



**Università del Salento**

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA

# **Eccitazioni nucleari collettive**

Candidato:  
**Valentina Galeandro**

Relatore:  
**Prof. Giampaolo Co'**



*Ai miei genitori*





# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduzione al problema a molti corpi nucleare</b>	<b>1</b>
1.1 Il modello a shell . . . . .	4
1.2 Modelli di campo medio . . . . .	5
<b>2 Descrizione degli stati eccitati nucleari</b>	<b>9</b>
2.1 Descrizione di uno stato eccitato nel modello a campo medio . . . . .	9
2.2 Un esempio: il primo stato eccitato del $^{208}\text{Pb}$ . . . . .	10
<b>3 Il metodo di Tamm-Dancoff</b>	<b>13</b>
3.1 Equazioni di Tamm-Dancoff . . . . .	14
3.2 Soluzione delle equazioni TDA nel modello schematico . . . . .	15
<b>4 Il metodo RPA</b>	<b>19</b>
4.1 Le equazioni RPA . . . . .	20
4.2 Teoria RPA nel modello schematico . . . . .	21
<b>5 Un caso semplice: sistemi con due stati particella-buco</b>	<b>25</b>
5.1 Configurazione a due stati particella-buco nella teoria TDA . . . . .	25
5.2 Configurazione a due stati particella-buco nella teoria RPA . . . . .	26
5.3 Un esempio: risoluzione numerica del sistema di equazioni RPA nella configurazione a due stati particella-buco . . . . .	27
<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>
<b>A Programma per il calcolo di E nella configurazione a due stati <i>ph</i></b>	<b>37</b>



# Introduzione

Il nucleo è un sistema fermionico a molti corpi interagenti. Ad oggi, la descrizione delle proprietà fisiche del nucleo si basa, eccetto pochi casi, sulla risoluzione dell'equazione di Schrödinger mediante tecniche di risoluzione approssimata.

Grande successo in questo ambito hanno avuto i modelli basati sull'approssimazione di campo medio, nei quali il problema a molti corpi viene ridotto alla replica di  $A$  problemi a un corpo, dove  $A$  è il numero di nucleoni nel sistema, sotto l'ipotesi che il moto di ogni nucleone all'interno del nucleo avvenga in modo indipendente rispetto agli altri. I modelli a particelle indipendenti, quali i modelli di campo medio, risultano, come vedremo, inadeguati nella descrizione di stati eccitati collettivi.

Introdurremo nel capitolo 3 e nel capitolo 4 due teorie utilizzate per descrivere gli stati eccitati: la teoria di *Tamm-Dancoff* o TDA e la *Random Phase Approximation* o RPA. Confronteremo i risultati ottenuti utilizzando le due teorie e ne evidenzieremo i limiti, che discendono direttamente dalle ipotesi che ne sono alla base. Infine, nel capitolo 5, tratteremo le teorie TDA e RPA nell'ambito del modello schematico, applicando questo modello a un problema semplificato.



# Capitolo 1

## Introduzione al problema a molti corpi nucleare

Il nucleo atomico è un sistema fisico a molti corpi. I costituenti del sistema sono gli  $Z$  protoni e gli  $N$  neutroni che lo formano, che sono soggetti alla loro reciproca interazione. Nella tradizionale descrizione del sistema nucleare si lavora nell'ipotesi che i nucleoni siano privi di struttura interna. Descriveremo le proprietà di questo sistema nell'ambito della meccanica quantistica non relativistica.

Considerando solo l'interazione a due corpi, l'hamiltoniana del sistema in considerazione può essere scritta come

$$\mathcal{H} = \left( \sum_{i=1}^A T(\mathbf{r}_i) \right) + \left( \sum_{i < j}^A V(i, j) \right) \quad (1.1)$$

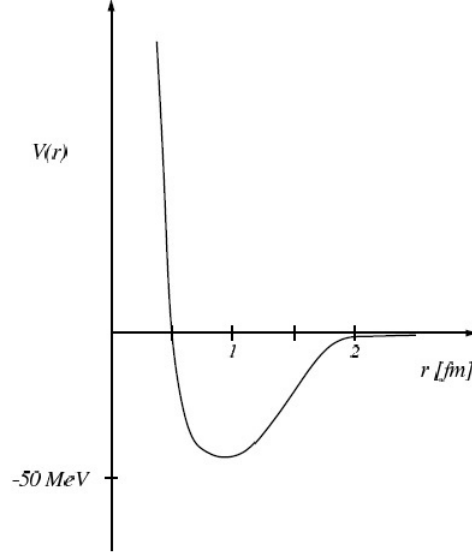
dove  $V(i, j)$  è l'interazione tra l' $i$ -esimo e il  $j$ -esimo nucleone e  $A$  è il numero di massa del nucleo (i vettori saranno sempre indicati in tutto il testo con il grassetto). La descrizione delle proprietà fisiche del nucleo è basata sulla risoluzione della seguente equazione di Schrödinger

$$\mathcal{H}\Psi(1, 2, \dots, A) = E\Psi(1, 2, \dots, A) \quad (1.2)$$

dove  $\Psi$  è la funzione d'onda complessiva degli  $A$  nucleoni, ognuno descritto da tre coordinate spaziali, una di spin e una di isospin.

Grazie allo studio di processi di diffusione nucleone-nucleone e all'analisi delle sezioni d'urto di questi processi, si è potuti arrivare ad una parametrizzazione del potenziale microscopico di interazione nucleone-nucleone, il cui andamento nel termine scalare è schematizzato nella figura 1.1. L'interazione che sussiste tra due nucleoni è a corto raggio ed è di tipo attrattivo tra 0.5 e 2 fm, è nulla per distanze superiori ai 2 fm e fortemente repulsiva al di sotto dei 0.5 fm, distanza che corrisponde a quello che è comunemente chiamato nocciolo duro del potenziale, la parte meno controllata dell'interazione. Questo potenziale presenta un minimo di circa 50 MeV a distanze corrispondenti all'incirca a 1 fm.

Anche ipotizzando la conoscenza dell'hamiltoniana del sistema ad  $A$  nucleoni (1.1) e dunque la precisa conoscenza dell'interazione  $V(i, j)$ , per risolvere l'equazione (1.2) bisogna superare notevoli difficoltà tecniche.



**Figura 1.1:** Schema del termine scalare del potenziale microscopico di interazione nucleone-nucleone.

Per avere un'idea qualitativa del problema, basta pensare che per un nucleo con  $A$  nucleoni, di cui  $Z$  protoni, il numero delle configurazioni possibili di spin e isospin è pari a

$$N_{conf} = 2^A \frac{A!}{Z!(A-Z)!} \quad (1.3)$$

e risulta essere dell'ordine di grandezza del numero di Avogadro già per nuclei come il  $^{40}\text{Ca}$ . Nella tabella 1.1 è mostrato il valore di  $N_{conf}$  per alcuni nuclei con numero di massa  $A \leq 40$ .

Ad oggi la risoluzione esatta dell'equazione 1.2 è stata portata a termine solo per nuclei con numero di massa inferiore o uguale ad  $A = 12$ . Di fronte a queste difficoltà, la strada percorsa da molti anni è quella di risolvere l'equazione di Schrödinger mediante tecniche di risoluzione approssimate. A partire da questa esigenza sono nati modelli di grande successo come il *modello a shell* o *modello di campo medio*, che semplificano notevolmente il problema a molti corpi.

Per vedere qualitativamente cosa comporta l'approssimazione di campo medio, aggiungiamo e sottraiamo all'equazione 1.1 un termine a un corpo

$$\mathcal{H} = \left( \sum_{i=1}^N T(i) + \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \right) + \left( \sum_{i<j}^N V(i,j) - \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \right) = \mathcal{H}_0 + V_{res} \quad (1.4)$$

con

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N T(i) + \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \quad (1.5)$$

e

$$V_{res} = \sum_{i<j}^N V(i,j) - \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \quad (1.6)$$

**Tabella 1.1:** Numero di configurazioni di spin e isospin per alcuni nuclei al variare del numero di protoni  $Z$  e del numero di neutroni  $N$ .

Nucleo	$Z$	$N$	$N_{conf}$
$^3\text{H}$	1	2	24
$^3\text{He}$	2	1	24
$^4\text{He}$	2	2	96
$^6\text{He}$	2	4	960
$^6\text{Li}$	3	3	1280
$^8\text{He}$	2	6	7168
$^{12}\text{C}$	6	6	3784704
$^{16}\text{O}$	8	8	$8.4 \cdot 10^8$
$^{40}\text{Ca}$	20	20	$1.5 \cdot 10^{23}$

Il termine  $\sum_{i=1}^N V_{MF}(\vec{r}_i)$  corrisponde al campo medio cui è sottoposto ogni singolo nucleone. L'espressione (1.5) mostra che  $\mathcal{H}_0$  è una hamiltoniana composta dalla somma di hamiltoniane di singola particella, mentre  $V_{res}$  è il termine di potenziale residuo, pari alla differenza tra il potenziale effettivo di interazione a due corpi e il potenziale di campo medio.

In questi modelli il problema a molti corpi viene ridotto nella replica di  $A$  problemi a un corpo, sotto l'ipotesi che il moto dei nucleoni all'interno del nucleo avvenga per ciascuno di essi in modo indipendente rispetto agli altri. In questo modo, al posto dell'equazione (1.1), l'equazione da risolvere diventa

$$\mathcal{H}_0\Phi = \left( \sum_{i=1}^A h_i \right) \Phi = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + V_{MF}(i) \right) \Phi = E_0\Phi \quad (1.7)$$

dove  $V_{MF}(i)$  è il potenziale di campo medio a cui è soggetto il singolo nucleone, il cui ruolo definiremo bene più avanti,  $m$  è la massa del nucleone (in buona approssimazione la stessa per neutroni e protoni) e dove  $h_i$  sono le hamiltoniane di singola particella. Quest'ultime commutano tra loro, poiché i nucleoni sono indipendenti per ipotesi, per cui la funzione d'onda  $\Phi$  complessiva del sistema sarà il prodotto delle singole funzioni d'onda di particella che soddisfano la seguente equazione

$$h(i)\varphi_\alpha(i) = \varepsilon_\alpha\varphi_\alpha(i). \quad (1.8)$$

dove  $\alpha$  è un indice che indica l'insieme di numeri quantici che caratterizza un livello energetico. Questa schematizzazione del problema ha come unico vincolo l'antisimmetria della funzione d'onda complessiva che descrive il sistema di nucleoni, la quale necessita l'imposizione di questa ipotesi essendo il sistema composto da fermioni identici.

Un'espressione della funzione d'onda  $\Phi$  che soddisfa tutte le richieste introdotte sopra è il determinante di Slater

$$\Phi_{\alpha_1, \dots, \alpha_A}(1, \dots, A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(1) & \dots & \varphi_{\alpha_1}(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{\alpha_A}(1) & \dots & \varphi_{\alpha_A}(A) \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

## 1.1 Il modello a shell

Il modello a shell è basato sul modello a particelle indipendenti descritto precedentemente. Ogni nucleone è identificato con una specifica funzione d'onda: in questo caso il *Principio di esclusione di Pauli* può essere espresso affermando che due fermioni non possono trovarsi nel medesimo stato quantico. Il determinante di Slater garantisce, per costruzione, il principio di esclusione. Infatti se due righe o due colonne sono uguali il determinante è nullo.

La descrizione di un nucleo nello stato fondamentale utilizzando il modello a shell corrisponde alla configurazione in cui tutti i nucleoni occupano i livelli di energia più bassa.

Conferme sperimentali di questo tipo di struttura sono arrivate dall'analisi spettroscopica dei cosiddetti nuclei doppio magici, che corrispondono a determinati numeri di protoni e neutroni legati a discontinuità delle caratteristiche dei nuclei in funzione del numero di protoni e neutroni. Questi numeri sono

$$2, \quad 8, \quad 20, \quad 28, \quad 50, \quad 82, \quad 126, \dots \quad (1.10)$$

I nuclei doppio magici hanno un comportamento simile a quello dei gas nobili nell'ambito atomico. Esempi di nuclei doppio magici sono:

$${}^4_2\text{He}_2, \quad {}^{16}_8\text{O}_8, \quad {}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}, \quad {}^{48}_{20}\text{Ca}_{28}, \quad {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}. \quad (1.11)$$

Essi presentano una struttura particolarmente stabile, ragion per cui esistono in natura un numero molto grande, rispetto ai restanti nuclei, di isotopi o isotoni stabili o longevi. Altre caratteristiche di questi nuclei sono: l'elevata energia di estrazione di un nucleone rispetto agli altri nuclei ed energie per portare un nucleone nel primo stato eccitato più elevate rispetto agli altri. Inoltre le energie di legame e le sezioni d'urto di cattura neutronica in funzione di  $N$  e  $Z$  presentano brusche discontinuità proprio in corrispondenza di questi numeri. L'energia di legame è maggiore per i nuclei doppio magici rispetto ai nuclei vicini, mentre la sezione d'urto neutronica è minore rispetto ad essi: queste caratteristiche sono un indice di una maggiore stabilità rispetto ai nuclei vicini.

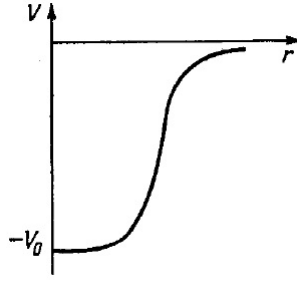
Le caratteristiche dei nuclei doppio magici sono spiegabili nell'ipotesi che i nucleoni si dispongano in diversi gusci, o "shell", degeneri in energia, e che i numeri magici corrispondano a configurazioni di shell nucleari completamente piene.

Un'analisi più completa di queste caratteristiche può essere trovata in [RIN80] e [POV98].

L'approccio del modello a shell è quello di postulare la forma del potenziale  $V_{MF}(i)$  dell'equazione (1.7) in modo da riprodurre alcune caratteristiche dei nuclei. Il potenziale medio nucleare va ricercato in modo che abbia le seguenti caratteristiche

- deve essere quasi costante all'interno del nucleo, poiché ciascun nucleone si muove all'interno del nucleo soggetto a una forza nucleare uniforme in tutte le direzioni, la cui risultante deve quindi essere nulla;
- deve essere attrattivo alla superficie nucleare, affinché il nucleone rimanga all'interno del nucleo;





**Figura 1.2:** Andamento del potenziale di Woods-Saxon espresso nell'equazione (1.12).

- deve prevedere il continuo perché fornendo energia al nucleo si verificano emissioni di nucleoni

Una forma analitica molto usata che soddisfa queste proprietà è il *potenziale di Woods-Saxon*

$$U(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)} \quad (1.12)$$

dove

$$R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad V_0 \simeq 50 \text{ MeV} \quad a \simeq 0.5 \text{ fm} \quad r_0 \simeq 1.2 \text{ fm}.$$

Il modello a shell per la descrizione della struttura nucleare ha come unico vincolo l'antisimmetria della funzione d'onda complessiva che descrive il sistema di nucleoni, ma non considera l'interazione di ogni nucleone con gli altri  $N - 1$  nucleoni componenti il sistema.

Sperimentalmente si verifica che le previsioni del modello a shell sono particolarmente buone nel caso in cui i nuclei siano a shell completamente occupate (shell chiuse), se nell'ultima shell manca un nucleone (buco di valenza), o, infine, se nell'ultima shell figura soltanto un nucleone (nucleone di valenza), dunque per nuclei con numero di nucleoni vicini ai numeri magici.

## 1.2 Modelli di campo medio

La base microscopica del modello a shell è la teoria di *Hartree-Fock*. Si tratta di un metodo di risoluzione dell'hamiltoniana nucleare basato sull'approssimazione a campo medio.

A differenza del caso atomico in cui il potenziale centrale a cui sono sottoposti gli elettroni è originato dal nucleo atomico, nel caso nucleare non esiste alcun centro di potenziale. Il potenziale cui è soggetto ogni singolo nucleone è in questo caso generato dall'interazione reciproca dei nucleoni del sistema.

Il metodo Hartree-Fock fa uso del *metodo variazionale di Rietz* per la risoluzione approssimata dell'equazione agli autovalori (1.2), dove l'hamiltoniana del sistema ha la forma riportata dall'equazione (1.4). Per arrivare a questa risoluzione, si impone la condizione che le funzioni d'onda, soluzioni dell'hamiltoniana totale,

siano della forma di determinanti di Slater, condizione che tra l'altro ci garantisce l'antisimmetrizzazione della funzione d'onda per lo scambio di coordinate di due fermioni.

Si dimostra che, sotto questa ipotesi, possiamo limitare lo studio del problema a molti corpi a quello dell'hamiltoniana  $\mathcal{H}_0$  descritta dalla relazione 1.5. Ciò avviene perché, se la  $\Phi$  è un determinante di Slater, si ottiene il seguente valor medio

$$\langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | \mathcal{H}_0 | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | V_{res} | \Phi_0 \rangle \quad (1.13)$$

in cui il secondo termine della somma è nullo per costruzione del potenziale residuo di interazione  $V_{res}$ .

Con questa trattazione si arriva a poter risolvere l'equazione di Shrödinger del sistema a molti corpi dovendo risolvere il problema di gran lunga più semplice di una equazione a un corpo, poiché l'hamiltoniana  $\mathcal{H}_0$  altro non è che la somma di hamiltoniane relative a un singolo nucleone

$$h(i)\varphi_k(i) = \varepsilon_k\varphi_k(i). \quad (1.14)$$

Applicando il metodo variazionale si giunge all'espressione esplicita delle *equazioni di Hartree-Fock*, equivalenti alle equazioni di Shrödinger di singolo nucleone. Il procedimento con cui le equazioni di Hartree-Fock sono ottenute è mostrato in [RIN80]. L'espressione esplicita delle equazioni per un generico nucleone è

$$h\varphi_k(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi_k(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})\varphi_k(\mathbf{r}) + \int W(\mathbf{r},\mathbf{r}')\varphi_k(\mathbf{r}')d^3r' \quad (1.15)$$

con

$$u(\mathbf{r}) = \sum_j \langle \varphi_j | V | \varphi_j \rangle = \sum_j \int \varphi_j^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r},\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}') d^3r' \quad (1.16)$$

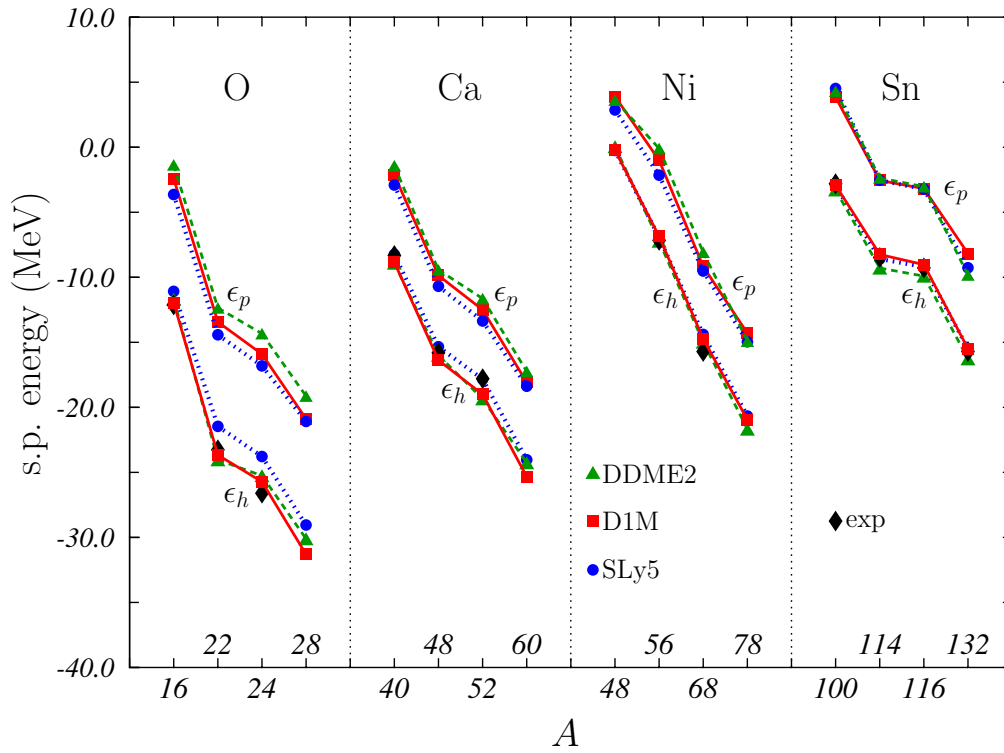
$$W(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_j \varphi_j^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r},\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}') \quad (1.17)$$

Queste equazioni si risolvono con un metodo iterativo autoconsistente, scegliendo opportunamente le funzioni  $\varphi_k$  di partenza, cui segue una scelta del potenziale di campo medio che è funzione di esse. Avremo così una approssimazione migliore delle  $\varphi_k$  a ogni nuovo ciclo di risoluzione delle equazioni. Gli autovalori  $\varepsilon_k$ , sono interpretabili, secondo il teorema di Koopmans, come l'energia necessaria da fornire a un nucleone per estrarlo dal  $k$ -esimo stato.

Il metodo Hartree-Fock ci fornisce una buona stima dei livelli energetici dei nucleoni nello stato fondamentale.

Mostriamo nelle figura 1.3 presa da [GCO12] alcuni risultati di misura dell'energia di singola particella ottenuta attraverso i modelli di campo medio.

I livelli energetici di singola particella in figura sono quelli dei protoni intorno alla superficie di Fermi per le catene di isotopi di ossigeno, calcio, nichel e stagno. Con  $\varepsilon_h$  è indicata l'energia del protone nell'ultimo livello occupato del nucleo al di sotto della superficie di Fermi, con  $\varepsilon_p$  è indicata l'energia del primo livello vuoto del nucleo, al di sopra della superficie di Fermi.



**Figura 1.3:** Energie dei livelli di singola particella (per i protoni) subito sotto,  $\epsilon_h$  e appena sopra,  $\epsilon_p$  la superficie di Fermi per i nuclei per le catene di isotopi dell'ossigeno, del calcio, del nichel e dello stagno.

I risultati sono ottenuti mediante tre modelli di campo medio diversi. I risultati sperimentali sono quelli indicati in nero. L'errore relativo commesso usando le tecniche di campo medio rispetto ai risultati sperimentali non supera, nel caso peggiore, lo 0.6 per cento.

Dalla figura possiamo notare inoltre che all'aumentare del numero di neutroni, le energie dei livelli del singolo protone si abbassano, poiché la presenza di un numero maggiore di neutroni attenua la repulsione coulombiana dei protoni nel nucleo, che tende a far crescere l'energia dei livelli.



## Capitolo 2

# Descrizione degli stati eccitati nucleari

Nel capitolo precedente abbiamo descritto alcuni modelli che bene descrivono lo spettro energetico nucleare nel caso in cui il nucleo si trovi nella configurazione corrispondente allo stato fondamentale.

I modelli considerati partono dall'ipotesi che il moto dei nucleoni all'interno del nucleo si svolga in maniera indipendente per ciascun nucleone rispetto all'altro. Ora vedremo come questa ipotesi sul moto dei nucleoni rappresenti anche il limite dei modelli a particelle indipendenti, soprattutto per quanto riguarda la descrizione degli stati eccitati.

Infatti, vedremo grazie a evidenze sperimentali, che l'interazione residua  $V_{res}$  trascurata nel modello a campo medio diventa di fondamentale importanza per la descrizione degli stati eccitati.

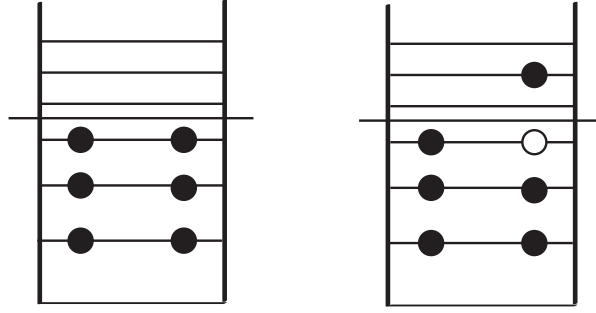
### 2.1 Descrizione di uno stato eccitato nel modello a campo medio

Vediamo ora come viene descritto uno stato eccitato del nucleo nell'ambito del modello a campo medio.

Nello stato fondamentale descritto dal modello di campo medio, i nucleoni occupano tutti livelli a energia più bassa a disposizione e al di sotto dell'energia di Fermi. Si chiamano stati di *particella* gli stati al di sopra dell'energia di Fermi, mentre sono detti stati di *buco* quelli che si trovano energeticamente al di sotto dell'energia di Fermi.

Lo stato eccitato, in questo modello, viene descritto promuovendo nucleoni da sotto a sopra la superficie di Fermi. In gergo si dice con eccitazioni di *particella-buco*. L'energia dello stato eccitato, rispetto a quella dello stato fondamentale, è data dalla differenza delle energie degli stati di *particella*  $\varepsilon_p$  e quella degli stati di *buco*  $\varepsilon_h$ .

Per esempio, se consideriamo un nucleo avente tutte le shell chiuse (avente cioè un numero magico di protoni o di neutroni), possiamo descrivere il suo primo stato eccitato come la transizione del nucleone situato nell'ultima subshell verso lo stato a energia più bassa della prima shell completamente vuota.



**Figura 2.1:** Rappresentazione grafica del modello particella buco

Il modello particella-buco è rappresentato nella figura 2.1.

## 2.2 Un esempio: il primo stato eccitato del $^{208}\text{Pb}$

Applichiamo questa schematizzazione al caso specifico del  $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ . Il  $^{208}\text{Pb}$  è un nucleo doppio magico, pertanto i livelli dei protoni e dei neutroni al di sotto della superficie di Fermi sono completamente occupati. È dunque molto semplice applicare questa schematizzazione in questo caso.

Supponiamo che lo stato eccitato considerato sia generato da una transizione da subito sotto ad appena sopra la superficie di Fermi. I livelli energetici coinvolti, distinguendo il caso dei neutroni e dei protoni, sono mostrati in figura 2.2.

Nella tradizionale rappresentazione spettroscopica, i livelli di singola particella sono caratterizzati da un numero quantico principale  $n$ , dal valore del momento angolare orbitale  $l$  e dal momento angolare totale  $j = l \pm \frac{1}{2}$ .

Per i protoni la transizione avviene dal livello  $3s_{1/2}$  al livello  $1h_{9/2}$ ; per i neutroni sono coinvolti i livelli  $3p_{1/2}$  e  $2g_{9/2}$ , rispettivamente al di sotto e al di sopra dell'energia di Fermi. Le energie dei livelli attorno alla superficie di Fermi sono ottenute confrontando l'energia di legame del  $^{208}\text{Pb}$  con l'energia di legame dei nuclei aventi  $A \pm 1$  nucleoni (in questo caso  $A = 208$ ). Si ha dunque nel caso dei protoni

$$\varepsilon_{\text{protone}} = \Delta E(Z + 1, N) - \Delta E(Z, N) \quad (2.1)$$

mentre per i neutroni

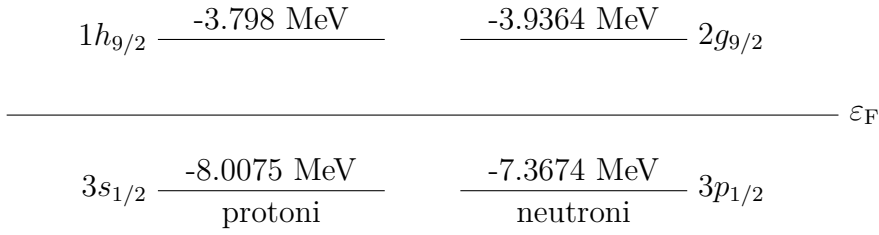
$$\varepsilon_{\text{neutrone}} = \Delta E(Z, N + 1) - \Delta E(Z, N). \quad (2.2)$$

Designiamo ora con l'indice  $p$  lo stato di particella e con l'indice  $h$  lo stato di buco. Utilizzando i valori noti nella letteratura di  $\Delta E$ , che ho preso da [AUD03], riusciamo così a calcolare l'energia dei livelli coinvolti nelle singole transizioni considerate.

Per i protoni abbiamo

$$\varepsilon_p = \Delta E(^{209}_{83}\text{Bi}) - \Delta E(^{208}_{82}\text{Pb}) = -3.798 \text{ MeV} \quad \rightarrow 1h_{9/2} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_h = \Delta E(^{208}_{82}\text{Pb}) - \Delta E(^{207}_{81}\text{Tl}) = -8.0075 \text{ MeV} \quad \rightarrow 3s_{1/2} \quad (2.4)$$

**Figura 2.2:** Spettro del  $^{208}\text{Pb}$ .

$$\Rightarrow \varepsilon_p - \varepsilon_h = (-3.798 + 8.0075) \text{ MeV} = 4.3095 \text{ MeV} \quad (2.5)$$

mentre per i neutroni

$$\varepsilon_p = \Delta E(^{209}\text{Pb}_{127}) - \Delta E(^{208}\text{Pb}_{126}) = -3.9364 \text{ MeV} \rightarrow 2g_{9/2} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_h = \Delta E(^{208}\text{Pb}_{126}) - \Delta E(^{207}\text{Pb}_{125}) = -7.3674 \text{ MeV} \rightarrow 3p_{1/2} \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_p - \varepsilon_h = (-3.9364 + 7.3674) \text{ MeV} = 3.4310 \text{ MeV} \quad (2.8)$$

Dalla conoscenza dei livelli energetici coinvolti, possiamo inoltre calcolare i numeri quantici del primo stato nucleare eccitato. Lo stato fondamentale del  $^{208}\text{Pb}$  è naturalmente  $J^P = 0^+$ , come tutti i nuclei pari-pari. La transizione  $ph$  del nucleone porta in entrambi i casi ad un cambio di parità. Infatti, essendo la parità data da  $(-1)^{l_p - l_h}$ , otteniamo con i seguenti risultati

$$l_p - l_h = 5 - 0 = 5 \quad \text{per i protoni} \quad (2.9)$$

$$l_p - l_h = 4 - 1 = 3 \quad \text{per i neutroni} \quad (2.10)$$

in entrambi i casi parità negativa.

Inoltre, i momenti angolari permessi per questo stato eccitato sono

$$J = j_p \oplus j_h = \frac{9}{2} \oplus \frac{1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases} \quad (2.11)$$

sia nel caso dei neutroni che in quello dei protoni.

In definitiva si ha che il primo stato eccitato del  $^{208}\text{Pb}$  ottenuto nella schematizzazione del modello a shell è descritto da  $J^P = 5^-$  o  $J^P = 4^-$ .

Sperimentalmente si trova, invece, che il primo stato eccitato del nucleo in questione è un  $3^-$  all'energia di  $2.6145 \text{ MeV}$ . Dunque possiamo concludere che le previsioni ottenute mediante il modello a shell a particelle indipendenti conducono a un risultato impreciso nel calcolo dell'energia del primo livello eccitato e, in questo caso, completamente sbagliato dal punto di vista del momento angolare.

Abbiamo qui trattato un caso specifico, ma i risultati ottenuti entro questa schematizzazione sono analogamente imprecisi anche quando andiamo a considerare gli altri nuclei doppio magici.

Il risultato è abbastanza sconcertante se si pensa che proprio i nuclei doppio magici dovrebbero essere quelli meglio descritti dai modelli a campo medio, grazie alle particolari proprietà di simmetria cui rispondono.

Si giunge dunque alla conclusione che necessitiamo, per svolgere una adeguata trattazione degli stati eccitati nucleari, di altri tipi di modelli semplificativi del problema a molti corpi nucleare. Vedremo in seguito che il limite queste trattazioni è proprio il fatto di considerare i nucleoni indipendenti, considerazione inopportuna per gli stati eccitati che invece ben si descrivono nell'ambito di moti collettivi.



# Capitolo 3

## Il metodo di Tamm-Dancoff

Per lo studio degli stati eccitati nucleari, introdurremo il metodo di Tamm-Dancoff o TDA (*Tamm-Dancoff Approximation*).

Le ipotesi su cui si basa il metodo TDA sono:

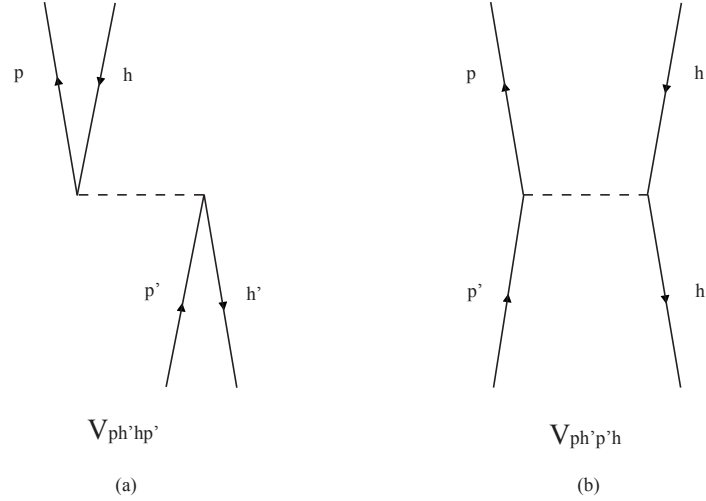
- le funzioni d'onda di singola particella che descrivono la configurazione dello stato fondamentale di un nucleo sono quelle date, nell'approssimazione di campo medio, dalla teoria di Hartree-Fock  $|\Phi_0\rangle$ . Questo significa che lo stato del sistema è descritto da funzioni d'onda di singola particella. Nello stato fondamentale con energia inferiori all'energia di Fermi, detti di buco, sono completamente occupati, mentre tutti gli stati con energia superiore all'energia di Fermi, detti di particella, sono completamente vuoti.
- tutti gli stati eccitati  $|\nu\rangle$  sono descritti come una combinazione lineare di eccitazioni particella-buco. Utilizzando gli operatori di creazione e distruzione  $a_p^\dagger a_h$  applicati allo stato fondamentale di Hartree-Fock  $|\Phi_0\rangle$ , ottengo l'espressione degli stati di particella-buco. Ogni stato eccitato assume la forma

$$|\nu\rangle = \sum_{ph} X_{ph}^\nu a_p^\dagger a_h |\Phi_0\rangle. \quad (3.1)$$

Il metodo TDA utilizza le funzioni d'onda di singola particella dello stato fondamentale nell'ambito dei modelli di campo medio e descrive uno stato eccitato sfruttando l'idea del modello particella buco descritto nel capitolo precedente.

Vediamo infatti in che modo l'operatore  $a_p^\dagger a_h$  modifica lo stato  $|\Phi_0\rangle$ . L'operatore  $a_p^\dagger a_h$  è composto da due operatori, l'operatore creazione  $a_p^\dagger$  e l'operatore distruzione  $a_h$ . I due operatori svolgono un ruolo sostanzialmente opposto quando sono applicati a  $|\Phi_0\rangle$ :  $a_p^\dagger$  crea una particella in uno stato di energia maggiore all'energia di Fermi  $\varepsilon_F$ , mentre  $a_h$  annichila una particella che è in uno stato di energia inferiore a  $\varepsilon_F$ . Complessivamente l'azione dell'operatore  $a_p^\dagger a_h$  è quella di creare contemporaneamente una particella e un buco, rispettivamente sopra e sotto la superficie di Fermi.

Osserviamo che lo stato eccitato  $|\nu\rangle$  è una combinazione lineare di stati  $a_p^\dagger a_h |\Phi_0\rangle$ , dunque nella sua definizione è previsto che più stati di particella-buco contribuiscano a determinare un singolo stato eccitato.



**Figura 3.1:** Rappresentazione grafica del termine diretto(a) e del termine di scambio (b) del termine scalare del potenziale di interazione.

### 3.1 Equazioni di Tamm-Dancoff

Lo scopo della teoria TDA è quello di determinare le energie di eccitazione e le ampiezze  $X_{ph}^\nu$  fissata la base di funzioni d'onda di singola particella e l'interazione tra i nucleoni.

Le equazioni secolari della teoria TDA possono essere ottenute in vari modi, tra i quali anche utilizzando il principio variazionale. La derivazione di queste equazioni è descritta ad esempio nei testi [RIN80], [ROW70], [FET71].

Le equazioni di Tamm-Dancoff sono

$$\sum_{p'h'} [(\varepsilon_p - \varepsilon_h) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + \bar{v}_{ph'hp'}] X_{p'h'}^\nu = E_{TDA}^\nu X_{ph}^\nu \quad (3.2)$$

dove  $E_{TDA}^\nu$  è l'energia corrispondente allo stato eccitato  $|\nu\rangle$  su una scala in cui abbiamo scelto  $E_{HF}^0 = 0$ ,  $\bar{v}_{ph'hp'}$  è il potenziale residuo di interazione a due corpi e  $\varepsilon_p - \varepsilon_h$  è l'energia dello stato eccitato particella-buco di Hartree-Fock, dove abbiamo indicato con  $\varepsilon_i$  le energie di singola particella.

L'espressione (3.2) descrive un sistema da cui si ottengono le energie di eccitazione e le ampiezze  $X_{ph}^\nu$  associate a ogni stato particella-buco che permettono di descrivere lo stato eccitato della forma (3.1).

A causa dell'antisimmetrizzazione dello spazio degli stati di un sistema di fermioni identici, l'elemento di matrice del potenziale di interazione possiede anch'esso proprietà di antisimmetria.

La sua espressione esplicita è

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ph'hp'} = & \int \varphi_p^*(\xi_1) \varphi_{h'}^*(\xi_2) v(\xi_1, \xi_2) \varphi_h(\xi_1) \varphi_{p'}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & - \int \varphi_p^*(\xi_1) \varphi_{h'}^*(\xi_2) v(\xi_1, \xi_2) \varphi_{p'}(\xi_1) \varphi_h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove il primo termine rappresenta il termine diretto e il secondo il termine di scambio delle coordinate di due particelle, le quali sono in questo caso rappresentate

da  $\xi_i$ , indice compatto che indica la posizione, lo spin e l'isospin della particella. I termini diretto e di scambio di  $\bar{v}_{ph'h'p'}$  sono rappresentati graficamente nella figura 3.1.

Quando il termine  $\bar{v}_{ph'h'p'}$  tende a zero, il sistema di equazioni (3.2) si riduce a un sistema di equazioni agli autovalori, indipendenti l'una dall'altra, dalle cui soluzioni si ottengono le energie di pura eccitazione particella-buco. Ogni stato eccitato è in questo caso determinato da una singola eccitazione particella-buco. La funzione d'onda che descrive il sistema è quella ottenuta applicando il modello ph alla funzione  $|\Phi_0\rangle$  dello stato fondamentale di Hartree-Fock.

La soluzione delle equazioni TDA fornisce una descrizione dello stato eccitato in termini di eccitazione particella-buco e questo consente anche di ricavare le probabilità di transizione dallo stato fondamentale  $|\Phi_0\rangle$  a uno stato eccitato  $|\nu\rangle$ .

La normalizzazione di uno stato eccitato  $|\nu\rangle$  implica

$$\langle \nu | \nu \rangle = \sum_{ph} |X_{ph}^\nu|^2 = 1 \quad (3.4)$$

supponendo che la transizione sia indotta da un campo esterno descritto da un operatore hermitiano a un corpo  $D$  della forma

$$D = \sum_{p'h'} D_{p'h'} a_{p'}^\dagger a_{h'} \quad (3.5)$$

gli elementi della matrice di transizione, usando la definizione di stato eccitato 3.1, sono

$$\begin{aligned} \langle \nu | D | \Phi_0 \rangle &= \langle \Phi_0 | \sum_{ph} X_{ph}^{*\nu} a_h^\dagger a_p \sum_{p'h'} D_{p'h'} a_{p'}^\dagger a_{h'} | \Phi_0 \rangle = \\ &= \sum_{ph} X_{ph}^{*\nu} \langle p | D | h \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow |\langle \nu | D | \Phi_0 \rangle|^2 = \sum_{ph} |X_{ph}^\nu|^2 |\langle p | D | h \rangle|^2 \quad (3.7)$$

Il calcolo della probabilità di transizione dallo stato fondamentale agli stati eccitati si riduce al calcolo di probabilità di transizione di singola particella e ancora una volta il peso è dato dall'ampiezza  $X_{ph}^\nu$  associata allo stato particella-buco  $ph$ .

## 3.2 Soluzione delle equazioni TDA nel modello schematico

Abbiamo già osservato, a partire dalle equazioni (3.2), che quando il termine  $\bar{v}_{ph'h'p'}$  dovuto al potenziale residuo tende a zero, le energie degli stati eccitati coincidono con quelle degli stati eccitati imperturbati noti della teoria di campo medio.

È dunque il potenziale residuo che determina la differenza tra l'energia di uno stato eccitato ottenuta dalla teoria TDA e quella ottenuta dalla teoria di campo medio. La presenza del termine di potenziale residuo modifica dunque l'energia

dello stato di pura eccitazione particella-buco. Per comprendere meglio in che modo questo termine modifica l'energia dello stato imperturbato Hartree-Fock e l'entità di questa modifica, attueremo una semplificazione del problema.

Per risolvere l'equazione (3.2), assumiamo che la matrice degli elementi del potenziale residuo di interazione sia separabile negli indici particella-buco, ossia che  $\bar{v}_{ph'h'p'}$  sia del tipo

$$\bar{v}_{ph'h'p'} = \lambda D_{ph} D_{p'h'}^* . \quad (3.8)$$

Osserviamo che il valore di  $\lambda$  ci da informazioni sull'entità dell'interazione e sul tipo di interazione:

$$\begin{aligned} \lambda < 0 & \longrightarrow \text{interazione attrattiva} \\ \lambda > 0 & \longrightarrow \text{interazione repulsiva} \end{aligned}$$

Sotto l'ipotesi (3.1), possiamo riscrivere l'equazione secolare TDA (3.2) nella seguente forma

$$(E_{TDA}^\nu - \varepsilon_p + \varepsilon_h) X_{ph}^\nu = \lambda D_{ph} \sum_{p'h'} D_{p'h'}^* X_{p'h'}^\nu . \quad (3.9)$$

Poiché gli stati  $|\nu\rangle$  sono normalizzati e ortogonali tra loro si ha che

$$\sum_{ph} X_{ph}^\nu X_{ph}^{\nu'} = \delta_{\nu\nu'} . \quad (3.10)$$

Definisco la costante  $N$  come

$$N \equiv \lambda \sum_{p'h'} D_{p'h'}^* X_{p'h'}^\nu \quad (3.11)$$

e risolvo l'equazione (3.9) in funzione di  $X_{ph}^\nu$

$$X_{ph}^\nu = N \frac{D_{ph}}{E_{TDA}^\nu - \varepsilon_p + \varepsilon_h} \quad (3.12)$$

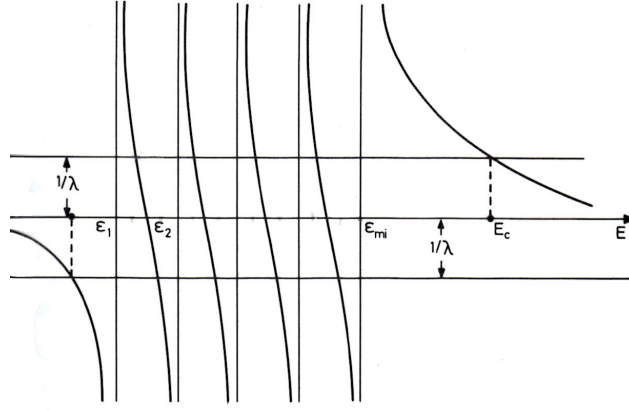
usando le proprietà prima definite ottengo la relazione

$$\sum_{ph} |X_{ph}^\nu|^2 = 1 = \sum_{ph} N^2 \frac{|D_{ph}|^2}{(E_{TDA}^\nu - \varepsilon_p + \varepsilon_h)^2} \quad (3.13)$$

$$\implies \frac{1}{N^2} = \sum_{ph} \frac{|D_{ph}|^2}{(E_{TDA}^\nu - \varepsilon_p + \varepsilon_h)^2} . \quad (3.14)$$

Moltiplicando infine per il termine  $D_{ph}^* (E_{TDA}^\nu - \varepsilon_p + \varepsilon_h)^{-1}$  ed esplicitando  $N$  ottengo l'equazione agli autovalori per l'energia di eccitazione  $E_{TDA}^\nu$

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{ph} \frac{|D_{ph}|^2}{E_{TDA}^\nu - \varepsilon_p + \varepsilon_h} . \quad (3.15)$$



**Figura 3.2:** Rappresentazione grafica dell'equazione (3.15).

Riscriviamo la (3.15) esplicitando l'energia  $E_{TDA}^\nu$  nell'ipotesi che tutti gli stati di particella-buco abbiano la stessa energia  $\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_h$

$$E_{TDA}^\nu = \varepsilon + \lambda \sum_{ph} |D_{ph}|^2. \quad (3.16)$$

L'equazione (3.16) mostra come le soluzioni in energia delle equazioni TDA siano date dalla differenza di energia di eccitazione particella-buco più un termine correttivo generato dall'interazione residua.

Nel caso in cui il potenziale di interazione sia nullo l'energia di eccitazione è ottenuta dalla pura eccitazione particella-buco e corrisponde all'energia dello stato eccitato imperturbato e le equazioni (3.2) si disaccoppiano. In questo limite ritroviamo i risultati ottenuti nel modello a campo medio.

Quando  $\lambda > 0$  l'interazione è repulsiva e gli autovalori TDA sono maggiori delle soluzioni imperturbate, mentre quando  $\lambda < 0$  l'interazione è attrattiva e gli autovalori TDA sono inferiori a quelli imperturbati.

Questo fatto è mostrato nella figura 3.2 presa dal testo [RIN80] dove viene rappresentata graficamente l'equazione (3.15).

Nella figura presa dal testo [RIN80] è mostrato l'andamento della funzione a secondo membro della (3.15) in funzione dell'energia  $E_{TDA}^\nu$ .

Le linee orizzontali corrispondono al primo membro della (3.15), con  $\lambda$  fissato: una retta per  $\lambda$  positivo, una per il suo valore opposto, negativo. Le linee verticali corrispondono alle energie degli stati di particella e di buco ottenute dal modello a campo medio.

L'intersezione delle funzioni in  $E_{TDA}^\nu$  con la retta  $1/\lambda$  produce le soluzioni ottenute risolvendo la (3.15).

Osserviamo che per  $\lambda$  tendente a zero, le rette  $1/\lambda$  tendono all'infinito. Le funzioni in  $E_{TDA}^\nu$ , tendendo asintoticamente ai valori  $\varepsilon_i$  del modello a campo medio. Nel limite in cui  $\lambda$  è tendente a zero, tendono come previsto alle energie imperturbate  $\varepsilon_i$ .

Le due soluzioni non comprese tra le energie di due stati imperturbati, di cui una per  $\lambda > 0$  e l'altra per  $\lambda < 0$ , non sono previste dal modello a campo medio e rappresentano gli stati formati da una sovrapposizione coerente degli elementi di

matrice dell'interazione residua, nel senso che ogni elemento di matrice contribuisce con lo stesso segno.

# Capitolo 4

## Il metodo RPA

Il metodo TDA ha notevolmente migliorato la stima degli spettri degli stati eccitati nucleari rispetto alla teoria di campo medio, buona per la descrizione dello stato fondamentale, ma carente in quella degli stati eccitati. A differenza di quest'ultima, che non considera il potenziale residuo  $V_{res}$  ma solo il potenziale centrale di campo medio  $V_{HF}$ , la teoria TDA prende in considerazione il termine di potenziale residuo  $V_{res}$  come una interazione tra gli stati di particella-buco che concorrono alla formazione di uno stato eccitato. La TDA ha inoltre messo in evidenza il concetto di collettività degli stati eccitati, non prevista nel modello a particelle indipendenti di campo medio, senza il quale lo spettro dei nuclei eccitati non potrebbe essere compreso a fondo.

Nonostante la teoria TDA abbia dunque notevoli pregi, il confronto con i dati sperimentali non è soddisfacente.

Per questo motivo si è cercato di costruire una teoria che migliori la TDA, modificandone le ipotesi di partenza. Una delle ipotesi della teoria TDA è quella di considerare lo stato fondamentale come stato di puro campo medio, trascurando quindi per quest'ultimo le correlazioni generate dall'interazione residua, che nella teoria TDA è attiva solo per gli stati eccitati.

Dall'esperienza apportata dalla teoria TDA e dai suoi limiti, strettamente connessi con le sue ipotesi di base, nasce la teoria RPA (*Random Phase Approximation*).

L'idea nuova della teoria RPA è quella di associare a  $V_{res}$  sia l'interazione degli stati di particella-buco, sia l'interazione tra le funzioni d'onda di singola particella che descrivono lo stato fondamentale.

Il nuovo stato fondamentale nel modello RPA sarà dunque una modifica dello stato fondamentale  $\Phi_0$  di campo medio. Al posto dello stato fondamentale di Hartree-Fock, lo stato fondamentale RPA, che indicheremo con  $|\Psi_0\rangle$ , è ottenuto considerando un certo numero di correlazioni tra le funzioni d'onda di singola particella dello stato fondamentale.

Sotto l'influenza di  $V_{res}$ , cambiano dunque le funzioni d'onda che descrivono lo stato fondamentale: la configurazione di  $|\Psi_0\rangle$  prevede infatti la presenza di stati particella-buco.

Nella teoria RPA si ipotizza che tutti gli stati eccitati  $|\nu\rangle$  siano descritti da una combinazione lineare di stati ottenuti dall'azione degli operatori  $a_p^\dagger a_h$  e  $a_h^\dagger a_p$  applicati allo stato fondamentale  $\Psi_0$  definito prima. Ogni stato eccitato assume

dunque la forma

$$|\nu\rangle = \sum_{ph} X_{ph}^\nu a_p^\dagger a_h |\Psi_0\rangle - \sum_{ph} Y_{ph}^\nu a_h^\dagger a_p |\Psi_0\rangle \quad (4.1)$$

in cui il segno meno è scelto per convenzione. Analogamente allo stato eccitato descritto dalla TDA, lo stato eccitato  $|\nu\rangle$  dell'RPA è uno stato collettivo per definizione: ogni stato di particella-buco e ogni stato di buco-particella determina lo stato eccitato.

Il primo termine della combinazione lineare della (4.1) corrisponde esattamente alla definizione di stato eccitato nella teoria TDA. Ne consegue che l'effetto dell'interazione residua sullo stato fondamentale non considerata nel modello TDA è espressa completamente dal secondo termine dell'equazione (4.1).

Nell'equazione (4.1) agiscono due operatori:  $a_p^\dagger a_h$  e  $a_h^\dagger a_p$ . Il primo opera in maniera identica a quello già visto nella (3.1), ossia  $a_p^\dagger$  crea una particella al di sopra della superficie di Fermi e  $a_h$  ne annichila una al di sotto della superficie di Fermi, creando dunque un buco. Il secondo operatore è con  $a_h^\dagger$  crea una particella sotto la superficie di Fermi e con  $a_p$  ne distrugge una sopra la superficie di Fermi.

L'azione di questo operatore sarebbe nulla se lo stato su cui agisse fosse lo stato fondamentale Hartree-Fock  $|\Phi_0\rangle$ .

I termini  $X_{ph}^\nu$  e  $Y_{ph}^\nu$  sono le matrici associate agli stati di particella-buco e buco-particella del sistema.

## 4.1 Le equazioni RPA

Analogamente alla teoria TDA, lo scopo della teoria RPA è quello di determinare energie di eccitazione e ampiezze  $X_{ph}^\nu$  e  $Y_{ph}^\nu$  fissata la base delle funzioni d'onda di singola particella che descrivono il sistema e l'interazione di potenziale residuo.

Analogamente al caso della teoria TDA, a partire dalla definizione dello stato eccitato  $|\nu\rangle$ , sfruttando le proprietà degli operatori  $a_p^\dagger a_h$  e  $a_h^\dagger a_p$ , nell'ambito delle ipotesi fatte sulla funzione d'onda  $\Psi_0$ , si ottengono le equazioni RPA. Ometteremo qui i dettagli della loro derivazione calcoli, che possono essere trovati in [RIN80], [FET71] o in [ROW70].

Le equazioni RPA sono ottenute nell'ipotesi che la funzione d'onda complessiva  $|\Psi_0\rangle$  del sistema nello stato fondamentale è simile alla  $|\Phi_0\rangle$  di campo medio. Questo significa che le ampiezze  $Y_{ph}^\nu$  dovranno essere piccole rispetto alle ampiezze  $X_{ph}^\nu$ .

Lo stato eccitato  $|\nu\rangle$  sarà dunque maggiormente determinato dal primo termine dell'equazione (4.1) ed il secondo termine può essere inteso come una correzione apportata allo stato eccitato definito dalla teoria TDA.

Le equazioni RPA sono

$$\begin{aligned} \sum_{p'h'} \left\{ [(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'}) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + \bar{v}_{ph'hp'}] X_{p'h'}^\nu + \bar{v}_{pp'hh'} Y_{p'h'}^\nu \right\} &= E_{RPA}^\nu X_{ph}^\nu \\ \sum_{p'h'} \left\{ \bar{v}_{pp'hh'} X_{p'h'}^\nu + [(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'}) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + \bar{v}_{ph'hp'}] Y_{p'h'}^\nu \right\} &= -E_{RPA}^\nu Y_{ph}^\nu \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove  $E_{RPA}^\nu$  è l'energia dello stato eccitato  $|\nu\rangle$ ,  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_h$  sono rispettivamente le energie associate agli stati di particella e di buco ottenute dalla teoria Hartree-Fock,  $\bar{v}_{ph'hp'}$  è il potenziale residuo di interazione a due corpi che correla gli stati



eccitati di particella-buco (lo stesso che abbiamo trovato nella teoria TDA) e  $\bar{v}_{pp'hh'}$  è il potenziale residuo di interazione a due corpi che tiene conto della correlazione tra le funzioni d'onda di singola particella dello stato fondamentale.

L'espressione esplicita di  $\bar{v}_{ph'hp'}$  è quella riportata nella (3.3). Il termine  $\bar{v}_{pp'hh'}$  possiede le stesse caratteristiche di  $\bar{v}_{ph'hp'}$  e la sua espressione esplicita è

$$\begin{aligned} \bar{v}_{pp'hh'} = & \int \psi_p^*(\xi_1) \psi_{p'}^*(\xi_2) v(\xi_1, \xi_2) \psi_h(\xi_1) \psi_{h'}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & - \int \psi_p^*(\xi_1) \psi_{p'}^*(\xi_2) v(\xi_1, \xi_2) \psi_{h'}(\xi_1) \psi_h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove il primo termine rappresenta il termine diretto e il secondo il termine di scambio delle coordinate di due particelle, che abbiamo indicato con  $\xi_i$ , che corrisponde a menzionare i numeri quantici che definiscono lo stato della particella.

Osserviamo che, come è ragionevole aspettarsi, le equazioni RPA (4.2) coincidono con le equazioni TDA nel caso in cui gli elementi della matrice  $\bar{v}_{pp'hh'}$  tendano a zero.

Inoltre, imponendo la condizione che sia gli elementi di  $\bar{v}_{pp'hh'}$  sia quelli di  $\bar{v}_{ph'hp'}$  tendano a zero, otteniamo che le equazioni del sistema (4.2) si disaccoppiano e che le energie ottenute dalla loro risoluzione coincidono con i puri stati eccitati di particella-buco, così come avveniva per le equazioni TDA (3.2).

La condizione di normalizzazione per uno stato  $|\nu\rangle$  definito nella (4.1) è

$$\langle \nu | \nu \rangle = \sum_{ph} (|X_{ph}^\nu|^2 - |Y_{ph}^\nu|^2) = 1. \quad (4.4)$$

Calcoliamo ora la probabilità di transizione tra lo stato eccitato  $|\nu\rangle$  descritto dalla (4.1) e lo stato fondamentale  $\Psi_0$ . Ipotizziamo che la transizione sia indotta da un campo esterno descritto dall'operatore a un corpo  $D$  della forma

$$D = \sum_{p'h'} D_{p'h'} a_p^\dagger a_{h'} = \sum_{p'h'} \langle p' | D | h' \rangle \quad (4.5)$$

e usando la definizione di stato eccitato, analogamente a quanto abbiamo fatto per la teoria TDA, otteniamo che gli elementi della matrice di transizione sono della forma

$$\langle \nu | D | \Psi_0 \rangle = \sum_{ph} \left( X_{ph}^{*\nu} \langle p | D | h \rangle + Y_{ph}^{*\nu} \langle h | D | p \rangle \right) \quad (4.6)$$

dunque gli elementi della matrice di transizione sono ottenuti conoscendo i contributi dati dalla transizione di una singola particella.

## 4.2 Teoria RPA nel modello schematico

Analogamente a quanto fatto nella teoria TDA, ricaviamo le equazioni TDA nell'ambito del modello schematico. Facciamo l'ipotesi che tutti gli elementi di matrice siano separabili, ed uguali a

$$\bar{v}_{ph'hp'} = \lambda D_{ph} D_{p'h'}^* \quad (4.7)$$

$$\bar{v}_{pp'hh'} = \lambda D_{ph} D_{p'h'} \quad (4.8)$$

Alla luce dell'ipotesi fatta e definendo l'energia degli stati di particella-buco come  $\varepsilon_{ph} = \varepsilon_p - \varepsilon_h$ , riscriviamo il sistema di equazioni RPA

$$(\varepsilon_{ph} - E_{RPA}) X_{ph}^\nu + \lambda D_{ph} \sum_{p'h'} (D_{p'h'}^* X_{p'h'}^\nu + D_{p'h'} Y_{p'h'}^\nu) = 0 \quad (4.9)$$

$$(\varepsilon_{ph} + E_{RPA}) Y_{ph}^\nu + \lambda D_{ph} \sum_{p'h'} (D_{p'h'}^* X_{p'h'}^\nu + D_{p'h'} Y_{p'h'}^\nu) = 0 \quad (4.10)$$

da cui otteniamo

$$X_{ph}^\nu = \frac{N D_{ph}}{\varepsilon_{ph} - E_{RPA}} \quad (4.11)$$

$$Y_{ph}^\nu = \frac{N D_{ph}}{\varepsilon_{ph} + E_{RPA}} \quad (4.12)$$

dove abbiamo definito la costante  $N$  come

$$N = \lambda \sum_{p'h'} (D_{p'h'}^* X_{p'h'}^\nu + D_{p'h'} Y_{p'h'}^\nu). \quad (4.13)$$

Usando la condizione di normalizzazione (4.4) per lo stato eccitato  $|\nu\rangle$  definito nella (4.1), sostituendo nella (4.4) i valori di  $X_{ph}^\nu$  e  $Y_{ph}^\nu$  ottenuti nelle equazioni (4.11) e (4.12) ed esplicitando la costante  $N$ , si ottiene l'equazione di dispersione

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \sum_{ph} \frac{|D_{ph}|^2 \varepsilon_{ph}}{E_{RPA}^2 - \varepsilon_{ph}^2} \quad (4.14)$$

Assumendo che tutti gli stati particella-buco abbiano la stessa energia  $\varepsilon$ , otteniamo l'espressione di  $E_{RPA}$  dall'equazione (4.14)

$$E_{RPA}^2 = \varepsilon^2 + 2 \lambda \varepsilon \sum_{ph} |D_{ph}|^2 \quad (4.15)$$

Osserviamo che l'equazione (4.15) ammette soluzioni positive e negative, una di valore opposto all'altra.

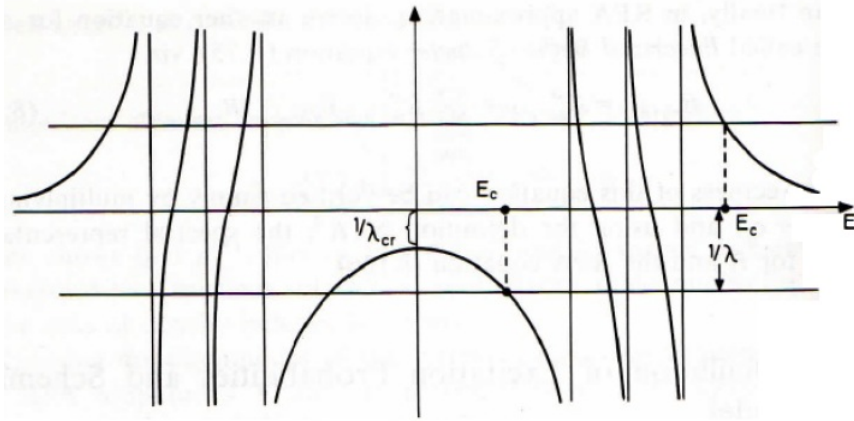
Nella figura 4.1 presa dal testo [RIN80] è mostrata la rappresentazione grafica della relazione di dispersione (4.14). La figura descrive l'andamento della funzione a secondo membro dell'equazione (4.14) in funzione dell'energia  $E_{RPA}$ .

Le linee orizzontali corrispondono al primo membro della 4.14, con  $\lambda$  fissato: una retta per  $\lambda$  positivo, una per il suo valore opposto, negativo. Le linee verticali corrispondono alle energie degli stati di particella-buco  $\varepsilon_{ph}$  ottenute dal modello a campo medio. L'intersezione delle funzioni in  $E_{RPA}^\nu$  con la retta  $1/\lambda$  corrisponde a una soluzione dell'equazione di dispersione.

Le soluzioni sono positive e negative ed hanno a due a due valore opposto.

Il grafico ottenuto è analogo a quello già visto nell'ambito della teoria TDA nel modello schematico e le considerazioni sulla variazione dell'energia dello stato eccitato rispetto al puro stato eccitato di campo medio sono le stesse.

Difatti ancora una volta riscontriamo che per  $\lambda$  tendente a zero, le rette  $1/\lambda$  tendono all'infinito e le funzioni in  $E_{RPA}^\nu$ , tendendo asintoticamente ai valori  $\varepsilon_{ph}$  del modello a campo medio.



**Figura 4.1:** Risoluzione grafica dell'equazione di dispersione (4.14).

Nel caso di interazione repulsiva, dunque per  $\lambda > 0$ , gli autovalori dell'energia RPA sono maggiori delle soluzioni imperturbate, mentre nel caso di interazione attrattiva, per  $\lambda < 0$ , gli autovalori RPA sono inferiori a quelli imperturbati.

Le due soluzioni non comprese tra le energie di due stati imperturbati, di cui una per  $\lambda > 0$  e l'altra per  $\lambda < 0$ , non previste dal modello a campo medio, rappresentano gli stati formati da una sovrapposizione coerente degli elementi di matrice dell'interazione residua, caso in cui ogni elemento di matrice contribuisce con lo stesso segno.

La differenza tra le soluzioni ottenute dall'equazione di dispersione TDA e quelle ottenute da quella RPA, oltre che essere quantitativa in termini di stima dell'energia dello stato eccitato, è anche qualitativa: la funzione a secondo membro dell'equazione (4.14) è una funzione dell'energia  $E_{RPA}^2$ , mentre l'equazione di dispersione (3.15) è funzione di  $E_{TDA}$ . Ne consegue che, mentre le soluzioni TDA sono sempre reali, le soluzioni RPA non necessariamente lo sono. Infatti, nel caso di interazione residua fortemente attrattiva ( $\lambda < 0$ ), quando  $\lambda$  diventa inferiore rispetto al valore critico  $\lambda_{cr}$ , ossia per  $\lambda < \lambda_{cr}$ , la soluzione RPA diventa immaginaria.

Possiamo fare una stima del valore di  $\lambda_{cr}$  utilizzando l'equazione (4.14), fissata l'energia di particella-buco  $\varepsilon_{ph} = \varepsilon$ . Definisco  $y = \frac{1}{\lambda}$  e trovo il minimo della funzione

$$y(E) = \frac{2|D_{ph}|^2 \varepsilon}{E^2 - \varepsilon^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{dy(E)}{dx} = -\frac{4|D_{ph}|^2 \varepsilon E}{(E^2 - \varepsilon^2)^2} = 0 \iff E = 0 \quad (4.17)$$

e calcolando la funzione  $y(E)$  nel punto  $E = 0$  ottengo

$$y(0) = -\frac{2|D_{ph}|^2}{\varepsilon} \quad (4.18)$$

$$\implies \lambda_{cr} = -\frac{\varepsilon}{2|D_{ph}|^2} \quad (4.19)$$

Confrontiamo ora l'equazione (4.15) con l'energia dello stato eccitato ottenuta nell'ambito della teoria TDA, espressa dall'equazione (3.16). Dall'equazione (3.16), nel limite in cui  $\varepsilon_{ph}$  sono degeneri, ottengo rispettivamente per la teoria TDA e RPA le due equazioni

$$E_{TDA}^2 = \varepsilon_{ph}^2 + 2\lambda \varepsilon_{ph} \sum_{ph} |D_{ph}|^2 + \lambda^2 \left( \sum_{ph} |D_{ph}|^2 \right)^2 \quad (4.20)$$

$$E_{RPA}^2 = \varepsilon_{ph}^2 + 2\lambda \varepsilon_{ph} \sum_{ph} |D_{ph}|^2. \quad (4.21)$$

Fissate le energie  $\varepsilon_{ph}$  e il potenziale di interazione, la stima dell'energia di uno stato eccitato fornita dalla teoria RPA è sempre più bassa rispetto all'energia fornita dalla teoria TDA,

$$E_{RPA}^2 < E_{TDA}^2 \quad (4.22)$$

e questo è vero sia quando  $\lambda$  è positivo, sia quando è negativo, ed è vero anche nel caso generale in cui gli  $\varepsilon_{ph}$  non sono degeneri.

# Capitolo 5

## Un caso semplice: sistemi con due stati particella-buco

Il caso più semplice che possiamo considerare è quello in cui lo stato eccitato sia ottenuto solamente da due stati particella-buco. Studieremo il sistema così configurato sia attraverso la teoria TDA che attraverso le equazioni RPA, confrontando i risultati ottenuti anche con una applicazione pratica.

### 5.1 Configurazione a due stati particella-buco nella teoria TDA

A partire dall'equazione secolare ottenuta dalla teoria TDA

$$\sum_{p'h'} [(\varepsilon_p - \varepsilon_h) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + \bar{v}_{ph'hp'}] X_{p'h'}^\nu = E_{TDA}^\nu X_{ph}^\nu \quad (5.1)$$

ricaviamo le equazioni per il sistema considerato.

Il sistema di equazioni è in questo caso composto dalle due equazioni

$$(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1}) X_{p_1 h_1}^\nu + \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} X_{p_2 h_2}^\nu = E_{TDA}^\nu X_{p_1 h_1}^\nu \quad (5.2)$$

$$\bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} X_{p_1 h_1}^\nu + (\varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2}) X_{p_2 h_2}^\nu = E_{TDA}^\nu X_{p_2 h_2}^\nu. \quad (5.3)$$

Definendo

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} - E_{TDA}^\nu + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1} & \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} \\ \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} & \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} - E_{TDA}^\nu + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

possiamo riscrivere il sistema questo sistema nella forma

$$A \begin{pmatrix} X_{p_1 h_1}^\nu \\ X_{p_2 h_2}^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Ricaviamo le soluzioni non banali per questo sistema quando il determinante della matrice A è nullo. Imponendo questa condizione otteniamo la seguente equazione di secondo grado in  $E_{TDA}^\nu$

$$(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} - E_{TDA}^\nu + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1})(\bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} - E_{TDA}^\nu + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2}) - \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} = 0 \quad (5.6)$$

che fornisce due valori di  $E_{TDA}^\nu$  radici dell'equazione.

Nel limite in cui il termine di interazione  $\bar{v}$  tende a zero, le due equazioni si disaccoppiano

$$(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1}) X_{p_1 h_1}^\nu = E_{TDA}^\nu X_{p_1 h_1}^\nu \quad (5.7)$$

$$(\varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2}) X_{p_2 h_2}^\nu = E_{TDA}^\nu X_{p_2 h_2}^\nu. \quad (5.8)$$

In questo caso l'energia dello stato eccitato  $E_{TDA}$  coincide esattamente con l'energia che avremmo trovato applicando il modello a campo medio

$$w_1 = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} = E_{HF}^{\nu_1} \quad (5.9)$$

$$w_2 = \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} = E_{HF}^{\nu_2} \quad (5.10)$$

e i valori di  $w_1$  e  $w_2$  sono i valori dell'energia della pura eccitazione particella-buco.

È quindi evidente il ruolo del potenziale residuo di interazione, il quale apporta una variazione dell'energia dello stato eccitato ottenuto con l'hamiltoniana imperturbata Hartree-Fock.

## 5.2 Configurazione a due stati particella-buco nella teoria RPA

Le energie degli stati eccitati nella configurazione a due stati particella-buco nel caso della teoria RPA sono ottenute risolvendo un sistema composto da quattro equazioni, due per ogni stato di particella-buco. A partire dal sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \sum_{p'h'} \left\{ [(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'}) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + \bar{v}_{ph'h'p'}] X_{p'h'}^\nu + \bar{v}_{pp'h'h'} Y_{p'h'}^\nu \right\} &= E_{RPA}^\nu X_{ph}^\nu \\ \sum_{p'h'} \left\{ \bar{v}_{pp'h'h'} X_{p'h'}^\nu + [(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{h'}) \delta_{pp'} \delta_{hh'} + \bar{v}_{ph'h'p'}] Y_{p'h'}^\nu \right\} &= -E_{RPA}^\nu Y_{ph}^\nu \end{aligned} \quad (5.11)$$

fissati gli stati particella-buco  $p_1 h_1$  e  $p_2 h_2$ , ricaviamo il sistema a quattro equazioni nell'incognita  $E_{RPA}$

$$\begin{cases} (\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} - E_{RPA} + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1}) X_{p_1 h_1}^\nu + \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} X_{p_2 h_2}^\nu + \bar{v}_{p_1 p_1 h_1 h_1} Y_{p_1 h_1}^\nu + \\ + \bar{v}_{p_1 p_2 h_1 h_2} Y_{p_2 h_2}^\nu = 0 \\ \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} X_{p_1 h_1}^\nu + (\varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} - E_{RPA} + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2}) X_{p_2 h_2}^\nu + \bar{v}_{p_2 p_1 h_2 h_1} Y_{p_1 h_1}^\nu + \\ + \bar{v}_{p_2 p_2 h_2 h_2} Y_{p_2 h_2}^\nu = 0 \\ \bar{v}_{p_1 p_1 h_1 h_1} X_{p_1 h_1}^\nu + \bar{v}_{p_1 p_2 h_1 h_2} X_{p_2 h_2}^\nu + (\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} + E_{RPA} + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1}) Y_{p_1 h_1}^\nu + \\ + \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} Y_{p_2 h_2}^\nu = 0 \\ \bar{v}_{p_2 p_1 h_2 h_1} X_{p_1 h_1}^\nu + \bar{v}_{p_2 p_2 h_2 h_2} X_{p_2 h_2}^\nu + \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} Y_{p_1 h_1}^\nu + (\varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} + E_{RPA} + \\ + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2}) Y_{p_2 h_2}^\nu = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Definendo

$$s_{11} = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} - E_{RPA} + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1} \quad (5.13)$$

$$s_{22} = \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} - E_{RPA} + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2} \quad (5.14)$$

$$s_{33} = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} + E_{RPA} + \bar{v}_{p_1 h_1 h_1 p_1} \quad (5.15)$$

$$s_{44} = \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} + E_{RPA} + \bar{v}_{p_2 h_2 h_2 p_2} . \quad (5.16)$$

Riscriviamo il sistema (5.12) nella forma

$$\begin{pmatrix} s_{11} & \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} & \bar{v}_{p_1 p_1 h_1 h_1} & \bar{v}_{p_1 p_2 h_1 h_2} \\ \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} & s_{22} & \bar{v}_{p_2 p_1 h_2 h_1} & \bar{v}_{p_2 p_2 h_2 h_2} \\ \bar{v}_{p_1 p_1 h_1 h_1} & \bar{v}_{p_1 p_2 h_1 h_2} & s_{33} & \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} \\ \bar{v}_{p_2 p_1 h_2 h_1} & \bar{v}_{p_2 p_2 h_2 h_2} & \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} & s_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{p_1 h_1}^\nu \\ X_{p_2 h_2}^\nu \\ Y_{p_1 h_1}^\nu \\ Y_{p_2 h_2}^\nu \end{pmatrix} = 0 \quad (5.17)$$

Ricaviamo le soluzioni non banali del sistema imponendo la condizione

$$\begin{vmatrix} s_{11} & \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} & \bar{v}_{p_1 p_1 h_1 h_1} & \bar{v}_{p_1 p_2 h_1 h_2} \\ \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} & s_{22} & \bar{v}_{p_2 p_1 h_2 h_1} & \bar{v}_{p_2 p_2 h_2 h_2} \\ \bar{v}_{p_1 p_1 h_1 h_1} & \bar{v}_{p_1 p_2 h_1 h_2} & s_{33} & \bar{v}_{p_1 h_2 h_1 p_2} \\ \bar{v}_{p_2 p_1 h_2 h_1} & \bar{v}_{p_2 p_2 h_2 h_2} & \bar{v}_{p_2 h_1 h_2 p_1} & s_{44} \end{vmatrix} = 0 . \quad (5.18)$$

Dal calcolo del determinante si ottiene un'equazione di quarto grado in  $E_{RPA}$ , dalle cui radici otteniamo le soluzioni del sistema. Osserviamo che nel caso in cui tutte le matrici  $\bar{v}$  associate al potenziale residuo fossero nulle (sia quelle che correlano gli stati particella-buco che quelle che correlano le particelle nello stato fondamentale), il determinante non sarebbe altro che il prodotto degli elementi sulla diagonale della matrice. Le soluzioni del sistema, analogamente a quanto succedeva per le equazioni TDA nel caso in cui si faceva tendere  $\bar{v}$  a zero, coincidono con i puri stati eccitati particella-buco ottenuti dalla teoria di campo medio.

Infatti per  $\bar{v}$  tendente a zero otteniamo le soluzioni

$$E_{RPA}^{\nu_1} = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} \quad (5.19)$$

$$E_{RPA}^{\nu_2} = \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} \quad (5.20)$$

$$E_{RPA}^{\nu_3} = -(\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1}) \quad (5.21)$$

$$E_{RPA}^{\nu_4} = -(\varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2}) \quad (5.22)$$

di cui le prime due corrispondenti ai puri stati eccitati  $p_1 h_1$  e  $p_2 h_2$ , le stesse trovate nella teoria TDA, e le altre due opposte alle prime, associate al termine correttivo della teoria RPA.

### 5.3 Un esempio: risoluzione numerica del sistema di equazioni RPA nella configurazione a due stati particella-buco

Nell'ambito del modello schematico, possiamo riscrivere il sistema (5.12), assumendo che il potenziale medio residuo che correla gli stati eccitati di particella-buco possa essere scritto come

$$\bar{v}_{ph'h'p'} = \lambda D_{ph} D_{p'h'}^* \quad (5.23)$$

e quello che correla invece le particelle nello stato fondamentale come

$$\bar{v}_{pp'hh'} = \lambda D_{ph} D_{p'h'} \quad (5.24)$$

Assumendo che tutte le matrici  $D_{p_i h_i}$  siano uguali all'identità e che quindi l'interazione residua sia interamente determinata dal fattore  $\lambda$  per l'equazione (5.23) e  $a \cdot \lambda$  per l'equazione (5.24), riscrivo i termini del potenziale medio residuo nella forma

$$\bar{v}_{ph'hp'} = \lambda |D|^2 \quad (5.25)$$

$$\bar{v}_{pp'hh'} = a \lambda |D|^2 \quad (5.26)$$

dove  $a$  è un numero positivo compreso tra 0 e 1, pari al rapporto tra l'interazione media di potenziale residuo associato alle particelle dello stato fondamentale e quello associato ai puri stati eccitati.

Osserviamo che la presenza del fattore  $a$  ci assicura che il termine di potenziale residuo associato alle funzioni d'onda di singola particella sia piccolo rispetto a quello che correla i puri stati eccitati.

In questa schematizzazione, possiamo riscrivere il sistema (5.12) ridefinendo

$$s_{11} = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} - E + \lambda |D|^2 \quad (5.27)$$

$$s_{22} = \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} - E + \lambda |D|^2 \quad (5.28)$$

$$s_{33} = \varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{h_1} + E + \lambda |D|^2 \quad (5.29)$$

$$s_{44} = \varepsilon_{p_2} - \varepsilon_{h_2} + E + \lambda |D|^2. \quad (5.30)$$

e rideterminare l'equazione (5.18)

$$\begin{vmatrix} s_{11} & \lambda |D|^2 & a \lambda |D|^2 & a \lambda |D|^2 \\ \lambda |D|^2 & s_{22} & a \lambda |D|^2 & a \lambda |D|^2 \\ a \lambda |D|^2 & a \lambda |D|^2 & s_{33} & \lambda |D|^2 \\ a \lambda |D|^2 & a \lambda |D|^2 & a \lambda |D|^2 & s_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (5.31)$$

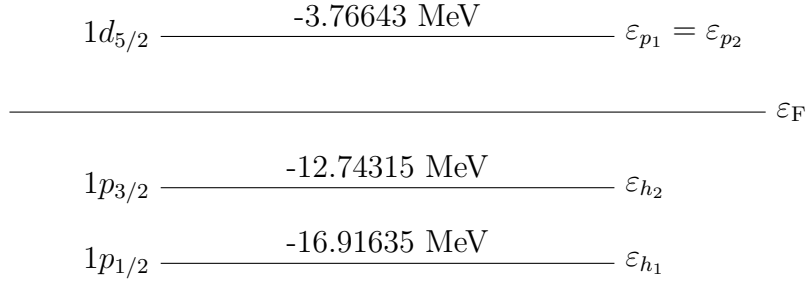
che ci permette, attraverso il calcolo del determinante, di trovare gli autovalori dell'energia che soddisfano il sistema.

Calcolando il determinante otteniamo una equazione di quarto grado in  $E$ , la cui risoluzione ci fornisce gli autovalori dell'energia della teoria RPA. Osserviamo ancora una volta che al tendere di  $\lambda$  a zero, calcolando il determinante e risolvendo l'equazione in  $E$  otteniamo le soluzioni della teoria TDA, mentre al tendere di  $a$  a zero, le soluzioni coincidono con gli stati eccitati imperturbati di campo medio.

A partire dal calcolo di questo determinante, definiti gli stati  $\varepsilon_{ph}$ , possiamo dunque opportunamente ottenere le energie degli stati eccitati per un sistema con due stati particella-buco sia nella teoria TDA che in quella RPA.

In appendice A è riportato un programma di calcolo numerico per la risoluzione dell'equazione di quarto grado calcolata attraverso il determinante (5.31), che fornisce le energie degli stati eccitati nelle approssimazioni fatte nella derivazione dell'equazione (5.31). Qui di seguito riporterò i risultati ottenuti dall'esecuzione del programma.





**Figura 5.1:** Spettro nucleare dell'  $^{16}_8\text{O}_8$  intorno alla superficie di Fermi. Le energie associate ai livelli sono quelle ottenute sperimentalmente nel caso dei protoni.

Ho preso in considerazione lo spettro nucleare del nucleo  $^{16}_8\text{O}_8$  intorno alla superficie di Fermi nel caso dei protoni riportato in figura 5.1. Gli stati particella-buco considerati sono

$$\varepsilon_{p_1 h_1} = \varepsilon_{p_1}(1d_{5/2}) - \varepsilon_{h_1}(1p_{1/2}) \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_{p_2 h_2} = \varepsilon_{p_2}(1d_{5/2}) - \varepsilon_{h_2}(1p_{3/2}). \quad (5.33)$$

Le energie dei livelli energetici sono state prese da risultati sperimentali[AUD03]. In base a questi valori ho fissato i valori di  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$  inseriti nel programma di calcolo

$$\varepsilon_{p_1 h_1} = 13.14992 \text{ MeV} \quad (5.34)$$

$$\varepsilon_{p_2 h_2} = 4.17320 \text{ MeV} \quad (5.35)$$

Nella figure è mostrato l'andamento dell'equazione di quarto grado in  $E$  con i valori di  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$ , ognuna per un diverso valore di  $\lambda$ .

Le radici del polinomio in  $E$  corrispondono all'intersezione della curva che rappresenta la funzione in  $E$  con l'asse delle ascisse. Le radici ottenute dall'equazione sono quattro, a due a due opposte.

La figura 5.2 è ottenuta imponendo che il parametro  $\lambda$  sia nullo: difatti le radici trovate hanno il valore degli stati eccitati imperturbati scelti  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$ .

La figura 5.3 è ottenuta invece scegliendo  $\lambda = 4$ : siamo in presenza di una interazione residua repulsiva e le radici trovate, come previsto, sono maggiori di quelle dei puri stati particella-buco

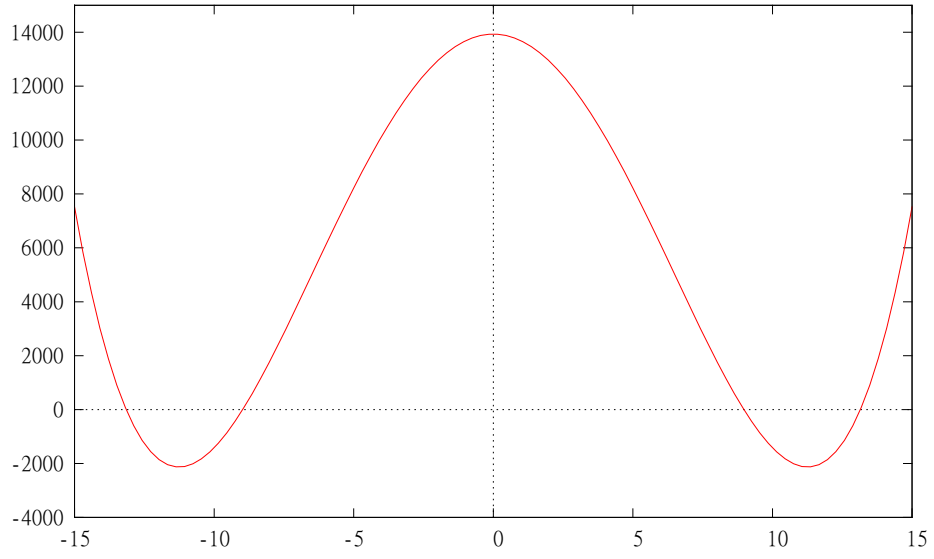
$$E = 10.55 \text{ MeV} \quad (5.36)$$

$$E = 19.60 \text{ MeV} \quad (5.37)$$

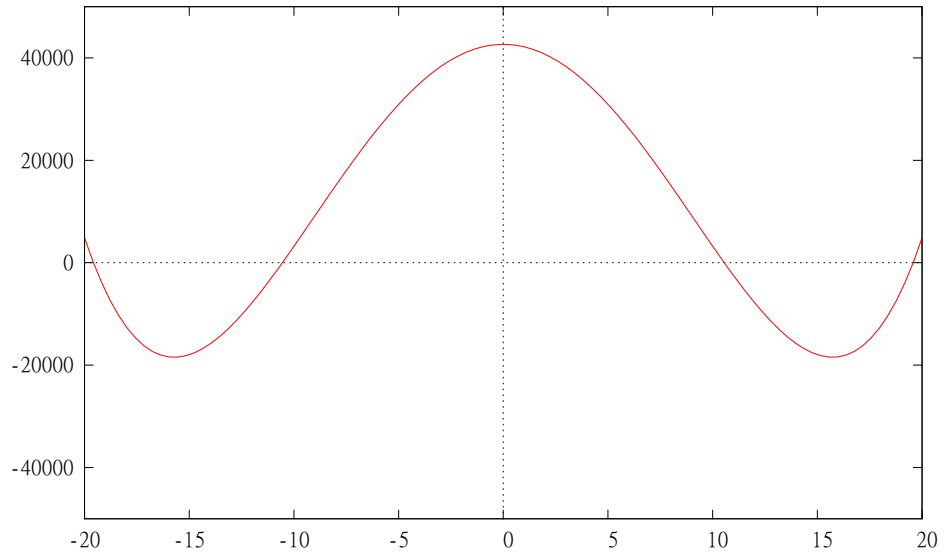
Infine la figura 5.4 è ottenuta avendo scelto un potenziale residuo attrattivo  $\lambda = -4$ : in questo caso le soluzioni dell'equazione sono inferiori in energia rispetto ai due stati eccitati imperturbati  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$

$$E = 2.56 \text{ MeV} \quad (5.38)$$

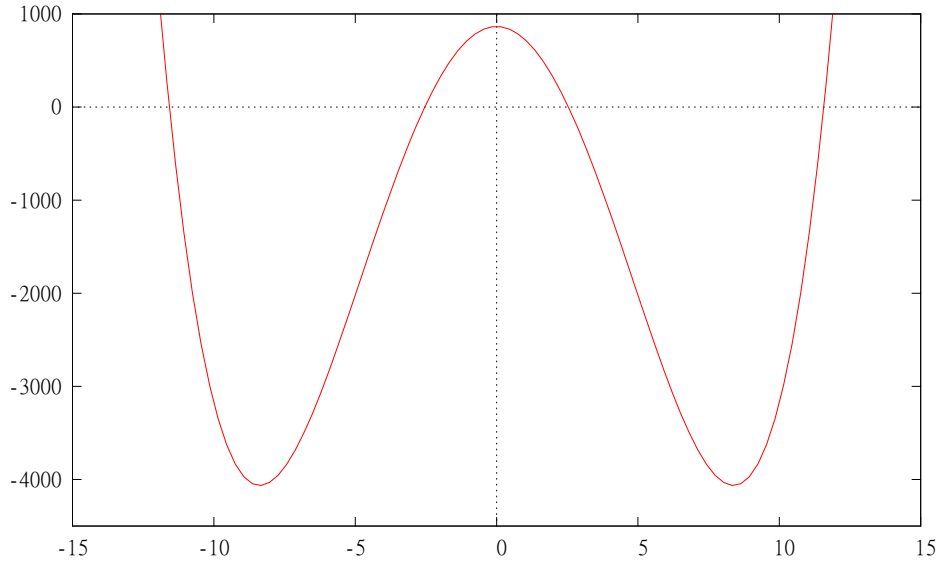
$$E = 11.57 \text{ MeV}. \quad (5.39)$$



**Figura 5.2:** Radici del polinomio di quarto grado in  $E$  fissati i valori di  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$  come descritto e fissato  $\lambda = 0$ .



**Figura 5.3:** Radici del polinomio di quarto grado in  $E$  fissati i valori di  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$  come descritto e fissato  $\lambda = 4$ .



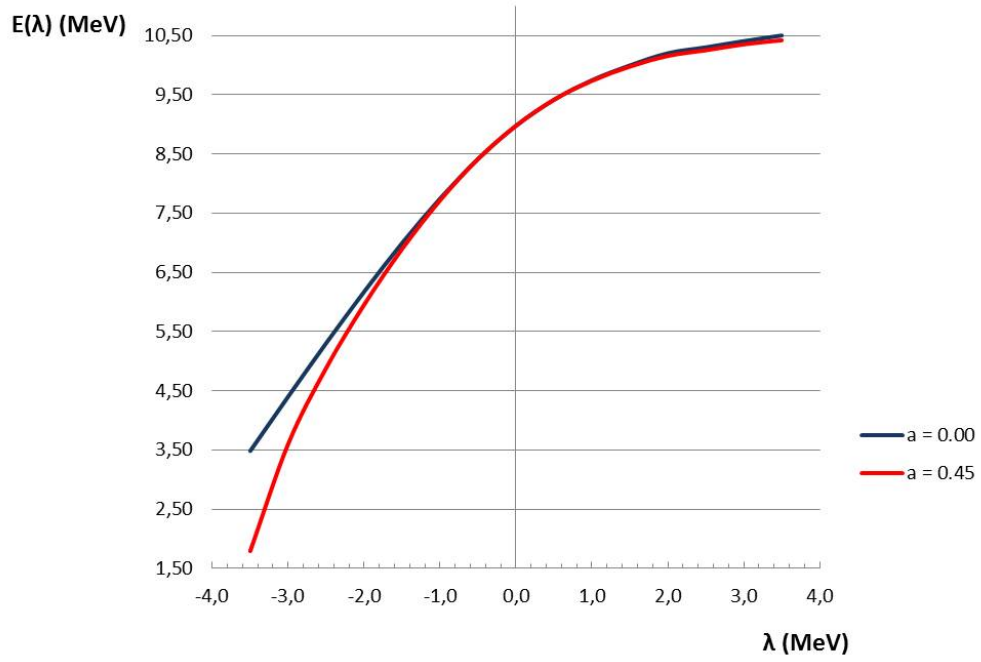
**Figura 5.4:** Radici del polinomio di quarto grado in  $E$  fissati i valori di  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$  come descritto e fissato  $\lambda = -4$ .

Nelle pagine seguenti sono riportati i grafici ottenuti attraverso il programma di calcolo per l'equazione ottenuta dalla condizione (5.31), al variare dei parametri  $\lambda$  e  $a$ . Il programma fornisce la stima delle radici dell'equazione di quarto grado ottenuta da (5.31). Delle quattro radici dell'equazione, due positive e due negative e a due a due uguali in modulo, consideriamo solo quelle positive, aventi significato fisico.

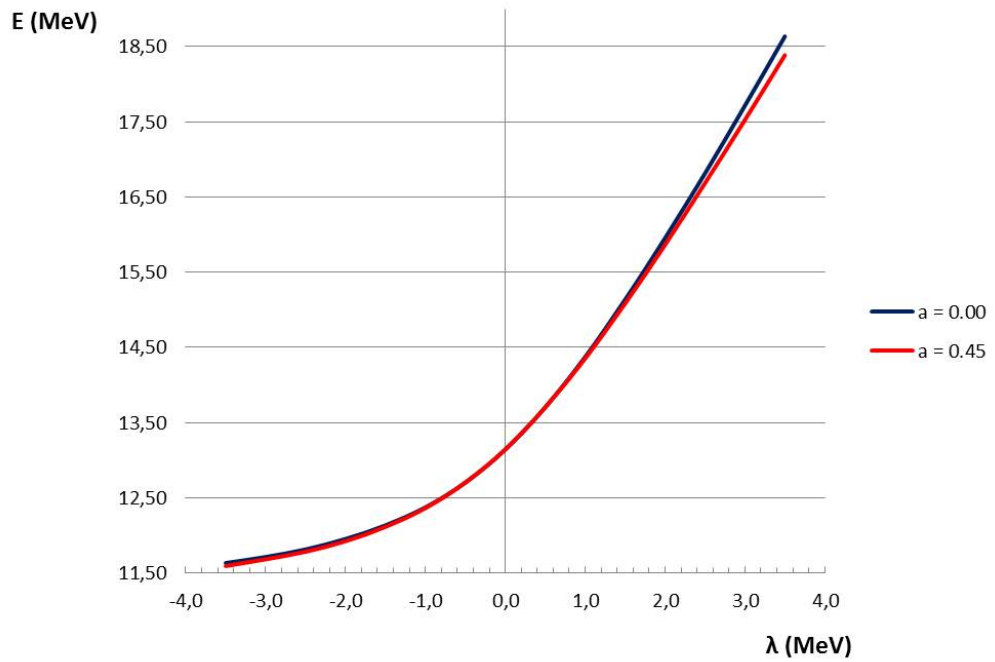
Le prime due figure 5.5 e 5.6 riportano i risultati di misura dell'energia dello stato eccitato in approssimazione TDA, dunque fissato  $a = 0$ , e in approssimazione RPA, fissato  $a = 0.45$ , per la prima e per la seconda radice. La curva in rosso riporta i risultati ottenuti in approssimazione RPA, quella in blu i risultati in approssimazione TDA. Il punto  $\lambda = 0$  fornisce una stima dell'energia dello stato eccitato imperturbato, per  $\lambda < 0$  la funzione dell'energia decresce via via che ci allontaniamo dall'origine, mentre per  $\lambda > 0$  cresce al crescere di  $\lambda$  e quindi cresce rispetto al puro stato eccitato di campo medio.

Osserviamo che l'energia ottenuta in approssimazione TDA è tendenzialmente maggiore di quella trovata in approssimazione RPA.

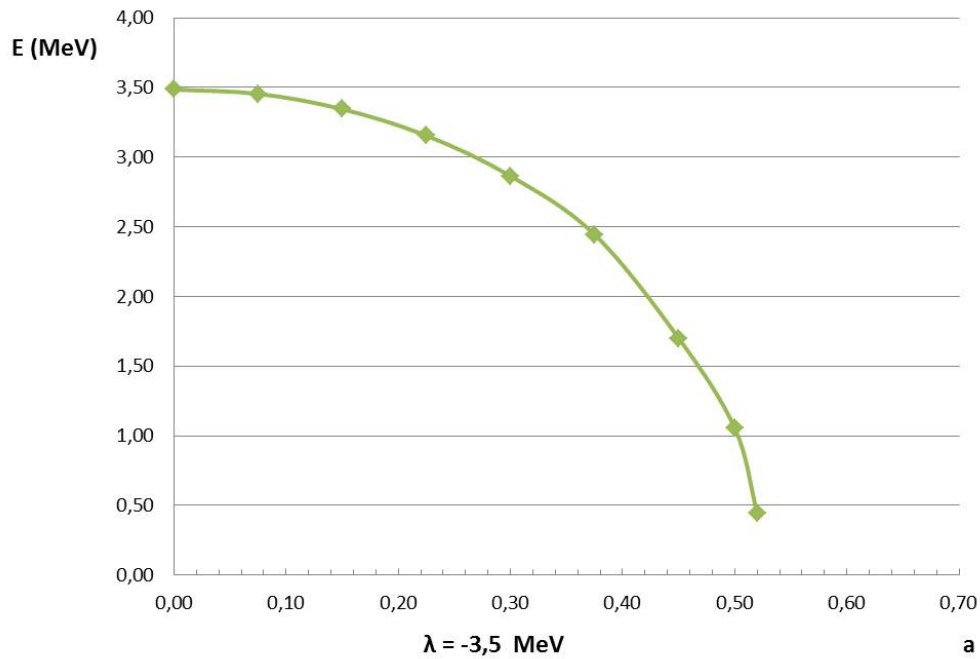
Nelle ultime due figure 5.7 e 5.8 vediamo l'effetto di una interazione fortemente attrattiva sulle due radici. Oltre che osservare l'andamento decrescente dell'energia all'aumentare di  $a$  per entrambe le soluzioni, è interessante il confronto dei risultati ottenuti per le due radici: il programma, a partire da  $a \approx 0.52$ , fornisce una sola radice anziché due. Siamo infatti, per quanto riguarda la prima radice, nel caso limite in cui il potenziale residuo diviene fortemente attrattivo e la soluzione a energia più bassa diviene immaginaria, proprio come avevamo previsto nella discussione della rappresentazione grafica dell'equazione di dispersione RPA.



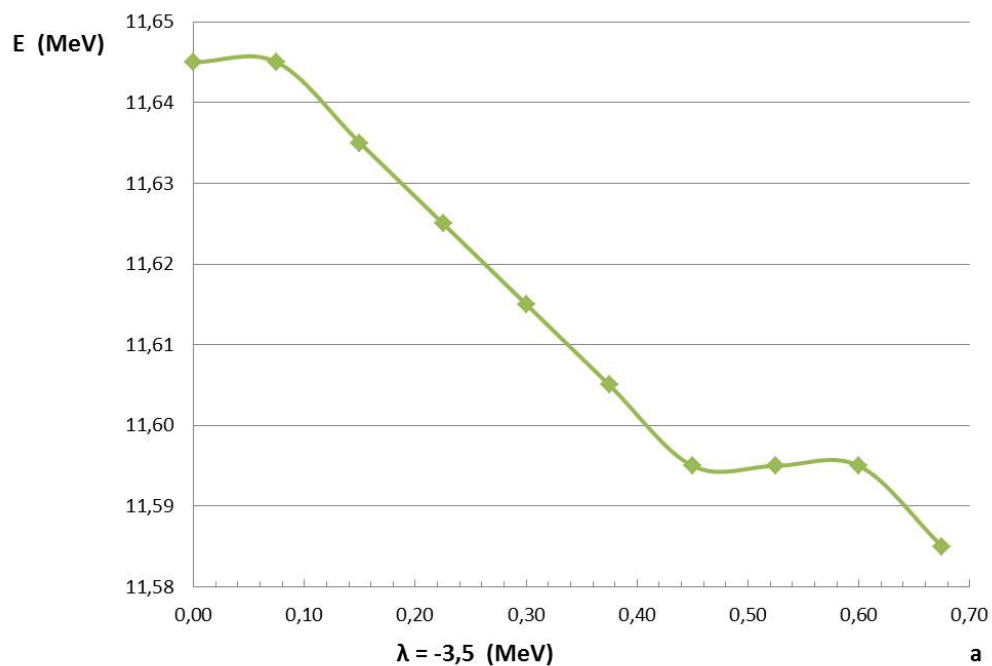
**Figura 5.5:** Energia dello stato eccitato in approssimazione TDA, fissato  $a = 0$ , al variare di  $\lambda$ , e in approssimazione RPA, fissato  $a = 0.45$ , per la prima radice dell'equazione.



**Figura 5.6:** Energia dello stato eccitato in approssimazione TDA, fissato  $a = 0$ , al variare di  $\lambda$ , e in approssimazione RPA, fissato  $a = 0.45$ , per la seconda radice dell'equazione.



**Figura 5.7:** Variazione dell'energia al variare del parametro  $a$  per potenziale di interazione fortemente attrattivo, fissato  $\lambda = -3.5$ , per la prima radice dell'equazione



**Figura 5.8:** Variazione dell'energia al variare del parametro  $a$  per potenziale di interazione fortemente attrattivo, fissato  $\lambda = -3.5$ , per la seconda radice dell'equazione



# Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato affrontato il problema della descrizione degli stati eccitati nucleari. Abbiamo messo in evidenza i limiti che teorie basate su modelli di campo medio riscontrano nella descrizione di tali stati e l'inadeguatezza di modelli a particelle indipendenti, come quelli di campo medio, nella descrizione di stati collettivi.

Abbiamo introdotto la teoria TDA, che descrive lo stato eccitato del sistema come combinazione lineare di eccitazioni particella-buco. La teoria TDA permette la descrizione di stati eccitati collettivi nei termini in cui le eccitazioni di particella-buco sono correlate dal termine di potenziale residuo, trascurato nel modello di campo medio.

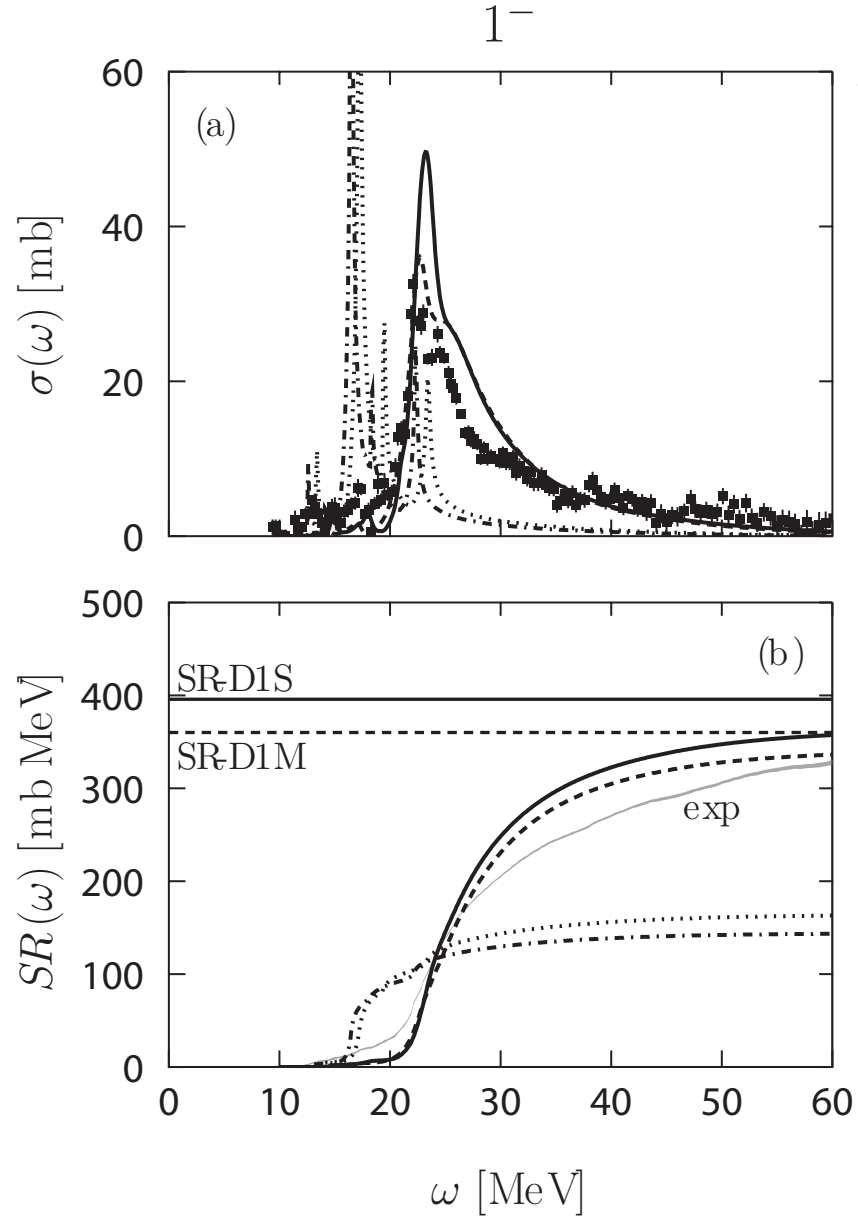
La teoria TDA si basa sull'ipotesi che lo stato fondamentale sia quello descritto dal modello a campo medio, ovvero che tutti gli stati al di sotto della superficie di Fermi siano totalmente occupati e quelli al di sopra completamente vuoti.

Per migliorare le ipotesi della teoria TDA abbiamo introdotto la teoria RPA. La teoria RPA si basa anch'essa sulla descrizione dello stato eccitato in termini di eccitazioni particella-buco e migliora la teoria TDA in quanto associa al termine di potenziale residuo non solo le correlazioni delle eccitazioni particella-buco, ma anche le correlazioni esistenti tra le funzioni d'onda di singola particella che descrivono lo stato fondamentale.

L'importanza dei moti collettivi all'interno del nucleo si evince dalla figura 5.9 [DED11]. Nel pannello (a) di questa figura confrontiamo i dati sperimentali di sezione d'urto di fotoassorbimento totale sul nucleo di  $^{16}\text{O}$  [AHR75] con risultati di calcoli fatti nel modello a particelle indipendenti e con la teoria RPA. La linea a punti e a punto-linea mostrano i risultati ottenuti nel modello a campo medio con due diverse interazioni. Le linee continua e tratteggiata mostrano invece i risultati ottenuti dal calcolo RPA con le stesse interazioni. È evidente che soltanto i calcoli RPA riescono a descrivere la presenza della risonanza gigante di dipolo.

L'importanza della descrizione RPA di questa eccitazione risulta evidente anche dal pannello (b) dove vengono mostrati gli integrali delle sezioni d'urto del pannello (a) in funzione della massima energia di integrazione. Mentre i risultati RPA riproducono l'andamento sperimentale, i risultati del modello a particelle indipendenti sono completamente sbagliati.

Anche se la posizione del picco viene ben riprodotta nella teoria RPA, i dettagli della risonanza non sono ben descritti. Questo implica che anche la teoria RPA dovrebbe essere migliorata. Un possibile miglioramento potrebbe essere quello di considerare eccitazioni più complesse di quelle di singola particella-buco.



**Figura 5.9:** (a) Sezione d'urto totale di fotoassorbimento dell' $^{16}\text{O}$  per lo stato eccitato  $1^-$  e (b) integrali delle sezioni d'urto in funzione della massima energia di integrazione. Le linee continua e tratteggiata rappresentano i risultati ottenuti mediante il modello RPA, la linea punteggiata i risultati ottenuti media la teoria di campo medio e la linea in grigio i risultati sperimentali.



# Appendice A

## Programma per il calcolo di $E$ nella configurazione a due stati $ph$

Codice A.1: File RPA1.c

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  #include <math.h>
4  #define RADICI "radici.txt"
5
6  /* definisco i valori da stampare nel
7     file di output del programma*/
8  typedef struct {
9     float L;
10    float k;
11    float r[1];
12 } valori;
13
14 float L;
15 float D=1;
16 float ep1;
17 float ep2;
18 float eh1;
19 float eh2;
20 float k;
21 double sa1,sa2,sa3,sa4,t,sb1,sb2,sb3,sb4;
22 float a[500];
23 float b[500];
24 float r[1000];
25 int i,j;
26 const double d=0.5;
27 /*passo con cui determino gli estremi dell'intervallo in cui
28    studio la funzione*/
29
30 double fa,fb;
```

```

31 float fprod;
32 double x[500],y[500];
33 int p=0;
34 int n=0;
35 char choise='n';
36 float fxfy;
37
38 valori u;
39
40 main () {
41     do{
42         printf("Inserire il valore di Lambda: ");
43         scanf("%f",&L);
44         do{
45             k=p*0.075;
46             /*fissato lambda, trovo le radici per i dieci valori
47              i k ottenuti al variare di p*/
48
49             eh1=-16.91635;
50             eh2=-12.74315;
51             ep1=-3.76643;
52             ep2=-3.76643;
53
54             /*calcolo del minimo e del massimo tra ep1-eh1
55              e ep2-eh2*/
56             float min;
57             float max;
58             float ph1,ph2,absph1,absph2;
59             ph1=ep1-eh1;
60             ph2=ep2-eh2;
61
62             if (ph1<=ph2){
63                 min=ph1;
64                 max=ph2;
65             } else {
66                 min=ph2;
67                 max=ph1;
68             }
69
70             printf("epsilon_ph1= %f\nepsilon_ph2= %f\n\n",ph1,
71                 ph2);
72
73             int n_intervalli=(int) (2*(max)/d);
74             /*numero di intrvalli sondati*/
75             for (i=0;i<=n_intervalli;i++) {
76                 /*definisco gli estremi dell'intervallo in
77                  cui calcolo il valore
78                  della funzione*/
79                 a[i]=i*d;
80                 b[i]=(i+1)*d;

```

```

78
79     t=L*D;
80     sa1=ep1-eh1+t-a[i];
81         sa2=ep2-eh2+t-a[i];
82         sa3=ep1-eh1+t+a[i];
83         sa4=ep2-eh2+t+a[i];
84         sb1=ep1-eh1+t-b[i];
85         sb2=ep2-eh2+t-b[i];
86         sb3=ep1-eh1+t+b[i];
87         sb4=ep2-eh2+t+b[i];
88
89         /*calcolo la funzione
          ottenuta dal calcolo del
          determinante
          (5.31) negli estremi dell'
          intervallo*/
90
91
92
93
94     fa=sa1*(sa2*(sa3*sa4-t*t)-k*t*(k*t*
          sa4-k*t*t)+k*t*(k*t*t-sa3*k*t))-t
          *(t*(sa3*sa4-t*t)-k*t*(k*t*sa4-k*
          t*t)+k*t*(k*t*t-sa3*k*t))+k*t*(t
          *(k*t*sa4-k*t*t)-k*t*(sa2*sa4-k*k
          *t*t)+k*t*(sa2*t-k*k*t*t))-k*t*(t
          *(k*t*t-sa3*k*t)-k*t*(sa2*t-k*k*t
          *t)+k*t*(sa2*sa3-k*k*t*t));
95     fb=sb1*(sb2*(sb3*sb4-t*t)-k*t*(k*t*
          sb4-k*t*t)+k*t*(k*t*t-sb3*k*t))-t
          *(t*(sb3*sb4-t*t)-k*t*(k*t*sb4-k*
          t*t)+k*t*(k*t*t-sb3*k*t))+k*t*(t
          *(k*t*sb4-k*t*t)-k*t*(sb2*sb4-k*k
          *t*t)+k*t*(sb2*t-k*k*t*t))-k*t*(t
          *(k*t*t-sb3*k*t)-k*t*(sb2*t-k*k*t
          *t)+k*t*(sb2*sb3-k*k*t*t));
96     printf("fx= %f      x= %f\n",fa,a[i]);
97
98     fprod=fa*fb;
99
100         /*se la funzione si annulla
          in un estremo dell'
          intervallo
          allora ho trovato una
          radice*/
101
102         if (fa==0) {
103             r[n]=a[i];
104             n++;
105         }
106         if (fb==0) {
107             r[n]=b[i];

```

```

108         n++;
109     }
110     /*quando il prodotto della funzione calcolata
111        nei due estremi
112        dell'intervallo diventa negativo, allora
113        nell'intervallo
114        esiste una radice; divido l'intervallo in
115        questione in 50
116        sottointervalli e ritrovo con lo stesso
117        procedimento la radice:
118        impongo che la radice si trovi esattamente
119        in mezzo al sottointervallo*/
120
121     if (fprod<0) {
122         int j=0;
123
124         do {
125
126             float fx,sx1,sx2,sx3,sx4;
127             float fy,sy1,sy2,sy3,sy4;
128
129             x[j]=a[i]+j*(d/50);
130             y[j]=a[i]+(j+1)*(d/50);
131
132             sx1=ep1-eh1+t-x[j];
133             sx2=ep2-eh2+t-x[j];
134             sx3=ep1-eh1+t+x[j];
135             sx4=ep2-eh2+t+x[j];
136             sy1=ep1-eh1+t-y[j];
137             sy2=ep2-eh2+t-y[j];
138             sy3=ep1-eh1+t+y[j];
139             sy4=ep2-eh2+t+y[j];
140
141             fx=sx1*(sx2*(sx3*sx4-t*t)-k*t*(k*t*sx4-k*t*
142                t)+k*t*(k*t*t-sx3*k*t))-t*(t*(sx3*sx4-t*
143                t)-k*t*(k*t*sx4-k*t*t)+k*t*(k*t*t-sx3*k*
144                t))+k*t*(t*(k*t*sx4-k*t*t)-k*t*(sx2*sx4-
145                k*k*t*t)+k*t*(sx2*t-k*k*t*t))-k*t*(t*(k*
146                t*t-sx3*k*t)-k*t*(sx2*t-k*k*t*t)+k*t*(
147                sx2*sx3-k*k*t*t));
148             fy=sy1*(sy2*(sy3*sy4-t*t)-k*t*(k*t*sy4-k*t*
149                t)+k*t*(k*t*t-sy3*k*t))-t*(t*(sy3*sy4-t*
150                t)-k*t*(k*t*sy4-k*t*t)+k*t*(k*t*t-sy3*k*
151                t))+k*t*(t*(k*t*sy4-k*t*t)-k*t*(sy2*sy4-
152                k*k*t*t)+k*t*(sy2*t-k*k*t*t))-k*t*(t*(k*
153                t*t-sy3*k*t)-k*t*(sy2*t-k*k*t*t)+k*t*(
154                sy2*sy3-k*k*t*t));
155
156             fxfy=fx*fy;

```

```

141         printf("fx ciclo = %f      x= %f\n",fy,y[j]);
142         r[n]=(x[j]+y[j])/2;
143         j++;
144
145         }while (fxfy>0);
146         n++;
147     }
148 }
149
150 int c;
151 float sr1,sr2,sr3,sr4;
152 float absfr;
153
154 for(c=0;c<=n;c++) {
155     sr1=ep1-eh1+t-r[c];
156     sr2=ep2-eh2+t-r[c];
157     sr3=ep1-eh1+t+r[c];
158     sr4=ep2-eh2+t+r[c];
159     float fr;
160     fr=sr1*(sr2*(sr3*sr4-t*t)-k*t*(k*t*sr4-k*t*
        t)+k*t*(k*t*t-sr3*k*t))-t*(t*(sr3*sr4-t*
        t)-k*t*(k*t*sr4-k*t*t)+k*t*(k*t*t-sr3*k*
        t))+k*t*(t*(k*t*sr4-k*t*t)-k*t*(sr2*sr4-
        k*k*t*t)+k*t*(sr2*t-k*k*t*t))-k*t*(t*(k*
        t*t-sr3*k*t)-k*t*(sr2*t-k*k*t*t)+k*t*(
        sr2*sr3-k*k*t*t));
161
162     absfr=fabs(fr);
163
164     if(absfr<100){
165         printf("\nLa radice x%d= %f\n",c+1,r[
            c]);
166         printf("f(x%d)= %f\n",c+1,fr);
167         u.r[c]=r[c];
168     }
169 }
170 FILE *fp;
171 fp= fopen (RADICI,"a");
172 u.L=L;
173 u.k=k;
174 /*stampo in un file di output i valori di a,
    lambda e
175 le radici trovate con i valori di a e lambda
    dati*/
176 fprintf(fp,"%f\t\t%f\t\t%f\t\t%f\n",u.L,u.k,u.r
    [0],u.r[1]);
177
178 printf("Dati scritti su file!\n");
179 fclose (fp);
180 p++;

```

```
181         n=0;
182     } while (p<10);
183
184     p=0;
185     printf("vuoi rieseguire il programma? ");
186     scanf("%s",&choise);
187
188     } while((choise=='s') || (choise=='S'));
189     system ("pause");
190 }
```

---

# Bibliografia

- [AHR75] J.Ahrens et al., Nucl.Phys., A251 (1975) 479
- [AUD03] G.Audi, A.H.Wapstra, C.Thibault, Nucl.Phys. A729 (2003) 337
- [DED11] V.De Donno, G.Co', M.Anguiano, A.M.Lallena, Phys.Rev. C83 (2011) 044324
- [FET71] A.Fetter, J.D.Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw-Hill, New York (1971)
- [GCO12] G.Co'et al., Phys.Rev. C85, 024322 (2012)
- [POV98] B.Povh, K.Rith, C.Scholz, F.Zetsche, Particelle e Nuclei, Bollati Boringhieri, Torino (1998)
- [RIN80] P.Ring P.Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Springer-Verlag, New York (1980)
- [ROW70] D.Rowe, Nuclear Collective Motion - Models and Theory, Methuen and Co. LTD, London (1970)





# Ringraziamenti

Questa tesi non esisterebbe, io non esisterei per come sono, senza mio fratello e la sua infinita pazienza, la solidità delle amiche di sempre Carmen Serena Nunzia e Sara, la certezza di Roberto, la condivisione e l'infinito supporto di Marta Francesco Mosè Federica e Damiano, l'aria di Firenze, Francesca Barbara Claudia Elisa e la loro infinita ricchezza, la gioia della famiglia imprò. Per questo grazie.



# Errata corige

- Pag.2, le equazioni (1.4) e (1.5)

$$\mathcal{H} = \left( \sum_{i=1}^N T(i) + \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \right) + \left( \sum_{i < j}^N V(i, j) - \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \right) = \mathcal{H}_0 + V_{res} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N T(i) + \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \quad (\text{A.2})$$

al posto delle equazioni

$$\mathcal{H} = \left( \sum_{i=1}^N T(i) - \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \right) + \left( \sum_{i < j}^N V(i, j) - \sum_{i=1}^N V_{MF}(i) \right) = \mathcal{H}_0 + V_{res} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^N T(i) - \sum_{i=1}^N V_{MF}(i). \quad (\text{A.4})$$

- Pag.3, l'equazione (A.6)

$$h(i)\varphi_\alpha(i) = \varepsilon_\alpha \varphi_\alpha(i). \quad (\text{A.5})$$

al posto di

$$h(i)\varphi_\alpha(i) = \varepsilon_k \varphi_\alpha(i). \quad (\text{A.6})$$

- Pag.29, l'espressione  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_2 h_2}$  al posto di  $\varepsilon_{p_1 h_1}$  e  $\varepsilon_{p_1 h_1}$ .