fino ad una certa scala di energia Λ , tutte le particelle con massa molto maggiore di Λ non potranno far parte della teoria, inoltre tipicamente Λ è anche la massa della più leggera delle particelle ad essere eliminate dalla teoria. Chiameremo Λ “scala di rottura della teoria” ed ad energie superiori a Λ la descrizione mediante la lagrangiana effettiva non è più valida. Uno svantaggio di questo approccio è però la perdita di rinormalizzabilità della teoria effettiva a causa della comparsa di operatori di dimensione maggiore di 4. La non rinormalizzabilità minaccia la capacità predittiva della teoria ma nella prossima sezione vedremo come superare questo problema.

L'ultima caratteristica fondamentale di una teoria effettiva è che le sue predizioni devono essere coerenti con quelle di teorie più generali. L'operazione per cui si impone che la teoria effettiva fornisca gli stessi risultati di una più generale è detta *matching* della teoria.

4.2.2 Costruire una lagrangiana effettiva

Supponiamo di voler descrivere un certo processo fisico: due particelle di materia oscura χ si annichilano in due fermioni f ma non conosciamo i dettagli dell'interazione (fig. 4.3).

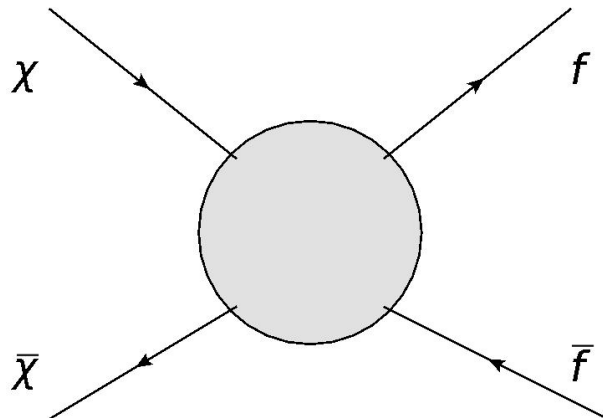


Figura 4.3: Interazione tra particelle di DM e fermioni standard.

Non sappiamo quasi nulla del processo, se non che sono presenti quattro fermioni che hanno un'interazione di qualche genere. Potremmo provare a descriverlo scrivendo un operatore, che

chiameremo \mathcal{O}_1 , a quattro fermioni e della forma

$$\mathcal{O}_1 = \bar{\chi} A_1 f \bar{f} B_1 \chi \quad (4.10)$$

dove χ e f sono i campi che associamo rispettivamente alla materia oscura ed ai fermioni prodotti, A_1 e B_1 sono due operatori che danno informazioni sulla forma dell'interazione (es. scalare, pseudoscalare, assiale...), tipicamente si utilizzano i bilineari di Dirac. Poiché non abbiamo modo di conoscere il tipo di interazione che avviene tra le particelle dovremo scrivere tutti i possibili operatori a quattro fermioni che possono produrre il diagramma in figura (4.3), di seguito ne elenchiamo alcuni:

- scalare: $\bar{\chi} f \bar{f} \chi, \bar{\chi} \chi \bar{f} f$;
- vettoriale: $\bar{\chi} \gamma_\mu f \bar{f} \gamma_\mu \chi, \bar{\chi} \gamma_\mu \chi \bar{f} \gamma_\mu f$;
- assiale: $\bar{\chi} \gamma_\mu \gamma^5 f \bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 \chi$;
- pseudoscalare: $\bar{\chi} \gamma^5 f \bar{f} \gamma^5 \chi$
- tensoriale: $\bar{\chi} \sigma_{\mu\nu} f \bar{f} \sigma^{\mu\nu} \chi$.

Dove γ_μ sono le matrici di Dirac[†], $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Questi sono solo alcuni dei possibili operatori che possiamo scrivere (per altri operatori si può consultare ad esempio [23]). Oltre a questi è possibile costruire operatori che possono dipendere anche dalle derivate di qualunque ordine dei campi, ad esempio

$$\mathcal{O}_2 = \partial_\mu \bar{\chi} A_2 f \partial^2 \bar{f} B_2 \partial^\mu \chi. \quad (4.11)$$

Chiamiamo ora \mathcal{O}_i tutti i possibili operatori che possiamo scrivere utilizzando tutti gli ingredienti a nostra disposizione. L'indice i ha solo la funzione di distinguere i diversi operatori. La lagrangiana effettiva nella sua forma generale sarà una combinazione lineare di tutti questi oggetti

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_i G_i \mathcal{O}_i(\chi, f, \partial_\mu \chi, \partial_\mu f, \partial^2 \chi \dots). \quad (4.12)$$

Appare evidente che tale sommatoria può arrivare a contenere un numero illimitato di termini, ed una teoria con infiniti termini non è predittiva poiché possiede infinite costanti G_i da determinare e non può essere utilizzata per descrivere alcun fenomeno.

Il problema si risolve osservando che i vari operatori non danno gli stessi contributi, vedremo infatti che alcuni sono molto piccoli per cui è possibile trascurarli troncando la serie (4.12) ad un certo ordine in q/Λ , dove q rappresenta il momento delle particelle che interagiscono e Λ la scala di rottura della teoria. Iniziamo con il concentrarci sulle costanti che accompagnano ogni operatore: ogni costante sarà legata ad una potenza inversa di Λ . Indichiamo con n la dimensione del generico operatore \mathcal{O}_i che quindi riscriveremo come $\mathcal{O}_i^{(n)}$. Poiché ogni termine di una lagrangiana deve avere complessivamente dimensione 4, la costante associata ad ogni operatore dovrà contenere una potenza $(n-4)$ -esima di Λ . Possiamo quindi ordinare gli operatori in base alle potenze crescenti di Λ

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_i \frac{g_i}{\Lambda^{n-4}} \mathcal{O}_i^{(n)} \quad (4.13)$$

dove abbiamo posto $G_i = g_i/\Lambda^{n-4}$. Effettuando la trasformata di Fourier (che indicheremo con il simbolo $\hat{}$) dell'equazione precedente gli operatori che contengono derivate (quelli di

[†]La forma delle matrici di Dirac da noi usata è mostrata in appendice B.

dimensione maggiore di 6) faranno comparire potenze di un certo momento q dell'ordine dell'energia cui avvengono i fenomeni che siamo interessati a studiare. La lagrangiana effettiva può essere quindi scritta come una serie in potenze di q/Λ

$$\hat{\mathcal{L}}_{eff} = \sum_i g_i \frac{1}{\Lambda^2} \left(\frac{q}{\Lambda}\right)^{n-6} \hat{\mathcal{O}}_i^{(n)}. \quad (4.14)$$

Appare chiaro quindi che lavorando ad energie molto più basse della scala Λ risulta $q/\Lambda \ll 1$ per cui i termini a dimensione maggiore generano contributi trascurabili rispetto a quelli a dimensione minore. Possiamo quindi decidere di troncare lo sviluppo di \mathcal{L}_{eff} all'ordine che desideriamo, scrivere la lagrangiana con un numero finito di termini ed essere sicuri di aver eliminato operatori che contribuirebbero alla nostra lagrangiana solo con delle piccole correzioni.

4.2.3 La lagrangiana effettiva di DM

Concentriamoci sul modello introdotto nella sezione 4.1 e proviamo a costruire una lagrangiana effettiva che, a scale di energia basse rispetto al valore di Λ , possa fornire una descrizione equivalente a quella fornita utilizzando l'equazione (4.1).

Il modello usato suppone un'interazione di tipo scalare in cui i fermioni f che descrivono i quark sono di tipo left e i fermioni χ sono associati alla DM. Nello sviluppo di \mathcal{L}_{eff} scegliamo di fermarci al primo ordine[‡] non banale in q/Λ , scriviamo cioè tutti gli operatori a quattro fermioni di dimensione 6 che contengano i fermioni χ e f_L e che rispettino le simmetrie di cui gode la (4.1). Non utilizziamo f_R poiché non compare nel modello originale.

$$\mathcal{L}_{eff} = G_1 \bar{\chi} \chi \bar{f}_L f_L + G_2 \bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi + G_3 \bar{f}_L f_L \bar{\chi} \chi + G_4 \bar{f}_L \chi \bar{\chi} f_L \quad (4.15)$$

(gli indici di $SU(2)$ sono omessi poiché contratti) le costanti G_i , $i = 1, \dots, 4$ vanno come Λ^{-2} . Osserviamo immediatamente che il primo e terzo termine sono nulli poiché compaiono i prodotti $\bar{f}_L f_L$, esplicitando i proiettori risulta

$$\bar{f}_L f_L = \bar{f} P_R P_L f = \bar{f} \frac{1 + \gamma^5}{2} \frac{1 - \gamma^5}{2} f = 0. \quad (4.16)$$

il secondo e il quarto possono essere inglobati in un unico termine, per cui

$$\mathcal{L}_{eff} = G \bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi \quad (4.17)$$

Confrontando quest'equazione con la (4.1) osserviamo che non compaiono termini contenenti S e la sua massa Λ . Il valore di G non è noto ma può essere espresso in funzione dei parametri presenti nella (4.1) effettuando il matching delle due teorie. Ponendoci a scale di energia basse rispetto a Λ possiamo imporre che la lagrangiana (4.17) e la (4.1) forniscano le stesse previsioni.

Consideriamo adesso due processi, quello in figura 4.4 descritto dalla lagrangiana effettiva e quello in figura 4.5 descritto dalla lagrangiana completa. Detti u_ψ e v_ψ gli spinori associati rispettivamente ad un generico fermione o antifermione ψ possiamo scrivere gli elementi di matrice associati ai diagrammi ricavati dalle rispettive lagrangiane. Per la lagrangiana effettiva abbiamo

$$\mathcal{M}_{eff} = iG \bar{u}_{f_L}(q) u_\chi(p) \bar{v}_\chi(p') v_{f_L}(q') \quad (4.18)$$

[‡]in appendice E considereremo anche l'ordine successivo facendo vedere che fornisce un contributo molto piccolo rispetto al primo.

per quella completa.

$$\mathcal{M} = g_\chi^2 \bar{u}_{f_L}^a(q) u_\chi(p) \frac{i\delta_{ab}}{k^2 - \Lambda^2} \bar{v}_\chi(p') i v_{f_L}^b(q'). \quad (4.19)$$

Riscriviamo il secondo termine come

$$\mathcal{M} = -\frac{ig_\chi^2}{k^2 - \Lambda^2} \bar{u}_{f_L}(q) u_\chi(p) \bar{v}_\chi(p') v_{f_L}(q'), \quad (4.20)$$

il significato dei quadrittori p, p', q, q' e k è indicato in figura 4.5. Sviluppiamo in k/Λ

$$\mathcal{M} = -\frac{ig_\chi^2}{\Lambda^2} \left(1 + \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^2 + \dots \right) \bar{u}_{f_L}(q) u_\chi(p) \bar{v}_\chi(p') v_{f_L}(q') \quad (4.21)$$

Poiché l'espressione di \mathcal{L}_{eff} è stata troncata all'ordine più basso in k/Λ , lo sviluppo della (4.21) va troncato allo stesso ordine. Ricaviamo l'espressione di G imponendo che la (4.19) e la (4.21) troncata siano uguali, quindi

$$G = -\frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \quad (4.22)$$

Poiché compaiono solo i moduli quadri degli elementi di matrice i segni meno si bilanciano per cui possiamo scrivere direttamente $G = (g_\chi/\Lambda)^2$. La lagrangiana effettiva ha forma

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi. \quad (4.23)$$

Questa è l'espressione della lagrangiana che utilizzeremo per ricavare la sezione d'urto di annichilazione della χ che inseriremo nell'espressione della relic density.

4.3 Sezione d'urto d'annichilazione

Siamo ora pronti a ricavare la sezione d'urto per un processo del tipo

$$\chi(p_i) \bar{\chi}(q_i) \rightarrow f(p_f) \bar{f}(q_f), \quad (4.24)$$

come mostrato in figura (4.6).

L'elemento di matrice associato al processo è

$$\mathcal{M} = i \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \bar{u}_f(p_f) P_R u_\chi(p_i) \bar{v}_\chi(q_i) P_L v_f(q_f), \quad (4.25)$$

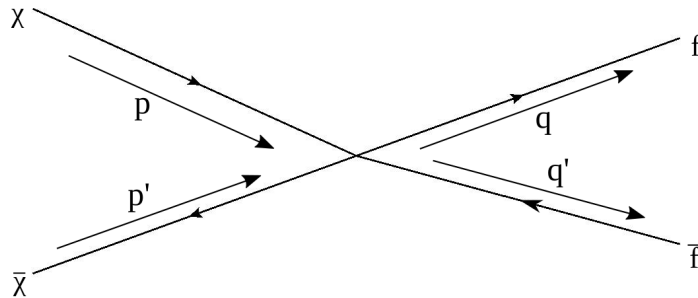


Figura 4.4: Interazione a quattro fermioni descritta dalla 4.17.

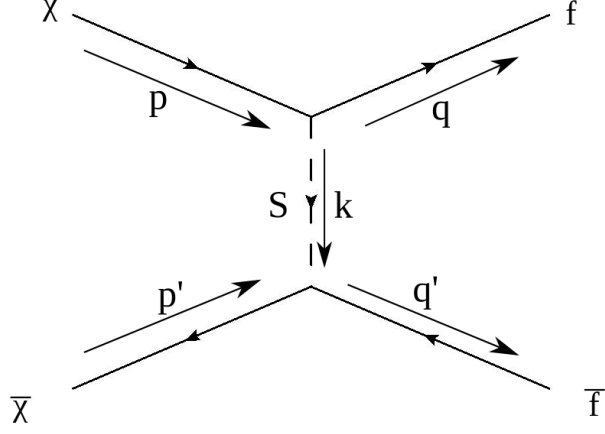


Figura 4.5: Interazione tra DM e materia standard descritta dalla 4.1.

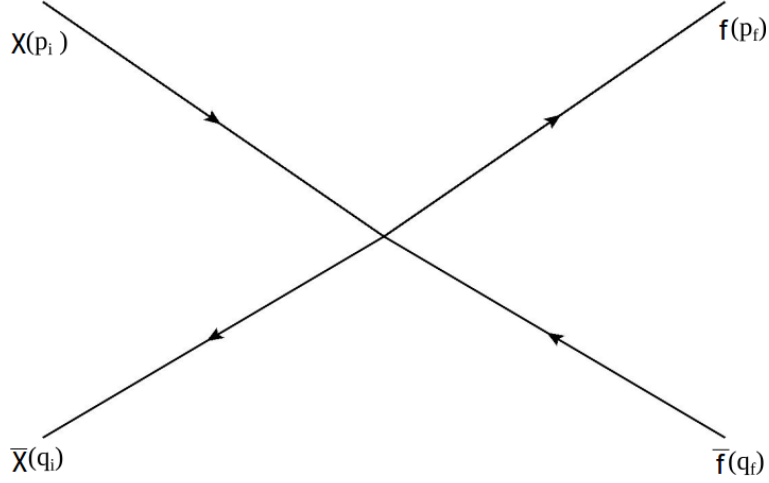


Figura 4.6: annichilazione di dark matter in fermione e antifermione

dove u e v sono gli spinori associati ai rispettivi fermioni dai rispettivi indici; il suo modulo quadro è

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} \bar{u}_f(p_f) P_R u_\chi(p_i) \bar{v}_\chi(q_i) P_L v_f(q_f) \bar{v}_f P_R(q_f) v_\chi(q_i) \bar{u}_\chi(p_i) P_L u_f(p_f). \quad (4.26)$$

Siamo interessati alla sezione d'urto indipendente dallo spin, mediamo quindi sugli spin iniziali e sommiamo su quelli finali

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{4\Lambda^4} \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m_f) P_R (\not{p}_i + m_\chi) P_L \right] \text{Tr} \left[(\not{q}_i - m_\chi) P_L (\not{q}_f - m_f) P_R \right], \quad (4.27)$$

da cui

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{4\Lambda^4} \text{Tr} [\not{p}_f P_R \not{p}_i] \text{Tr} [\not{q}_i P_L \not{q}_f], \quad (4.28)$$

quindi

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} p_f \cdot p_i \, q_i \cdot q_f. \quad (4.29)$$

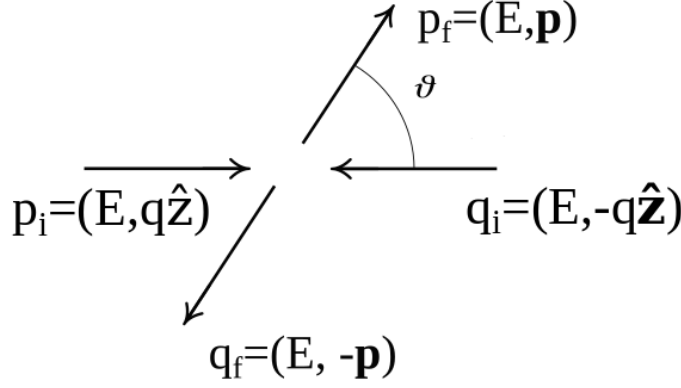


Figura 4.7: Sistema di riferimento del centro di massa.

Poniamoci nel sistema di riferimento del centro di massa (fig. 4.7) definiamo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ come l'asse lungo cui avviene l'annichilazione tra le particelle di DM. Chiamiamo $q = (E, \mathbf{q})$ il quadrimomento delle particelle di DM, $p = (E, \mathbf{p})$ quello dei fermioni prodotti durante l'annichilazione, \sqrt{s} l'energia del centro di massa, θ l'angolo di diffusione ed E l'energia delle particelle di DM e dei fermioni che nel sistema del centro di massa è la stessa. Risulta allora

$$\begin{aligned} E^2 &= |\mathbf{q}|^2 + m_\chi^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_f^2 \\ E &= \sqrt{s}/2 \\ \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{z}} &= |\mathbf{p}| \cos \theta \\ p_f \cdot p_i &= q_i \cdot q_f = (E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.30)$$

ricaviamo quindi un'espressione per l'elemento di matrice

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} (E^2 - pq \cos \theta)^2 = \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} E^4 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_f^2}{E^2}} \sqrt{1 - \frac{m_\chi^2}{E^2}} \cos \theta \right)^2 \quad (4.31)$$

per ottenere l'espressione della sezione d'urto occorre inserire l'equazione (4.31) nell'espressione generale [24]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p}_f|}{2E_2 E |v_\chi - v_{\bar{\chi}}|} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{(2\pi)^2 8E} \quad (4.32)$$

v_χ e $v_{\bar{\chi}}$ sono le velocità di χ e $\bar{\chi}$ e ricordando che v è il modulo della velocità di χ e $\bar{\chi}$ nel sistema del centro di massa risulta $v_\chi = -v_{\bar{\chi}} = v$, per cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g_\chi^4 \sqrt{E^2 - m_f^2}}{256\pi^2 E^3 v \Lambda^4} \left(E^2 - \sqrt{E^2 - m_f^2} \sqrt{E^2 - m_\chi^2} \cos \theta \right)^2. \quad (4.33)$$

Tuttavia quest'espressione non è ancora nella forma di cui abbiamo bisogno, richiamiamo l'espressione della relic density che abbiamo ricavato nella sezione 3.4.1

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1}}{M_{\text{P}}} \frac{x_F}{\sqrt{g_*}} \frac{1}{a + 3b/x_F}. \quad (4.34)$$

La sezione d'urto non compare esplicitamente, compaiono invece due parametri a e b , legati alla sezione d'urto nel modo seguente

$$\langle \sigma v_R \rangle = a + b \langle v_R^2 \rangle + O(\langle v_R^4 \rangle) \quad (4.35)$$

si tratta di uno sviluppo della sezione d'urto per valori prossimi allo zero della velocità *relativa* delle due particelle v_R . Un'ipotesi ragionevole poiché, come discusso nella sezione 3, supponiamo che le particelle che compongono la DM siano non relativistiche. I coefficienti a e b sono dunque i coefficienti dello sviluppo della sezione d'urto.

L'espressione (4.33) però è espressa nel sistema del centro di massa dove v è il modulo della velocità di χ e $\bar{\chi}$ nel sistema del centro di massa. Il legame con il modulo della velocità relativa è $v = v_R/2$, tuttavia possiamo continuare a sviluppare il calcolo in v e poi tenere conto dei fattori 2 alla fine. Poiché nella (4.35) compare la sezione d'urto moltiplicata per la velocità, moltiplichiamo ambo i membri della (4.33) per v ed esprimiamo tutti gli oggetti che compongono l'espressione per la sezione d'urto in funzione della velocità del centro di massa (in particolare $E^2 = m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4 \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}}{256\pi^2 \Lambda^4 (m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2}} \left(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \gamma m_\chi v \cos \theta \right)^2, \quad (4.36)$$

dove $\gamma = \sqrt{1/(1-v^2)}$ è il fattore di Lorentz, funzione anche esso della velocità. Sfruttiamo ora l'ipotesi di DM non relativistica e sviluppiamo l'intera espressione attorno $v = 0$. Poiché stiamo utilizzando le unità naturali v è adimensionale e può, nel limite $v \approx c$, essere 1. Nel caso non relativistico vale $v \ll c$ per cui sviluppiamo l'espressione considerata per valori di v prossimi allo zero. Qui richiamiamo i punti più importanti dello sviluppo, i dettagli sono riportati nell'appendice F. Il primo termine dello sviluppo è quello per $v \rightarrow 0$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} v \right|_{v=0} = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2 \Lambda^4} \left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2} \right)^{1/2} m_\chi^2. \quad (4.37)$$

Deriviamo in v l'espressione (4.36)

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2 \Lambda^4} \left[\frac{1}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^3} (\mathbf{A})^2 (\mathbf{B}) + 2 \frac{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2}} (\mathbf{A}) \partial_v (\mathbf{A}) \right], \quad (4.38)$$

dove, per rendere l'espressione più compatta, abbiamo posto

$$\mathbf{A} = m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \gamma m_\chi v \cos \theta \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & \left(\frac{\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}} (m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2} \right. \\ & \left. - 3 \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2} \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} (\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3) \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Facendo il limite per $v \rightarrow 0$ la (4.38) restituisce

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \frac{d\sigma}{d\Omega} v \right|_{v=0} = -\frac{g_\chi^2}{256\pi^2 \Lambda^4} 2(m_\chi^2 - m_f^2) \cos \theta. \quad (4.41)$$

Deriviamo ancora per ottenere il termine successivo

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2\Lambda^4} \left[\frac{1}{m_\chi^6} \mathbf{A}^2 \partial_v \mathbf{B} + 2 \frac{\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2}}{m_\chi^3} [(\partial_v \mathbf{A})^2 + \mathbf{A} \partial_v^2 \mathbf{A}] \right], \quad (4.42)$$

che nel limite $v \rightarrow 0$ restituisce

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} v \right|_{v=0} = \frac{g_\chi^4 \sqrt{m_\chi^2 - m_f^2}}{256\pi^2\Lambda^4} \left[4m_\chi - \frac{2m_\chi^3 - 3m_f^2 m_\chi}{m_\chi^2 - m_f^2} + 2 \frac{m_\chi^2 - m_f^2}{m_\chi} \cos^2 \theta \right]. \quad (4.43)$$

Componendo le equazioni (4.37), (4.41), e (4.43) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2\Lambda^4} & \left[\left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2} \right)^{1/2} m_\chi^2 - 2(m_\chi^2 - m_f^2) \cos \theta v \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sqrt{m_\chi^2 - m_f^2} \left(4m_\chi - \frac{2m_\chi^3 - 3m_f^2 m_\chi}{m_\chi^2 - m_f^2} + 2 \frac{m_\chi^2 - m_f^2}{m_\chi} \cos^2 \theta \right) v^2 \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

ed integrando nell'angolo solido $d\Omega = d\phi d\cos\theta$

$$\begin{aligned} \sigma v = \frac{g_\chi^4}{128\pi\Lambda^4} & \left[\left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2} \right)^{1/2} m_\chi^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sqrt{m_\chi^2 - m_f^2} \left(4m_\chi - \frac{2m_\chi^3 - 3m_f^2 m_\chi}{m_\chi^2 - m_f^2} + \frac{4}{3} \frac{m_\chi^2 - m_f^2}{m_\chi} \right) v^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ricordiamo che l'espressione dei coefficienti a e b è legata allo sviluppo della sezione d'urto rispetto alla velocità relativa delle due particelle $v_R = 2v$. Per convertire l'espressione precedente in termini di v_R occorre solo effettuare un cambio di variabile e tener conto che

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{v=0} &= \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{v_R=0} \\ \left. \frac{\partial}{\partial v} \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{v=0} &= 2 \left. \frac{\partial}{\partial v_R} \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{v_R=0} \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{v=0} &= 4 \left. \frac{\partial^2}{\partial v_R^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{v_R=0}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

L'espressione finale è dunque

$$\begin{aligned} \langle \sigma v_R \rangle = \frac{g_\chi^4}{64\pi\Lambda^4} & \left[\sqrt{1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2}} m_\chi^2 \right. \\ & \left. + 2 \sqrt{m_\chi^2 - m_f^2} \left(4m_\chi - \frac{2m_\chi^3 - 3m_f^2 m_\chi}{m_\chi^2 - m_f^2} + \frac{4}{3} \frac{m_\chi^2 - m_f^2}{m_\chi} \right) \langle v_R^2 \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

confrontando quest'equazione con la (4.35) otteniamo l'espressione dei parametri a e b

$$\begin{aligned} a &= \frac{g_\chi^4}{64\pi\Lambda^4} \left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2} \right)^{1/2} m_\chi^2 \\ b &= \frac{g_\chi^4}{96\pi\Lambda^4} \left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2} \right)^{1/2} \frac{10m_\chi^4 - 11m_\chi^2 m_f^2 + 4m_f^4}{m_\chi^2 - m_f^2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Per ottenere la sezione d'urto totale sommiamo le espressioni nella (4.48) su tutte le masse dei quark che possono essere prodotti nell'annichilazione della χ cioè per cui vale $m_f \leq m_\chi/2$. Inseriremo anche un fattore 3 dovuto al contributo del colore.

4.4 Vincoli dettati dalla Relic Density

Richiamiamo l'espressione per la densità fossile di una particella non relativistica ricavata nella sezione 3.4.1

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1}}{m_p} \frac{x_F}{\sqrt{g_*}} \frac{1}{a + 3b/x_F}, \quad (4.49)$$

e quella del freeze out ricavata nella sezione 3.5

$$x_F = \log \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{gm_p m_\chi}{1.66g_*^{1/2}} \frac{a + 6b/x_F}{x_F^{1/2}} \right]. \quad (4.50)$$

Si rimanda alle sezioni apposite per il significato dei vari simboli. È possibile sfruttare l'espressione (4.49) per calcolare la densità fossile di materia oscura, occorre solo utilizzare l'espressione giusta dei parametri a e b . Tali parametri infatti sono legati alla sezione d'urto di annichilazione della particella considerata e possiamo fare in modo che la (4.49) restituisca la densità fossile di materia oscura utilizzando la loro espressione dall'equazione (4.48).

A questo punto è di fondamentale importanza tenere in considerazione il fatto che lo studio della radiazione cosmica di fondo ha potuto fornire una stima della densità fossile di materia oscura pari a $\Omega_\chi h^2 = 0.1198 \pm 0.0026$ [17]. Sfruttando quest'informazione e imponendo che la (4.49) restituisca la stessa stima è possibile ottenere informazioni sul rapporto g_χ/Λ che compare nelle espressioni di a e b e che esprime l'intensità dell'accoppiamento tra materia oscura e materia standard.

La presenza di x_F rende la (4.49) non invertibile in maniera analitica, tuttavia è possibile ottenere i valori dell'accoppiamento per via numerica. In figura 4.8 mostriamo l'andamento di g_χ/Λ al variare della massa della χ in un range tra 50 e 1000 GeV e in tabella 4.1 riportiamo i valori d'accoppiamento ricavati.

$m_\chi(\text{GeV})$	$g_\chi/\Lambda (\text{GeV}^{-1})$
50	0.00143
100	0.00103
200	0.000718
300	0.000581
400	0.000504
500	0.000451
600	0.000413
700	0.000383
800	0.000359
900	0.000339
1000	0.000322

Tabella 4.1: Valori di accoppiamento g_χ/Λ ottenuti confrontando la stima di relic density ottenuta dai dati di CMB con l'espressione analitica della densità fossile.

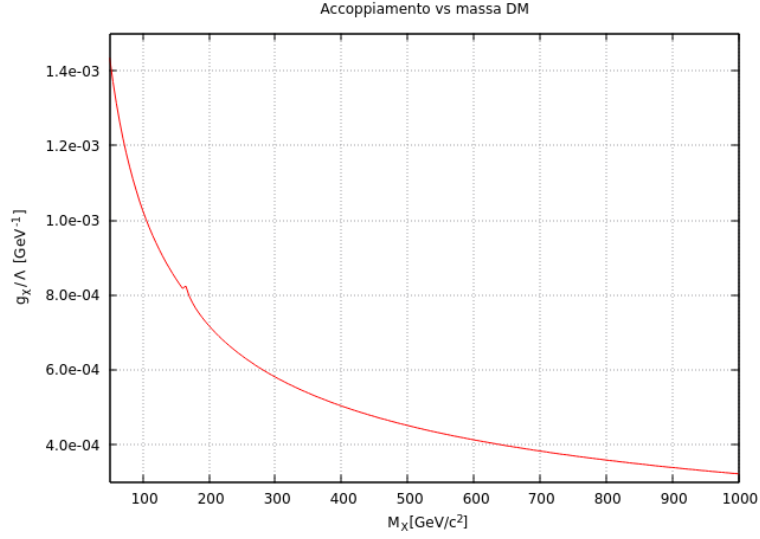


Figura 4.8: Andamento dell'accoppiamento DM-materia ordinaria per diversi valori di massa.

Conoscere il valore attuale di relic density ci ha permesso di ottenere una stima dell'intensità dell'accoppiamento tra DM e materia standard, nel prossimo capitolo useremo quest'informazione per ricavare la sezione d'urto DM-nucleone e da essa ottenere dei tassi di interazione da confrontare con gli attuali esperimenti di rivelazione diretta.

Capitolo 5

Rivelazione diretta

Nel capitolo precedente si è ricavata la lagrangiana effettiva che descrive l'interazione tra particelle di DM e quark del Modello Standard e si è sfruttata la stima di relic density della CMB per stimare il valore d'accoppiamento tra materia oscura e quark. In questo capitolo si descrive l'interazione tra nucleoni e materia oscura, per fare questo occorre introdurre una lagrangiana, detta chirale, che descrive le interazioni tra nucleoni ad energie inferiori al GeV. Combinando le informazioni ottenute è possibile descrivere l'interazione tra DM e nucleoni e ricavare un'espressione per la sezione d'urto relativa a questa interazione. Nella parte finale del capitolo si descrive il tasso di interazione che un esperimento reale misura e si utilizza la sezione d'urto ricavata per stimare il tasso di interazione della DM nel nostro modello.

5.1 Interazione DM-Nucleone

Riportiamo qui la lagrangiana effettiva ricavata nella sezione 4.2.3 che, relativamente al nostro modello, descrive l'interazione tra DM e quark

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \bar{\chi} q_L \bar{q}_L \chi, \quad (5.1)$$

χ è riferito alla materia oscura e i fermioni q_L sono riferiti ai quark, sono di tipo left e sono oggetti del tipo

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Per trovare l'interazione con i nuclei abbiamo bisogno di calcolare tale lagrangiana tra gli stati finale ed iniziale $\langle \chi n |_{out}$ e $|\chi n \rangle_{in}$ dove χ rappresenta la DM e n il nucleone.

Vedremo in seguito che elementi di matrice contenenti i campi dei quark calcolati tra stati in cui compaiono i nucleoni possono essere ricondotti a elementi di matrice in cui compaiono campi associati ai nucleoni. Separeremo dunque nella lagrangiana di DM, il contributo di DM e quello dovuto ai quark attraverso una fattorizzazione

$$\langle \chi n | \bar{\chi} q_L \bar{q}_L \chi | \chi n \rangle = \sum_i a_i \langle \chi | \mathcal{A}_i | \chi \rangle \langle n | \mathcal{B}_i | n \rangle \quad (5.3)$$

La scomposizione in questione è detta “scomposizione di Fierz” e risulta*

$$\bar{\chi} q_L \bar{q}_L \chi = \frac{1}{2} \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R \bar{q}_L \gamma_\mu q_L. \quad (5.4)$$

*In appendice G mostriamo i dettagli della scomposizione.

Dove χ_R indica che χ è un fermione right. Avendo separato la parte di DM da quella di quark sarà possibile calcolare gli elementi di matrice necessari alla sezione d'urto DM-nucleone più facilmente. Per i termini dipendenti da χ usiamo le regole di Feynman già usate per la sezione d'urto di annichilazione calcolata nella sezione 4.3. I termini che contengono i campi dei quark vanno affrontati diversamente, mostriamo il metodo usato nelle prossime sezioni.

5.2 Interazione tra nucleoni a bassa energia

Nella ricerca diretta di DM si cercano segnali di interazione tra materia oscura e i nucleoni presenti negli atomi che compongono i rivelatori. La lagrangiana effettiva (4.23) però descrive l'interazione tra materia oscura ed i singoli quark, quindi non può essere utilizzata per descrivere l'accoppiamento tra DM e nucleoni.

Il problema di adattare una lagrangiana scritta in termini di quark ad una situazione in cui compaiono invece dei nucleoni sarà affrontato nella prossima sezione. In questa sede descriviamo uno degli ingredienti necessari a tale analisi, ci soffermiamo infatti su di una particolare lagrangiana che descriva l'interazione tra nucleoni a bassa energia. La nostra analisi si limita a fornire i punti chiave per la costruzione di questa lagrangiana, per una trattazione più dettagliata si possono consultare i riferimenti [25], [26] e [27].

5.2.1 Simmetria Chirale

La lagrangiana chirale di cui si parla nel prossimo paragrafo è costruita sulla base della “simmetria chirale”, descriviamo qui i dettagli fondamentali di questa simmetria.

Consideriamo i quark u e d , scriviamoli come parte di un doppietto $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. Supponiamo inizialmente che i quark siano privi di massa, la lagrangiana di QCD risulta

$$\mathcal{L} = i\bar{q}\not{D}q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (5.5)$$

dove la scrittura \not{D} indica la contrazione delle matrici di Dirac γ^μ con l'operatore derivata covariante $D_\mu = \partial_\mu - igG_\mu^a \lambda^a$; G_μ^a indica i campi dei gluoni e λ^a sono le matrici di Gell-Mann (generatori del gruppo $SU(3)$ di colore). La quantità $G_{\mu\nu}^a$ è detta *field strength* e contiene i campi dei gluoni.

Possiamo riscrivere la lagrangiana separando la parte left da quella right utilizzando gli operatori P_L e P_R e la relazione $q = P_R q + P_L q = q_R + q_L$:

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_L \not{D} q_L + i\bar{q}_R \not{D} q_R - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Come vediamo la parte che dipende dai gluoni resta inalterata. Notiamo che questa lagrangiana è invariante per due tipi di trasformazioni

$$\begin{aligned} q_L &\rightarrow e^{i\vec{\theta}_L \cdot \vec{I}} q_L \\ q_R &\rightarrow e^{i\vec{\theta}_R \cdot \vec{I}} q_R \end{aligned} \quad (5.7)$$

dove $\vec{\theta}_{L/R}$ parametrizza la trasformazione ed \vec{I} è l'operatore di isospin. In questo caso si dice che la lagrangiana è invariante sotto trasformazioni di $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$, dove $SU(2)$ è il gruppo delle matrici unitarie 2×2 e i pedici L ed R indicano che le trasformazioni agiscono solo sulla

parte left e right del campo cui sono applicate. Tale simmetria è detta *simmetria chirale*, le correnti associate alla questa simmetria sono

$$\begin{aligned}\vec{J}_L^\mu &= \bar{q}_L \gamma^\mu \vec{I} q_L \\ \vec{J}_R^\mu &= \bar{q}_R \gamma^\mu \vec{I} q_R\end{aligned}\tag{5.8}$$

a partire da tali correnti è possibile definire una corrente vettoriale ed una assiale

$$\begin{aligned}\vec{J}_V^\mu &= \bar{q} \gamma^\mu \vec{I} q \\ \vec{J}_A^\mu &= \bar{q} \gamma^5 \gamma^\mu \vec{I} q\end{aligned}\tag{5.9}$$

da qui è facile comprendere che il gruppo $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ è isomorfo al gruppo $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ delle trasformazioni vettoriali ed assiali

$$\begin{aligned}q &\rightarrow e^{i\vec{\theta}_V \cdot \vec{I}} q \\ q &\rightarrow e^{i\vec{\theta}_A \cdot \vec{I} \gamma^5} q\end{aligned}\tag{5.10}$$

dove, rispetto alle trasformazioni precedenti risulta $\vec{\theta}_R = \vec{\theta}_L = \vec{\theta}_V$ e $\vec{\theta}_R = -\vec{\theta}_L = \vec{\theta}_A$.

Se però ammettiamo che i quark abbiamo una certa massa, che racchiudiamo nella matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix},\tag{5.11}$$

allora dovremo inserire nella lagrangiana (5.5) un termine di massa del tipo $\bar{q} \mathcal{M} q$. Se scomponessimo di nuovo l'equazione nella sua parte left e right noteremmo che i termini di massa mischiano i termini q_L e q_R

$$\mathcal{L} = i\bar{q}_L \not{\partial} q_L + i\bar{q}_R \not{\partial} q_R - \bar{q}_R \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M} q_R - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}.\tag{5.12}$$

A rigore tale lagrangiana non soddisfa più la simmetria chirale $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ a causa della presenza delle masse dei quark che provocano la comparsa di termini $\bar{q}_R \mathcal{M} q_L$ e $\bar{q}_L \mathcal{M} q_R$ che non sono invarianti per le trasformazioni (5.7). Tuttavia le masse dei quark up e down sono dell'ordine del MeV mentre la massa tipica degli adroni è dell'ordine del GeV per cui possiamo considerare la simmetria chirale valida in prima approssimazione. Quindi possiamo considerare $SU(2)_R \otimes SU(2)_L$ una (quasi) simmetria di (5.12), in questo caso lo sarà anche $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$.

Nel nostro caso gli adroni formati da u e d sono protone e neutrone e formano un doppietto di $SU(2)_V$, quasi degeneri in massa. Se invece dovessero essere un multipletto di $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ allora per ogni particella dovremmo osservarne un'altra di parità opposta, cosa che non avviene, questo implica che la (quasi) simmetria della lagrangiana (5.12) non è soddisfatta dal suo stato fondamentale. L'unico gruppo di simmetria rimasto è $SU(2)_V$ e si parla in questo caso di "rottura spontanea" di simmetria $SU(2)_R SU(2)_L \rightarrow SU(2)_V$.

Inoltre, secondo il teorema di Goldstone, quando una simmetria è rotta compaiono delle particelle scalari prive di massa dette "bosoni di Goldstone" (BG). Nel nostro caso le particelle che svolgono questo ruolo sono i pioni, ovvero i mesoni composti dai quark (ed antiquark) u e d . Il fatto che i quark abbiano massa non nulla fa sì che anche i pioni abbiano una massa piccola rispetto ai valori di massa degli adroni.

5.2.2 Proprietà di trasformazione dei Bosoni di Goldstone

Mostriamo in questa sezione quali sono le proprietà di trasformazione dei BG sotto una trasformazione chirale. Nel caso di $SU(2)$ questi bosoni sono i pioni, ma il discorso si generalizza facilmente. Sia ϕ il campo del BG considerato e G il gruppo $SU(2)_L \times SU(2)_R$, fissata una certa rappresentazione F di G il campo ϕ si trasforma

$$\phi \rightarrow \phi' = F(g, \phi), \quad g \in G \quad (5.13)$$

essendo un gruppo chiuso rispetto l'operazione del prodotto risulta anche

$$F(g_1, F(g_2, \phi)) = F(g_1 g_2, \phi). \quad (5.14)$$

Consideriamo le trasformazioni $h \in G$ che lasciano invariato l'origine dello spazio dei BG (fisicamente è lo stato di vuoto) $F(h, 0) = 0$, queste trasformazioni formano un sottogruppo di G che chiamiamo H . H coincide con il sottogruppo di $SU(2)_L \times SU(2)_R$ che lascia invariato lo stato fondamentale (il vuoto), cioè $H = SU(2)_V$. Consideriamo ora la funzione

$$g \rightarrow F(g, 0) = F(gh, 0), \quad h \in H \quad (5.15)$$

e osserviamo che mappa lo spazio quoziente G/H nello spazio dei campi dei BG. Inoltre, presi due elementi g_1 e g_2 di G , se $F(g_1, 0) = F(g_2, 0)$ allora $F(g_1^{-1} g_2, 0) = 0$ per cui $g_1^{-1} g_2 \in H$ per cui la mappa è invertibile. Questo implica che la dimensione dello spazio G/H e quella dello spazio dei BG è la stessa, per cui possiamo identificare ogni elemento dello spazio dei BG con un elemento di G/H . Ora poiché $g \in SU(2)_L \times SU(2)_R$ possiamo scrivere $g = (g_L, g_R)$, ma possiamo anche scrivere $g = qh$, con $q \in G/H$ e $h \in H$, per cui

$$g = (g_L, g_R) = (1, g_R g_L^{-1})(g_L, g_L) = qh \quad (5.16)$$

dove $(g_L, g_L) \in H$ poiché $H = SU(2)_V$. A questo punto vediamo come si trasforma un elemento di G/H , quindi anche come si trasforma un BG, sotto l'azione di G

$$(L, R)(1, g_R g_L^{-1}) = (L, R g_R g_L^{-1}) = (1, R g_R g_L^{-1} L^{-1})(L, L). \quad (5.17)$$

L ed R sono le matrici che rappresentano le trasformazioni in $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$. Osserviamo che $g_R g_L^{-1} \in H/G$. Se quindi inseriamo i vari bosoni di Goldstone in una matrice $U = g_R g_L^{-1}$ allora possiamo dire che questa matrice si trasforma, sotto trasformazioni chirali, come

$$U \rightarrow U' = R U L^{-1} = R U L^\dagger. \quad (5.18)$$

5.2.3 Lagrangiana Chirale

L'obiettivo di questo capitolo è descrivere l'interazione tra materia oscura e i nucleoni che compongono la materia ordinaria, nella sezione successiva mostriamo che per far questo occorre avere a disposizione una teoria che descriva l'interazione tra nucleoni. La QCD, che descrive l'interazione tra quark, non è adatta a questo scopo poiché vogliamo descrivere situazioni la cui scala di energia è sensibilmente inferiore al GeV, situazione in cui la QCD non è perturbativa e quindi non siamo in grado di utilizzarla.

Poiché a scale di energia inferiori al GeV i gradi di libertà della teoria non sono più i quark ed i gluoni è opportuno utilizzare una teoria che non si curi di descrivere quark e gluoni e si concentri solo sulle particelle presenti alla scala di interesse, nucleoni e pioni. La lagrangiana

da utilizzare in questo caso è chiamata *lagrangiana chirale* poiché costruita sulla base della “simmetria chirale” precedentemente discussa.

Il primo passo nella costruzione della lagrangiana chirale è la costruzione della lagrangiana più generale possibile. Gli elementi costitutivi della lagrangiana saranno pioni, nucleoni ed eventuali sorgenti esterne di tipo scalare (s), pseudoscalare (p), vettoriale (v_μ) e assiale (a_μ). L'espansione della lagrangiana sarà del tipo

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{\pi n}^{(1)} + \mathcal{L}_{\pi n}^{(2)} + \mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} + \mathcal{L}_{\pi n}^{(3)} + \mathcal{L}_{\pi\pi}^{(4)} + \dots \quad (5.19)$$

le scritture $\pi\pi$ e πn indicano termini in cui è presente interazione tra pioni o tra pioni e nucleoni, le parentesi indicano l'ordine dei vari termini considerati. L'ordinamento è effettuato contando le potenze di q_π/Λ dove q_π è il momento dei pioni e Λ la scala di rottura della lagrangiana, tipicamente dell'ordine del GeV . Il passaggio successivo nell'ottenere la lagrangiana desiderata è la costruzione degli operatori che costituiscono i termini visti nella (5.19), si sfrutteranno a tale scopo anche le sorgenti esterne prima elencate.

Poiché tale lagrangiana descrive l'interazione tra nucleoni considerando i pioni come le particelle mediatrici dell'interazione utilizzeremo la matrice U definita nella sezione precedente come la matrice che contiene i campi dei pioni π . La forma di U è

$$U = \exp \frac{i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}}{f_\pi} \quad (5.20)$$

dove $\vec{\tau}$ contiene le tre matrici di Pauli ed f_π è detta “costante di decadimento del pione” e vale $92.4 MeV$. L'equazione (5.18) mostra come la matrice U si trasforma sotto una trasformazione chirale. Consideriamo ora protone e neutrone come elementi di un doppietto di isospin di un unico campo del nucleone ψ_n

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Per descrivere come il campo ψ si trasformi sotto una trasformazione chirale è utile definire la matrice

$$u = \sqrt{U} = e^{i\vec{\pi}\vec{\tau}/2f_\pi}, \quad (5.22)$$

che si trasforma come

$$u' = \sqrt{RUL^\dagger} = RuK^{-1} \quad (5.23)$$

dove L ed R sono le matrici che rappresentano le trasformazioni in $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$. Abbiamo sfruttato le proprietà di trasformazione di u per definire la matrice K

$$K = \sqrt{LU^\dagger R^\dagger} R \sqrt{U} = u'^\dagger Ru, \quad (5.24)$$

osserviamo anche che

$$K^{-1} = \sqrt{U^\dagger} R^\dagger \sqrt{RUL^\dagger} \quad (5.25)$$

per cui $K^{-1} = K^\dagger$, inoltre dalle (5.23) e (5.24) è possibile dimostrare che $KuL^\dagger = RuK^\dagger$.

Prima di mostrare come il campo del nucleone ψ si trasformi sotto una trasformazione chirale occorre premettere che tale trasformazione non è unica. È possibile trovare infatti molte possibili trasformazioni per il campo ψ , tutte equivalenti [28] e tutte fisicamente valide. Abbiamo allora la possibilità di scegliere la situazione più congeniale al nostro obiettivo. A questo punto ridefiniamo il campo del nucleone come

$$\psi_n = u^\dagger \psi_R + u \psi_L \quad (5.26)$$

dove ψ_L e ψ_R sono la parte left e right del campo ψ introdotto nell'equazione (5.21) e si trasformano rispettivamente come $\psi'_L = L\psi_L$ e $\psi'_R = R\psi_R$. La quantità ψ_n si trasforma

$$\psi'_n = u'^\dagger R\psi_R + u' L\psi_L = Ku^\dagger R^\dagger R\psi_R + KuL^\dagger L\psi_L = K\psi_n. \quad (5.27)$$

Verifichiamo che tale legge di trasformazione sia una rappresentazione per il gruppo di trasformazioni chirali. Consideriamo le due trasformazioni

$$\begin{aligned} \psi_n &\rightarrow \psi'_n = u'^\dagger R_1\psi_R + u' L_1\psi_L \\ \psi'_n &\rightarrow \psi''_n = u''^\dagger R_2\psi'_R + u'' L_2\psi'_L \end{aligned} \quad (5.28)$$

le matrici u si trasformano come

$$\begin{aligned} u' &= K_1 u L_1^\dagger, \\ u'^\dagger &= K_1 u^\dagger R_1^\dagger, \\ u'' &= K_2 u' L_2^\dagger, \\ u''^\dagger &= K_2 u'^\dagger R_2^\dagger \end{aligned} \quad (5.29)$$

quindi risulta

$$\psi'_n = K_1 u^\dagger R_1^\dagger R_1\psi_R + K_1 u L_1^\dagger L_1\psi_L = K_1\psi_n \quad (5.30)$$

e

$$\psi''_n = K_2 u'^\dagger R_2^\dagger R_2\psi'_R + K_2 u' L_2^\dagger L_2\psi'_L = K_2\psi'_n \quad (5.31)$$

componendo le due trasformazioni si ottiene

$$\psi''_n = K_2 K_1 u^\dagger R_1^\dagger R_2^\dagger R_2 R_1\psi_R + K_2 K_1 u L_1^\dagger L_2^\dagger L_2 L_1\psi_L = K_2 K_1\psi_n \quad (5.32)$$

cioè la composizione di due trasformazioni si concretizza nel prodotto delle matrici K_1 e K_2 , cioè la legge di composizione del gruppo delle trasformazioni è rispettata.

Adesso, tornando alla costruzione della lagrangiana effettiva, per fare in modo che la lagrangiana sia invariante per questo tipo di trasformazioni occorre definire una derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \quad (5.33)$$

che si trasformi come

$$D'_\mu = K D_\mu K^\dagger, \quad (5.34)$$

in particolare Γ_μ è detto “connessione chirale” ed ha forma

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}[u^\dagger, \partial_\mu u] - \frac{i}{2}u^\dagger R_\mu u - \frac{i}{2}u L_\mu u^\dagger \quad (5.35)$$

dove $R_\mu = v_\mu + a_\mu$ e $L_\mu = v_\mu - a_\mu$ sono definiti a partire dalle sorgenti esterne vettoriale ed assiale v_μ e a_μ . Γ_μ si trasforma come

$$\Gamma'_\mu = K \Gamma_\mu K^\dagger + K \partial_\mu K^\dagger. \quad (5.36)$$

Con gli ingredienti a nostra disposizione siamo in grado di costruire un'altra quantità che può comparire nella nostra lagrangiana, un vettore assiale del tipo

$$u_\mu = iu^\dagger(\partial_\mu U - iR_\mu U + iU L_\mu)u^\dagger \quad (5.37)$$

che si trasforma

$$u'_\mu = K u_\mu K^\dagger. \quad (5.38)$$

A questo punto, combinando i vari oggetti introdotti finora è possibile scrivere la lagrangiana chirale di cui abbiamo bisogno

$$\mathcal{L}_{\pi n}^{(1)} = \bar{\psi}_n \left(i \not{D} - m_n + \frac{1}{2} g_A \not{u} \gamma_5 \right) \psi_n, \quad (5.39)$$

Le scritture \not{D} e \not{u} indicano rispettivamente la contrazione di D_μ e di u_μ con le matrici di Dirac[†] γ_μ a partire dalle quali è anche definita la matrice $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. ψ_n è il campo del nucleone che in questa approssimazione è considerato privo di struttura interna, i parametri m_n e $g_A = 1.26$ [26] sono la massa media del nucleone e la costante di accoppiamento assiale.

Possiamo visualizzare immediatamente l'ordine della lagrangiana senza dover contare le potenze di q_π/Λ , basta infatti contare il numero di derivate e di masse dei pioni che compaiono in essa. Il risultato di questo conteggio è detto “dimensione chirale”; essendo presente una sola derivata questa lagrangiana ha dimensione chirale 1 (come indicato dal termine in parentesi), cioè è quella di ordine più basso nell'espansione (5.19).

Per uno studio più dettagliato sulla costruzione della lagrangiana appena ottenuta e suoi utilizzi si possono consultare anche i riferimenti [29] e [30].

5.3 Composizione della lagrangiana effettiva e della lagrangiana chirale

Nella sezione 5.1 abbiamo fattorizzato la lagrangiana effettiva del nostro modello separando la parte che dipende dalla DM da quella che dipende dai quark

$$\bar{\chi} q_L \bar{q}_L \chi = \frac{1}{2} \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R \bar{q}_L \gamma_\mu q_L. \quad (5.40)$$

Concentriamoci sul termine dipendente dai campi dei quark, poiché q rappresenta i quark u e d questo termine si esplicita

$$\bar{q}_L \gamma_\mu q_L = \bar{u}_L \gamma_\mu u_L + \bar{d}_L \gamma_\mu d_L \quad (5.41)$$

esso presenta cioè una struttura di *flavour*. In generale potremmo scrivere un elemento del genere come $\bar{q} \gamma_\mu \tau^i q$, dove τ^i , $i = 1, 2, 3$, sono le matrici di Pauli ed i generatori di $SU(2)$.

Poiché i nucleoni sono composti da quark legati dall'interazione forte gli elementi di matrice tra stati di nucleone dovrebbero essere calcolati considerando la lagrangiana di QCD eventualmente accoppiata a delle sorgenti esterne. Supponiamo di voler calcolare un elemento di matrice in cui compare un termine vettoriale, risulta

$$\begin{aligned} \langle n | \bar{q} \gamma^\mu \tau^i q | n \rangle &= \frac{\delta}{\delta v_\mu^i} \langle n | T \exp \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_{QCD} \right. \\ &\quad \left. + \bar{q} [\gamma^\mu v_\mu + \gamma^\mu \gamma^5 a_\mu - s \mathbb{1} + i \gamma^5 p] q \right\} | n \rangle \Big|_{s=v_\mu=a_\mu=0} \end{aligned} \quad (5.42)$$

dove T indica che l'integrale è temporalmente ordinato ed s , v_μ , a_μ e p sono le sorgenti scalare, vettoriale, assiale e pseudoscalare. Queste sorgenti sono delle matrici ed hanno una struttura

[†]La forma delle matrici di Dirac è mostrata in appendice B

di flavour, l'indice i in v_μ^i serve ad identificare le componenti della matrice rispetto alla quale deriviamo. La quantità $|n\rangle$ è lo stato di nucleone e dipende in maniera complicata dai vari quark nei termini dei quali è scritta la lagrangiana di QCD. Questa scrittura equivale a calcolare l'elemento di matrice associato ad un quark che sia accoppiato ad una sorgente esterna di tipo vettoriale (fig.5.1).

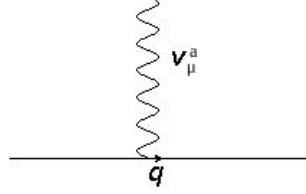


Figura 5.1: accoppiamento di un quark ad una sorgente vettoriale

Tuttavia il metodo mostrato nell'equazione (5.42) non è utilizzabile poiché la QCD non è perturbativa ad energie inferiori al GeV e non permette di sviluppare il termine esponenziale. È possibile però sostituire alla lagrangiana di QCD una lagrangiana effettiva per cui sia possibile effettuare questi calcoli.

Tale lagrangiana godrà delle stesse simmetrie globali della lagrangiana di QCD, in particolare quella chirale per cui i quark u e d sono privi di massa. I gradi di libertà di questa nuova lagrangiana non sono più i quark, ma i nucleoni e i pioni. La lagrangiana in questione è quella introdotta nella sezione 5.2 e che riportiamo qui

$$\mathcal{L}_{\pi n}^{(1)} = \bar{\psi}_n \left(i \not{D} - m_n + \frac{1}{2} g_A \not{\psi} \gamma_5 \right) \psi_n \quad (5.43)$$

i termini tra parentesi indicano l'ordine della lagrangiana, ψ_n è un campo che descrive il nucleone, m_n è la sua massa, g_A è la costante di accoppiamento assiale e vale $g_A = 1.26$ [26], $u = e^{i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} / 2f_\pi}$ è una matrice che contiene i pioni π , $\not{\psi}$ è la contrazione delle matrici di Dirac γ_μ con u_μ , la matrice ottenuta a partire da u e definita nella sezione precedente. In $\not{\psi}$ anche gli indici di flavour sono contratti. \not{D} è la derivata covariante definita quando abbiamo introdotto la lagrangiana e contiene i pioni.

In termini di questa nuova lagrangiana l'equazione (5.42) diventa

$$\langle n | \bar{q} \gamma^\mu \tau^i q | n \rangle = \frac{\delta}{\delta v_\mu^i} \langle n | \int d^4x \mathcal{L}_{\pi n}^{(1)} | n \rangle \Big|_{s=v_\mu=a_\mu=0} \quad (5.44)$$

Nell'esempio considerato abbiamo voluto calcolare l'elemento di matrice per un termine di tipo vettoriale $\bar{q} \gamma^\mu \tau^a q$, quindi nell'equazione (5.44) abbiamo effettuato la derivata funzionale nella sorgente esterna vettoriale.

A questo punto sorge un problema, dall'equazione (5.41) emerge che l'oggetto $\bar{q}_L \gamma_\mu q$ ha una struttura di flavour che non riusciamo a riottenere mediante la scrittura $\bar{q}_L \gamma_\mu \tau^i q_L$, infatti utilizzando le tre matrici di Pauli otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{q}_L \gamma_\mu \tau^1 q_L &= (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = (\bar{u}_L d_L + \bar{d}_L u_L), \\ \bar{q}_L \gamma_\mu \tau^2 q_L &= (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = i(\bar{u}_L d_L - \bar{d}_L u_L), \\ \bar{q}_L \gamma_\mu \tau^3 q_L &= (\bar{u}_L \quad \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = (\bar{u}_L u_L - \bar{d}_L d_L). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Questo significa che non possiamo utilizzare la lagrangiana chirale di $SU(2)$ per calcolare l'elemento di matrice di cui abbiamo bisogno. Nella prossima sezione mostreremo come superare questo problema.

5.4 Lagrangiana chirale nello spazio $SU(3)$

Come abbiamo appena mostrato nella sezione precedente, la lagrangiana di chirale di $SU(2)$ non può essere utilizzata per calcolare l'elemento di matrice tra stati di nucleone del termine $\bar{q}_L \gamma_\mu q_L$. Concentriamoci ora su questo termine. Esplicitando l'espressione dei fermioni left osserviamo che può essere separato in una parte assiale ed una vettoriale

$$\bar{q}_L \gamma_\mu q_L = \frac{1}{2}(\bar{q} \gamma_\mu q - \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 q). \quad (5.46)$$

Le due parti possono essere interpretate come due correnti, una vettoriale ed una assiale

$$J_\mu^V = \bar{q} \gamma_\mu q = \bar{u} \gamma_\mu u + \bar{d} \gamma_\mu d \quad (5.47)$$

e

$$J_\mu^A = \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 q = \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma^5 d \quad (5.48)$$

quest'ultima quantità, in $SU(2)$, è un è detta *isoscaltare*. Come mostrato nell'equazione (5.3) questi oggetti devono essere calcolati tra stati di nucleone

$$\langle n | \bar{q}_L \gamma_\mu q_L | n \rangle = \frac{1}{2}[\langle n | \bar{q} \gamma_\mu q | n \rangle - \langle n | \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 q | n \rangle]. \quad (5.49)$$

Se consideriamo la corrente vettoriale osserviamo che essa coincide con la corrente

$$J_\mu = \bar{u} \gamma_\mu u + \bar{d} \gamma_\mu d \quad (5.50)$$

che è conservata ed è legata alla conservazione del numero barionico. Per cui l'elemento di matrice tra stati di nucleone del termine vettoriale ha un chiaro senso fisico e può essere calcolato anche senza dover passare per una lagrangiana chirale come nella sezione 5.3. Nella sezione successiva mostreremo come fare.

Non possiamo dire altrettanto per il termine assiale, non esiste infatti una corrente conservata, in $SU(2)$, che possa avere un legame con il termine isoscaltare. Per cui per poter calcolare l'elemento di matrice associato al termine assiale dovremo utilizzare una lagrangiana chirale più generale di quella già usata. Otterremo questo risultato passando dallo spazio $SU(2)$ allo spazio $SU(3)$.

5.4.1 Termine vettoriale

Abbiamo già detto che il termine vettoriale $\bar{q} \gamma_\mu q$ dell'equazione (5.49) coincide con la corrente conservata

$$J_\mu = \bar{u} \gamma_\mu u + \bar{d} \gamma_\mu d, \quad (5.51)$$

ad essa è associata una carica conservata

$$\mathcal{B} = \int J_0 d^3x. \quad (5.52)$$

Questa carica è il numero barionico \mathcal{B} . \mathcal{B} è un oggetto per cui vale

$$\begin{aligned}\mathcal{B}|P\rangle &= |P\rangle \\ \mathcal{B}|N\rangle &= |N\rangle\end{aligned}\tag{5.53}$$

dove $|P\rangle$ e $|N\rangle$ sono stati di protone e neutrone, autovettori di \mathcal{B} relativi all'autovalore 1 che è il loro numero barionico. A partire da questa informazione possiamo considerare l'oggetto

$$\langle n'|\mathcal{B}|n\rangle = \int \langle n'|J_0|n\rangle d^3x\tag{5.54}$$

dove n indica uno stato di nucleone. Fissiamo la normalizzazione degli stati

$$\langle n'|n\rangle = (2\pi)^3 2E\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\tag{5.55}$$

\mathbf{p}' e \mathbf{p} sono i momenti dei nucleoni n' ed n ed E la loro energia. Poiché consideriamo basse energie possiamo porre $E = m_n$, dove m_n è la massa del nucleone. Segue che

$$\langle n'|\mathcal{B}|n\rangle = 2m_n(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\tag{5.56}$$

Sfruttiamo ora l'invarianza per traslazioni nell'equazione (5.54)

$$\langle n'|\mathcal{B}|n\rangle = \int \langle n'|e^{-i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}j_0e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}|n\rangle d^3x\tag{5.57}$$

da cui

$$\langle n'|\mathcal{B}|n\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\langle n'|J_0|n\rangle\tag{5.58}$$

quindi, confrontando la (5.56) e la (5.58), otteniamo

$$\langle n|J_0|n\rangle = 2m_n\tag{5.59}$$

valida sia per neutrone che per protone.

Costruiamo ora invece l'espressione più generale per l'elemento di matrice $\langle n'|J_\mu|n\rangle$. Poiché la quantità J_μ è un vettore essa può essere scritta come combinazione di un certo numero di quantità che si trasformano come vettori, nel nostro caso J_μ dipende dalle quantità γ_μ , p_μ , p'_μ e $k_\mu = p'_\mu - p_\mu$ per cui

$$\langle n'|J_\mu|n\rangle = \bar{u}_n(p')[a_1(k^2)\gamma_\mu + a_2(k^2)(p'_\mu + p_\mu) + a_3(k^2)(p'_\mu - p_\mu)]u_n(p).\tag{5.60}$$

Le quantità a_i sono i coefficienti della combinazione lineare mentre u_n è lo spinore associato al nucleone n . I quadrimomenti p'_μ e p_μ compaiono sommati e sottratti poiché più avanti sarà utile che siano scritti in questo modo. Poiché la corrente J_μ è conservata possiamo sfruttare l'identità di Ward

$$k^\mu J_\mu = 0.\tag{5.61}$$

Moltiplicando l'equazione (5.60) per k^μ osserviamo che, nel secondo membro dell'equazione, il primo e secondo termine si annullano mentre il terzo no. Questo implica necessariamente che il coefficiente a_3 deve essere nullo, per cui

$$\langle n'|J_\mu|n\rangle = \bar{u}_n(p')[a_1(k^2)\gamma_\mu + a_2(k^2)(p'_\mu + p_\mu)]u_n(p).\tag{5.62}$$

citiamo ora un'altra importante identità, l'identità di Gordon

$$\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) = \bar{u}\left[\frac{p'_\mu + p_\mu}{2m} + i\frac{\sigma^{\mu\nu}k_\nu}{2m}\right]u(p)\tag{5.63}$$

dove m è la massa della particella di cui u è lo spinore. Sfruttando questa identità possiamo riscrivere la (5.62) come

$$\langle n' | J_\mu | n \rangle = \bar{u}_n(p') [F_1(k^2) \gamma_\mu - i F_2(k^2) \frac{\sigma^{\mu\nu} k_\nu}{2m_n}] u_n(p). \quad (5.64)$$

Poiché siamo interessati al caso di bassa energia $k/m_n \ll 1$ per cui possiamo trascurare il secondo termine e possiamo considerare $F_1(k^2) \approx F_1(0)$ per cui

$$\langle n' | J_\mu | n \rangle = \bar{u}_n(p') [F_1(0) \gamma_\mu] u_n(p). \quad (5.65)$$

infine, poiché $\bar{u}_n u_n = 2m_n$, possiamo confrontare quest'equazione, per $\mu = 0$, con la (5.59) per ottenere $F_1(0) = 1$. Risulta quindi

$$\begin{aligned} \langle P | J_\mu | P \rangle &= \bar{u}_P \gamma_\mu u_P(p) \\ \langle N | J_\mu | N \rangle &= \bar{u}_N \gamma_\mu u_N(p) \end{aligned} \quad (5.66)$$

dove u_P ed u_N sono gli spinori associati a protone e neutrone.

5.4.2 Termine assiale e Lagrangiana Chirale

Per il termine assiale dell'equazione 5.49 non è possibile ripetere un ragionamento simile a quello appena fatto per l'elemento di matrice del termine vettoriale. Questo è dovuto al fatto che in $SU(2)$ non esiste una corrente isoscalare che sia conservata e cui sia possibile connettere un elemento di matrice. È possibile però superare questo problema abbandonando lo spazio $SU(2)$ e passando ad $SU(3)$. In questo spazio il campo q doppietto di $SU(2)$ diventa un tripletto di $SU(3)$

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Ponendoci nel “limite chirale” (le masse dei quark u , d ed s sono tutte nulle) possiamo trovare un legame tra una delle correnti conservate in $SU(3)$ e il termine isoscalare di cui abbiamo appena discusso. Risulta allora

$$\langle n | \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma^5 d | n \rangle = \langle n | A_\mu | n \rangle \quad (5.68)$$

dove la corrente A_μ è

$$A_\mu = \bar{u} \gamma_\mu \gamma^5 u + \bar{d} \gamma_\mu \gamma^5 d - 2 \bar{s} \gamma_\mu \gamma^5 s = \sqrt{3} \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_8 q \quad (5.69)$$

e λ_8 è la matrice di Gell-Mann

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

L'equazione (5.68) è valida nell'ipotesi che il contenuto strano del nucleone sia nullo

$$\langle n | \bar{s} \gamma_\mu \gamma^5 s | n \rangle = 0. \quad (5.71)$$

Con queste premesse possiamo quindi utilizzare con successo il procedimento descritto nella sezione 5.3, ma con una lagrangiana chirale valida in $SU(3)$ che descriva l'interazione tra barioni B e mesoni ϕ [26]

$$\mathcal{L}_{\phi B} = Tr \left[\bar{B} (i \gamma_\mu D^\mu - m) B + \frac{D}{2} \bar{B} \gamma_\mu \gamma^5 \{u^\mu, B\} + \frac{F}{2} \bar{B} \gamma_\mu \gamma^5 [u^\mu, B] \right], \quad (5.72)$$

la traccia è effettuata sugli indici di flavour e B è una matrice che rappresenta l'ottetto barionico

$$B = \begin{pmatrix} \Sigma^0/\sqrt{2} + \Lambda/\sqrt{6} & \Sigma^+ & P \\ \Sigma^- & -\Sigma^0/\sqrt{2} + \Lambda/\sqrt{6} & N \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\Lambda/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

\bar{B} è la sua hermitiana coniugata. La quantità m è la massa media dell'ottetto barionico, D ed F sono due coefficienti ricavati sperimentalmente. D_μ è una derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + [\Gamma_\mu, B]. \quad (5.74)$$

le quantità Γ_μ è definita in maniera simile al caso $SU(2)$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \{u^\dagger [\partial_\mu - iR_\mu] u + u [\partial_\mu - iL_\mu] u^\dagger\} \quad (5.75)$$

così come la quantità

$$u_\mu = i[u^\dagger (\partial_\mu - iR_\mu) u - u (\partial_\mu - iL_\mu) u^\dagger] \quad (5.76)$$

è definita a partire dalla matrice

$$u = \exp[i\phi/2F_\phi] \quad (5.77)$$

che contiene i mesoni ϕ ed F_ϕ contiene le costanti di decadimento di ogni mesone. Le quantità L_μ ed R_μ sono le sorgenti esterne left e right. Le proprietà di trasformazione di B , $D_\mu B$, Γ_μ e u_μ sono le stesse che in $SU(2)$.

Procediamo ora come nell'esempio descritto nella sezione 5.3. Poiché necessitiamo solo del contributo assiale dell'elemento di matrice che stiamo calcolando deriviamo la lagrangiana (5.72) rispetto alla sorgente assiale a_μ e ricordiamo che le sorgenti left e right sono scritte rispetto alle sorgenti vettoriale ed assiale $L_\mu = v_\mu - a_\mu$ e $R_\mu = v_\mu + a_\mu$. La quantità a_μ è una matrice ed ha una struttura di flavour, possiamo pensare di scriverla come $a_\mu = a_\mu^i \lambda_i$ dove le varie λ_i sono le otto matrici di Gell-Mann e generatori di $SU(3)$. Poiché vogliamo calcolare elementi di matrice tra stati di nucleone della corrente definita nell'equazione (5.69) solo l'ottava componente della sorgente left, $a_\mu^8 \lambda_8$, darà contributo. Quindi deriveremo rispetto alla matrice a_μ^8

$$\sqrt{3} \langle n | \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 \lambda_8 q | n \rangle = \sqrt{3} \frac{\delta \mathcal{L}_{\phi B}}{\delta a_\mu^8}. \quad (5.78)$$

Poiché non siamo interessati al caso in cui vengono compaiono anche i mesoni, lì dove compaiono le matrici u legate ai mesoni possiamo sostituire l'identità. Le matrici u possono infatti essere sviluppate come segue

$$u = \exp[i\phi/2F_\phi] \approx \mathbb{1} + i \frac{\phi}{2F_\phi} + \dots \quad (5.79)$$

nel nostro caso lo sviluppo è troncato all'ordine più basso. In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \frac{\delta \mathcal{L}_{\phi B}}{\delta L_\mu^8} &= Tr \{ \sqrt{3} D \bar{B} \gamma^\mu \gamma^5 \{ \lambda_8, B \} + \sqrt{3} F \bar{B} \gamma^\mu \gamma^5 [\lambda_8, B] \} \\ &= Tr \{ \sqrt{3} (D + F) \bar{B} \gamma^\mu \gamma^5 \lambda_8 B + \sqrt{3} (D - F) \bar{B} \gamma^\mu \gamma^5 \lambda_8 B \} \end{aligned} \quad (5.80)$$

Le matrici γ^μ e γ^5 non hanno struttura di flavour, quindi le tracce che compaiono nell'equazione (5.80) sono del tipo $Tr(\lambda_8 B \bar{B})$ oppure $Tr(\lambda_8 \bar{B} B)$. Mostriamo allora la forma della matrice \bar{B} , l'hermitiana coniugata di B

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{\Sigma}^0/\sqrt{2} + \bar{\Lambda}/\sqrt{6} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\bar{\Sigma}^0/\sqrt{2} + \bar{\Lambda}/\sqrt{6} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{P} & \bar{N} & -2\bar{\Lambda}/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

Mostriamo quale è la forma di una traccia che coinvolge la matrice λ_8

$$Tr \left[\lambda_8 \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \right] = Tr \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + e - 2i) \quad (5.82)$$

per cui non è necessario calcolare interamente i prodotti $B\bar{B}$ e $\bar{B}B$ ma solo i termini che compaiono nel calcolo della traccia. Per cui

$$\begin{aligned} \sqrt{3}Tr(\lambda_8 B\bar{B}) &= (a + e - 2i) \\ \sqrt{3}Tr(\lambda_8 \bar{B}B) &= (\bar{a} + \bar{e} - 2\bar{i}) \end{aligned} \quad (5.83)$$

dove a , e , i , \bar{a} , \bar{e} ed \bar{i} sono i termini diagonali dei prodotti $B\bar{B}$ e $\bar{B}B$. Calcoliamo questi coefficienti per $B\bar{B}$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\bar{\Sigma}^0 \Sigma^0}{2} + \frac{\bar{\Lambda} \Sigma^0}{2\sqrt{3}} + \frac{\bar{\Sigma}^0 \Lambda}{2\sqrt{3}} + \frac{\bar{\Lambda} \Lambda}{6} + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{P}P \\ e &= \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \frac{\bar{\Sigma}^0 \Sigma^0}{2} - \frac{\bar{\Lambda} \Sigma^0}{2\sqrt{3}} - \frac{\bar{\Sigma}^0 \Lambda}{2\sqrt{3}} + \frac{\bar{\Lambda} \Lambda}{6} + \bar{N}N \\ i &= \bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \frac{2}{3}\bar{\Lambda} \Lambda \end{aligned} \quad (5.84)$$

ed anche per $\bar{B}B$

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\bar{\Sigma}^0 \Sigma^0}{2} + \frac{\bar{\Lambda} \Sigma^0}{2\sqrt{3}} + \frac{\bar{\Sigma}^0 \Lambda}{2\sqrt{3}} + \frac{\bar{\Lambda} \Lambda}{6} + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Xi}^- \Xi^- \\ \bar{e} &= \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \frac{\bar{\Sigma}^0 \Sigma^0}{2} - \frac{\bar{\Lambda} \Sigma^0}{2\sqrt{3}} - \frac{\bar{\Sigma}^0 \Lambda}{2\sqrt{3}} + \frac{\bar{\Lambda} \Lambda}{6} + \bar{\Xi}^0 \Xi^0 \\ \bar{i} &= \bar{P}P + \bar{N}N + \frac{2}{3}\bar{\Lambda} \Lambda. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Ricordiamo che il nostro obiettivo è quello di calcolare elementi di matrice tra stati di nucleone, cioè di protone (P) e neutrone (N). Sostituiamo allora le equazioni (5.83), (5.84) e (5.85) nell'equazione della lagrangiana (5.80) e prendiamo solo i contributi degli stati di nucleone. Otteniamo

$$\sqrt{3} \frac{\delta \mathcal{L}_{\phi B}^{(1)}}{\delta L_\mu^8} = (3F - D) \bar{u}_n \gamma^\mu \gamma^5 u_n \quad (5.86)$$

dove u_n è lo spinore di Dirac associato al nucleone. Utilizzando le informazioni delle equazioni (5.49), (5.86) e (5.66) otteniamo

$$\langle n | \sqrt{3} \bar{q} \gamma_\mu \lambda^8 q | n \rangle = \frac{1}{2} [\bar{u}_n \gamma_\mu u_n - (3F - D) \bar{u}_n \gamma_\mu \gamma^5 u_n]. \quad (5.87)$$

A questo punto, chiamiamo ψ_n il campo che descrive il nucleone e poniamo $g = 3D - F$, possiamo finalmente ottenere la forma della nuova lagrangiana che permette di descrivere l'interazione tra DM e nucleone

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g_\chi^2}{4\Lambda^2} \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R (\bar{\psi}_n \gamma_\mu \psi_n - g \bar{\psi}_n \gamma_\mu \gamma^5 \psi_n) \quad (5.88)$$

dove $g \approx 0.31$, infatti $D \approx 0.86$ ed $F \approx 0.39$ [31]. Osserviamo che avremmo potuto ottenere lo stesso risultato senza separare la parte vettoriale ed assiale e derivando l'intera lagrangiana per la sorgente left L_μ^8 poiché l'oggetto $\bar{q}_L \gamma_\mu q$ che abbiamo studiato conteneva quark di tipo left.

5.5 Sezione d'urto DM-nucleone

In figura 5.2 è rappresentata l'interazione tra materia oscura e un nucleone. Dalla lagran-

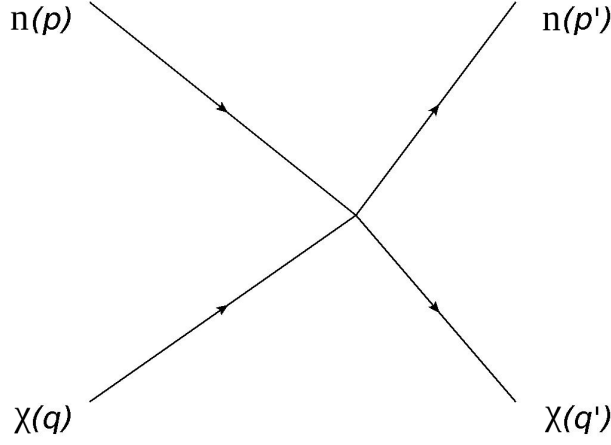


Figura 5.2: Urto tra particella di DM e nucleone

giana (5.88) si ricava l'elemento di matrice associato al processo

$$\mathcal{M} = i \frac{g_\chi^2}{4\Lambda^2} [\bar{u}_\chi(q') \gamma^\mu P_R u_\chi(q) \bar{u}_n(p') \gamma_\mu u_n(p) - g \bar{u}_\chi(q') \gamma^\mu P_R u_\chi(q) \bar{u}_n(p') \gamma_\mu \gamma^5 u_n(p)] \quad (5.89)$$

i pedici χ ed n indicano che gli spinori $u_{\chi/n}$ sono associati alla DM ed al nucleone rispettivamente. Per calcolare il modulo quadro dell'elemento di matrice ne calcoliamo l'aggiunto

$$\mathcal{M}^\dagger = -i \frac{g_\chi^2}{4\Lambda^2} [\bar{u}_n(p) \gamma_\nu u_n(p') \bar{u}_\chi(q) P_L \gamma^\nu u_\chi(q') - g \bar{u}_n(p) \gamma_\nu \gamma^5 u_n(p') \bar{u}_\chi(q) P_L \gamma^\nu u_\chi(q')]. \quad (5.90)$$

Procediamo ora calcolando il modulo quadro mediando sugli spin iniziali e sommando sui finali

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{16\Lambda^4} & \left\{ Tr[(\not{q}' + m_\chi) \gamma^\mu P_R (\not{q} + m_\chi) P_L \gamma^\nu] Tr[(\not{p}' + m_n) \gamma_\mu (\not{p} + m_n) \gamma_\nu] \right. \\ & - g Tr[(\not{q}' + m_\chi) \gamma^\mu P_R (\not{q} + m_\chi) P_L \gamma^\nu] Tr[(\not{p}' + m_n) \gamma_\mu (\not{p} + m_n) \gamma_\nu \gamma^5] \\ & - g Tr[(\not{q}' + m_\chi) \gamma^\mu P_R (\not{q} + m_\chi) P_L \gamma^\nu] Tr[(\not{p}' + m_n) \gamma_\mu \gamma^5 (\not{p} + m_n) \gamma_\nu] \\ & \left. + g^2 Tr[(\not{q}' + m_\chi) \gamma^\mu P_R (\not{q} + m_\chi) P_L \gamma^\nu] Tr[(\not{p}' + m_n) \gamma_\mu \gamma^5 (\not{p} + m_n) \gamma_\nu \gamma^5] \right\} \end{aligned} \quad (5.91)$$

da cui

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{16\Lambda^4} & \left\{ Tr[\not{q}' \gamma^\mu P_R \not{q} \gamma^\nu] Tr[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + m_n^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right. \\ & - g Tr[\not{q}' \gamma^\mu P_R \not{q} \gamma^\nu] Tr[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma^5] \\ & - g Tr[\not{q}' \gamma^\mu P_R \not{q} \gamma^\nu] Tr[\not{p}' \gamma_\mu \gamma^5 \not{p} \gamma_\nu] \\ & \left. + g^2 Tr[\not{q}' \gamma^\mu P_R \not{q} \gamma^\nu] Tr[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu - m_n^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right\} \end{aligned} \quad (5.92)$$

quindi

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{16\Lambda^4} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}[\not{q}' \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu + \not{q}' \gamma^\mu \gamma^5 \not{q} \gamma^\nu] \text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + m_n^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right. \\ \left. - g \text{Tr}[\not{q}' \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu + \not{q}' \gamma^\mu \gamma^5 \not{q} \gamma^\nu] \text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma^5] \right. \\ \left. + \frac{g^2}{2} \text{Tr}[\not{q}' \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu + \not{q}' \gamma^\mu \gamma^5 \not{q} \gamma^\nu] \text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu - m_n^2 \gamma_\mu \gamma_\nu] \right\} \quad (5.93)$$

sfruttando le proprietà della traccia delle matrici γ otteniamo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{16\Lambda^4} \left[8(q'^\mu q^\nu - q' \cdot q g^{\mu\nu} + q'^\nu q^\mu)(p'_\mu p_\nu - p' \cdot p g_{\mu\nu} + p'_\nu p_\mu + m_n^2 g^{\mu\nu}) \right. \\ \left. - 16g(\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} q'_\rho q_\sigma)(\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p'^\alpha p^\beta) \right. \\ \left. + 8g^2(q'^\mu q^\nu - q' \cdot q g^{\mu\nu} + q'^\nu q^\mu)(p'_\mu p_\nu - p' \cdot p g_{\mu\nu} + p'_\nu p_\mu - m_n^2 g_{\mu\nu}) \right] \quad (5.94)$$

Segue che

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} \left[q' \cdot p' p \cdot q + q' \cdot p p' \cdot q - m_n^2 q' \cdot q \right. \\ \left. + 2g(q' \cdot p' q \cdot p - q' \cdot p q \cdot p') + g^2(q' \cdot p' p \cdot q + q' \cdot p p' \cdot q + m_n^2 q' \cdot q) \right] \quad (5.95)$$

per cui

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} \left[(1+g)^2 q' \cdot p' p \cdot q + (1-g)^2 q' \cdot p p' \cdot q + (g^2 - 1) m_n^2 q' \cdot q \right] \quad (5.96)$$

Poniamoci ora nel sistema di riferimento del laboratorio (fig.5.3).

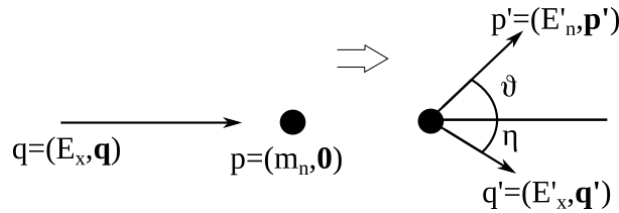


Figura 5.3: Sistema di riferimento del laboratorio

L'asse $\hat{\mathbf{z}}$ è fissato in base alla direzione della DM incidente, q , p , q' e p' sono i quadrimomenti di DM e nucleo prima e dopo l'urto mentre η ed θ sono gli angoli cui vengono diffusi la DM e il nucleone. Nel piano della figura θ è misurato in senso antiorario rispetto a $\hat{\mathbf{z}}$ mentre η è misurato in senso orario.

Poiché lavoriamo ad energie molto basse sia la DM che il nucleone saranno non relativistici, esprimeremo il generico quadrimomento nella forma $Q = (Q_0, \mathbf{Q}) \simeq (m + \mathbf{Q}^2/2m, \mathbf{Q})$, ottenendo

$$\begin{aligned}
q' \cdot p' &= m_\chi m_n + \frac{m_n}{2m_\chi} \mathbf{q}'^2 + \frac{m_\chi}{2m_n} \mathbf{p}'^2 + \frac{(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}')^2}{4m_\chi m_n} - |\mathbf{q}'| |\mathbf{p}'| \cos(\theta + \eta) \\
q \cdot p &= m_\chi m_n + \frac{\mathbf{q}^2 m_n}{2m_\chi} \\
q' \cdot p &= m_\chi m_n + \frac{\mathbf{q}'^2 m_n}{2m_\chi} \\
p' \cdot q &= m_\chi m_n + \frac{m_\chi}{2m_n} \mathbf{p}'^2 + \frac{m_n}{2m_\chi} \mathbf{q}^2 + \frac{(|\mathbf{p}'| |\mathbf{q}|)^2}{4m_\chi m_n} - |\mathbf{q}| |\mathbf{p}'| \cos(\theta) \\
q' \cdot q &= m_\chi^2 + \frac{\mathbf{q}'^2}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.97}$$

da cui

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} \left[(1+g)^2 \left(m_\chi m_n + \frac{m_n}{2m_\chi} \mathbf{q}'^2 + \frac{m_\chi}{2m_n} \mathbf{p}'^2 + \frac{(|\mathbf{p}'| |\mathbf{q}'|)^2}{4m_\chi m_n} - |\mathbf{q}'| |\mathbf{p}'| \cos(\theta + \eta) \right) \left(m_\chi m_n + \frac{\mathbf{q}^2 m_n}{2m_\chi} \right) \right. \\
&\quad + (1-g)^2 \left(m_\chi m_n + \frac{\mathbf{q}'^2 m_n}{2m_\chi} \right) \left(m_\chi m_n + \frac{m_\chi}{2m_n} \mathbf{p}'^2 + \frac{m_n}{2m_\chi} \mathbf{q}^2 + \frac{(|\mathbf{p}'| |\mathbf{q}|)^2}{4m_\chi m_n} - |\mathbf{q}| |\mathbf{p}'| \cos(\theta) \right) \\
&\quad \left. + (g^2 - 1) m_n^2 \left(m_\chi^2 + \frac{\mathbf{q}'^2}{2} + \frac{\mathbf{q}^2}{2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.98}$$

imponendo la conservazione dell'energia e del momento

$$|\mathbf{q}'| = \sqrt{\mathbf{q}^2 - \frac{m_\chi}{m_n} \mathbf{p}'^2} \quad |\mathbf{q}'| \sin \eta = |\mathbf{p}'| \sin \theta \quad |\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'| \cos \eta + |\mathbf{p}'| \cos \theta \tag{5.99}$$

otteniamo

$$|\mathbf{p}'| = \frac{2m_n |\mathbf{q}| \cos \theta}{m_\chi + m_n} \quad |\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}| \sqrt{1 - \frac{4m_n m_\chi \cos^2 \theta}{(m_n + m_\chi)^2}} \tag{5.100}$$

e

$$|\mathbf{q}'| |\mathbf{p}'| \cos(\theta + \eta) = |\mathbf{q}'| |\mathbf{p}'| (\cos \theta \cos \eta - \sin \theta \sin \eta) = |\mathbf{q}'| |\mathbf{q}| \cos \theta - |\mathbf{p}'|^2 \tag{5.101}$$

per cui è possibile esprimere l'elemento di matrice in funzione del solo momento incidente $|\mathbf{q}|$ ed angolo di diffusione θ .

Calcoliamo ora lo spazio delle fasi nel sistema del laboratorio, l'espressione più generale è

$$d\Pi_2 = \frac{d^3 \mathbf{p}' d^3 \mathbf{q}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2E'_n E'_\chi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p' - q') \tag{5.102}$$

nel nostro caso $E'_n = m_n + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n}$ e $E'_\chi = m_\chi + \frac{\mathbf{q}'^2}{2m_\chi}$ sono l'energia del nucleone e della DM nello stato finale, P è il quadrimomento totale.

Eliminiamo $d^3 \mathbf{q}'$ usando la delta sui momenti $\delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}' - \mathbf{p}')$, da cui $\mathbf{q}' = \mathbf{p}' - \mathbf{q}$ e passiamo in coordinate polari. Quindi

$$d\Pi_2 = \frac{\mathbf{p}'^2 d\phi d\mathbf{p}' d\cos \theta}{(2\pi)^2} \frac{1}{4(m_n + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n})(m_\chi + \frac{\mathbf{q}'^2}{2m_\chi})} \delta(E_n + E_\chi - E'_n - E'_\chi) \tag{5.103}$$

Inoltre poiché $\mathbf{q}' = \mathbf{p}' - \mathbf{q}$ risulta $\mathbf{q}'^2 = \mathbf{q}^2 + \mathbf{p}'^2 - |\mathbf{q}||\mathbf{p}'| \cos \theta$ ed essendo

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0), \quad (5.104)$$

dove x_0 è uno zero di f , otteniamo

$$d\Pi_2 = \frac{d\phi d \cos \theta}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{p}'^2}{4(m_n + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n})(m_\chi + \frac{\mathbf{q}'^2}{2m_\chi})} \left| \frac{m_n(|\mathbf{p}'| - |\mathbf{q}| \cos \theta) + m_\chi |\mathbf{p}'|}{m_n m_\chi} \right|^{-1} \quad (5.105)$$

dalla conservazione dell'energia $|\mathbf{q}'| = \sqrt{\mathbf{q}^2 - \frac{m_\chi}{m_n} \mathbf{p}'^2}$ per cui

$$d\Pi_2 = \frac{d\phi d \cos \theta}{(2\pi)^2} \frac{\mathbf{p}'^2}{4(m_n + \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n})(m_\chi + \frac{\mathbf{q}^2}{2m_\chi} - \frac{\mathbf{p}'^2}{2m_n})} \left| \frac{m_n m_\chi}{m_n(|\mathbf{p}'| - |\mathbf{q}| \cos \theta) + m_\chi |\mathbf{p}'|} \right|. \quad (5.106)$$

Richiamiamo ora l'espressione generale per la sezione d'urto

$$d\sigma(q, \theta, \phi) = \frac{1}{2E_\chi 2E_n |v_\chi - v_n|} |\overline{\mathcal{M}}|^2(q, \theta) d\Pi_2(q, \theta, f) \quad (5.107)$$

dove $E_n = m_n$, $E_\chi = m_\chi + q^2/2m_\chi$, $v_\chi = q/m_\chi$ e $v_n = 0$.

Sostituendo in quest'equazione l'espressione (5.98) per l'elemento di matrice e l'espressione (5.106) per lo spazio delle fasi e tenendo conto delle relazioni (5.100) e (5.101) possiamo ottenere un'espressione per la sezione d'urto espressa solo in funzione del momento incidente $|\mathbf{q}|$ e dell'angolo di diffusione θ . L'espressione completa è utilizzata nei calcoli numerici, ne riportiamo qui una versione più compatta nel limite in cui $m_\chi \gg m_n$. In questo limite risulta

$$\begin{aligned} q' \cdot p' &= q \cdot p = q' \cdot p = p' \cdot q = m_\chi m_n \\ q' \cdot q &= m_\chi^2 \\ |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} [(1 + g^2) 2m_\chi^2 m_n^2 + (g^2 - 1) m_\chi^2 m_n^2] \\ d\Pi_2 &= \frac{d\phi d \cos \theta}{(2\pi)^2} \frac{m_n q |\cos \theta|}{(m_\chi + m_n)^2} \end{aligned} \quad (5.108)$$

Quindi l'espressione per la sezione d'urto è

$$d\sigma(\theta) = \frac{1}{8\pi} \frac{g_\chi^4}{\Lambda^4} (3g^2 + 1) \frac{m_n^2 m_\chi^2}{(m_n + m_\chi)^2} |\cos \theta| d \cos \theta \quad (5.109)$$

osserviamo che la dipendenza dal momento incidente è scomparsa.

Il limite per cui vale questa espressione è $m_\chi \gg m_n$ è verificato poiché calcoleremo la sezione d'urto per valori di m_χ di almeno 50 GeV mentre $m_n \approx 1 \text{ GeV}$. Abbiamo anche sfruttato la condizione $m_\chi \gg q$, valida poiché mediamente la materia oscura ha velocità $\bar{v}_\chi \approx 10^{-3} c$ per cui $q = \gamma m_\chi \bar{v}_\chi$ con $\gamma \approx 1$ fattore di Lorentz; quindi, sempre in unità naturali, $q \approx 10^{-3} m_\chi$. Riportiamo in figura (5.4) l'andamento della sezione d'urto al variare della massa m_χ . I valori di sezione d'urto integrata nelle variabili angolari sono riportati in tabella 5.1.

$m_\chi (GeV)$	$g_\chi/\Lambda (GeV^{-1})$	$\sigma_n (cm^2)$
50	0.00143	7.19×10^{-41}
100	0.000103	1.92×10^{-41}
200	0.0000718	4.63×10^{-42}
300	0.0000581	1.99×10^{-42}
400	0.000504	1.13×10^{-42}
500	0.000451	7.27×10^{-43}
600	0.000413	5.09×10^{-43}
700	0.000383	3.77×10^{-43}
800	0.000359	2.91×10^{-43}
900	0.000339	2.31×10^{-43}
1000	0.000322	1.89×10^{-43}

Tabella 5.1: Valori di accoppiamento e sezione d'urto. L'accoppiamento è stato ricavato confrontando la stima teorica della relic density con i dati di CMB. L'incertezza sulla misura della relic density si traduce in un'incertezza dell'ordine dello 0.5% sull'accoppiamento e del 2.5% sulla sezione d'urto.

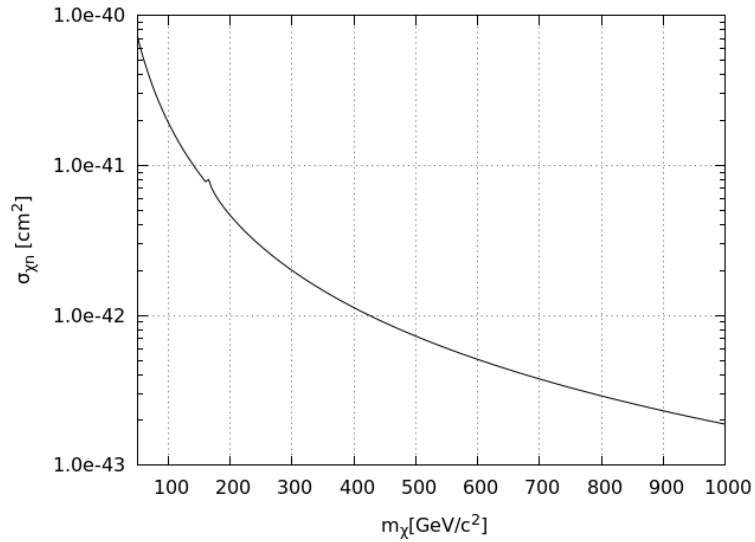


Figura 5.4: Sezione d'urto DM-nucleone al variare della massa m_χ

5.6 Flusso di materia oscura sulla Terra

La materia oscura, che riteniamo distribuita ovunque nell'Universo, permea anche la nostra galassia e non ha una direzione del moto privilegiata nel sistema di riferimento della galassia. Il fatto che il sistema solare ruoti attorno al centro galattico fa sì che la Terra sia investita da un flusso di DM dovuto al moto relativo della Terra rispetto all'alone di materia oscura. Gli esperimenti di rilevazione diretta di DM tentano di osservare particelle provenienti da questo flusso, è quindi di vitale importanza conoscere la densità di materia oscura nella regione del sistema solare.

La densità di materia oscura ρ_χ viene ricavata studiando la curva di rotazione della via lattea (fig.5.5).

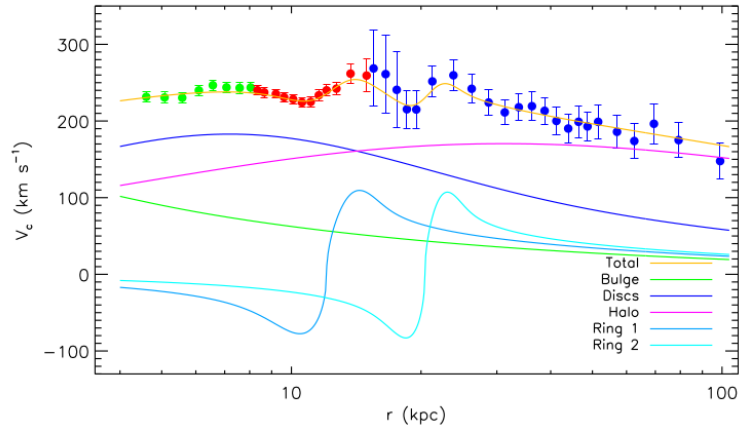


Figura 5.5: Curva di rotazione della via lattea fino a 100 kPc dal centro. I punti verdi derivano da misure della riga HI, i punti rossi da misure su ammassi di giganti rosse e quelli blu da giganti di classe spettrale K. La legenda indica i vari contributi alla curva di rotazione totale [33].

Esistono diverse stime di ρ_χ , questo perché esse dipendono dal diverso modello adottato per descrivere la distribuzione della DM nella galassia, in generale però rientrano tutte nell'intervallo $0.2 - 0.8 \text{ GeV}/\text{cm}^3$ [32].

5.7 Tasso di interazione

Nella sezione 5.5 abbiamo ottenuto un'espressione per la sezione d'urto d'interazione tra materia oscura e nucleoni. Poiché vogliamo poter confrontare il nostro valore con alcuni degli esperimenti di ricerca diretta abbiamo bisogno di ottenere dalla sezione d'urto un *tasso d'interazione*.

Definiamo quindi il tasso di interazione R (numero di interazioni al secondo) nel caso di particelle di DM incidenti su un certo rivelatore

$$R = \Phi_\chi N_T \sigma_{\chi N} \quad (5.110)$$

dove Φ_χ è il flusso di particelle di DM incidenti, N_T il numero di nuclei presenti nel rivelatore e $\sigma_{\chi N}$ la sezione d'urto tra particella incidente e singolo nucleo, più avanti vedremo come legarla alla sezione d'urto sul nucleone.

Il numero di nuclei bersagli N_T può esprimersi mediante il numero di Avogadro N_A , la massa del rivelatore M_D e il numero di nucleoni nel nucleo A_T che, in unità di $[g\ mol^{-1}]$, fornisce la massa molare dell'elemento di cui è costituito il rivelatore

$$N_T = N_A \frac{M_D}{A_T} \quad (5.111)$$

mentre il flusso di particelle incidenti

$$\Phi_\chi = n_\chi \bar{v}_\chi = \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \bar{v}_\chi \quad (5.112)$$

dove n_χ è il numero di particelle di DM per unità di volume, m_χ la massa della DM e ρ_χ e \bar{v}_χ la densità d'energia e la velocità media della materia oscura che supponiamo valere rispettivamente $0.4\ GeV/cm^3$ e $300\ Km/s$ [34]. Quindi

$$R = N_A \frac{M_D}{A_T} \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \bar{v}_\chi \sigma_{\chi N} \quad (5.113)$$

Questa non è ancora l'espressione di tasso di interazione che andremo ad utilizzare, occorre tenere in considerazione che non tutte le particelle di DM hanno la stessa velocità ed anche che la sezione d'urto può dipendere dall'energia di rinculo (recoil) del nucleo colpito.

Per tenere in conto di questi due fattori definiamo un tasso d'interazione differenziale dR di cui il tasso R è l'integrale

$$R = \int_{E_s}^{E_{max}} \frac{dR(E_R)}{dE_R} dE_R \quad (5.114)$$

dove E_s è l'energia di soglia, la minima energia cui il rivelatore è sensibile, E_R l'energia di recoil ed E_{max} è la massima energia che il nucleo colpito dalla DM può avere.

Nell'espressione di dR occorre tenere in considerazione la distribuzione delle velocità $f(v_\chi)$ delle particelle di DM e la funzione di distribuzione dell'energia di recoil $P(E_R, v_\chi)$ la forma delle quali è specificata più avanti. Risulta

$$\frac{dR(E_R)}{dE_R} = \int_{v_{min}}^{v_{esc}} N_T \sigma_{\chi N}(E_R) \Phi(v_\chi) P(E_R, v_\chi) f(v_\chi) dv_\chi \quad (5.115)$$

dove v_{min} è la più piccola velocità che può provocare in un nucleo un rinculo di energia E_R e v_{esc} è la velocità di fuga dalla nostra galassia e vale circa $3 \times 10^{-3}c$. L'energia di recoil dipende dall'angolo di diffusione, essa può assumere valori compresi tra zero e

$$E_{max} = \frac{2\mu_{\chi N}^2}{m_T} v_\chi^2 \quad (5.116)$$

dove m_T è la massa del nucleo bersaglio. La minima velocità che può provocare un rinculo di energia E_R è

$$v_{min} = \sqrt{\frac{m_T E_R}{2\mu_{\chi N}}} \quad (5.117)$$

dove $\mu_{\chi N} = (m_\chi m_T)/(m_\chi + m_T)$ è la massa ridotta di DM e nucleo. L'energia della collisione però è sufficientemente bassa per cui supponiamo che la diffusione avvenga prevalentemente in onda s . Poiché l'onda diffusa ha simmetria sferica la funzione di distribuzione dell'energia di recoil non dipenderà dall'angolo di diffusione ma dovrà essere uniforme (fig.5.6).

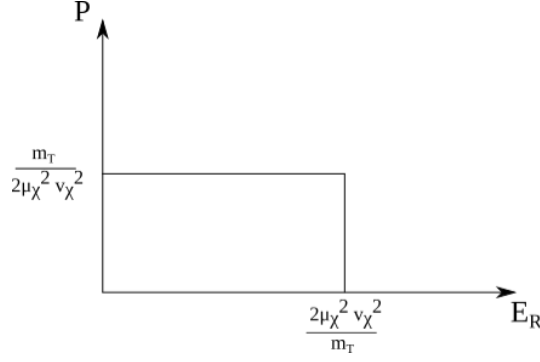


Figura 5.6: distribuzione uniforme dell'energia di rinculo del nucleo

Imponendo che la distribuzione sia normalizzata ad 1 otteniamo

$$P(E_R, v_\chi) = \frac{m_T}{2\mu_{\chi N} v_\chi^2}. \quad (5.118)$$

Quindi

$$\frac{dR(E_R)}{dE_R} = N_A \frac{M_D}{A_T} \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \sigma_{\chi N}(E_R) \frac{m_T}{2\mu_{\chi N}^2} \int_{v_{min}}^{v_{esc}} \frac{1}{v_\chi} f(v_\chi) dv_\chi \quad (5.119)$$

Per quanto riguarda la distribuzione delle velocità supponiamo che la DM sia distribuita in un alone a simmetria sferica rispetto al centro della nostra galassia, in tale contesto possiamo riscrivere l'integrale in coordinate polari, la distribuzione delle velocità avrà forma

$$f(v_\chi) = \frac{4\pi v_\chi^2}{(\pi \bar{v}_\chi^2)^{3/2}} e^{-\frac{v_\chi^2}{\bar{v}_\chi^2}} \quad (5.120)$$

con $\bar{v}_\chi = \sqrt{2/3 \langle v_\chi^2 \rangle} \approx 300 \text{ km/s}$ [34], la media è calcolata con la distribuzione (5.120). Poiché l'esponenziale in $f(v_\chi)$ ne comporta una rapida decrescita all'aumentare di v_χ possiamo porre $v_{esc} = \infty$ e poi integrare nelle velocità. Ricordando la definizione di v_{min} segue che

$$\frac{dR(E_R)}{dE_R} = N_A \frac{M_D}{A_T} \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \sigma_{\chi N}(E_R) \frac{m_T}{2\mu_{\chi N}^2} \frac{2}{\bar{v}_\chi \sqrt{\pi}} e^{-\frac{m_T E_R}{2\mu_{\chi N}^2 \bar{v}_\chi^2}}. \quad (5.121)$$

Spostiamo ora l'attenzione sulla sezione d'urto; la quantità $\sigma_{\chi N}$ è la sezione d'urto tra DM ed un certo nucleo atomico mentre nella sezione precedente abbiamo ricavato la sezione d'urto su singolo nucleone σ_n . È possibile legare questi due oggetti secondo la relazione [35]

$$\sigma_{\chi N}(q) = \sigma_n F_{ch}^2(q) A_T^2 \quad (5.122)$$

dove $F_{ch}^2(q)$ è il fattore di forma del nucleo e $q = \sqrt{2m_\chi E_R}$ è il momento trasferito dalla particella di DM al nucleo. $F_{ch}(q)$ è la trasformata di Fourier della distribuzione di carica nel nucleo. Le ipotesi sotto cui è valida questa relazione sono:

- indipendenza dallo spin della sezione d'urto.
- La sezione d'urto DM-protone è uguale a quella DM-neutrone.
- Lo scattering DM-nucleone è elastico, quindi i fattori di forma dei singoli nucleoni sono stati trascurati.

5.8 Risultati e confronto con i dati sperimentali

5.8.1 Tassi di interazione

In questa sezione mostreremo i grafici ottenuti integrando l'espressione (5.121) per diversi elementi chimici.

Gli estremi di integrazione saranno l'energia di soglia E_s che è la minima energia che l'apparato può rivelare e l'energia massima E_{max} che una particella di DM può cedere al nucleo colpito. In figura 5.7 mostriamo la dipendenza dei tassi di interazione dall'energia di soglia dell'apparato. Riportiamo i tassi di interazione per diversi valori di m_χ supponendo che la DM incida su 1kg di rivelatore costituito da nuclei di ^{40}Ar , ^{72}Ge , ^{136}Xe e ^{208}Pb per un giorno di esposizione.

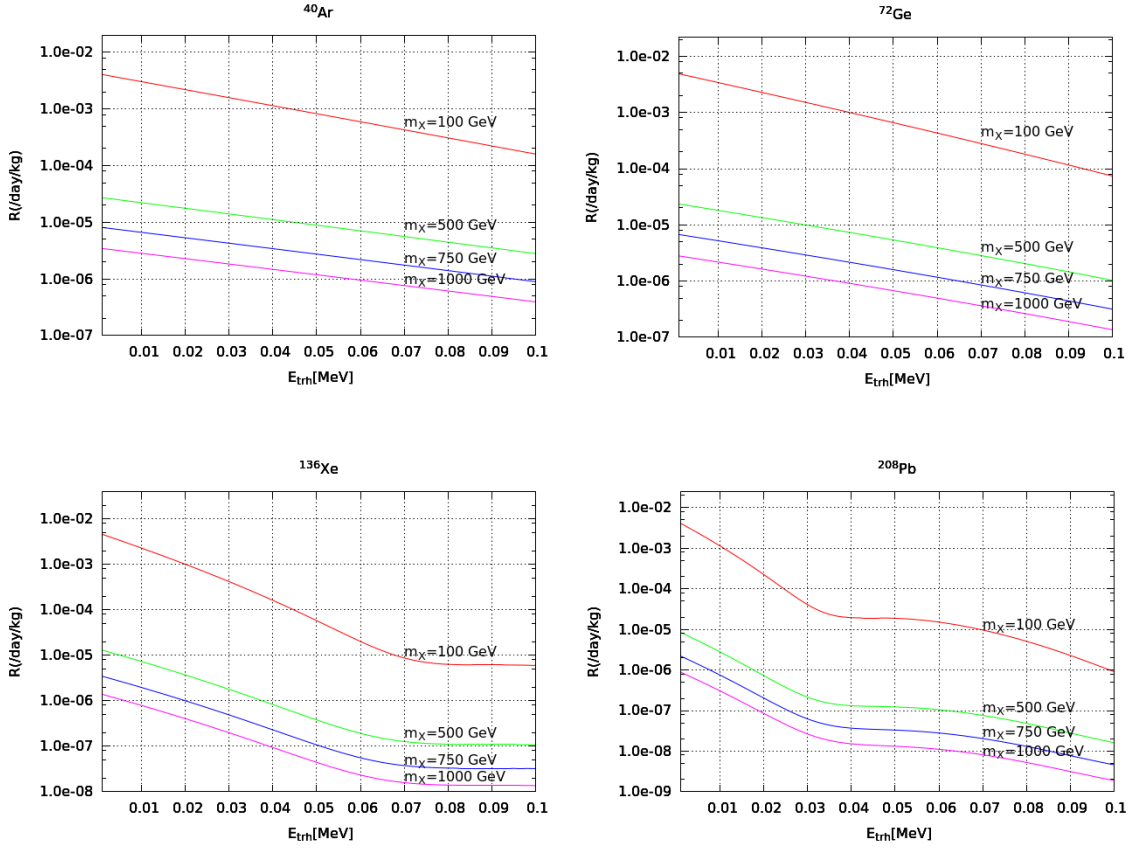


Figura 5.7: Tassi di interazione di vari elementi al variare dell'energia di soglia del rivelatore e calcolati per diversi valori di m_χ

Il diverso andamento del tasso di interazione per i vari nuclei è dovuto alla loro differente struttura, come vediamo dalla (5.122) la sezione d'urto $\sigma_{\chi N}$ che compare nel tasso di interazione dipende dal fattore di forma $F_{ch}(q)$ che è differente per ogni nucleo. Osserviamo inoltre che il tasso di interazione aumenta significativamente con l'abbassarsi della soglia ma diminuisce con l'aumentare di m_χ come ci si può aspettare dalla presenza di m_χ al denominatore della (5.121).

Per questo motivo riportiamo figura 5.8 il tasso di interazione al variare della massa m_χ della DM relativamente ad 1 kg di rivelatore per un giorno di esposizione, l'energia di soglia è fissata ad 1 keV.

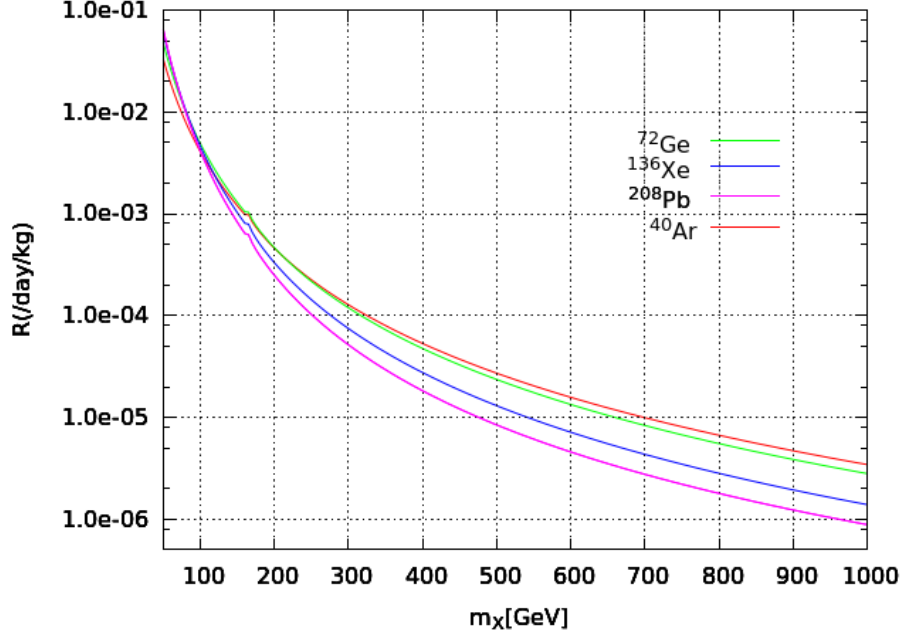


Figura 5.8: Tasso di interazione integrato al variare di m_χ .

Osserviamo che per alti valori di massa della DM il numero di eventi al giorno per chilogrammo di rivelatore è molto basso, dell'ordine di 10^{-4} e inferiore. Un rivelatore volto a cercare una particella con un così basso tasso di interazione dovrà essere molto massivo e raccogliere dati per lunghi periodi di tempo.

5.8.2 Confronto con i dati sperimentali

Confrontiamo ora i nostri risultati con alcuni dati sperimentali. Si considerano i risultati degli esperimenti “Xenon100” ([36]) e “Darkside” ([37] e [38]). Fondamentalmente entrambi i rivelatori sfruttano lo stesso principio: un nucleo atomico quando colpito da una particella di DM genera un segnale che può essere catturato ed analizzato. Gli esperimenti considerati utilizzano nuclei di xenon e di argon. Nelle figure 5.9 e 5.10 mostriamo il tasso di interazione predetto dal nostro modello integrato sul range di energia sondato da Xenon100 e Darkside.

L'esperimento Xenon100 non ha rivelato evidenze di DM su una presa dati complessiva di 224.6 giorni per una massa di 34 kg sondando energie di recoil tra 6.6 e 30.5 keV. Si sono osservati due eventi che però sono stati interpretati come eventi dovuti al rumore dell'apparato sperimentale che aveva un valore atteso atteso di (1.0 ± 0.2) eventi.

L'esperimento Darkside non ha rivelato alcuna evidenza di DM su una presa dati complessiva di 70.9 giorni per una massa di 37 kg sondando energie tra 36 e 206 keV.

Per poter interpretare questi dati introduciamo la distribuzione di Poisson

$$P(n, \mu) = (\mu)^n \frac{e^{-(\mu)}}{n!} \quad (5.123)$$

che rappresenta la probabilità di osservare un numero di eventi n il cui valore atteso è μ . Il valore atteso di eventi μ è quello che otteniamo moltiplicando il tasso di interazione che abbiamo calcolato per il tempo d'esposizione e la massa del rivelatore.

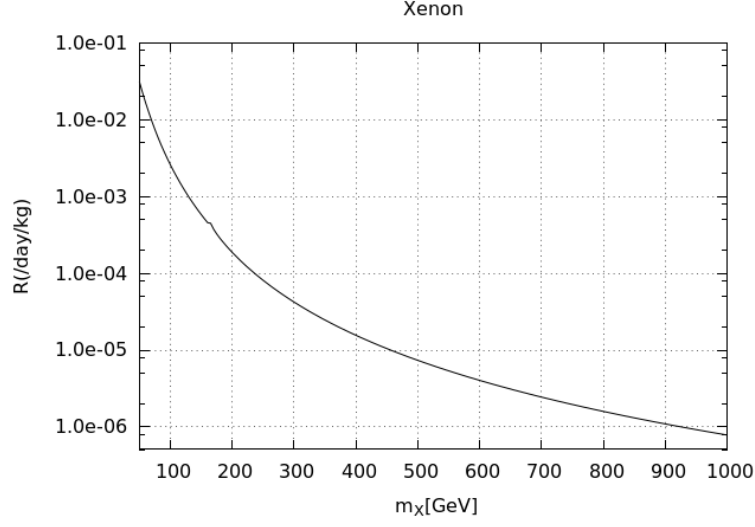


Figura 5.9: Il grafico fornisce il numero di eventi che è possibile rilevare in un rivelatore a base di Xenon relativamente ad un giorno di esposizione e ad una massa del rivelatore di 1 kg. Il tasso di interazione è ottenuto integrando l'espressione (5.121) in un range di energia di $6 - 30.5 \text{ keV}$ compatibilmente alle condizioni dell'esperimento XENON100.

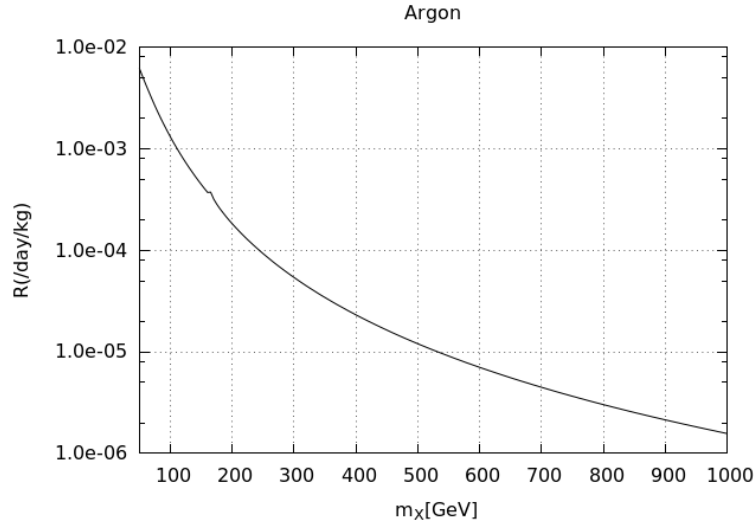


Figura 5.10: In figura è riportato il tasso di interazione per un rivelatore a base di Argon, il numero di eventi per giorno e per chilogrammo di rivelatore è stato ottenuto integrando il tasso di interazione in un range di energia di $36 - 206 \text{ keV}$ compatibilmente alle condizioni dell'esperimento Darkside.

Sfruttando i dati dei due esperimenti considerati vogliamo costruire un intervallo di confidenza per il valore atteso di eventi μ che ponga dei vincoli ai possibili valori che il parametro può assumere. Confrontando il tasso di interazione che abbiamo calcolato con i vincoli posti a μ sarà possibile ottenere informazioni sui valori della massa m_χ della DM nell'ambito del modello che abbiamo utilizzato.

Tra i possibili metodi per ricavare un intervallo per μ scegliamo il metodo di Neyman [39]. Sia data una distribuzione di probabilità $P(x; \theta)$, x è una variabile casuale e rappresenta i dati che otteniamo tramite misura e θ è un parametro della distribuzione. È possibile costruire un grafico in un piano $x\theta$ tramite il quale ricavare gli intervalli di confidenza. Fissato un certo livello di confidenza β , per ogni valore θ_x di θ si cerca un intervallo (x_1, x_2) per cui la probabilità che la variabile x appartenga a quell'intervallo è uguale al livello di confidenza β prefissato

$$P(x_1 < x < x_2) = \beta. \quad (5.124)$$

Costruendo questi intervalli per ogni valore di θ si ottiene una superficie detta “confidence belt” (fig.5.11). Tipicamente i valori di x_1 e x_2 non sono unici e per poter selezionare un determinato intervallo spesso occorre definire dei criteri da usare nella costruzione della superficie. A questo

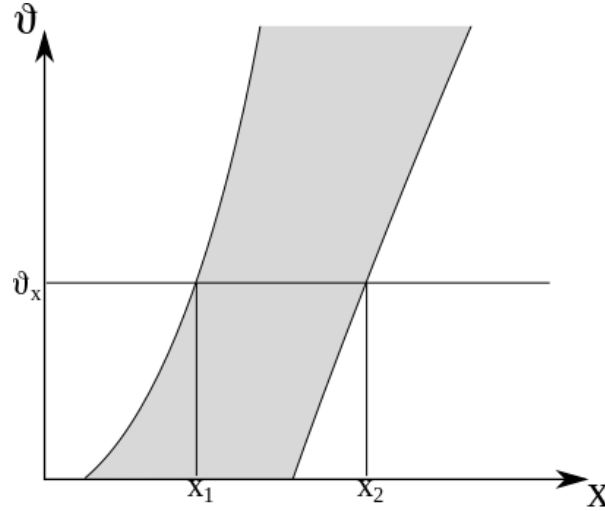


Figura 5.11: Confidence Belt costruita per vari valori di θ . Fissato un certo valore θ_x del parametro θ è possibile trovare un intervallo di valori (x_1, x_2) per cui la probabilità che la variabile casuale x abbia valori in quell'intervallo è proprio uguale al livello di confidenza fissato.

punto è possibile ricavare l'intervallo di confidenza per il parametro θ dalla figura. Consideriamo la figura 5.12, supponiamo che θ_0 sia il valore vero del parametro θ che stiamo cercando. Il valore θ_0 individua sulla confidence belt due valori di x . Se tracciassimo delle linee verticali per ogni valore di x compreso tra x_1 ed x_2 osserveremmo che ognuna di quelle linee (in verde nella figura) definisce un intervallo $(\theta_d(x), \theta_u(x))$ in cui il valore vero θ_0 è compreso.

Se ora misurassimo un certo valore \bar{x} basterà tracciare una linea verticale sul grafico in corrispondenza del valore \bar{x} e leggere verticalmente l'intervallo di valori di θ che ne risulta. Inoltre la probabilità che l'intervallo $(\theta_d(x), \theta_u(x))$ ottenuto contenga il valore vero θ_0 è la stessa probabilità che il valore che abbiamo misurato \bar{x} cada nell'intervallo (x_1, x_2) che, per costruzione, è uguale proprio al livello di confidenza β fissato. Quindi abbiamo ottenuto un intervallo (θ_d, θ_u) che contiene il valore vero θ_0 con probabilità β (fig. 5.13), cioè

$$P(\theta_d < \theta_0 < \theta_u) = \beta. \quad (5.125)$$

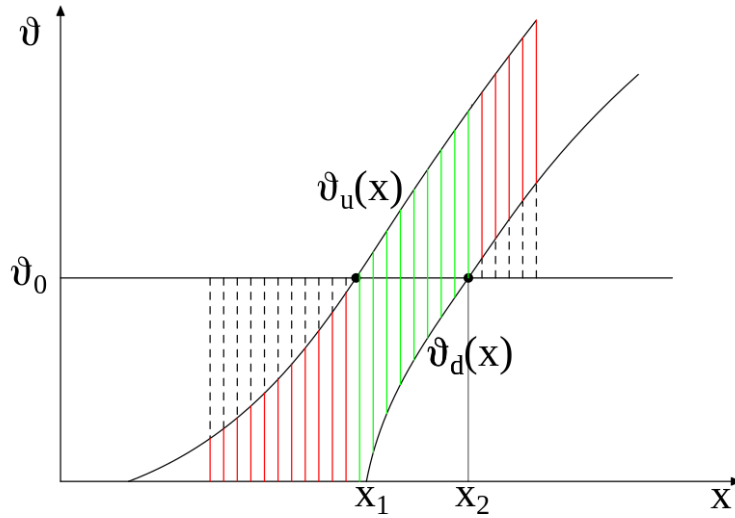


Figura 5.12: Qualunque valore di x che sia compreso nell'intervallo (x_1, x_2) , individuato sulla confidence belt da θ_0 , definisce un intervallo $(\theta_d(x), \theta_u(x))$ che contiene il valore vero θ_0 del parametro (in verde). Il valore θ_0 apparterrà all'intervallo con la stessa probabilità con cui un generico x può appartenere all'intervallo (x_1, x_2) , cioè β .

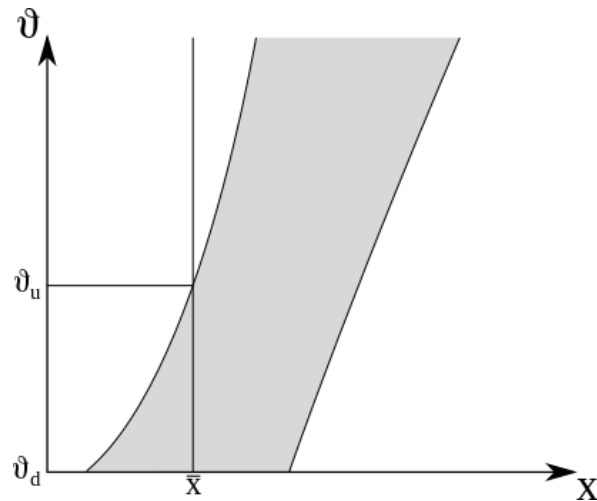


Figura 5.13: Intervallo di confidenza per il parametro θ a partire dalla confidence belt. Se \bar{x} è il risultato della misura occorre intersecare il grafico con una linea verticale in corrispondenza del valore di \bar{x} . Sull'asse delle ordinate è possibile leggere l'intervallo di confidenza in corrispondenza dell'intersezione della linea verticale con la confidence belt. Nel caso in questione il limite inferiore sul parametro θ è zero.

Nel caso da noi considerato la distribuzione $P(n; \mu)$ è una distribuzione discreta, per cui nel costruire la confidence belt adotteremo la condizione

$$\sum_{n=n_d}^{n_u} P(n; \mu) \geq \beta \quad (5.126)$$

cioè troviamo gli intervalli (n_d, n_u) per cui la probabilità è maggiore o uguale al livello di confidenza fissato. In questo modo la superficie ottenuta ha una struttura a gradini (fig. 5.14). Il criterio con cui sono stati scelti gli intervalli (n_d, n_u) è che il valore di μ in corrispondenza del quale l'intervallo è costruito fornisca anche una stima del punto medio dello stesso intervallo. Il livello di confidenza è stato fissato al 90% ($\beta = 0.9$).

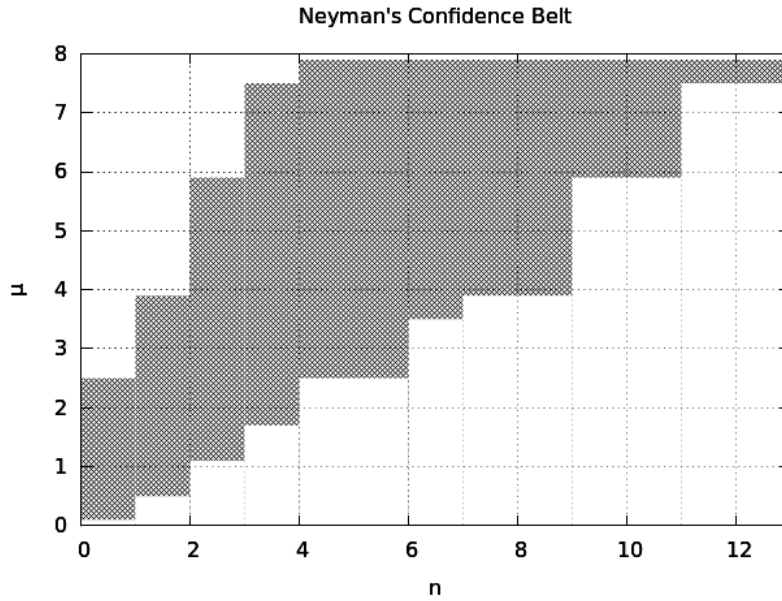


Figura 5.14: Confidence Belt costruita per una distribuzione di Poisson ad un livello di confidenza del 90%. Il criterio per selezionare gli intervalli per i valori di n è che la retta $\mu = n$ dividesse la superficie in due parti di area circa uguale.

Passiamo quindi a ricavare gli intervalli di confidenza desiderati. Consideriamo il caso di Xenon100, poiché vengono osservati due eventi l'intervallo di confidenza per μ è $1 \leq \mu \leq 5.9$, ma poiché è presente un fondo atteso di un evento risulta $0 \leq \mu \leq 4.9$. Combinando questo risultato con i risultati sul tasso di interazione che abbiamo ottenuto ricaviamo, al 90% di confidenza, un limite inferiore alla massa di DM di circa $145 - 150 \text{ GeV}$.

Nel caso di Darkside non viene osservato alcun evento ed il fondo atteso era nullo per cui, sempre al 90% di confidenza, risulta $0 \leq \mu \leq 2.5$ da cui otteniamo un limite inferiore per la massa della materia oscura di circa $115 - 120 \text{ GeV}$.

Occorre precisare che i rivelatori degli esperimenti considerati contengono diversi isotopi dello stesso elemento mentre i tassi di interazione sono stati integrati supponendo che i rivelatori siano completamente costituiti dallo stesso isotopo (rispettivamente ^{136}Xe e ^{40}Ar).

Le considerazioni che possiamo fare a seguito di questi risultati sono:

- il modello potrebbe essere mantenuto: supponendo che il modello descriva correttamente l'interazione tra DM e materia ordinaria possiamo porre un limite inferiore alla massa della materia oscura dell'ordine dei $100 - 150 \text{ GeV}$.

- è possibile ampliare il modello: nella costruzione del modello si è supposto che la DM interagisse solo con i quark. Continuando a supporre che l'interazione avvenga mediante lo scambio di uno scalare è possibile ampliare il modello considerando l'accoppiamento di DM con tutte le particelle del Modello Standard, non solo i quark. Se aggiungessimo i leptoni la sezione d'urto di annichilazione calcolata nella sezione 4.3 aumenterebbe poiché aumentano i possibili canali in cui la dark matter può annichilire. In questo modo la stima dell'accoppiamento risulta inferiore a quella effettuata in questo lavoro e di conseguenza anche la sezione d'urto d'interazione DM-nucleone portandoci a porre vincoli meno stringenti alla massa della materia oscura.
- il modello va rigettato e sostituito con un altro: se ulteriori esperimenti dovessero escludere che la DM interagisca come abbiamo supposto allora occorrerà costruire un differente modello di interazione.

Capitolo 6

Sintesi e Conclusioni

Elenchiamo in questo capitolo le conclusioni cui siamo giunti in questo lavoro di tesi.

Per poter descrivere l'interazione tra materia oscura e materia ordinaria abbiamo sviluppato un apposito modello. Nell'ambito di tale modello si è supposto che la materia oscura sia costituita da una particella massiva (massa maggiore di circa 100 GeV), fermione di Dirac e singoletto del gruppo $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$ del Modello Standard. In particolare si è supposto che la DM interagisse solo con i quark mediante lo scambio di una particella scalare. Sfruttando il formalismo delle lagrangiane effettive è stato possibile ottenere una stima analitica della densità fossile di materia oscura espressa in funzione dei parametri del modello. Confrontando la stima della densità fossile ottenuta dal modello con quella ottenuta dai dati di CMB è stato possibile ottenere informazioni sull'intensità dell'accoppiamento, che indichiamo con g_χ/Λ , tra materia oscura e quark del Modello Standard. In figura 6.1 riportiamo l'andamento di tale accoppiamento al variare della massa m_χ della materia oscura.

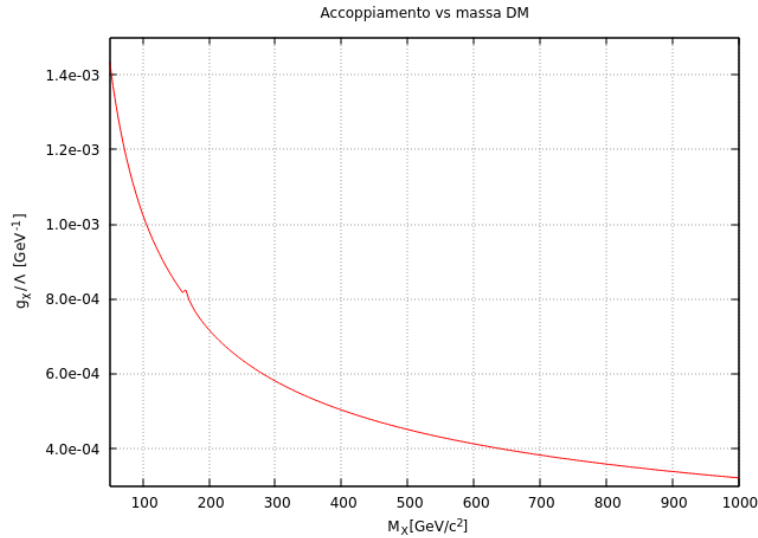


Figura 6.1: Andamento dell'accoppiamento DM-materia g_χ/Λ ordinaria per diversi valori di massa m_χ .

Per poter valutare il tasso di interazione tra DM nucleoni, necessario ai fini della rivelazione diretta, occorre cambiare i gradi di libertà che consideriamo, dai quark ai nucleoni. Per fare questo abbiamo utilizzato la tecnica delle lagrangiane chirali nell'ambito della simmetria $SU(3)$.

In questo modo è stato possibile calcolare elementi di matrice tra stati di nucleone di correnti assiali e vettoriali che compaiono nell'adattare il modello allo studio dell'interazione tra DM e nucleoni. Quindi è stato possibile calcolare una sezione d'urto DM-nucleone, che indichiamo con $\sigma_{\chi n}$, e che riportiamo in figura 6.2.

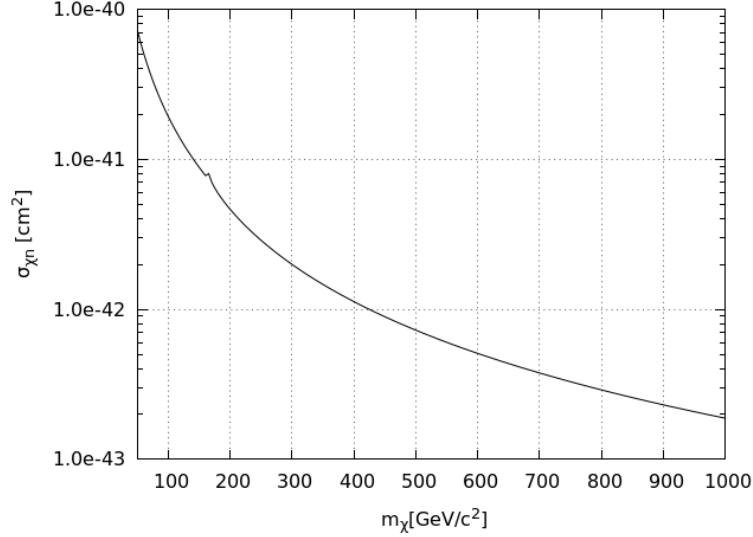


Figura 6.2: Andamento della sezione d'urto DM-nucleone ($\sigma_{\chi n}$) per diversi valori di massa m_χ della materia oscura.

È importante osservare che la sezione d'urto ricavata è vicina all'ordine di grandezza della sezione d'urto sperimentalmente attesa per questo tipo di eventi (10^{-42} cm^2). Questo risultato non è affatto banale poiché per giungervi sono stati utilizzati ingredienti provenienti da branche apparentemente separate della fisica. Non potevamo infatti aspettarci a priori che il legame tra la sezione d'urto di annichilazione della DM in materia ordinaria e la relic density fornisse informazioni utilizzabili nell'ambito dell'interazione con i nucleoni. Analogamente non potevamo aspettarci a priori che collegare considerazioni sulla termodinamica dell'Universo e lo studio della CMB con strumenti tipici della fisica nucleare (le lagrangiane chirali) avrebbe prodotto risultati fisicamente significativi.

Un'altra considerazione interessante riguarda il tipo di accoppiamento tra DM e materia ordinaria. Nonostante il modello presupponesse un accoppiamento di tipo scalare tra DM e quark, quando siamo passati all'interazione con i nucleoni passando per una scomposizione di Fierz e utilizzando le lagrangiane chirali abbiamo visto che l'interazione non era più di tipo scalare ma coinvolgeva termini vettoriali ed assiali. Questo elemento è stato fondamentale per i risultati ottenuti; se infatti l'interazione con i nucleoni fosse stata di tipo scalare, caso comunque analizzato durante la stesura di questo lavoro, la sezione d'urto ottenuta sarebbe stata più grande di uno o persino due ordini di grandezza. Questo avrebbe portato il modello di interazione DM-materia ordinaria ad essere meno verosimile.

Quindi la sezione d'urto ricavata è stata sfruttata per poter ottenere il numero di eventi che un esperimento reale potrebbe rivelare. In questo modo è stato possibile prevedere il tasso di interazione che il flusso di materia oscura che investe la Terra produce su un rivelatore costituito da un certo elemento chimico. Le previsioni del nostro modello sono state poi confrontate con gli esperimenti Xenon100 e Darkside, i tassi di interazione previsti dal nostro modello per rivelatori di argon e di xenon sono riportati nella figura 6.3.

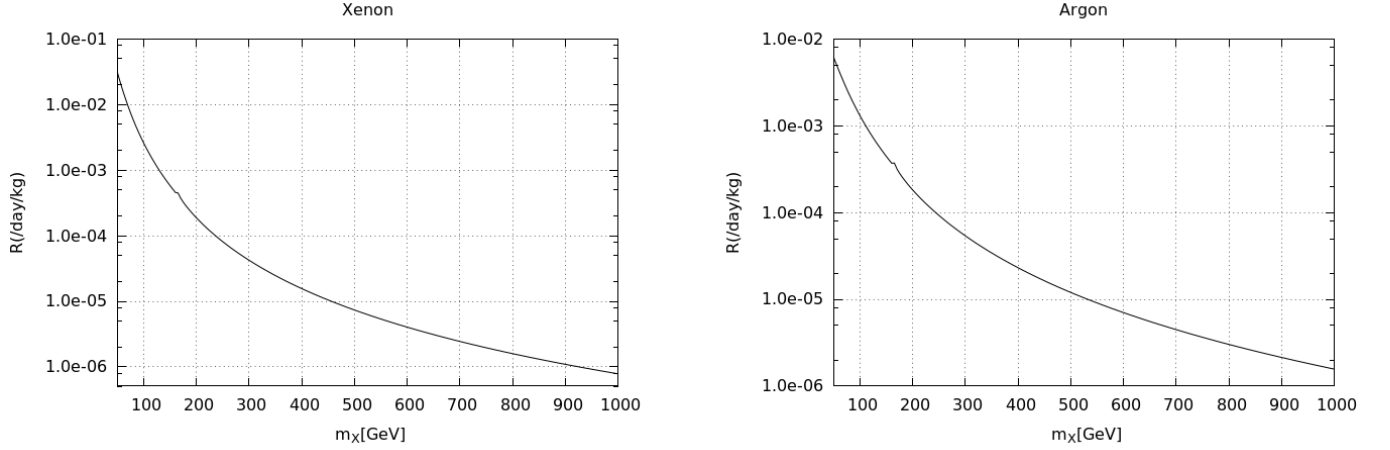


Figura 6.3: In figura è mostrato a sinistra il tasso di interazione R previsto per ^{136}Xe e a destra quello previsto per ^{40}Ar

Il confronto con gli esperimenti ha permesso di ottenere un limite inferiore alla massa della materia oscura dell'ordine dei $100 - 150 \text{ GeV}$ (v. sezione 5.8.2).

Concludiamo il capitolo con alcune considerazioni riguardo al modello utilizzato ed eventuali sviluppi che possono essere effettuati:

- la sezione d'urto di annichilazione della materia oscura in quark del Modello Standard è stata calcolata solo al *tree level*. Può essere interessante studiare quali siano i contributi forniti dalle correzioni radiative al processo.
- Il modello suppone che la materia oscura interagisca solo con i quark, è possibile generalizzare il modello inserendo anche i leptoni. In questo modo si otterrebbe ad un valore più basso dell'accoppiamento tra materia oscura e materia ordinaria e quindi un valore più basso della sezione d'urto DM-nucleone, quindi un limite meno stringente al valore della massa della materia oscura.

Ringraziamenti

La stesura di questa tesi non è stata un lavoro semplice, da solo non sarei potuto giungere a questo risultato per cui ritengo doveroso fare alcuni ringraziamenti.

Innanzitutto voglio ringraziare i professori Gianpaolo Co, Paolo Ciafaloni e Luca Girlanda per il sostegno che mi hanno fornito. In particolare ringrazio il professor Co per avermi fornito un programma di calcolo numerico tramite il quale ricavare i risultati che ho ottenuto e per gli utili consigli che mi ha fornito durante tutta la stesura del documento. Il professor Ciafaloni per avermi proposto questo lavoro di tesi e per l'accompagnamento che mi ha fornito durante tutta la sua stesura oltre che per avermi sempre spronato ad ottenere con le mie forze i risultati che cercavo, un'esperienza a volte dura, devo ammetterlo, ma che si è rivelata molto educativa. Il professor Girlanda per l'aiuto e i consigli che mi ha fornito nella stesura di questo lavoro, in particolare per l'utilizzo delle lagrangiane chirali, uno strumento che non possedevo ma che si è rivelato indispensabile per questo lavoro.

Sono molte le persone persone che vorrei ringraziare ma quasi sicuramente rischierei di dimenticarmi di qualcuno nell'elencarle tutte per cui non farò i loro nomi.

Ringrazio quindi la mia famiglia che mi ha sempre sostenuto in ciò che facevo. Ringrazio i miei amici, sia i compagni di università per le belle parole, la compagnia ed il confronto intellettuale che mi hanno fornito che i compagni di "casa", quelli con cui ho vissuto tante esperienze e che, tra le altre cose, provavano a farmi staccare un po' dallo studio e farmi prendere aria, ne avevo proprio bisogno! Ringrazio ancora i miei animatori, per la guida che mi danno, e i ragazzi dell'oratorio che spesso mi permettono di mettermi in discussione e crescere.

Le persone che ho incontrato nel mio percorso fin qui sono davvero tante se state leggendo queste righe probabilmente fate parte di loro e vi ringrazio.

Appendice A

Acronimi e simboli

- CMB: Cosmic Microwave Background
- DM: Dark Matter
- FRW: Friedman-Robertson-Walker
- MACHO: Massive Astrophysical Compact Halo Objects
- MOND: MOdified Newtonian Dynamics
- MS: Modello Standard
- QCD: Quantum Chromodynamic
- WIMP: Weakly Interacting Massive Particle
- Λ CDM: Λ Cold Dark Matter
- T : temperatura in Kelvin
- $a(t)$: fattore di scala dell'Universo
- g_* : gradi di libertà relativistici
- g_{s*} : gradi di libertà relativistici per l'entropia
- g_χ : costante di accoppiamento DM-materia standard
- g_χ/Λ : accoppiamento DM-materia standard nella teoria effettiva
- H_0 : costante di Hubble
- $h = H_0/100$: parametro di Hubble ridotto
- $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$: tasso di espansione dell'Universo
- L_\odot : luminosità del Sole
- M_\odot : massa del Sole
- $M_P = \sqrt{\hbar c/G_N}$: massa di Planck

- m_χ : massa della DM
- n : densità numerica di particelle
- Λ : scala di rottura di una lagrangiana effettiva - massa dello scalare scambiato nel modello di interazione DM materia ordinaria
- ζ : Zeta di Riemann
- ρ : densità di energia
- $\rho_C = 3H_0^2/8\pi G_N$: densità critica dell'Universo
- χ : indica le particelle che formano la DM
- Ω : densità di una certa specie di particella nell'universo
- Ω_{H_2} : densità di idrogeno molecolare nell'universo

Appendice B

Matrici di Dirac

Le matrici di Dirac γ_μ , con $\mu = 0, 1, 2, 3$ sono

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

dove $\mathbb{1}_2$ indica la matrice identità 2×2 e le σ^i rappresentano le matrici di Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Tra le matrici di Dirac valgono le relazioni di anticommutazione

$$\{\gamma_\mu, \gamma^5\} = 0; \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{B.3})$$

Relazioni notevoli riguardanti le tracce:

$$\begin{aligned} Tr(\# \text{ dispari di } \gamma) &= 0 \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ Tr(\gamma^5) &= 0 \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Contrazione del simbolo $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu) \quad (\text{B.5})$$

Appendice C

Red shift cosmologico

Sia data la metrica FRW

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (\text{C.1})$$

Consideriamo un'onda elettromagnetica ($ds^2 = 0$) emessa ad un tempo t ed osservata ad un tempo t_0 ad una distanza r dalla sorgente. Consideriamo fisse le variabili angolari, risulta

$$dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Integriamo l'equazione

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (\text{C.3})$$

e consideriamo un fronte d'onda emesso ad un tempo $t + \delta t$ ed osservato a $t_0 + \delta t_0$, risulta

$$\int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (\text{C.4})$$

Sottraiamo membro a membro le equazioni (C.4) e (C.3)

$$\int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = 0 \quad (\text{C.5})$$

inoltre

$$\int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t+\delta t} \frac{dt'}{a(t')} \quad (\text{C.6})$$

quindi

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t+\delta t} \frac{dt'}{a(t')} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Poiché il fattore di scala varia lentamente possiamo assumere che sia costante negli intervalli δt e δt_0 per cui otteniamo

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t}{a(t)}. \quad (\text{C.8})$$

Lo spostamento verso il rosso è definito in termini della lunghezza d'onda emessa λ e di quella osservata λ_0

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \quad (\text{C.9})$$

ma essendo $c\delta t = \lambda$ e $c\delta t_0 = \lambda_0$ possiamo ottenere l'espressione del redshift z in termini del fattore di scala dell'Universo

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \quad (\text{C.10})$$

Appendice D

Equazione di evoluzione per la densità di una particella

L'equazione di evoluzione (3.7) per la densità n di un certo gas si ottiene da un'equazione più generale che descrive l'evoluzione della funzione di distribuzione del gas nello spazio delle fasi. Se si suppone che le particelle di questo gas possano collidere tra di loro allora la variazione nel tempo della funzione di distribuzione del gas sarà dovuta agli urti che avvengono tra le particelle. L'equazione che descrive questa situazione è detta "equazione di Boltzmann"

$$\mathbf{L}[f] = \mathbf{C}[f] \quad (\text{D.1})$$

f è la funzione di distribuzione del gas considerato, essa fornisce la densità di particelle nello spazio delle fasi. \mathbf{L} è detto operatore di Liouville ed è legato alla derivata temporale della f ; se di norma $f = f(\vec{x}, \vec{v})$ l'operatore di Liouville ha forma

$$L[f] = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right) f \quad (\text{D.2})$$

osserviamo che coincide con l'operatore derivata totale nel tempo. Se si utilizza la metrica FRW la densità dello spazio delle fasi è omogenea e isotropa per cui si può scrivere $f = f(|\vec{p}|, t)$ o analogamente $f = f(E, t)$. Inoltre utilizzando la metrica FRW l'operatore di Liouville ha forma

$$\mathbf{L}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (\text{D.3})$$

dove $E^2 = p^2 + m^2$ con m massa delle particelle che compongono il gas considerato, a è il fattore di scala dell'Universo (la dipendenza dal tempo è omessa) e il punto indica la derivata temporale. \mathbf{C} è detto operatore di collisione e descrive l'interazione tra le particelle della specie considerata. Chiamiamo χ la particella di cui è composto il gas che stiamo studiando e supponiamo sia stabile; le uniche reazioni che varieranno il numero di tali particelle saranno le reazioni di annichilazione (ed annichilazione inversa) in un generico canale X

$$\chi \bar{\chi} \longleftrightarrow X \bar{X} \quad (\text{D.4})$$

l'operatore di collisione in questo caso è definito in modo che

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\mathbf{C}[f_\chi]}{E_\chi} = & - \int d\Pi_\chi d\Pi_{\bar{\chi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \\ & [|\mathcal{M}|_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}}^2 f_\chi f_{\bar{\chi}} (1 \pm f_X)(1 \pm f_{\bar{X}}) - |\mathcal{M}|_{X\bar{X} \rightarrow \chi\bar{\chi}}^2 f_X f_{\bar{X}} (1 \pm f_\chi)(1 \pm f_{\bar{\chi}})] \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

dove $|\mathcal{M}_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}}^2$ e $|\mathcal{M}_{X\bar{X} \rightarrow \chi\bar{\chi}}^2$ sono i quadrati degli elementi di matrice per i processi $\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}$ e $X\bar{X} \rightarrow \chi\bar{\chi}$. Le varie f rappresentano le funzioni di distribuzione delle particelle considerate, omettiamo gli argomenti delle f per non appesantire la notazione. I termini $(1 \pm f)$ tengono conto della condensazione bosonica (+) o della degenerazione fermionica (-). I vari $d\Pi_\alpha$ sono gli spazi delle fasi delle varie particelle α che possono comparire

$$d\Pi_\alpha = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\alpha}{2E_\alpha}. \quad (\text{D.6})$$

Concentriamoci ora sul ricavare una equazione d'evoluzione per la densità $n(t)$ di particelle χ , a partire dalla funzione di distribuzione è possibile ottenere

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p f(E, t) \quad (\text{D.7})$$

con g numero di gradi di libertà della particella (per particelle a spin s è $g = 2s + 1$).

Riscriviamo l'equazione (D.1) esplicitando \mathbf{L}

$$\frac{\partial f}{\partial t} - H \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathbf{C}[f]}{E} \quad (\text{D.8})$$

dove abbiamo posto $H = \dot{a}/a$. Integrando ambo i membri in $d^3 p$ e moltiplicando per $\frac{g}{(2\pi)^3}$, otteniamo

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} - H \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{C}[f]}{E} \quad (\text{D.9})$$

concentriamoci sul secondo termine del primo membro, osserviamo che

$$\int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3 p = \int d^3 p \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial p} d^3 p \quad (\text{D.10})$$

quindi passiamo in coordinate sferiche

$$\int p \frac{\partial f}{\partial p} d^3 p = \int p^3 \frac{\partial f}{\partial p} dp d\Omega \quad (\text{D.11})$$

ed integriamo per parti. Otteniamo

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\mathbf{C}[f(E, t)]}{E} \quad (\text{D.12})$$

Possiamo semplificare la forma di \mathbf{C} adottando due ragionevoli approssimazioni. Assumendo che il processo sia simmetrico nel tempo risulta

$$|\mathcal{M}_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}}^2 = |\mathcal{M}_{X\bar{X} \rightarrow \chi\bar{\chi}}^2 = |\mathcal{M}|^2. \quad (\text{D.13})$$

Supponendo inoltre di trovarci a temperature molto elevate rispetto all'energia delle singole particelle è possibile trascurare i termini di condensazione bosonica e degenerazione fermionica per cui $1 \pm f \approx 1$. Sotto queste ipotesi la (D.5) diventa

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{\mathbf{C}[f_\chi]}{E_\chi} = - \int d\Pi (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 [f_\chi f_{\bar{\chi}} - f_X f_{\bar{X}}] \quad (\text{D.14})$$

in $d\Pi = d\Pi_\chi d\Pi_{\bar{\chi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}}$ abbiamo incluso tutti i termini relativi agli spazi delle fasi.

Un altro dato di cui tenere conto è che le particelle X e \bar{X} sono spesso soggette ad interazioni più intense rispetto a quelle con χ e $\bar{\chi}$ quindi è possibile ipotizzare che esse termalizzino prima e quindi siano già in equilibrio. Se queste particelle sono in equilibrio allora le loro distribuzioni f_X ed $f_{\bar{X}}$ saranno del tipo di Fermi o di Bose, ma poiché ci siamo posti ad energia molto elevate rispetto alla temperatura di equilibrio del sistema tali particelle potranno essere descritte mediante la statistica di Maxwell-Boltzmann per cui

$$\begin{aligned} f_X &= e^{-\frac{E_X - \mu_X}{kT_X}} \\ f_{\bar{X}} &= e^{-\frac{E_{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}}}{kT_{\bar{X}}}}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

All'equilibrio termico le temperature sono uguali. Per semplicità supponiamo il potenziale chimico μ nullo. La delta di Dirac sulle energie nell'espressione di $\mathbf{C}[f]$ impone $E_X + E_{\bar{X}} = E_X + E_{\bar{X}}$ per cui

$$f_X f_{\bar{X}} = e^{-\frac{E_X}{kT}} e^{-\frac{E_{\bar{X}}}{kT}} = e^{-\frac{E_X}{kT}} e^{-\frac{E_{\bar{X}}}{kT}} = f_X^{eq} f_{\bar{X}}^{eq} \quad (\text{D.16})$$

notiamo che sono comparse le distribuzioni di χ e $\bar{\chi}$ all'equilibrio termico, per cui segue che

$$f_X f_{\bar{X}} - f_X f_{\bar{X}} = f_X f_{\bar{X}} - f_X^{eq} f_{\bar{X}}^{eq}. \quad (\text{D.17})$$

Infine osserviamo che gli integrali che coinvolgono l'elemento di matrice e le funzioni di distribuzione restituiscono [12]

$$\int d\Pi (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\chi + p_{\bar{\chi}} - p_X - p_{\bar{X}}) |\mathcal{M}|^2 (f_\chi^{eq} f_{\bar{\chi}}^{eq}) = (n_\chi^{eq})^2 < \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}} v > \quad (\text{D.18})$$

dove $(n_\chi^{eq})^2$ è la densità all'equilibrio di χ , v è la velocità relativa delle particelle che collidono, $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}}$ è la sezione d'urto del processo considerato e $< \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}} v >$ indica la media termica del prodotto $\sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}}$. L'integrale (D.14) risulta quindi

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\mathbf{C}[f_\chi]}{E_\chi} = - < \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}} v > (n_\chi^2 - (n_\chi^{eq})^2) \quad (\text{D.19})$$

sostituendo quest'equazione nell'espressione (D.12) otteniamo

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = - < \sigma_{\chi\bar{\chi} \rightarrow X\bar{X}} v > [n^2(t) - n_{eq}^2(t)] \quad (\text{D.20})$$

(i pedici χ sono stati omessi) e sommando su tutti i possibili canali di produzione compare la sezione d'urto totale σ , per cui

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3H(t)n(t) = - < \sigma v > [n^2(t) - n_{eq}^2(t)] \quad (\text{D.21})$$

che è l'equazione (3.7).

Appendice E

Ordine successivo della lagrangiana effettiva

Calcoliamo ora il termine successivo della lagrangiana effettiva (4.23) per mostrare come esso dia un contributo trascurabile rispetto al termine cui ci siamo fermati. Otteniamo questo termine scrivendo operatori di dimensione totale 8 ed una quarta potenza di Λ al denominatore, lo otterremo introducendo delle derivate

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)} = \frac{g_\chi^2}{\Lambda^4} [D_\mu (\bar{\chi} f_L) D^\mu (\bar{f}_L \chi)] \quad (\text{E.1})$$

dove $D_\mu = \partial_\mu - ig\vec{I} \cdot \vec{W}_\mu - i\frac{g'}{2}YB_\mu$ è la derivata covariante usata nella (4.1). Segue che

$$\mathcal{L}_{eff}^{(2)} = \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} [\partial_\mu \bar{\chi} f_L D^\mu \bar{f}_L \chi + \partial_\mu \bar{\chi} f_L \bar{f}_L \partial^\mu \chi + \bar{\chi} D^\mu f_L D_\mu \bar{f}_L \chi + \bar{\chi} D^\mu \bar{f}_L f_L \partial_\mu \chi] \quad (\text{E.2})$$

dove $D_\mu \chi = \partial_\mu \chi$ poiché nel nostro modello la materia oscura ha isospin e ipercarica nulla. Ogni derivata introduce un fattore di momento, per cui questi termini producono un contributo $\mathcal{M}^{(2)}$ all'elemento di matrice di ordine più basso

$$\mathcal{M}^{(1)} = i \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \bar{u}_f(p_f) P_R u_\chi(p_i) \bar{v}_\chi(q_i) P_L v_f(q_f) \quad (\text{E.3})$$

relativo al processo in figura E.1

$$\mathcal{M}^{(2)} = i \frac{g_\chi^2}{\Lambda^4} (q_i p_f - q_i p_i - q_f p_f + q_f p_i) \bar{u}_f(p_f) P_R u_\chi(p_i) \bar{v}_\chi(q_i) P_L v_f(q_f) \quad (\text{E.4})$$

l'elemento di matrice totale sarà allora

$$\mathcal{M} = i \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \left(1 + \frac{q_i p_f - q_i p_i - q_f p_f + q_f p_i}{\Lambda^2} \right) \bar{u}_f(p_f) P_R u_\chi(p_i) \bar{v}_\chi(q_i) P_L v_f(q_f) \quad (\text{E.5})$$

ed il suo modulo quadro

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \left(1 + \frac{q_i p_f - q_i p_i - q_f p_f + q_f p_i}{\Lambda^2} \right)^2 |\overline{\mathcal{M}}_{(1)}|^2 \quad (\text{E.6})$$

dove $|\overline{\mathcal{M}}_{(1)}|^2$ è il modulo quadro dell'elemento di matrice mediato sugli spin calcolato con la lagrangiana effettiva di ordine più basso.

Fissato il sistema di riferimento (figura E.2) definiamo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ come l'asse lungo cui avviene

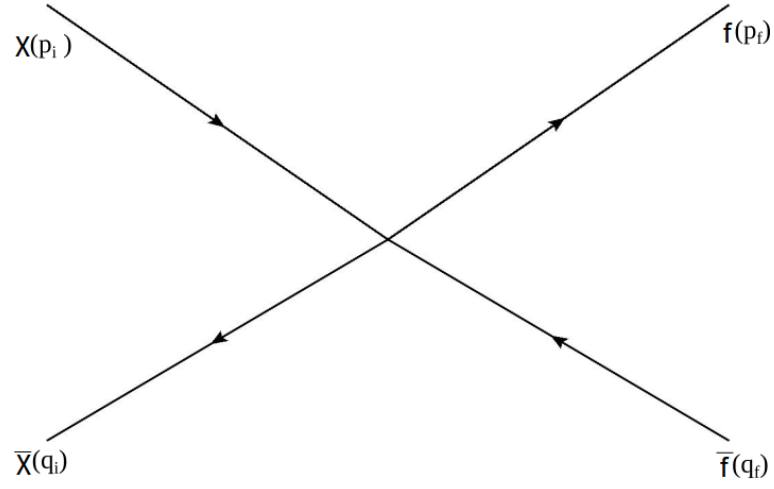


Figura E.1: annichilazione di dark matter in fermione e antifermione

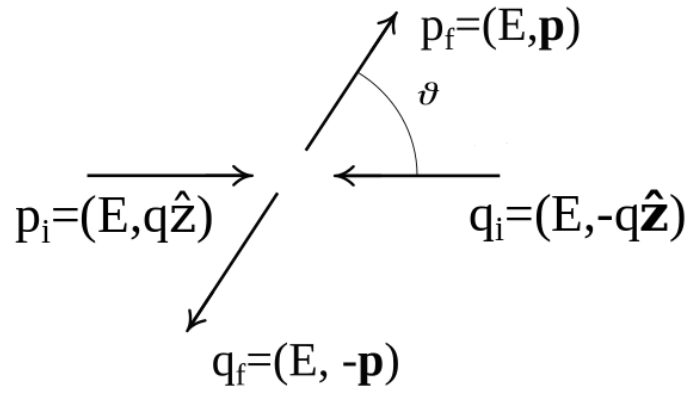


Figura E.2: sistema di riferimento del centro di massa

l'annichilazione tra le particelle di DM. Chiamiamo \mathbf{q} il momento delle particelle di DM e \mathbf{p} quello dei fermioni prodotti durante l'annichilazione, θ è l'angolo di diffusione. Risulta

$$\begin{aligned} q_i \cdot p_f &= (E^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta) = q_f p_i \\ q_i \cdot p_i &= E^2 + \mathbf{q}^2 \\ q_f \cdot p_f &= E^2 + \mathbf{p}^2 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

il termine nella parentesi diventa

$$\begin{aligned} 1 + \frac{q_i p_f - q_i p_i - q_f p_f + q_f p_i}{\Lambda^2} &= 1 + \frac{2[2(E^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta) - 4E^2 + m_\chi^2 + m_f^2]}{\Lambda^2} \\ &+ \frac{[2(E^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta) - 4E^2 + m_\chi^2 + m_f^2]^2}{\Lambda^4} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

ricordando che

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m_f^2}, \quad |\mathbf{q}| = \sqrt{E^2 - m_\chi^2}, \quad E^2 = m_\chi^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2 \quad (\text{E.9})$$

con v velocità della DM nel sistema del centro di massa, risulta

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2[2(E^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta) - 4E^2 + m_\chi^2 + m_f^2]}{\Lambda^2} &+ \frac{[2(E^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta) - 4E^2 + m_\chi^2 + m_f^2]^2}{\Lambda^4} \\ &= 1 + \frac{1}{\Lambda^2} (-\gamma^2 m_\chi^2 v^2 + 4\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2} \gamma m_\chi v \cos \theta - 2m_\chi^2 + 2m_f^2) \\ &+ \frac{1}{\Lambda^4} (-\gamma^2 m_\chi^2 v^2 + 4\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2} \gamma m_\chi v \cos \theta - 2m_\chi^2 + 2m_f^2)^2 \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

nel calcolo effettuato nel capitolo 4 la sezione d'urto è stata sviluppata nella velocità del centro di massa v per cui svilupperemo anche questi termini attorno $v = 0$ per osservare i contributi che danno alla sezione d'urto. Al primo ordine in v risulta

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \left(1 + \frac{1}{\Lambda^2} (-2m_\chi^2 + 2m_f^2) + \frac{1}{\Lambda^4} (-2m_\chi^2 + 2m_f^2)^2 \right) |\overline{\mathcal{M}}_{(1)}|_{v=0}^2 \quad (\text{E.11})$$

la massa dei fermioni è trascurabile rispetto a m_χ e Λ è la scala di rottura della lagrangiana effettiva, quindi risulta $m_\chi/\Lambda \ll 1$, per cui i termini correttivi sono trascurabili. Se infatti fosse già $m_\chi/\Lambda \approx 10^{-1}$ il contributo della correzione sarebbe appena dell'ordine di 10^{-2} . Il contributo è già molto piccolo nel termine in $v = 0$, i termini successivi dello sviluppo in v saranno più piccoli, per cui possiamo affermare che la lagrangiana effettiva all'ordine successivo fornisce un contributo trascurabile alla sezione d'urto e che quindi possiamo limitarci ad usare quella al primo ordine.

Appendice F

Sviluppo in v della sezione d'urto d'annichilazione

Dalla (4.33) abbiamo l'espressione per la sezione d'urto di annichilazione della DM

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g_\chi^4 \sqrt{E^2 - m_f^2}}{256\pi^2 E^3 v \Lambda^4} \left(E^2 - \sqrt{E^2 - m_f^2} \sqrt{E^2 - m_\chi^2} \cos \theta \right)^2, \quad (\text{F.1})$$

E è l'energia della DM e dei fermioni che nel sistema del centro di massa è la stessa. Al fine di ottenere uno sviluppo in v di σv moltiplichiamo per v e sostituiamo $E = m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2$ e $\sqrt{s} = 2E$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4 \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}}{256\Lambda^4 \pi^2 (m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2}} \left(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \gamma m_\chi v \cos \theta \right)^2. \quad (\text{F.2})$$

Sviluppiamo in $v = 0$ (e $\gamma = 1$), l'ordine zero è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2} \frac{\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2}}{m_\chi^3 \Lambda^4} m_\chi^4 = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2 \Lambda^4} \sqrt{1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2}} m_\chi^2 \quad (\text{F.3})$$

Per avere l'ordine uno poniamo

$$\mathbf{A} = m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \gamma m_\chi v \cos \theta \quad (\text{F.4})$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}} (m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2} - 3 \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2} \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} (\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3) \right), \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \partial_v \mathbf{A} = & \left(2m_\chi^2 \gamma^2 v + 2m_\chi^2 \gamma^4 v^3 - \left(\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2 - m_f^2} (\gamma m_\chi + \gamma^3 m_\chi v^2) \cos \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma m_\chi v \cos \theta}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2 - m_f^2}} (m_\chi^2 \gamma^2 v + m_\chi^2 \gamma^4 v^3) \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

la derivata prima sarà

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{d\sigma}{d\Omega} v = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2\Lambda^4} \left[\frac{1}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^3} (\mathbf{A})^2 (\mathbf{B}) + 2 \frac{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2}} (\mathbf{A}) \partial_v (\mathbf{A}) \right] \quad (\text{F.7})$$

in $v = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}|_{v=0} &= 0 & \mathbf{A}|_{v=0} &= m_\chi^2 \\ \partial_v \mathbf{A}|_{v=0} &= -\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2} m_\chi \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

quindi

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \frac{d\sigma}{d\Omega} v \right|_{v=0} = -\frac{g_\chi^2}{256\pi^2\Lambda^4} 2(m_\chi^2 - m_f^2) \cos \theta. \quad (\text{F.9})$$

Per avere l'ordine due scriviamo la derivata seconda come

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} v &= \frac{g_\chi^4}{256\pi^2\Lambda^4} \left[-3 \frac{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^2}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^6} (2\gamma^2 m_\chi^2 v + 2\gamma^4 m_\chi^2 v^3) (\mathbf{A}^2) (\mathbf{B}) \right. \\ &\quad + \frac{1}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^3} [2(\mathbf{A}) \partial_v (\mathbf{A}) (\mathbf{B}) + \mathbf{A}^2 \partial_v (\mathbf{B})] \\ &\quad + 2 \frac{1}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^3} (\mathbf{B}) (\mathbf{A}) \partial_v (\mathbf{A}) \\ &\quad \left. + 2 \frac{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2}} [(\partial_v \mathbf{A})^2 + (\mathbf{A}) \partial_v^2 (\mathbf{A})] \right] \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

osserviamo che

$$\partial_v \frac{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2}} = \frac{1}{(m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^3} (\mathbf{B}) \quad (\text{F.11})$$

le espressioni esplicite sono

$$\begin{aligned} \partial_v \mathbf{B} &= \left((\gamma^2 m_\chi^2 + 2\gamma^4 v^2 m_\chi^2 + 3\gamma^4 m_\chi^2 v^2 + 4\gamma^6 v^4 m_\chi^2) \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3)^2}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}} \right) \frac{1}{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} (m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2)^{3/2} \\ &\quad + 3 \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2} \left[\frac{(\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3)^2}{\sqrt{m_\chi^2 \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}} \right] \\ &\quad - 3(\gamma^2 m_\chi^2 + 2\gamma^4 v^2 m_\chi^2 + 3\gamma^4 m_\chi^2 v^2 + 4\gamma^6 v^4 m_\chi^2) \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2} \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \\ &\quad - 3(\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3) \left[\frac{\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2}} \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2 m_\chi^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v^3}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}} \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_v^2 \mathbf{A} &= 2(\gamma^2 m_\chi^2 + 2\gamma^4 v^2 m_\chi^2 + 3\gamma^4 m_\chi^2 v^2 + 4\gamma^6 v^4 m_\chi^2) - \frac{m_\chi^2 \gamma^4 v^3 + \gamma^2 m_\chi^2 v}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2 - m_f^2}} \\
&(\gamma m_\chi + \gamma^3 m_\chi v^2) \cos \theta - \sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 m_\chi^2 v^2 - m_f^2} (\gamma^3 v m_\chi + 3\gamma^5 m_\chi v^3 + 2\gamma^2 m_\chi v) \\
&- \left[\partial_v (\gamma m_\chi v \cos \theta) \frac{m_\chi^2 \gamma^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v}{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2} + \gamma m_\chi v \cos \theta \partial_v \left(\frac{m_\chi^2 \gamma^2 v + \gamma^4 m_\chi^2 v}{\sqrt{m_\chi^2 + \gamma^2 v^2 m_\chi^2 - m_f^2}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{F.13}$$

in $v = 0$

$$\begin{aligned}
\partial_v^2 \mathbf{A}|_{v=0} &= 2m_\chi^2 \\
\partial_v \mathbf{B}|_{v=0} &= -\frac{m_\chi^2}{\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2}} (2m_\chi^3 - 3m_f^2 m_\chi)
\end{aligned} \tag{F.14}$$

quindi

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} v \Big|_{v=0} = \frac{g_\chi^4}{256\pi^2 \Lambda^4} \left[\frac{1}{m_\chi^6} \mathbf{A}^2 \partial_v \mathbf{B} + 2 \frac{\sqrt{m_\chi^2 - m_f^2}}{m_\chi^3} [(\partial_v \mathbf{A})^2 + \mathbf{A} \partial_v^2 \mathbf{A}] \right]_{v=0} \tag{F.15}$$

diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} v \Big|_{v=0} = \frac{g_\chi^4 \sqrt{m_\chi^2 - m_f^2}}{256\pi^2 \Lambda^4} \left[4m_\chi - \frac{2m_\chi^3 - 3m_f^2 m_\chi}{m_\chi^2 - m_f^2} + 2 \frac{m_\chi^2 - m_f^2}{m_\chi} \cos^2 \theta \right]. \tag{F.16}$$

Componendo le equazioni (F.3), (F.9), e (F.16) ed integrando nell'angolo solido $d\Omega$ rioterremo la (4.45).

Appendice G

Scomposizione di Fierz

Introduciamo la base delle 16 matrici Γ

$$\begin{aligned}\Gamma^1 &= \mathbb{1} \\ \Gamma^{2-5} &= \gamma^\mu \\ \Gamma^{6-11} &= \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \mu < \nu \\ \Gamma^{12-15} &= i\gamma^\mu\gamma^5 \\ \Gamma^{16} &= \gamma^5\end{aligned}\tag{G.1}$$

tali matrici sono anche dette “bilineari di Dirac”, vale la relazione di normalizzazione

$$Tr(\Gamma_A \Gamma_B) = 4\delta_{AB}.\tag{G.2}$$

Sfruttando questa relazione e la completezza della base possiamo scrivere un prodotto $\Gamma^A \Gamma^B$ come

$$\Gamma_{ab}^A \Gamma_{cd}^B = \sum_C f_{(bc)}^C \Gamma_{ad}^C\tag{G.3}$$

dove abbiamo esplicitato gli indici spinoriali. Moltiplicando a destra per un certo Γ_{da}^X e sfruttando la (G.2) otteniamo f^C

$$f_{(bc)}^C = \frac{1}{4}(\Gamma^B \Gamma^C \Gamma^A)_{cb}.\tag{G.4}$$

È possibile sfruttare questi risultati per scomporre un prodotto del tipo

$$\bar{u}_1 \Gamma^A u_2 \bar{u}_3 \Gamma^B u_4.\tag{G.5}$$

Si esplicitano gli indici spinoriali

$$\bar{u}_{1a} \Gamma_{ab}^A u_{2b} \bar{u}_{3c} \Gamma_{cd}^B u_{4d},\tag{G.6}$$

considerando fissi gli indici c e b nel prodotto (G.6) possiamo scrivere

$$\bar{u}_{1a} \Gamma_{ab}^A u_{2b} \bar{u}_{3c} \Gamma_{cd}^B u_{4d} = \bar{u}_{1a} \Gamma_{ab}^A \Gamma_{cd}^B u_{4d} u_{2b} \bar{u}_{3c} = \sum_C \frac{1}{4} (\bar{u}_1 \Gamma^C u_4)_{ad} (\bar{u}_3 \Gamma^B \Gamma^C \Gamma^A u_2)_{cb}\tag{G.7}$$

inoltre si dimostra che

$$\Gamma^B \Gamma^C \Gamma^A = \sum_D \frac{Tr(\Gamma^D \Gamma^B \Gamma^C \Gamma^A)}{4} \Gamma^D\tag{G.8}$$

per cui

$$\bar{u}_{1a}\Gamma_{ab}^A u_{2b}\bar{u}_{3c}\Gamma_{cd}^B u_{4d} = \sum_{CD} \frac{1}{16} \text{Tr}(\Gamma^C \Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B) (\bar{u}_{1a}\Gamma_{ad}^C u_{4d})(\bar{u}_{3c}\Gamma_{cb}^D u_{2b}) \quad (\text{G.9})$$

una scomposizione di questo genere è detta “scomposizione di Fierz” ed ha forma generale

$$(\bar{u}_1\Gamma^A u_2)(\bar{u}_3\Gamma^B u_4) = \sum_{C,D} C_{CD}^{AB} (\bar{u}_1\Gamma^C u_4)(\bar{u}_3\Gamma^D u_2) \quad (\text{G.10})$$

dove

$$C_{CD}^{AB} = \frac{1}{16} \text{Tr}(\Gamma^C \Gamma^A \Gamma^D \Gamma^B). \quad (\text{G.11})$$

Il nostro obiettivo è scomporre la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi \quad (\text{G.12})$$

f_L indica che f è un fermione di tipo left, inoltre in questo caso $\Gamma^A = \Gamma^B = \mathbb{1}$, per cui sarà

$$\bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi = \frac{1}{16} \sum_{C,D} \text{Tr}(\Gamma_C \Gamma_D) \bar{\chi} \Gamma_C \chi \bar{f}_L \Gamma_D f_L \quad (\text{G.13})$$

sfruttando la relazione di normalizzazione della matrici Γ risulta

$$\bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi = \frac{1}{4} [\bar{\chi} \chi \bar{f}_L f_L + \bar{\chi} \gamma^\mu \chi \bar{f}_L \gamma_\mu f_L + \bar{\chi} \sigma^{\mu\nu} \chi \bar{f}_L \sigma_{\mu\nu} f_L + \bar{\chi} \gamma^5 \gamma^\mu \chi \bar{f}_L \gamma_\mu \gamma^5 f_L + \bar{\chi} \gamma^5 \chi \bar{f}_L \gamma^5 f_L] \quad (\text{G.14})$$

il primo, terzo e quinto termine si annullano per cui

$$\bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi = \frac{1}{4} [\bar{\chi} \gamma^\mu \chi \bar{f}_L \gamma_\mu f_L + \bar{\chi} \gamma^5 \gamma^\mu \chi \bar{f}_L \gamma_\mu \gamma^5 f_L] \quad (\text{G.15})$$

inoltre essendo $P_L = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$ risulta

$$\bar{f}_L \gamma^\mu f_L = -\bar{f}_L \gamma^5 \gamma^\mu f_L \quad (\text{G.16})$$

da cui si ricava che la scomposizione della lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{g_\chi^2}{\Lambda^2} \bar{\chi} f_L \bar{f}_L \chi = \frac{g_\chi^2}{2\Lambda^2} \bar{\chi}_R \gamma^\mu \chi_R \bar{f}_L \gamma_\mu f_L \quad (\text{G.17})$$

Bibliografia

- [1] K.G. Begeman, A.H. Broeils, R.H. Sanders, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **249**, 523 (1991).
- [2] C.S. Kochanek, [astro-ph/0407232]
- [3] G. Hishaw et al., [astro-ph.CO/1212.5226].
- [4] A. Heithausen, *Astroph. J.*, **606**, L13-L16 (2004) [astro-ph/0403514].
- [5] L. Wyrzykowski et al., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **407**, 189-200 (2010) [astro-ph.GA/1004.5247]
- [6] J. Dunkel, *Astroph. J.*, **604**, L37-L40 (2004) [astro-ph/0401591].
- [7] Y. Sofue, V. Rubin, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **39**, 137-174 (2001) [astro-ph/0010594].
- [8] J.A. Tyson, G.P. Kochanski, I.P. Dell’Antonio, *Astrophys. J. Lett.*, **498**, 107 (1998).
- [9] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, C. Jones, D. Zaritsky, *Astrophys. J. Lett.*, **648** L109(2006)[astro-ph/0608407v1].
- [10] E. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **15**, Issue 3, 168-173 (1929).
- [11] A. Kogut, C. Lineweaver, G.F. Smoot, C. L. Bennett, A. Banday, et al., *Astrophys. J.*, **419**, 1 (1993) [astro-ph/9312056].
- [12] E.W. Kolb, M.S. Turner, *The Early Universe*, Addison–Wesley, Redwood City (1990).
- [13] C. H. Lineweaver, *arXiv preprint*, (2008) [astro-ph/0305179]
- [14] G. Bertone et al., *Phys.Rep.*, **405**, 279-390 (2005) [hep-ph/0404175].
- [15] G. Gamow, *Phys. Rev.*, **74**, 505-506 (1948)
- [16] Penzias and Wilson, *Astrophys. J.*, **72** (1967) 315.
- [17] K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys.*, **C 38**, 090001 (2014).
- [18] P.A.R. Ade, et al., (Planck Collab. 2013 XVI), [astro-ph.CO/1303.5076v1].
- [19] L.D. Duffy, K. van Bibber, *New J. Phys.*, **11**, 105008 (2009) [hep-ph/0904.3346].
- [20] S.P. Martin, [hep-ph/9709356].
- [21] K. Greisen, *Phys. Rev. Lett.*, **16**, 748 (1966).

- [22] P. Gondolo, G. Gelmini, *Nucl. Phys.*, **B 360**, 145 (1991).
- [23] J.M. Zheng, Z.H. Yu, J.W. Shao, X.J. Bi, Z. Li, H.H. Zhang, *Nucl. Phys.*, **B 854**, 350-374 (2012) [hep-ph/1012.2022].
- [24] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).
- [25] J.Gasser, M.A. Ivanov, E.Lipartia, M. Mojzis, A.Rusetsky, *Eur. Phys. J.*, **C 26**, 13 (2002) [hep-ph/0206068].
- [26] V. Bernard, N. Kaiser and Ulf-G. Meißner, *Int. J. Mod. Phys.*, **E 4**, 193 (1995).
- [27] N. Fettes, Ulf-G. Meißner, S. Steininger, *Nucl. Phys.* **A 640**, 199-234 (1990) [hep-ph/9803266].
- [28] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory, revised and updated*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, (2009).
- [29] J. Gasser, M.A. Ivanov, E.Lipartia, M. Mojzis, A. Rusetsky *Eur. Phys. J.*, **C 26**, 13-34 (2002) [hep-ph/0206068v2].
- [30] R. Baur, J. Kambor, *Eur.Phys.J.*, **C 7**, 507-524 (1999)[hep-ph/9803311].
- [31] A. Hosaka, T. Myo, H. Nagahiro, K. Nawa, *Hadron and Nuclear Physics 09*, Osaka University, Japan, (2009).
- [32] L. Bergstrom, P. Ullio and J. H. Buckley, *Astropart. Phys.*, **9**, 137 (1998) [astro-ph/9712318].
- [33] Y. Huang, X. Liu, H. Yuan, M. Xiang, H. Zhang, B. Chen, J. Ren, C. Wang, Y. Zhang, Y. Hou, Y. Wang, Z. Cao, [astro-ph.GA/1604.01216].
- [34] F. Halzen, *arXiv preprint*, (1995) [hep-ph/9506304].
- [35] G. Co', V. De Donno, M. Anguiano, A. M. Lallena, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **11**, 010 (2012) [nucl-th/1211.1787].
- [36] E. Aprile et al., *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 181301 (2012) [astro-ph.CO/1207.5988].
- [37] A. Fan, (*the Darkside Collaboration*), [physics.ins-det/1511.00676]
- [38] P. Agnes et al., *Phys. Rev.*, **D 93**, 081101 (2016)[astro-ph.CO/1510.00702]
- [39] J. Neyman, *Philos. Trans. R. Soc. London Sect.*, **A 236** 333 (1937).