

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**STUDIO DEGLI IPERNUCLEI  
CON UN MODELLO A CAMPO  
MEDIO**

Relatore:  
Prof. G. Co'

Candidato:  
A. Botrugno

Anno Accademico 1998-99

# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>IPERNUCLEO IN UN CAMPO MEDIO</b>	<b>3</b>
2.1	$\Lambda$ -IPERNUCLEO . . . . .	3
2.1.1	La particella lambda . . . . .	3
2.1.2	L'ipernucleo . . . . .	4
2.1.3	La produzione di $\Lambda$ -ipernuclei . . . . .	5
2.1.4	Caratteristiche dei $\Lambda$ -ipernuclei . . . . .	8
2.1.5	Evidenze sperimentali . . . . .	9
2.2	CAMPO MEDIO . . . . .	10
2.2.1	Il problema a molti corpi . . . . .	10
2.2.2	L'ipotesi del campo medio . . . . .	11
2.2.3	Considerazioni sull'utilizzo del campo medio . . . . .	12
	<b>Bibliografia</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>METODI RISOLUTIVI PER UN POTENZIALE CENTRALE</b>	<b>16</b>
3.1	SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE . . . . .	16
3.1.1	L'equazione differenziale . . . . .	16
3.1.2	Forma analitica delle soluzioni . . . . .	17
3.1.3	L'algoritmo di Numerov . . . . .	18
3.1.4	Shooting method . . . . .	20
3.2	IL PROGRAMMA . . . . .	22
3.2.1	Il programma lambda.c . . . . .	24
3.2.2	Test di convergenza . . . . .	24
3.2.3	Altri test . . . . .	26
3.2.4	Test per il lambda.c . . . . .	26
	<b>Bibliografia</b>	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>CONFRONTO CON I DATI SPERIMENTALI</b>	<b>29</b>
4.1	STATO ATTUALE DELLA PARAMETRIZZAZIONE . . . . .	30
4.2	DATI SPERIMENTALI . . . . .	31

4.3	REGOLE PER IL FIT . . . . .	33
4.4	PARAMETRIZZAZIONI . . . . .	34
4.4.1	Nessuna dipendenza da A . . . . .	34
4.4.2	Dipendenza del coefficiente del raggio da A . . . . .	39
4.4.3	Dipendenza della profondità del potenziale da A . . . . .	46
4.5	RISULTATI . . . . .	52
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>54</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>
<b>6</b>	<b>Appendice A</b>	<b>56</b>
<b>7</b>	<b>Appendice B</b>	<b>58</b>

# Capitolo 1

## INTRODUZIONE

L'interesse per lo studio degli ipernuclei ha diverse motivazioni, che vanno dal desiderio di comprendere il comportamento di questi sistemi a molti corpi alle possibili implicazioni legate alla teoria delle interazioni nucleari forti nel regime non perturbativo.

Data l'instabilità degli iperoni, è estremamente difficile ottenere informazioni dirette sull'interazione iperone-nucleone attraverso esperimenti di diffusione, come avviene nel caso dell'interazione nucleone-nucleone. È invece possibile studiare l'interazione iperone-nucleone in sistemi in cui l'iperone si trova legato ad altri nucleoni in un ipernucleo.

Gli ipernuclei ideali per questo tipo di studi sono quelli in cui l'iperone è una lambda. In questo caso i decadimenti possibili avvengono solo attraverso l'interazione debole. Questi nuclei hanno una vita media sufficientemente lunga da produrre segnali percepibili dai rivelatori, ed è quindi possibile in questo modo misurarne alcune proprietà come la massa.

Per difficoltà tecniche i dati di questo tipo presenti in letteratura sono stati misurati su un numero ristretto di nuclei. Per questo motivo si guarda con interesse agli esperimenti che sono in corso ai laboratori nazionali dell'INFN di Frascati. Qui è stato costruito un rivelatore detto FINUDA per studiare la fisica degli ipernuclei sfruttando il decadimento di particelle  $\phi$  prodotte da DAΦNE. (Il principale canale di decadimento per la particella  $\phi$  è il processo  $\phi \rightarrow K^+ K^-$ . Queste particelle possono essere utilizzate per la produzione di ipernuclei (vedi cap.1)). Tra i vari obiettivi in questo programma di ricerca vi è la determinazione degli spettri energetici della lambda in nuovi  $A$ -ipernuclei.

Purtroppo gli ipernuclei prodotti in laboratorio sono estremamente difficili da descrivere dal punto di vista teorico perché presentano effetti peculiari, come deformazioni, che riguardano il nucleo in esame piuttosto che il sistema nucleone-iperone. Dal punto di vista del teorico, l'ipernucleo ideale è quello composto da un core nucleonico doppio magico quindi sferico e dalla perturbazione provocata dalla presenza della lambda.

Calcoli microscopici, cioè che utilizzano interazioni che riproducono i sistemi di due nucleoni e di interazioni lambda-nucleone, sono stati effettuati con tecniche diverse per nuclei come  $^{17}\text{O}_\Lambda$  e  $^{41}\text{Ca}_\Lambda$ .

L'esigenza di confrontare i risultati ottenuti da questi calcoli con i valori empirici delle energie di legame ha motivato il presente lavoro che aveva come obiettivo quello di stimare le energie di legame della lambda in ipernuclei con core nucleonico doppio magico ed estrapolare questi valori alla materia nucleare.

Il lavoro rappresenta la descrizione delle energie di legame della lambda utilizzando un modello in cui l'interazione di questo iperone con il resto del nucleo viene trattata in termini di campo medio. I parametri del potenziale medio utilizzato sono stati fissati in modo da riprodurre al meglio le energie di legame della lambda note sperimentalmente. Utilizzando varie parametrizzazioni sono poi state stimate le energie di legame per i nuclei di interesse teorico.

Il presente si divide in tre capitoli. Nel primo è stato discusso l'apparato teorico che è alla base di questo lavoro. È stata fatta una rapida presentazione dell'ipernucleo e del modello a campo medio evidenziando solo gli aspetti di interesse per questo lavoro. Nel secondo capitolo sono state presentate le tecniche numeriche e computazionali utilizzate per la soluzione dell'equazione di Schrödinger ed infine nel terzo sono riportati i risultati ottenuti.

## Capitolo 2

# IPERNUCLEO IN UN CAMPO MEDIO

### 2.1 $\Lambda$ -IPERNUCLEO

#### 2.1.1 La particella lambda

Gli adroni sono costituiti da quarks e si dividono in due grandi famiglie: barioni e mesoni.

Le principali proprietà dei barioni sono determinate da tre quarks, quelle dei mesoni da un quark e da un antiquark.

In tab. 1 è riportato un elenco delle proprietà di alcuni barioni.

particella	quarks	spin	isospin	stranezza	massa (MeV)	Vita media (s)
$p$	uud	1/2	1/2	0	938.276	Stabile
$n$	udd	1/2	1/2	0	939.566	$896 \pm 10$
$\Lambda$	uds	1/2	0	-1	1115.63	$2.631 \times 10^{-10}$
$\Sigma^+$	uus	1/2	1	-1	1189.37	$0.799 \times 10^{-10}$
$\Sigma^0$	uds	1/2	1	-1	1192.55	$7.4 \times 10^{-20}$
$\Sigma^-$	dds	1/2	1	-1	1197.43	$1.479 \times 10^{-10}$
$\Xi^0$	uss	1/2	1/2	-2	1314.9	$2.90 \times 10^{-10}$
$\Xi^-$	dss	1/2	1/2	-2	1321.32	$1.63 \times 10^{-10}$
$\Omega^-$	sss	3/2	0	-3	1672.43	$0.82 \times 10^{-10}$

Tab.1 principali proprietà di alcuni iperoni.

Per *iperone* s'intende un barione con stranezza non nulla. Quindi tra tutti i barioni della tabella solo il doppietto di isospin protone-neutrone non fa parte degli iperoni. Dato che l'interazione forte conserva la stranezza,

per produrre un iperone mediante quest'interazione è necessario far uso di particelle dotate di stranezza, oppure provocare la creazione di una coppia  $s\bar{s}$ . In seguito sono elencati alcuni dei processi che vengono utilizzati per la produzione della particella lambda (a fianco è anche indicata l'espressione della reazione in termini di quarks).

$$K^- + n \rightarrow \Lambda + \pi^- \quad \bar{u}s + udd \rightarrow uds + \bar{u}d \quad (2.1)$$

$$\pi^+ + n \rightarrow \Lambda + K^+ \quad u\bar{d} + udd \rightarrow uds + u\bar{s} \quad (2.2)$$

Nel processo 2.1 il quark  $s$  è trasferito dal kaone al neutrone, per questo motivo viene anche detto processo di scambio.

Poiché la lambda è la più leggera delle particelle con stranezza non nulla, il suo decadimento può avvenire solo per mezzo di processi regolati dall'interazione debole. Questi processi possono essere divisi in due categorie.

*Decadimento mesonico* in cui viene prodotto un mesone  $\pi$

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow p + \pi^- & uds &\rightarrow uud + \bar{u}d \\ \Lambda &\rightarrow n + \pi^0 & uds &\rightarrow udd + \bar{u}u \end{aligned} \quad (2.3)$$

*Decadimento non mesonico* che può avvenire solo all'interno della materia nucleare.

$$\begin{aligned} \Lambda + p &\rightarrow p + n & uds + uud &\rightarrow uud + udd \\ \Lambda + n &\rightarrow n + n & uds + udd &\rightarrow udd + udd \end{aligned} \quad (2.4)$$

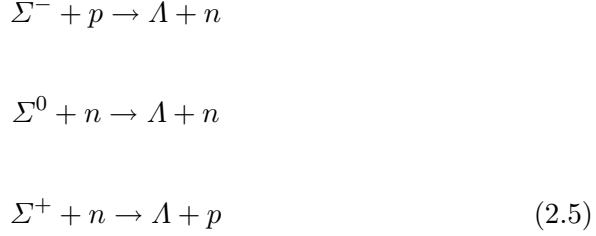
Esistono anche decadimenti di tipo semileptonico con probabilità dell'ordine di  $10^{-14}$ , che sono però molto basse rispetto a quelle dei processi 2.3 e 2.4.

In questo lavoro sono stati analizzati fenomeni che avvengono ad energie dell'ordine del MeV. In questo regime energetico il ruolo individuale dei singoli quarks può essere trascurato. Quindi si considererà la lambda puntiforme, cioè priva di una struttura interna.

### 2.1.2 L'ipernucleo

Un ipernucleo è un sistema nucleare composto da nucleoni e da uno o più iperoni. L'ipernucleo si indica con il simbolo  $^AX_Y$ , dove  $X$  è il simbolo del nucleo,  $A$  il numero di massa che include anche l'iperone e  $Y$  il simbolo dell'iperone. Ad esempio, il  $^{12}C_\Lambda$  indica un sistema composto da sei protoni, cinque neutroni ed una lambda.

La particella  $\Lambda$  risulta la più idonea a formare un legame con il nucleo, infatti in un  $\Sigma$ -ipernucleo la particella sigma decade rapidamente secondo uno dei seguenti schemi:



I processi 2.5 sono regolati dall'interazione forte ed avvengono in un intervallo di tempo dell'ordine di  $10^{-23}s$ . Per i motivi già esposti (conservazione della stranezza) la lambda in un nucleo non può decadere per via forte. Il  $\Lambda$ -ipernucleo può decadere perciò solo per via debole, mediante processi associati alle reazioni elementari 2.3 e 2.4 con una vita media dell'ordine di  $10^{-10}s$ . Per questo motivo un lambda ipernucleo è più stabile rispetto agli altri ipernuclei.

La vita media di una lambda nel vuoto e la vita media di un ipernucleo sono dello stesso ordine di grandezza. Questa uguaglianza non è scontata. Infatti, ad esempio, il neutrone libero decade, mentre il neutrone legato nel nucleo è stabile.

L'energia di legame dell'iperone è definita come l'energia necessaria per strappare al nucleo l'iperone. Ad esempio, nel caso della particella  $\Lambda$  si ha

$$B_\Lambda = M(^A X_\Lambda) - M_\Lambda - M(^{A-1}X)\tag{2.6}$$

dove con  $M(^A X_\Lambda)$  è indicata la massa dell'ipernucleo, con  $M_\Lambda$  la massa della lambda e con  $M(^{A-1}X)$  la massa del nucleo residuo.

### 2.1.3 La produzione di $\Lambda$ -ipernuclei

Gli stessi processi utilizzati per la produzione di iperoni sono utilizzati per la produzione di ipernuclei. Vi è comunque una sostanziale differenza. Quando un mesone è lanciato contro un nucleo bersaglio interagisce con un nucleone legato e non libero.

In particolare per la produzione di  $\Lambda$ -ipernuclei i processi maggiormente utilizzati sono i seguenti [1]:

- A)  $^A X (K^-, \pi^-) ^A X_\Lambda$
- B)  $^A X (\pi^+, K^+) ^A X_\Lambda$
- C)  $^A X (K^- \text{ stopped}, \pi^-) ^A X_\Lambda$

Il processo A viene spesso impiegato per ottenere delle reazioni con basso momento trasferito alla lambda. Questa condizione si verifica nel sistema di riferimento del laboratorio, utilizzando un momento incidente compreso



tra 400 e 800 MeV ed un angolo di diffusione inferiore a 10 gradi (vedi Fig.1). Infatti, considerando il processo elementare 2.1 associato a questa reazione, si ha che, per un angolo di diffusione  $\theta_L = 0^\circ$ , la conservazione del quadrimomento impone la seguente relazione:

$$M_n + \sqrt{M_{K^-}^2 + \mathbf{p}_{K^-}^2} = \sqrt{M_\Lambda^2 + \mathbf{p}_\Lambda^2} + \sqrt{M_\pi^2 + (\mathbf{p}_{K^-} - \mathbf{p}_\Lambda)^2} \quad (2.7)$$

Dove con  $M_i$  e  $\mathbf{p}_i$  sono indicati rispettivamente la massa e il momento della particella  $i$ . In fig.1 è graficato il momento trasferito alla lambda ( $p_\Lambda$ ) in funzione del momento della particella incidente con  $0^\circ < \theta_L < 6^\circ$ . In particolare la linea che delimita inferiormente la regione ombreggiata si riferisce a  $\theta_L = 0^\circ$  (quindi alla 2.7), mentre quella che la delimita superiormente si riferisce a  $\theta_L = 6^\circ$ . Da questo grafico risulta che, nelle condizioni già esposte, il momento trasferito alla lambda ( $p_\Lambda$ ) è basso ( $< 60 \text{ MeV}/c$ ). In particolare dalla 2.7 si ha che per un momento della particella incidente  $\mathbf{p}_{K^-}$  di circa 530 MeV, il momento trasferito è circa nullo.

In tali circostanze è fortemente favorita la produzione di un ipernucleo in cui la lambda conserva i numeri quantici orbitali del neutrone sostituito. Un altro vantaggio riguarda l'alta probabilità che il processo avvenga, il che si traduce in sezioni d'urto dell'ordine di 10 mb/sr.

Il processo B è utilizzato in reazioni in cui il momento trasferito alla lambda è sempre superiore a 300 MeV. Ciò permette alla particella di effettuare delle transizioni con  $\Delta l = 1, 2..$  rispetto allo stato del neutrone colpito. Tuttavia l'energia della lambda cresce al crescere del momento trasferito. Vi è quindi la possibilità che la particella superi la buca di potenziale formata dagli altri nucleoni allontanandosi dal nucleo. Un aspetto negativo di tale processo è che la sezione d'urto risulta di due ordini di grandezza inferiore rispetto ad un processo A. Per questo motivo sono necessari fasci molto intensi.

Il processo C è uguale a quello B, ma la tecnica sperimentale adoperata è diversa. Questa consiste nel far perdere energia al kaone prima della sua interazione con un neutrone, in modo che le condizioni cinematiche del processo siano differenti da quelle che si verificano nel processo B.

Fig. 1 Momento trasferito all'iperone in funzione del momento incidente nel sistema di riferimento del laboratorio e con un angolo di diffusione  $\theta_L$  compreso tra  $0^\circ$  e  $6^\circ$  per i processi indicati in figura [1].

In Fig. 2 sono mostrati alcuni spettri del  $^{56}\text{Fe}$  ottenuti mediante i processi A, B e C. L'ascissa indica l'energia di legame della lambda (vedi la 2.6) in MeV, l'ordinata la sezione d'urto in unità arbitrarie. Nel primo processo è nettamente favorita (92%) la produzione di uno stato in cui la particella lambda conserva i numeri quantici orbitali del neutrone sostituito. Nel secondo e nel terzo altri stati sono ugualmente probabili. Al vertice di ogni picco vi è indicato il corrispondente stato della particella lambda.

Fig.2 Confronto tra spettri del  $^{56}\text{Fe}_\Lambda$  prodotto con processi diversi. I punti rappresentano i dati sperimentali, la linea continua è il risultato di una previsione teorica.

#### 2.1.4 Caratteristiche dei $\Lambda$ -ipernuclei

Lo stato dell'ipernucleo, dopo il processo di creazione, dipende non solo dal particolare neutrone colpito ma anche dallo stato in cui si trova la lambda all'interno dell'ipernucleo stesso. L'ipotesi fondamentale comunemente adoperata in quasi tutta la trattazione teorica riguardante la fisica ipernucleare è che *l'iperone mantiene la sua identità anche all'interno della materia nucleare*. Ovvero è lecito domandarsi quale sia la probabilità di trovare la lambda in uno stato quantistico ad un istante fissato. Un'altra importante ipotesi è che *la lambda non provochi sostanziali cambiamenti nella struttura a strati del nucleo*. Questa ipotesi è avvalorata dalla relativa debolezza dell'interazione lambda-nucleone rispetto a quella nucleone-nucleone e dalla verifica sperimentale che i livelli energetici nucleonici negli ipernuclei con numero di massa  $A$  non presentano particolari differenze rispetto a quelli dei nuclei con numero di massa  $A-1$  [2]. In base a queste due ipotesi è possibile descrivere l'ipernucleo come se il neutrone che occupa un particolare stato di singola particella venisse sostituito da una lambda che va ad occupare un altro stato. Quindi lo stato dell'ipernucleo è determinato dalla coppia di informazioni stato buca neutronico stato della particella lambda. Questo modo di descrivere lo stato dell'ipernucleo non ha validità generale poiché si basa su un modello nucleare a particelle indipendenti e questo modello non prevede eventuali stati di eccitazione di tipo collettivo dell'ipernucleo.

Fig. 3 Spettro del  $^{12}C_\Lambda$  ottenuto dalla reazione  $(K^-, \pi^-)$

### 2.1.5 Evidenze sperimentali

L'analisi spettroscopica mostra un aspetto molto importante per la comprensione della struttura degli ipernuclei. La presenza di picchi marcati e ben distinti ha evidenziato la compatibilità del comportamento della lambda con quello ricavato da un modello a particella indipendente.

Fig. 4 Spettri di alcuni ipernuclei ottenuti con la reazione  $(\pi^+, K^+)$

Un interessante aspetto è che la separazione dei livelli energetici della lambda dovuta allo spin-orbita è piccola se comparata alla separazione dovuta allo spin-orbita nei nuclei con stranezza nulla. Ad esempio lo spettro

del  $^{12}C_A$  mostrato in fig. 3 è compatibile con una differenza minore di 0.3 MeV tra gli stati  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$ . [3]

Un altro aspetto che differenzia il comportamento della lambda nel sistema nucleare da quello di un nucleone è la tendenza di  $B_A$  a crescere con il numero di massa (vedi fig. 8). Al contrario nei nuclei con  $A > 20$  le energie di legame per nucleone sono pressoché costanti (circa 8MeV), mentre le energie di estrazione dei nucleoni diminuiscono col crescere di  $A$ .

Infine è da segnalare che con qualche eccezione le energie di legame della lambda sono molto simili in ipernuclei isobarici (cioè con lo stesso numero di massa). Questo aspetto evidenzia che l'interazione lambda protone è uguale a quella lambda neutrone.

## 2.2 CAMPO MEDIO

### 2.2.1 Il problema a molti corpi

Un  $A$ -*ipernucleo* con numero di massa  $A$  è un sistema fermionico composto da  $A-1$  nucleoni e una lambda.

Considerando le seguenti ipotesi

- le particelle sono puntiformi
- gli effetti relativistici sono trascurabili
- l'interazione tra le varie particelle è a due corpi

l'evoluzione dinamica del sistema è governata dall'equazione di Schrödinger a molti corpi

$$H\Psi = \left\{ \sum_{k=1}^A -\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + \sum_{i<j}^A V(i,j) \right\} \Psi(1,...,A) = E\Psi(1,...,A) \quad (2.8)$$

dato che il sistema è composto da fermioni, la funzione d'onda deve essere antisimmetrica per lo scambio di due particelle identiche.

$$\Psi(...1...2...) = -\Psi(...2...1...) \quad (2.9)$$

Nella 2.8  $\hbar$  rappresenta la costante di Planck ridotta,  $m_k$  la massa della  $k$ -esima particella,  $V(i,j)$  il potenziale dell'interazione tra la particella  $i$ -esima e  $j$ -esima,  $\Psi$  ed  $E$  sono rispettivamente la funzione d'onda e l'energia dell'intero sistema. Sono state indicate con  $i$  tutte le variabili caratterizzanti l' $i$ -esima particella: la posizione, lo spin, l'isospin, la stranezza.

### 2.2.2 L'ipotesi del campo medio

La soluzione della 2.8 per valori negativi di  $E$  fornisce una descrizione degli stati legati degli ipernuclei. Per i potenziali utilizzati in fisica nucleare una soluzione analitica è impossibile. Anche dal punto di vista numerico la soluzione della 2.8 implica grosse difficoltà per l'alto numero di variabili. Al momento soluzioni esatte della 2.8 si sono ottenute solo per sistemi con  $A \leq 7$ . [5]

Si possono formulare alcune ipotesi aggiuntive, da verificare a posteriori, che permettano una radicale semplificazione della 2.8.

In particolare, con l'ipotesi che tra breve verrà esposta, si utilizzano un'hamiltoniana e una funzione d'onda diverse da quelle che compaiono nella 2.8, ma tali da lasciare invariato l'autovalore  $E$ . Un modello con queste caratteristiche prende il nome di *teoria effettiva*. In generale si definisce teoria effettiva un modello in cui invece di risolvere

$$H\Psi = E\Psi$$

si risolve

$$H_{eff}\Psi_{eff} = E\Psi_{eff}$$

Le osservazioni sperimentali riguardanti il  $\Lambda$ -ipernucleo hanno evidenziato la presenza di picchi marcati e distinti in corrispondenza di determinati valori per l'energia di legame della lambda. Questo fatto ha una analogia con quanto osservato negli spettri energetici degli elettroni nell'atomo. Nel caso degli elettroni la causa è la presenza di un campo elettromagnetico generato dai protoni presenti nel nucleo. Anche se nell'ipernucleo la situazione fisica è diversa, si può fare l'ipotesi che la particella lambda si muova in un *campo medio* generato dagli altri nucleoni. In altre parole la somma delle interazioni agenti sulla lambda risulta uguale ad un campo stazionario. In questo modello il moto della lambda è indipendente dal moto dei nucleoni. L'espressione matematica dell'ipotesi appena enunciata è la seguente:

$$\sum_{i=1}^{A-1} V(i, \lambda) = V_0(\lambda) \quad (2.10)$$

dove sono indicate con  $\lambda$  tutte le variabili caratterizzanti la particella lambda.

Utilizzando la 2.10, l'equazione 2.8 può essere scritta nel seguente modo

$$\left\{ \sum_{k=1}^{A-1} -\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + \sum_{i < j}^{A-1} V(i, j) - \frac{\hbar^2}{2m_\lambda} \nabla_\lambda^2 + V_0(\lambda) \right\} \Psi(1, \dots, A-1, \lambda) = E\Psi(1, \dots, A-1, \lambda)$$

$$\{H_1(1, \dots, A-1) + H_0(\lambda)\} \Psi = E\Psi \quad (2.11)$$

Nella 2.11 è stato possibile dividere l'hamiltoniana in due termini che dipendono da variabili diverse, in particolare  $H_0$  dipende dalle variabili della lambda mentre  $H_1$  dalle variabili degli altri nucleoni.

Si può quindi utilizzare il metodo della separazione delle variabili [4] e scrivere la funzione d'onda nel seguente modo:

$$\Psi(1, \dots, A-1, \lambda) = \Phi(1, \dots, A-1) \psi(\lambda) \quad (2.12)$$

Utilizzando la 2.12 è possibile dividere l'equazione 2.11 in un sistema di due equazioni non accoppiate.

$$\begin{cases} H_1(1, \dots, A-1) \Phi(1, \dots, A-1) = (E - \varepsilon_\lambda) \Phi(1, \dots, A-1) \\ H_0(\lambda) \psi(\lambda) = \varepsilon_\lambda \psi(\lambda) \end{cases} \quad (2.13)$$

La 2.13 rappresenta il risultato finale dell'approssimazione, in essa  $\varepsilon_\lambda$  è l'energia della lambda.

Il sistema composto da A particelle è risolto da un'equazione di Schrödinger di singola particella per la lambda, e da un'equazione come la 2.8 per i restanti nucleoni. In base a questa trattazione rimane la possibilità di descrivere il comportamento degli A-1 nucleoni in termini di un potenziale a due corpi. Solo il comportamento della lambda è indipendente dai nucleoni ed è regolato da un potenziale effettivo fenomenologico.

Per valutare il comportamento della lambda all'interno dell'ipernucleo è necessario risolvere la seconda equazione della 2.13

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_\lambda} \nabla^2 + V_0(\lambda) \right\} \psi(\lambda) = \varepsilon_\lambda \psi(\lambda) \quad (2.14)$$

dove  $V_0$ , che in seguito sarà indicato semplicemente con  $V$ , è scelto in modo da riprodurre i dati sperimentali. L'energia di legame  $B_A$  risulta uguale a  $-\varepsilon_\lambda$

### 2.2.3 Considerazioni sull'utilizzo del campo medio

L'obiettivo di questo lavoro è studiare il comportamento della lambda all'interno dell'ipernucleo con un modello a campo medio e quindi indipendentemente dal comportamento degli altri nucleoni. L'ipotesi fatta nel precedente paragrafo è sufficiente per raggiungere questo obiettivo. Infatti nella seconda equazione della 2.13 compaiono solo i parametri della particella lambda.

Tuttavia, per interpretare i dati sperimentali è necessario poter conoscere lo stato dell'intero ipernucleo. Ma questo non dipende solo dallo stato della lambda. Quindi, anche se in questo lavoro non sarà trattata la soluzione della prima equazione nella 2.13, si vuole esporre brevemente il modo di descrivere l'intero ipernucleo con un modello a campo medio.

Si può ipotizzare che ogni particella del sistema si muove in un campo medio indipendentemente dal moto delle altre particelle. Questa ipotesi è più forte ma non è in contrasto con quella fatta nel precedente paragrafo, con essa il termine  $V(i, j)$  che compare nella 2.8 è completamente soppresso

$$\sum_{i < j}^A V(i, j) = V_0(i) \quad (2.15)$$

In base alla 2.15, con considerazioni analoghe a quelle già fatte, si può riscrivere la 2.8 come un sistema di A equazioni di Schrödinger di singola particella.

Per rispettare il principio di esclusione di Pauli, la funzione d'onda dell'ipernucleo sarà il determinante di Slater costruito con le funzioni d'onda di singola particella soluzioni di questo sistema.

$$\begin{aligned} \Phi(1, \dots, A) &= \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \sum_P (-1)^P P [\psi_1(1) \psi_2(2) \cdots \psi_A(A)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \det \begin{bmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \cdots & \psi_A(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_1(A) & \cdots & \cdots & \psi_A(A) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

P indica le permutazioni degli indici ( i ) che identificano le A particelle. Spesso si moltiplica il secondo membro della 2.16 per  $\frac{1}{\sqrt{A}}$ . Questo fattore garantisce la normalizzazione ad uno della funzione d'onda, ma si può convenire di normalizzarla ad A come avviene nella 2.16. Le proprietà dei determinanti garantiscono l'antisimmetria della funzione d'onda.

L'idea della descrizione dell'ipernucleo con un modello a campo medio è schematizzata in Fig 5.

Fig.5 Rappresentazione schematica di un A-ipernucleo descritto con un modello a campo medio.



Lo stato dell'ipernucleo dipende da quali stati di singola particella sono occupati. In questo modo è possibile costruire lo stato fondamentale del sistema riempiendo gli stati a partire da quelli con energia minore e tenendo conto del principio di esclusione di Pauli. L'energia dell'ultimo stato occupato è detta energia di Fermi. Se una o più particelle effettuano una transizione da uno stato con energia minore dell'energia di Fermi ad uno con energia maggiore si ottiene uno stato eccitato (eccitazione di singola particella)

# Bibliografia

- [1] H. Bando T. Motoba e J Zofka, International Journal of Modern Physics A, Vol. 5, No. 21 (1990) p. 4021
- [2] R. Bertini et al., Nuclear Physics A368 (1981) p.365
- [3] W. Brückner et al., Physics Letters 79B (1978) p.157
- [4] A. Messiah, Quantum Mechanics (1968) Vol. 1
- [5] B.S. Publiner et al., Physical Review C (1997) p.1720

## Capitolo 3

# METODI RISOLUTIVI PER UN POTENZIALE CENTRALE

### 3.1 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

#### 3.1.1 L'equazione differenziale

Nel precedente capitolo è stata illustrata l'ipotesi di campo medio. Abbiamo visto come sia possibile calcolare i livelli energetici della particella lambda risolvendo la seguente equazione di Schrödinger:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_\lambda} \nabla^2 + V(\lambda) \right] \psi(\lambda) = E\psi(\lambda) \quad (3.1)$$

Se si utilizza un potenziale locale e centrale risulta possibile nella 3.1 separare la variabile radiale da quelle angolari.[1, cap.9]

A tal scopo è necessario esprimere l'operatore gradiente in coordinate polari e sviluppare la funzione d'onda in serie di armoniche sferiche  $Y_{l\mu}(\theta, \phi)$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\mu} \tilde{R}_{nl}(r) Y_{l\mu}(\theta, \phi) X_{\sigma}^{1/2} \quad (3.2)$$

dove  $X_{\sigma}^{1/2}$  indica la parte della funzione d'onda dipendente dallo spin. La parte radiale della 2.14 diventa

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_\lambda} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V(r) \right\} \tilde{R}_{n,l,j}(r) = E_{n,l,j} \tilde{R}_{n,l,j}(r) \quad (3.3)$$

Nella 3.3  $n, l, j$  rappresentano rispettivamente il numero quantico principale, il numero quantico orbitale e il momento angolare totale. Questi tre numeri quantici sono associati ad un insieme completo di osservabili per una particella in un potenziale centrale.

Tuttavia non vi è piena corrispondenza tra l'espressione del gradiente in coordinate cartesiane e quella in coordinate polari, ciò è dovuto al fatto che quest'ultimo non è hermitiano. Per ovviare a quest'inconveniente è necessario imporre una condizione sulla funzione d'onda [1, Cap. 9]:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \tilde{R}_{n,l,j}(r) = 0 \quad (3.4)$$

Si può inoltre facilmente verificare che utilizzando la sostituzione

$$r \tilde{R}_{n,l,j}(r) = R_{n,l,j}(r) \quad (3.5)$$

la 3.3 diventa

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_\lambda} \frac{d}{dr^2} + -\frac{\hbar^2}{2m_\lambda} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) - E_{n,l,j} \right\} R_{n,l,j}(r) = 0 \quad (3.6)$$

e la condizione 3.4 risulta equivalente a

$$R_{n,l,j}(0) = 0 \quad (3.7)$$

Non tutte le soluzioni della 3.6 sono fisicamente accettabili. Poiché  $\tilde{R}_{n,l,j}(r)$  descrive un sistema legato, è necessario che sia normalizzabile. Questa condizione equivale a porre:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R_{n,l,j}(r) = 0 \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Forma analitica delle soluzioni

Prima di descrivere il modo utilizzato per la risoluzione della 3.6 si vuole discutere l'espressione analitica delle sue soluzioni nel regime asintotico.

In questo lavoro si utilizza un potenziale di Woods-Saxon (vedi Fig. 6)

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{a}\right)}} \quad (3.9)$$

In questo caso si può dimostrare che le soluzioni della 3.6 possono essere di due tipi:

1. soluzioni che si annullano all'origine come  $r^l$  (soluzioni regolari all'origine)

2. soluzioni il cui andamento all'origine è come  $r^{-(l+1)}$  (soluzioni irregolari all'origine)

Solo quelle appartenenti al primo caso soddisfano la 3.7 e sono quindi fisicamente accettabili.

Più in particolare, possiamo approssimare il comportamento del potenziale 3.9 nell'origine a quello di una buca quadrata a pareti infinite e larghezza  $R$  (3.10), ed utilizzare il comportamento all'origine delle autofunzioni di un simile potenziale. La validità di questa approssimazione dipende dai parametri  $a$  ed  $R$  che compaiono nella 3.9. I valori dei parametri utilizzati in questo lavoro rendono valida la suddetta approssimazione. Le soluzioni della 3.6 con

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ \infty & r > R \end{cases} \quad (3.10)$$

possono essere scritte in termini delle funzioni sferiche di Bessel (regolari all'origine) e delle funzioni sferiche di Neumann (irregolari all'origine). [2, Cap. 8] Solo le soluzioni espresse in funzione delle funzioni sferiche di Bessel soddisfano la 3.7 ed il loro comportamento all'origine è  $j_l(r)_{r \ll 1} \cong \frac{r^{l+1}}{(2l+1)!!}$

Il potenziale di Woods-Saxon tende rapidamente a zero per  $r$  che tende all'infinito. Quindi anche nella regione asintotica possiamo approssimare il potenziale a quello di una buca quadrata. Le soluzioni della 3.6 con la 3.10 scritte in termini delle funzioni sferiche di Bessel e di Neumann tendono all'infinito e non soddisfano la condizione 3.8. L'unica soluzione fisicamente accettabile è una combinazione lineare di queste due che si comporta all'infinito come  $e^{-\rho r}$  con  $\rho^2 = -\frac{2m_\lambda E}{\hbar^2}$

Ricapitolando, possiamo affermare che il comportamento della funzione radiale ridotta  $R_{n,l,j}(r)$  soluzione della 3.6 che soddisfa alle condizioni 3.7 e 3.8 è il seguente:

$$R_{n,l,j}(r) \simeq \frac{r^{l+1}}{(2l+1)!!} \quad \text{per } r \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

$$R_{n,l,j}(r) \simeq e^{-\rho r} \quad \text{con } \rho^2 = -\frac{2m_\lambda E}{\hbar^2} \quad \text{per } r \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

### 3.1.3 L'algoritmo di Numerov

La 3.6 è un'equazione differenziale agli autovalori del secondo ordine che può anche essere scritta nel seguente modo

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + k^2(r) R(r) = 0$$

$$k^2(r) = \frac{2m_\lambda}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (3.13)$$

le sue soluzioni sono definite a meno di due costanti che vengono fissate dalle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} R(r) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) &= 0 \end{aligned}$$

Nell'equazione 3.13  $\frac{R(r)}{r}$  rappresenta la parte radiale della funzione d'onda,  $V(r)$  il potenziale centrale  $l$  il numero quantico orbitale ed  $E$  l'energia della particella lambda.

In questo capitolo verrà illustrato il metodo utilizzato per la soluzione della 3.13. Data l'espressione del potenziale di Woods-Saxon (3.9) non è possibile risolvere analiticamente la 3.13, ma è possibile affrontare il problema con metodi numerici.

Per l'integrazione numerica di tale equazione ho utilizzato l'algoritmo di Numerov, che è molto efficiente nella soluzione di equazioni differenziali lineari del secondo ordine che abbiano nullo il coefficiente della derivata prima.

Questo metodo permette di calcolare la funzione  $R(r)$  su una griglia di valori di  $r$  equispaziati che appartengano al dominio della funzione. Indichiamo con  $r_n$  il valore dell' $n$ -esimo punto di questa griglia e con  $h$  il passo della griglia, cioè  $h = r_{n+1} - r_n$ . Convenendo di porre

$$\begin{aligned} R(r_n) &= R_n \\ R(r_n + h) &= R_{n+1} \end{aligned}$$

si può mostrare (vedi appendice A) che vale la seguente relazione a tre punti tra i valori di  $R(r)$ :

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} k_{n+1}^2\right) R_{n+1} - 2 \left(1 - \frac{5h^2}{12} k_n^2\right) R_n + \left(1 + \frac{h^2}{12} k_{n-1}^2\right) R_{n-1} = 0 \quad (3.14)$$

Questa formula, utilizzata in modo ricorsivo a partire da due valori noti di  $R(r)$ , permette di risolvere la 3.13. Ciò permette di calcolare il suo valore su tutti i punti  $r_n$  della griglia fissata in precedenza.

L'errore locale commesso utilizzando questa formula è dell'ordine di  $h^6$ . Ciò significa che se  $R_n$  ed  $R_{n-1}$  sono valori esatti della funzione, allora si ottiene un valore di  $R_{n+1}$  che differisce dal valore esatto per una quantità dell'ordine di  $h^6$ .

In realtà applicando in modo iterativo la 3.14 si utilizzano dei valori approssimati per  $R_n$  ed  $R_{n-1}$  quindi l'errore globale che si commette è maggiore di quello locale ed è dell'ordine di  $h^5$ . [3, Cap. 6]

Come già detto, per iniziare il processo iterativo che utilizza la 3.14, sono necessari i valori della funzione  $R(r)$  in due punti adiacenti della griglia. La prima condizione al contorno della 3.13 fornisce uno dei due valori iniziali.

Il secondo valore può essere calcolato in base alla 3.11. Possiamo quindi utilizzare

$$R(0) = 0$$

$$R(h) = \frac{h^{l+1}}{(2l+1)!!}$$

Comunque, poiché la 3.13 è un'equazione omogenea, è importante notare che moltiplicando una sua soluzione per una costante si ottiene ancora una soluzione della stessa equazione. Il valore assegnato ad  $R(h)$  determina solo quale di questa famiglia di soluzioni si sta cercando. Ma l'autovalore  $E$  risulta uguale per tutte queste soluzioni, da ciò segue che il valore di  $R(h)$  può essere scelto arbitrariamente.

In maniera analoga si possono scegliere i valori della funzione  $R(r)$  necessari per iniziare il processo iterativo utilizzando la seconda delle condizioni al contorno della 3.13 e la 3.12. L'unica differenza riguarda la necessità di esprimere la condizione al contorno in una forma più maneggevole, come è mostrato nel prossimo paragrafo.

Fig. 6 Il potenziale di Woods-Saxon.

### 3.1.4 Shooting method

Non tutti i valori di  $E$  permettono di trovare una soluzione della 3.13 che rispetti le condizioni al contorno. Infatti è noto che per valori di  $E$  negativi,

quali sono quelli dei sistemi legati, lo spettro degli autovalori è discreto. Al fine di individuare questi autovalori è stata utilizzata una strategia detta "shooting method" che come suggerisce il nome consiste nel provare diversi valori di  $E$ , e tra questi selezionare gli autovalori dell'equazione.

È necessario stabilire un criterio di accettazione per gli autovalori. A tal scopo conviene esprimere quantitativamente la seconda condizione al contorno della 3.13 .

In figura 6 è mostrato l'andamento del potenziale di Woods-Saxon. Ci aspettiamo che l'autofunzione corrispondente ad un determinato autovalore  $E$  della 3.13, oscilli nella regione classicamente permessa ( $r < r_{\max}$ ) e decada esponenzialmente a zero nella regione classicamente proibita ( $r > r_{\max}$ ). Si può fissare un punto  $r = r_{\text{estr}} > r_{\max}$  tale che  $V(r) \gg E$  e quindi  $R(r_{\text{rest}}) \cong 0$ .

Si può utilizzare come seconda condizione al contorno

$$R(r_{\text{rest}}) = 0 \quad (3.15)$$

Lo *shooting method* consiste nel fissare un valore  $E$  e risolvere l'equazione utilizzando una condizione al contorno come condizione iniziale. Se la soluzione trovata non rispetta la seconda condizione al contorno, allora  $E$  non è un autovalore della 3.13. In tal caso si deve procedere in maniera iterativa cambiando il valore di  $E$  fino a che la seconda condizione al contorno è verificata.

Tuttavia nel caso della 3.13 non è possibile procedere nella maniera appena esposta poiché tra le soluzioni di questa equazione ve ne sono alcune con comportamento irregolare per  $r = 0$  e  $r \rightarrow \infty$ . (vedi paragrafo precedente) Per spiegare il motivo dell'inadeguatezza del metodo, ipotizziamo di partire da  $r = 0$  ed utilizzare la 3.14 procedendo nella direzione delle  $r$  crescenti. Dopo un certo numero di passi il valore calcolato per  $R(r_n)$  si discosta dal valore  $A(r_n)$  della soluzione cercata della 3.13 con una differenza dell'ordine di  $h^5$ . Questo metodo trova una soluzione che può essere espressa come combinazione lineare di due soluzioni particolari della stessa, una regolare ed una irregolare per  $r \rightarrow \infty$ .

$$R(r) = aA(r) + bB(r) \quad (3.16)$$

dove  $A(r)$  è la soluzione regolare cercata mentre  $B(r)$  è una soluzione che non soddisfa le condizioni al contorno.

Poiché la differenza tra il valore trovato e quello della soluzione vera è piccolo (dell'ordine di  $h^5$ ), ci aspettiamo che  $b \ll a$ . Nonostante  $b$  sia piccolo se nella regione di integrazione  $B(r) \rightarrow \infty$ , il suo valore può interferire con quello della soluzione cercata.

Per superare queste difficoltà ho fissato un valore di  $E$  ed ho utilizzato due funzioni  $R_{<}(r)$  e  $R_{>}(r)$ .



$R_{<}(r)$  è stata costruita con l'utilizzo dell'algoritmo di Numerov partendo da  $r = 0$  e procedendo nella direzione dell' $r$  crescenti (integrazione verso destra), mentre  $R_{>}(r)$  partendo da  $r = r_{estr}$  e procedendo nella direzione delle  $r$  decrescenti (integrazione verso sinistra). Il criterio per l'accettazione dell'autovalore  $E$  consiste nel valutare il raccordo tra queste due funzioni in un punto interno all'intervallo  $[0, r_{estr}]$ . È stato scelto il punto centrale dell'intervallo e calcolato il valore delle funzioni  $R_{<}$  e  $R_{>}$  fino a questo punto.

Poiché queste funzioni sono soluzioni di un'equazione omogenea esistono sempre delle normalizzazioni tali che  $R_{<}(r_{centr}) = R_{>}(r_{centr})$ , quindi è necessario richiedere anche l'uguaglianza delle derivate prime in  $r_{centr}$  come condizione per il raccordo.

Ciò può essere riassunto utilizzando la condizione di Wronskiano nullo per le due funzioni in  $r = r_{centr}$ .

$$W(r) = \begin{bmatrix} R_{>}(r) & R_{<}(r) \\ R'_{>}(r) & R'_{<}(r) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

Per esprimere la derivata prima ho utilizzato un rapporto incrementale con differenza simmetrica.

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \quad (3.18)$$

utilizzando la 3.17 si può esprimere la condizione di Wronskiano nullo in  $r_{centr}$  nel seguente modo.

$$(R_{>}(r_c + h) - R_{>}(r_c - h)) R_{<}(r_c) - (R_{<}(r_c + h) - R_{<}(r_c - h)) R_{>}(r_c) = 0 \quad (3.19)$$

## 3.2 IL PROGRAMMA

Per calcolare gli autovalori della 3.13 utilizzando le strategie appena descritte è stato scritto un programma in linguaggio C.

Al fine di valutare la funzionalità di alcune subroutine del programma, sono stati calcolati i valori dei livelli energetici per protoni e neutroni in alcuni nuclei. Sono quindi stati confrontati questi valori con quelli calcolati utilizzando una tecnica basata sullo sviluppo delle funzioni d'onda in una base di autofunzioni dell'oscillatore armonico [4].

Per questo confronto sono stati utilizzati un potenziale di Woods-Saxon con un termine spin-orbita e la correzione Coulombiana per i protoni.

$$V(r, l, s) = V_{centr}(r) + V_{s.o.}(r) + V_{Coul}(r) \quad (3.20)$$

con

$$V_{centr}(r) = \frac{V_0}{1 + \exp(\frac{r-R}{a})} \quad R = r_0 (A - 1)^{1/3} \quad (3.21)$$

$$V_{s.o.}(r) = \frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} V_{centr}(r) \mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$$

$$\text{con } \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} = \begin{cases} \frac{1}{2}l & \text{se } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(l+1) & \text{se } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.22)$$

$$V_{Coul}(r) = \begin{cases} (Z-1)e^2/r & r > R \\ \frac{(Z-1)e^2}{2R} \left[ 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] & r \leq R \end{cases} \quad (3.23)$$

il termine coulombiano è il potenziale di una sfera uniformemente carica di raggio  $R$  e carica totale  $(Z-1)e^2$ .

Fissati i valori di  $l$  ed  $s$ ,  $V(r, l, s)$  diventa un potenziale locale quindi possono essere utilizzate le tecniche già descritte.

È stato sufficiente inserire un ciclo che calcolasse gli autovalori al variare di  $l$  ed  $s$ . Questo ciclo parte con  $l = 0$ , incrementa ogni volta  $l$  di un unità e si arresta quando per un certo valore di  $l$  non vi sono soluzioni.

Nelle tabelle 3 e 4 sono riportati i valori dei livelli energetici di singola particella per il  $^{12}C$  e il  $^{208}Pb$  calcolati con il mio programma e con quello utilizzato da Co' e Krewald [4].

Per questo confronto sono state usate le seguenti parametrizzazioni:

		$V_0(MeV)$	$R(fm)$	$a(fm)$	$V_{ls}(MeV)$
$^{12}C$	P	-62.0	2.86	0.57	-3.20
	N	-60.0	2.86	0.57	-3.15
$^{208}Pb$	P	-60.40	7.46	0.79	-6.754
	N	-44.32	7.46	0.66	-6.084

Tab. 2 Parametrizzazioni utilizzate per valutare il funzionamento del programma.

Il parametro  $V_{ls}$  che compare nella precedente tabella corrisponde al prodotto tra  $V_0$  nella 3.21 e  $\lambda$  nella 3.22.

$^{12}C$	Neutroni		Protoni	
	C. e K.	mio prog.	C. e K.	mio prog.
1s <sub>1/2</sub>	-34.58	-34.58	-36.17	-36.17
1p <sub>3/2</sub>	-18.05	-18.06	-19.59	-19.59
1p <sub>1/2</sub>	-15.75	-15.75	-17.65	-17.31

Tab. 3 Confronto tra i livelli energetici (in MeV) del  $^{12}C$  calcolati con diversi programmi

$^{208}\text{Pb}$	Neutroni		Protoni	
	C. e K.	mio prog.	C. e K.	mio prog.
$1s_{1/2}$	-33.99	-33.99	-40.20	-40.20
$1p_{3/2}$	-30.30	-30.27	-36.34	-36.34
$1p_{1/2}$	-29.93	29.98	-35.87	-35.88
$1d_{5/2}$	-25.73	-25.63	-31.80	-31.79
$1d_{3/2}$	-24.81	-24.94	-30.67	-30.69
$2s_{1/2}$	-22.96	-22.96	-29.56	-29.56

Tab. 4 Confronto tra i livelli energetici (in MeV) del  $^{208}\text{Pb}$  calcolati con diversi programmi

Eccetto il livello protonico  $1p_{1/2}$  del carbonio, che presenta una discrepanza maggiore di 0.3 MeV, le discrepanze degli altri livelli energetici sono molto meno marcate. Tali differenze crescono al crescere del numero quantico  $l$  e sono maggiori per i livelli protonici.

Il riscontro di una tale regolarità nelle differenze tra i due calcoli avvalorava l'ipotesi che le discrepanze siano dovute alle diverse tecniche utilizzate.

### 3.2.1 Il programma `lambda.c`

Il programma `lambda.c` utilizzato per risolvere la 3.13 è composto da un corpo principale (main) due subroutine (*Numerov*, *Wronskiano*) e tre funzioni. Un listato del programma si trova in appendice B.

Il programma principale si occupa dell'acquisizione di dati da un file (`lambda.inp`). In questo modo è possibile cambiare i parametri del potenziale, il passo e l'estremo di integrazione, utilizzando sempre lo stesso eseguibile. Inoltre fissa i valori del numero quantico orbitale  $l$  e del numero atomico  $A$ . Ciò è necessario per esprimere come sola funzione di  $r$  il termine  $k^2(r)$  della 3.13. Per ogni coppia di valori con  $l = 0, 1, 2$  ed  $A$  compreso tra 8 e 210 chiama la subroutine *Numerov* che esegue il calcolo degli autovalori. Nella subroutine *Numerov* si considerano  $NV$  punti equispaziati dell'intervallo  $[V, 0]$  e per ognuno di questi punti si calcola il Wronskiano chiamando la subroutine *Wronskiano*. Poi si confrontano i valori del Wronskiano per due punti adiacenti e quando esso cambia di segno si utilizza il metodo di bisezione per la ricerca degli zeri (le soluzioni trovate hanno un errore di 0.001 MeV). Nella subroutine *Wronskiano* si utilizza l'algoritmo di Numerov per trovare i valori necessari al calcolo del Wronskiano.

### 3.2.2 Test di convergenza

Sono stati effettuati vari test di convergenza in modo da operare un'opportuna scelta dell'estremo (ESTR) e del passo ( $h$ ) di integrazione, in accordo con

quanto esposto nei paragrafi precedenti. Di seguito sono riportati alcuni risultati dei test per il  $^{12}C_A$ , il  $^{139}La_A$  e il  $^{208}Pb_A$ .

$^{12}C_A$	$ESTR = 7fm$	$ESTR = 10fm$	$ESTR = 12fm$
$h = 0.2fm$	9.578	9.568	9.658
$h = 0.1fm$	9.690	9.709	9.709
$h = 0.05fm$	9.698	9.715	9.715
$h = 0.02fm$	9.701	9.716	9.716

*Tab.5*  $B_A$  (in MeV) nello stato fondamentale del  $^{12}C_A$   
calcolata con diversi valori di  $ESTR$  e  $h$

$^{139}La_A$	$ESTR = 7fm$	$ESTR = 10fm$	$ESTR = 12fm$
$h = 0.2fm$	22.315	22.752	22.752
$h = 0.1fm$	22.665	22.755	22.755
$h = 0.05fm$	22.674	22.756	22.756
$h = 0.02fm$	22.679	22.756	22.756

*Tab.6*  $B_A$  (in MeV) nello stato fondamentale del  $^{139}La_A$   
calcolata con diversi valori di  $ESTR$  e  $h$

$^{208}Pb_A$	$ESTR = 7fm$	$ESTR = 10fm$	$ESTR = 12fm$
$h = 0.2fm$	23.333	23.921	23.922
$h = 0.1fm$	23.659	23.924	23.924
$h = 0.05fm$	23.681	23.924	23.924
$h = 0.02fm$	23.693	23.924	23.924

*Tab.7*  $B_A$  (in MeV) nello stato fondamentale del  $^{209}Pb_A$   
calcolata con diversi valori di  $ESTR$  e  $h$

I valori numerici nelle tre tabelle si riferiscono al calcolo della  $B_A$  nello stato 1s della lambda, con il potenziale di Woods-Saxon 3.21 e ponendo  $V = -28.0 MeV$ ,  $r_0 = 1.1fm$  e  $a = 0.6 fm$ .

Al crescere di  $ESTR$  i valori calcolati convergono più rapidamente per nuclei con  $A$  piccolo, mentre al crescere di  $h$  convergono più rapidamente per nuclei con  $A$  grande.

### 3.2.3 Altri test

Il numero di punti NV in cui è diviso l'intervallo  $[V,0]$  è un parametro che, a differenza di *ESTR* ed *h* non può essere modificato dall'esterno (mediante il file *lambda.inp*). Questo parametro può essere modificato solo agendo direttamente sul programma.

Al decrescere di NV aumenta la distanza *g* tra due punti equispaziati della griglia.

$$g = -\frac{V}{NV} \quad (3.24)$$

Se questa distanza è più grande rispetto alla differenza tra due livelli energetici vi è il rischio di non trovare alcuni autovalori. Infatti, se tra due valori successivi della griglia vi sono due livelli energetici, il Wronskiano assume lo stesso segno nei due punti considerati. Se invece NV aumenta, con lui aumenta il tempo di esecuzione del programma. Sono stati effettuati alcuni test trovando che per NV compreso tra 10 e 80 la variazione del tempo di esecuzione è dell'1%. È stato fissato  $NV = 50$ .

Un modo che ho spesso utilizzato per diminuire il tempo di esecuzione del programma è il seguente.

Qualora si fosse interessati solo al calcolo degli stati 1s 1p 1d si può facilmente evitare al programma la ricerca di altri eventuali stati con numero quantico principale maggiore di uno. A tal scopo è sufficiente inserire all'interno della subroutine Numerov il comando "*break*" sotto la condizione di aver trovato il primo livello. È stato rilevato un miglioramento pari a circa il 20% nel tempo di esecuzione del programma che è passato da circa 400 secondi a circa 315 secondi.

### 3.2.4 Test per il *lambda.c*

Come già detto, per il calcolo dei livelli energetici della *lambda* negli ipernuclei è stato utilizzato un semplice potenziale di Woods-Saxon. Anche Motoba in [5] ha utilizzato lo stesso potenziale aggiungendovi una debole interazione spin-orbita. Utilizzando la seguente parametrizzazione:

$$V_0 = -30.0 \text{ MeV} \quad r_0 = 1.1 \text{ fm} \quad a = 0.6 \text{ fm} \quad V_{ls} = 2.0 \text{ MeV}$$

i risultati trovati da Motoba per alcuni ipernuclei sono riassunti in fig. 7

A causa della presenza dell'interazione spin-orbita è stato possibile confrontare i risultati del mio programma con quelli trovati da Motoba solo per gli stati caratterizzati da  $l = 0$ , stati in cui notoriamente l'interazione spin-orbita è nulla (vedi la 3.22). Come è mostrato nella seguente tabella ad eccezione del  $^{12}\text{C}_A$  i risultati sono in perfetto accordo.

A	Motoba	mio prog.
$^{12}C_\Lambda$	-10.4	-11.00
$^{16}O_\Lambda$	-13.0	-13.04
$^{28}Si_\Lambda$	-16.8	-16.83
$^{40}Ca_\Lambda$	-19.0	-19.01
$^{56}Fe_\Lambda$	-20.8	-20.84
$^{90}Y_\Lambda$	-23.0	-23.04
$^{139}La_\Lambda$	-24.7	-24.66
$^{208}Pb_\Lambda$	-25.9	-25.86

*Tab. 8*  $B_\Lambda$  (in MeV) nello stato fondamentale di alcuni ipernuclei calcolata da Motoba [5] e con il mio programma.

Fig.7 Livelli energetici di singola particella calcolati da con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione indicata nel testo [5].  
I valori energetici sono espressi in MeV la notazione è  $0p_3$  per indicare lo stato  $0p_{3/2}$ .

# Bibliografia

- [1] A. Messiah, Quantum Mechanics (1968) Vol. 1
- [2] Eisemberg and Greiner, Nuclear Theory Vol. 1
- [3] F. B. Hildebrand, Analisi Numerica
- [4] G. Co' and S. Krewald , Nuclear Physics A433, (1985) p.392
- [5] T. Motoba, Il Nuovo Cimento 102A, N.1, (1989) p.345

## Capitolo 4

# CONFRONTO CON I DATI SPERIMENTALI

Nel capitolo 1 è stata introdotta l'ipotesi del potenziale medio a cui è soggetto l'iperone all'interno dell'ipernucleo (vedi l'eq. 2.10). Nel fare questo, non è stata presentata alcuna limitazione all'espressione che il potenziale  $V(\lambda)$  può assumere. L'obiettivo è quello di ricavare un'espressione adeguata del potenziale confrontando le previsioni che ne scaturiscono con i dati sperimentali (Potenziale fenomenologico). In particolare, si cercherà un potenziale in grado di riprodurre i livelli energetici di singola particella stimati dall'osservazione degli spettri di alcuni ipernuclei.

Per una prima analisi è stato scelto un potenziale locale e centrale  $V(r)$ . Alcuni criteri guida per la forma del potenziale centrale sono i seguenti:

- Il potenziale deve annullarsi rapidamente nella regione in cui  $r$  è maggiore del raggio stimato della materia nucleare, poiché l'interazione forte è a corto raggio.
- deve avere un forte gradiente nella regione superficiale della materia nucleare, per confinare gli adroni all'interno dell'ipernucleo.
- deve prevedere uno spettro di autovalori continuo per le energie maggiori di zero.

Tra i potenziali che soddisfano queste caratteristiche quello che storicamente ha avuto maggior successo per la sua semplicità e le sue capacità predittive è il potenziale di Woods-Saxon:

$$V(r) = \frac{V}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{a}\right)}} \quad \text{con } R = r_0(A - 1)^{1/3} \quad (4.1)$$

Un andamento qualitativo del potenziale è mostrato in figura 6. I parametri sono la profondità  $V$ , la diffusività  $a$  e il coefficiente del raggio  $r_0$ .



## 4.1 STATO ATTUALE DELLA PARAMETRIZZAZIONE

In questo paragrafo saranno discussi brevemente alcuni risultati presenti in letteratura riguardo alla determinazione dei parametri di un potenziale di Woods-Saxon che permettano di descrivere i livelli energetici della lambda in funzione di  $A$ . Questi valori saranno un utile punto di partenza per il mio lavoro. Si potrà inoltre valutare la validità di queste parametrizzazioni alla luce di nuovi dati sperimentali. È riportata una lista di alcuni insiemi di parametri:

$$\begin{aligned} V &= 30.7 \text{ MeV} & r_0 &= 1.1 \text{ fm} & a &= 0.6 \text{ fm} \\ V &= 29.34 \text{ MeV} & r_0 &= (1.08 + 0.395 A^{-2/3}) \text{ fm} & a &= 0.6 \text{ fm} \\ V &= 28.0 \text{ MeV} & r_0 &= (1.128 + 0.439 A^{-2/3}) \text{ fm} & a &= 0.6 \text{ fm} \end{aligned}$$

Il primo insieme è stato utilizzato in [1] ed è in sostanziale accordo con i dati sperimentali disponibili all'epoca. I set 2 e 3 sono stati proposti da Millener e Dover [2] che hanno valutato una leggera crescita di  $r_0$  con  $A$  (vedi fig.8) e si riferiscono ad ipernuclei con  $A \leq 89$ . Infine è da segnalare il dettagliato lavoro di Gal [3] che ha utilizzato potenziali non locali ottenendo eccellenti risultati.

Fig. 8 Confronto tra l'energia di legame della lambda ottenuta sperimentalmente e i valori calcolati mediante un potenziale di Woods-Saxon con  $V = -28 \text{ MeV}$ ,  $r_0 = 1.128 + 0.439 A^{-2/3} \text{ fm}$  ed  $a = 0.6 \text{ fm}$ . Qui  $A$  rappresenta il numero di nucleoni presenti nell'ipernucleo.[2]

## 4.2 DATI SPERIMENTALI

Al fine di aggiustare i parametri del potenziale è stato necessario operare una selezione tra i dati sperimentali disponibili. Attualmente non è disponibile un'ampia casistica di spettri degli ipernuclei con diversi numeri atomici. In particolare per  $A \geq 12$  gli esperimenti sono stati effettuati sempre su determinati ipernuclei e a volte i risultati sono anche incompatibili tra loro. È stato quindi necessario seguire alcuni criteri che permettessero di scegliere un valore sperimentale tra quelli presenti in letteratura.

- Non sono stati considerati gli ipernuclei con basso numero atomico, perché una loro descrizione mediante un modello a campo medio è teoricamente scarsamente giustificabile.
- Sono stati utilizzati i dati ricavati da esperimenti recenti effettuati con una definizione energetica maggiore rispetto a esperimenti datati. In questo modo è possibile distinguere picchi ravvicinati delle sezioni d'urto in ipernuclei pesanti.
- Sono stati preferiti i dati ottenuti producendo l'ipernucleo con la reazione  $(K^-, \pi^-)$ , poiché grazie al suo alto momento trasferito, permette una migliore determinazione del picco corrispondente allo stato fondamentale del sistema (vedi capitolo 1).
- Nei casi in cui più dati erano in accordo con i criteri precedenti sono stati scelti i valori dei livelli energetici affetti da un errore sperimentale più piccolo.

Non tutti i livelli energetici in accordo con i criteri appena esposti sono stati utilizzati in questo lavoro. Per comprendere il motivo di questa scelta è importante guardare all'interpretazione dei picchi rilevati nelle sezioni d'urto. Ad esempio nello spettro del  $^{12}\text{C}$  (vedi figura 3) sono presenti due grandi picchi in corrispondenza di  $B_A \simeq 11$  e 0 MeV e altri due piccoli picchi situati tra i primi due. I picchi più grandi sono associati alle rispettive configurazioni, di tipo *stato buca neutronico-stato della particella lambda*,  $[1p_{3/2}^{-1}, s_A]$  e  $[1p_{3/2}^{-1}, p_A]$ . I picchi intermedi invece sono associati a configurazioni in cui il  $^{11}\text{C}$  (sistema residuo tolta la particella lambda) si trova in uno stato eccitato. L'influenza che i nucleoni esercitano sulla lambda dipende dallo stato in cui si trovano. Quindi, in un modello a campo medio e con una stessa parametrizzazione, non è possibile descrivere stati della lambda derivanti da diverse configurazioni del sistema residuo. Per questo motivo, sono stati considerati solo quei livelli energetici che sono associati (dagli stessi sperimentali) allo stato fondamentale del sistema residuo, in modo che, quando la particella lambda si trova nello stato caratterizzato da

$l = 0$ , l'ipernucleo si trova nello stato fondamentale (data l'espressione del potenziale,  $l = 0$  corrisponde al livello energetico più basso per la lambda).

Seguendo questi criteri ho selezionato alcuni livelli energetici per gli ipernuclei disponibili. I dati sperimentali utilizzati in questo lavoro sono mostrati in tabella 9.

Ipernucleo	Stato	energia (MeV)	Processo	Esperimento
${}^9Be_\Lambda$	$[1p_{3/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$6.49 \pm 0.68$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
${}^{10}B_\Lambda$	$[1p_{3/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$8.1 \pm 0.1$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
${}^{12}C_\Lambda$	$[1p_{3/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$10.8 \pm 0.1$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1p_{3/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$0.0 \pm 0.1$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
${}^{16}O_\Lambda$	$[1p_{1/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$12.50 \pm 0.35$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
	$[1p_{1/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$2.5 \pm 0.4$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
${}^{28}Si_\Lambda$	$[1d_{5/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$16.6 \pm 0.2$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1d_{5/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$7.0 \pm 0.2$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
${}^{32}S_\Lambda$	$[2s^{-1}, s_\Lambda]$	$17.5 \pm 0.5$	$(K^-, \pi^-)$	Bertini
${}^{40}Ca_\Lambda$	$[1d_{3/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$18.7 \pm 1.1$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
	$[1d_{3/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$10.1 \pm 0.3$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
${}^{51}V_\Lambda$	$[1f_{7/3}^{-1}, s_\Lambda]$	$19.9 \pm 1.0$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
	$[1f_{7/3}^{-1}, p_\Lambda]$	$12.4 \pm 0.5$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
	$[1f_{7/3}^{-1}, d_\Lambda]$	$4.6 \pm 0.3$	$(\pi^+, K^+)$	Pile
${}^{89}Y_\Lambda$	$[1g_{3/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$22.0 \pm 0.5$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1g_{3/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$16.1 \pm 0.3$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1g_{3/2}^{-1}, d_\Lambda]$	$8.8 \pm 0.5$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
${}^{139}La_\Lambda$	$[1h_{11/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$23.8 \pm 1.0$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1h_{11/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$20.1 \pm 0.4$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1h_{11/2}^{-1}, d_\Lambda]$	$12.1 \pm 0.1$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
${}^{208}Pb_\Lambda$	$[1i_{13/2}^{-1}, s_\Lambda]$	$26.5 \pm 0.5$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1i_{13/2}^{-1}, p_\Lambda]$	$21.3 \pm 0.7$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa
	$[1i_{13/2}^{-1}, d_\Lambda]$	$16.5 \pm 0.5$	$(\pi^+, K^+)$	Hasegawa

Tab.9 Energia di legame della particella lambda stimati dall'osservazione delle sezioni d'urto.

Nella tabella 9 accanto ad ogni livello energetico (l'errore riportato è di tipo massimo) è indicato il corrispondente stato dell'ipernucleo utilizzando la notazione spettroscopica, il processo di creazione dell'ipernucleo, e un riferimento all'esperimento dal quale sono stati presi i dati (per Hasegawa vedi [4], per Pile vedi [5], per Bertini vedi [6]).

Si fanno ora alcune considerazioni riguardo ai dati riportati in tabella 9.

Si può notare una crescita più o meno regolare dei valori dell'energia in funzione di  $A$ . Questo si manifesta sia per stati con  $l = 0$  che in quelli con  $l = 1$  e  $2$ . Fa eccezione lo stato  $[1i_{13/2}^{-1}, p_A]$  del piombo, il cui incremento rispetto allo stato  $[1h_{11/2}^{-1}, p_A]$  del lantanio è piccolo e si discosta da una crescita regolare in funzione di  $A$  dei livelli in onda  $p$ . Questo fatto è in relazione ad un altro aspetto molto importante dei dati sperimentali. La differenza tra i livelli energetici in onda  $s$  e quelli in onda  $p$  decresce con regolarità al crescere di  $A$  tranne che nel piombo, dove si verifica un brusco cambiamento di tendenza. Ci aspettiamo che quest'ultimo aspetto non sia facilmente prevedibile in un modello a campo medio in cui il potenziale non ha dipendenza da  $l$ .

Un'altro aspetto da sottolineare riguarda le differenze tra questi dati e quelli utilizzati nei lavori presenti in letteratura che sono stati citati in precedenza (vedi paragrafo 3.1). Nel mio caso sono stati aggiunti due ipernuclei pesanti il  $^{139}La_A$  e il  $^{208}Pb_A$  inoltre gli errori sperimentali sono notevolmente più piccoli sia negli ipernuclei pesanti che in quelli più leggeri. Queste caratteristiche permettono di effettuare una stima più accurata per i parametri del potenziale.

### 4.3 REGOLE PER IL FIT

In questo paragrafo si mostrano e si discutono le tecniche adoperate per trovare i valori dei parametri  $V_0$ ,  $a$ ,  $r_0$ , della 4.1 che meglio riproducono i dati sperimentali riportati in tab.9.

Per decidere tra più parametrizzazioni quale soddisfa a questa condizione è stata adoperata la seguente quantità:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{x_i^{cal} - x_i^{sper}}{\Delta x_i^{sper}} \right)^2 \quad (4.2)$$

dove  $x_i^{cal}$  è il valore dell'energia del livello calcolato,  $x_i^{sper}$  il valore sperimentale,  $\Delta x_i^{sper}$  l'errore sperimentale (di tipo massimo). Poiché i valori ottenuti dalle misure sperimentali non sono da intendersi distribuiti normalmente intorno ai valori di aspettazione, la grandezza  $Q$  non è da considerarsi un "χ quadro", ma rimane una valida stima della bontà della parametrizzazione [7]. Le parametrizzazioni corrispondenti ad un valore minore di  $Q$  riproducono meglio i dati sperimentali. Presi singolarmente, i termini della sommatoria 4.2 sono minori dell'unità quando il valore calcolato si trova all'interno della banda di errore del valore sperimentale, sono maggiori dell'unità nel caso contrario.

Naturalmente il valore dei parametri che minimizza  $Q$  è quello che meglio riproduce i dati sperimentali.

In questo caso non è possibile procedere per via analitica nel calcolo del minimo per  $Q$ , perchè non si possiede un'espressione analitica dei  $x_i^{cal}$  come

funzione dei parametri. È quindi necessario cercare il minimo utilizzando delle tecniche diverse.

È presenta ora la tecnica utilizzata in questo lavoro.

È opportuno fissare un valore di partenza per i parametri e valutare l'andamento della funzione  $Q$  per una piccola variazione di uno di questi parametri. Si cerca quindi di individuare il valore del parametro che minimizza  $Q$ . L'individuazione di questo valore avviene constatando che sia un aumento che una diminuzione del parametro corrispondono ad un aumento della funzione  $Q$ . Si utilizza lo stesso procedimento per tutti i parametri del potenziale e poi si esegue lo stesso processo più volte.

Questo metodo presenta comunque degli inconvenienti, infatti è incapace di stabilire se il minimo trovato è globale o locale inoltre non vi è alcun modo per stabilire se esistono altri minimi locali. Infatti il minimo trovato dipende dal valore di partenza assegnato ai parametri. Questi inconvenienti potrebbero essere risolti o attenuati mediante l'utilizzo di un algoritmo che estragga a caso i valori di partenza per i parametri del potenziale con una densità fissata all'interno di un certo intervallo del potenziale.

È stato eseguito manualmente questo procedimento per la minimizzazione di  $Q$  in modo da poter meglio gestire il cambiamento dei parametri e per poter valutare il comportamento dei livelli energetici calcolati al variare dei parametri. In questo modo è stato possibile effettuare delle osservazioni che saranno riportate in seguito.

In questo lavoro è stata posta l'attenzione in modo particolare all'andamento dell'energia di legame della  $\lambda$  nello stato fondamentale dell'ipernucleo. È stato quindi minimizzato il  $Q$  ottenuto considerando solo i livelli con  $l = 0$ , ma per valutare la bontà della parametrizzazione, ho anche calcolato il  $Q$  corrispondente agli stati con  $l = 1$  e  $2$ .

## 4.4 PARAMETRIZZAZIONI

In questo paragrafo sono presenti i risultati da me ottenuti utilizzando le parametrizzazioni risultate migliori secondo i criteri sopra presentati. Il lavoro è stato diviso in tre parti a secondo del tipo di dipendenza dei parametri  $V$  e  $r_0$  dal numero di massa  $A$ .

### 4.4.1 Nessuna dipendenza da $A$

Come è già stato notato in precedenti lavori, eliminare ogni dipendenza dal numero di massa  $A$  nei parametri del potenziale conduce ad una descrizione che qualitativamente descrive l'andamento delle energie di legame, ma che necessita di perfezionamento. Se comunque ci limitiamo a considerare gli ipernuclei con  $12 \leq A \leq 139$  esistono delle parametrizzazioni di questo tipo che riproducono in maniera eccellente i dati sperimentali.

Prima di presentare i risultati è utile notare (vedi fig. 9) come la vecchia parametrizzazione proposta da Millener sia inconsistente con gli attuali dati sperimentali. La causa principale è sicuramente la differenza nell'errore sperimentale associato ai dati utilizzati nel mio lavoro rispetto a quelli utilizzati da Millener.

Fig. 9 Confronto tra i dati sperimentali di  $-B_A$  riportati in Tab.9 e le previsioni teoriche (linea continua) ottenute con un potenziale di Woods-Saxon e la seguente parametrizzazione proposta da Millener [2]:  
 $V = 29.34 MeV \quad r_0 = (1.08 + 0.395A^{-2/3}) fm \quad a = 0.6 fm$

Seguendo il criterio della minimizzazione di  $Q$  (vedi la 4.2), è stata stimata una sostanziale diminuzione ( $1.2 - 1.8 MeV$ ) della profondità del potenziale rispetto ai parametri utilizzati da Millener (vedi sez. 3.1). I risultati trovati sono riassunti nella tabella e nel grafico che seguono.

<b>V = −28.80 MeV</b>		<b>r<sub>0</sub> = 1.1 fm</b>	<b>a = 0.580 fm</b>	
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
<sup>9</sup> Be <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−6.49 ± 0.68	−8.324	−2.7
<sup>10</sup> B <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−8.1 ± 0.1	−9.046	−9.5
<sup>12</sup> C <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−10.8 ± 0.1	−10.307	4.9
<sup>16</sup> O <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−12.50 ± 0.35	−12.295	0.6
	<i>p</i>	−2.5 ± 0.4	−1.830	1.7
<sup>28</sup> Si <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−16.6 ± 0.2	−15.982	3.1
	<i>p</i>	−7.0 ± 0.2	−6.343	3.3
<sup>32</sup> S <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−17.5 ± 0.5	−16.799	1.4
<sup>40</sup> Ca <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−18.7 ± 1.1	−18.098	0.5
	<i>p</i>	−10.1 ± 0.3	−9.426	2.2
<sup>51</sup> V <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−19.9 ± 1.0	−19.407	0.5
	<i>p</i>	−12.4 ± 0.5	−11.475	1.8
	<i>d</i>	−4.6 ± 0.3	−3.081	5.0
<sup>89</sup> Y <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−22.0 ± 0.5	−21.966	0.1
	<i>p</i>	−16.1 ± 0.3	−15.762	1.1
	<i>d</i>	−8.8 ± 0.5	−8.728	1.1
<sup>139</sup> La <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−23.8 ± 1.0	−23.582	0.2
	<i>p</i>	−20.1 ± 0.4	−18.648	3.6
	<i>d</i>	−12.1 ± 0.1	−12.867	−1.5
<sup>208</sup> Pb <sub>Λ</sub>	<i>s</i>	−26.5 ± 0.5	−24.747	3.5
	<i>p</i>	−21.3 ± 0.7	−20.807	0.7
	<i>d</i>	−16.5 ± 0.5	−16.095	0.8
<b>Q<sub>s</sub> = 13.25</b>		<b>Q<sub>p,d</sub> = 5.97</b>		

Tab.10 Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ . I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Fig.10 Andamento dei valori calcolati di  $-B_A$  (in MeV) come funzione di  $A^{-2/3}$ .  
Le curve corrispondono ai risultati ottenuti con un potenziale di Woods-Saxon  
e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della precedente tabella.  
I valori sperimentali si riferiscono a quelli riportati in Tab. 9.



In tab.10 è mostrato il confronto tra i livelli energetici stimati sperimentalmente e quelli calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e con la parametrizzazione mostrata nella prima riga della tabella 10. In questa, come nelle altre tabelle che seguono, oltre al valore sperimentale e a quello teorico del livello energetico è stato indicata la quantità  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$  che rappresenta il contributo del singolo livello energetico al calcolo di  $Q$  4.2. Nell'ultima riga è riportato il valore di  $Q$  calcolato solo sui livelli degli orbitali  $s$  ( $Q_s$ ) e il valore di  $Q$  calcolato solo sui livelli degli orbitali  $p$  e  $d$  ( $Q_{p,d}$ ). Insieme alla tabella riporto un grafico che indica l'andamento in funzione di  $A$  dei livelli energetici calcolati. Questi grafici si prestano ad una valutazione più qualitativa ma immediata della bontà della parametrizzazione.

Questa parametrizzazione non è in buon accordo con i dati sperimentali soprattutto a causa del  ${}^9Be_\Lambda$  del  ${}^{10}B_\Lambda$  del  ${}^{12}C_\Lambda$  e del  ${}^{208}Pb_\Lambda$ . Comunque si noti che se non si tiene conto del  ${}^9Be_\Lambda$  del  ${}^{10}B_\Lambda$  e del  ${}^{208}Pb_\Lambda$  i seguenti valori dei parametri riproducono ottimamente i dati sperimentali.

$$V = -29.60 \text{ MeV} \quad r_0 = 1.1 \text{ fm} \quad a = 0.580 \text{ fm} \quad (4.3)$$

V = -29.60 MeV		r <sub>0</sub> = 1.1 fm	a = 0.580 fm	
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
${}^{12}C_\Lambda$	$s$	$-10.8 \pm 0.1$	-10.827	-0.2
${}^{16}O_\Lambda$	$s$	$-12.50 \pm 0.35$	-12.876	-1.0
	$p$	$-2.5 \pm 0.4$	-2.169	0.8
${}^{28}Si_\Lambda$	$s$	$-16.6 \pm 0.2$	-16.269	-0.14
	$p$	$-7.0 \pm 0.2$	-6.842	0.8
${}^{32}S_\Lambda$	$s$	$-17.5 \pm 0.5$	-17.463	0.1
${}^{40}Ca_\Lambda$	$s$	$-18.7 \pm 1.1$	-18.784	-0.1
	$p$	$-10.1 \pm 0.3$	-10.000	0.3
${}^{51}V_\Lambda$	$s$	$-19.9 \pm 1.0$	-20.114	-0.2
	$p$	$-12.4 \pm 0.5$	-12.09	0.6
	$d$	$-4.6 \pm 0.3$	-3.562	3.4
${}^{89}Y_\Lambda$	$s$	$-22.0 \pm 0.5$	-22.709	-1.4
	$p$	$-16.1 \pm 0.3$	-16.449	-1.6
	$d$	$-8.8 \pm 0.5$	-9.338	-1.0
${}^{139}La_\Lambda$	$s$	$-23.8 \pm 1.0$	-24.345	-0.5
	$p$	$-20.1 \pm 0.4$	-19.372	1.8
	$d$	$-12.1 \pm 0.1$	-13.541	-2.8
<b>Q<sub>s</sub> = 0.42</b>		<b>Q<sub>p,d</sub> = 3.0</b>		

Tab.11 Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ . I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Nel tentativo di descrivere la dipendenza di  $B_A$  da  $A$  nello stato fondamentale dell'ipernucleo, il problema principale è rappresentato dal valore che questa grandezza assume nei tre ipernuclei con  $A$  minore considerati. La differenza tra i livelli energetici di questi ipernuclei è piuttosto grande in relazione alla piccola differenza tra i loro numeri atomici. In particolare in questi ipernuclei vi è una variazione della  $B_A$  pari al 20% della variazione totale ma una variazione di  $A$  di appena il 2% della variazione totale. Nel potenziale di Woods-Saxon solo il valore del raggio  $R$  aumenta con  $A$  secondo la relazione

$$R = r_0(A - 1)^{1/3} \quad (4.4)$$

stimata dalla misura della densità nucleare. Sembra che per i suddetti ipernuclei ad una diminuzione di  $A$  debba corrispondere una diminuzione di  $R$  più rapida rispetto a quella data dalla 4.4. Si può quindi pensare di migliorare il fit introducendo una dipendenza di  $r_0$  da  $A$  che descriva quest'aspetto. Oppure si può ottenere lo stesso risultato introducendo una dipendenza di  $V$  da  $A$  in modo che la profondità del potenziale diminuisca in questi ipernuclei.

Un'altra importante difficoltà nel fit dei dati è rappresentata dal valore della  $B_A$  per il  $^{208}\text{Pb}_A$  nel suo stato fondamentale che è notevolmente più alto del valore calcolato.

#### 4.4.2 Dipendenza del coefficiente del raggio da $A$

Seguendo [2] è stata utilizzata la seguente dipendenza di  $r_0$  da  $A$

$$r_0 = r_a + r_b(A - 1)^{-2/3} \quad (4.5)$$

con questa e in base alla 4.4 si ottiene

$$R = r_a(A - 1)^{+1/3} + r_b(A - 1)^{-1/3} \quad (4.6)$$

La quantità  $r_b A^{-1/3}$  varia da  $0.33r_b$  a  $0.16r_b$  per  $A$  che varia da 28 a 208. Quindi in questo intervallo di valori di  $A$  e per valori relativamente piccoli di  $r_b$  ( $|r_b| < 1$ ) la quantità  $r_b(A - 1)^{-1/3}$  che compare nella 4.6 è piccola rispetto alla quantità  $r_a(A - 1)^{+1/3}$ . Ciò significa che  $R$  assume un andamento molto simile a quello utilizzato nelle precedenti parametrizzazioni (4.4). Quando  $A$  assume valori minori di 28  $r_b A^{-1/3}$  aumenta rapidamente e quindi aumenta anche  $R$ . Queste caratteristiche invitano ad utilizzare il nuovo parametro  $r_b$  per migliorare il calcolo di  $B_A$  negli ipernuclei con basso valore di  $A$ .

A tal scopo, e avendo valutato un rapido peggioramento dei fit precedenti per piccole variazioni di  $r_0$  dal valore di  $1.1 \text{ fm}$ , sono state utilizzate coppie di valori  $(r_a, r_b)$  che nella regione delle  $A > 28$  riproducessero il valore  $r_0 = 1.1 \text{ fm}$ . Inoltre, poiché negli ipernuclei con  $A < 28$  si deve provocare

una diminuzione della  $B_\Lambda$  rispetto alle precedenti parametrizzazioni, risulta necessario utilizzare un valore negativo di  $r_b$ . Infatti in questo modo si provoca una diminuzione del parametro  $R$  del potenziale ottenendo l'effetto desiderato. Sono riportati di seguito con l'utilizzo di tabelle e grafici i risultati ottenuti con tre parametrizzazioni tra le più significative.

<b>V = -28.80 MeV</b>		<b><math>r_a = 1.155</math> fm</b>	<b><math>r_b = -0.255</math> fm</b>	<b>a = 0.600 fm</b>
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
${}^9\text{Be}_\Lambda$	<i>s</i>	$-6.49 \pm 0.68$	-8.128	-2.4
${}^{10}\text{B}_\Lambda$	<i>s</i>	$-8.1 \pm 0.1$	-8.916	-8.2
${}^{12}\text{C}_\Lambda$	<i>s</i>	$-10.8 \pm 0.1$	-10.284	5.1
${}^{16}\text{O}_\Lambda$	<i>s</i>	$-12.50 \pm 0.35$	-12.419	0.2
	<i>p</i>	$-2.5 \pm 0.4$	-2.076	1.1
${}^{28}\text{Si}_\Lambda$	<i>s</i>	$-16.6 \pm 0.2$	-16.292	1.5
	<i>p</i>	$-7.0 \pm 0.2$	-6.870	0.6
${}^{32}\text{S}_\Lambda$	<i>s</i>	$-17.5 \pm 0.5$	-17.135	0.7
${}^{40}\text{Ca}_\Lambda$	<i>s</i>	$-18.7 \pm 1.1$	-18.462	0.2
	<i>p</i>	$-10.1 \pm 0.3$	-10.061	0.1
${}^{51}\text{V}_\Lambda$	<i>s</i>	$-19.9 \pm 1.0$	-19.784	0.1
	<i>p</i>	$-12.4 \pm 0.5$	-12.146	0.5
	<i>d</i>	$-4.6 \pm 0.3$	-3.986	2.0
${}^{89}\text{Y}_\Lambda$	<i>s</i>	$-22.0 \pm 0.5$	-22.324	-0.6
	<i>p</i>	$-16.1 \pm 0.3$	-16.428	-1.1
	<i>d</i>	$-8.8 \pm 0.5$	-9.708	-1.8
${}^{139}\text{La}_\Lambda$	<i>s</i>	$-23.8 \pm 1.0$	-23.898	-0.1
	<i>p</i>	$-20.1 \pm 0.4$	-19.242	2.1
	<i>d</i>	$-12.1 \pm 0.1$	-13.784	-3.4
${}^{208}\text{Pb}_\Lambda$	<i>s</i>	$-26.5 \pm 0.5$	-25.016	2.9
	<i>p</i>	$-21.3 \pm 0.7$	-21.329	-0.05
	<i>d</i>	$-16.5 \pm 0.5$	-16.919	-0.8
<b><math>Q_s = 10.10</math></b>		<b><math>Q_{p,d} = 2.44</math></b>		

*Tab.12* Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ . I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Fig.11 Andamento dei valori calcolati di  $-B_A$  (in MeV) come funzione di  $A^{-2/3}$ .  
Le curve corrispondono ai risultati ottenuti con un potenziale di Woods-Saxon  
e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della precedente tabella.  
I valori sperimentali si riferiscono a quelli riportati in Tab. 9.

<b>V = −28.70 MeV</b>		<b>r<sub>a</sub> = 1.185 fm</b>	<b>r<sub>b</sub> = −0.455 fm</b>	<b>a = 0.560 fm</b>
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
<sup>9</sup> Be <sub>Λ</sub>	s	−6.49 ± 0.68	−7.882	−2.0
<sup>10</sup> B <sub>Λ</sub>	s	−8.1 ± 0.1	−8.747	−6.4
<sup>12</sup> C <sub>Λ</sub>	s	−10.8 ± 0.1	−10.240	5.6
<sup>16</sup> O <sub>Λ</sub>	s	−12.50 ± 0.35	−12.537	−0.1
	p	−2.5 ± 0.4	−2.000	1.2
<sup>28</sup> Si <sub>Λ</sub>	s	−16.6 ± 0.2	−16.586	0.1
	p	−7.0 ± 0.2	−7.152	−0.7
<sup>32</sup> S <sub>Λ</sub>	s	−17.5 ± 0.5	−17.447	0.1
<sup>40</sup> Ca <sub>Λ</sub>	s	−18.7 ± 1.1	−18.787	−0.1
	p	−10.1 ± 0.3	−10.483	−1.3
<sup>51</sup> V <sub>Λ</sub>	s	−19.9 ± 1.0	−20.104	−0.2
	p	−12.4 ± 0.5	−12.618	−0.4
	d	−4.6 ± 0.3	−4.480	0.4
<sup>89</sup> Y <sub>Λ</sub>	s	−22.0 ± 0.5	22.587	−1.2
	p	−16.1 ± 0.3	−16.901	−2.7
	d	−8.8 ± 0.5	−10.339	−3.1
<sup>139</sup> La <sub>Λ</sub>	s	−23.8 ± 1.0	−24.095	−0.3
	p	−20.1 ± 0.4	−19.656	1.1
	d	−12.1 ± 0.1	−14.386	−4.6
<sup>208</sup> Pb <sub>Λ</sub>	s	−26.5 ± 0.5	−25.155	2.7
	p	−21.3 ± 0.7	−21.657	−0.5
	d	−16.5 ± 0.5	−17.431	−1.8
<b>Q<sub>s</sub> = 7.83</b>		<b>Q<sub>p,d</sub> = 4.23</b>		

Tab.13 Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ . I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Fig. 12 Andamento dei valori calcolati di  $-B_A$  (in MeV) come funzione di  $A^{-2/3}$ .  
Le curve corrispondono ai risultati ottenuti con un potenziale di Woods-Saxon  
e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della precedente tabella.  
I valori sperimentali si riferiscono a quelli riportati in Tab. 9.

<b>V = −28.00 MeV</b>		<b>r<sub>a</sub> = 1.280 fm</b>	<b>r<sub>b</sub> = −0.820 fm</b>	<b>a = 0.530 fm</b>
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
<sup>9</sup> Be <sub>Λ</sub>	s	−6.49 ± 0.68	−7.584	−1.6
<sup>10</sup> B <sub>Λ</sub>	s	−8.1 ± 0.1	−8.569	−4.7
<sup>12</sup> C <sub>Λ</sub>	s	−10.8 ± 0.1	−10.246	5.5
<sup>16</sup> O <sub>Λ</sub>	s	−12.50 ± 0.35	−12.575	−0.7
	p	−2.5 ± 0.4	−2.320	0.4
<sup>28</sup> Si <sub>Λ</sub>	s	−16.6 ± 0.2	−16.962	−1.8
	p	−7.0 ± 0.2	−7.969	−4.8
<sup>32</sup> S <sub>Λ</sub>	s	−17.5 ± 0.5	−17.820	−0.6
<sup>40</sup> Ca <sub>Λ</sub>	s	−18.7 ± 1.1	−19.128	−0.4
	p	−10.1 ± 0.3	−11.400	−4.3
<sup>51</sup> V <sub>Λ</sub>	s	−19.9 ± 1.0	−20.386	−0.5
	p	−12.4 ± 0.5	−13.519	−2.2
	d	−4.6 ± 0.3	−5.855	−4.2
<sup>89</sup> Y <sub>Λ</sub>	s	−22.0 ± 0.5	−22.682	−1.4
	p	−16.1 ± 0.3	17.607	−5.0
	d	−8.8 ± 0.5	−11.646	−5.7
<sup>139</sup> La <sub>Λ</sub>	s	−23.8 ± 1.0	−24.033	−0.2
	p	−20.1 ± 0.4	−20.134	−0.1
	d	−12.1 ± 0.1	−15.445	−6.7
<sup>208</sup> Pb <sub>Λ</sub>	s	−26.5 ± 0.5	−24.964	3.1
	p	−21.3 ± 0.7	−21.924	−0.9
	d	−16.5 ± 0.5	−18.215	−3.4
<b>Q<sub>s</sub> = 6.46</b>		<b>Q<sub>p,d</sub> = 16.34</b>		

Tab.14 Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ . I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Fig. 13 Andamento dei valori calcolati di  $-B_A$  (in MeV) come funzione di  $A^{-2/3}$ .  
Le curve corrispondono ai risultati ottenuti con un potenziale di Woods-Saxon  
e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della precedente tabella.  
I valori sperimentali si riferiscono a quelli riportati in Tab. 9.



Le tabelle 12, 13, 14 e i rispettivi grafici seguono l'ordine crescente di  $|r_b|$  e quindi l'ordine crescente per quel che riguarda l'effetto di abbassamento dei livelli energetici nella regione delle  $A < 28$ . Al crescere di  $|r_b|$  si nota un miglioramento per quel che riguarda la previsione dei livelli energetici degli stati in onda s. Tuttavia ciò si accompagna a un sostanziale peggioramento della previsione dei livelli energetici in onda d.

In questo lavoro ho stimato una diminuzione di  $r_0$  al crescere di  $A$  giungendo a conclusioni opposte rispetto a quanto trovato da Millener [2].

Il coefficiente  $R$  del potenziale dà una stima della regione di spazio in cui diviene apprezzabile l'interazione della  $\lambda$  con il resto del sistema nucleare. È interessante confrontare questo valore con una stima della regione di spazio in cui è confinata la materia nucleare. A tal scopo è riportato il valore del parametro  $R$  stimato dalla descrizione della densità di materia con un potenziale di Woods-Saxon.

$$R = r_0 A^{-2/3} \quad \text{con} \quad r_0 = (1.114 - 1.276 A^{-2/3}) \text{ fm} \quad (4.7)$$

Dal confronto di questo con i valori  $r_a$  e  $r_b$  riportati nelle tabelle emerge che la regione in cui è confinata la materia nucleare è dello stesso ordine di grandezza della regione di interazione. In realtà, la regione di interazione è leggermente più grande di circa 0.3 fm. Ciò è in accordo con il fatto che l'interazione  $A - N$  è a corto raggio.

#### 4.4.3 Dipendenza della profondità del potenziale da $A$

L'inserimento di un nuovo parametro utilizzato nella dipendenza di  $r_0$  da  $A$  ha portato ad un miglioramento dell'accordo tra teoria e dati sperimentali. Tuttavia i problemi relativi agli ipernuclei con  $A < 28$  non sono stati completamente risolti.

Qui è utilizzata una dipendenza di  $V$  da  $A$  della seguente forma:

$$V = V_a + V_b(A - 1)^\gamma \quad (4.8)$$

È possibile utilizzare questi nuovi parametri per migliorare la previsione della  $B_A$  nel piombo oppure per abbassare ulteriormente i livelli energetici degli ipernuclei con  $A < 28$ . Ovviamente l'andamento di  $V$  con  $A$  cambia a seconda del tipo di effetto che si vuole ottenere.

In tutte le precedenti parametrizzazioni, il valore calcolato della  $B_A$  del piombo, quando l'ipernucleo si trova nello stato fondamentale, è più piccolo di quello sperimentalmente ottenuto. Il potenziale medio della  $\lambda$  deve risultare più profondo per il  $^{208}\text{Pb}_A$  rispetto agli altri ipernuclei. È quindi necessario utilizzare un valore di  $V_b$  negativo e un valore di  $\gamma$  positivo.

$V_a = -28.40 \text{ MeV}$		$V_b = -2 \cdot 10^{-7} \text{ MeV}$	$\gamma = 3.0$	
$r_a = 1.180 \text{ fm}$		$r_b = -0.455 \text{ fm}$	$a = 0.490 \text{ fm}$	
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
${}^9Be_\Lambda$	$s$	$-6.49 \pm 0.68$	$-7.778$	$-1.9$
${}^{10}B_\Lambda$	$s$	$-8.1 \pm 0.1$	$-8.684$	$-5.8$
${}^{12}C_\Lambda$	$s$	$-10.8 \pm 0.1$	$-10.236$	$5.6$
${}^{16}O_\Lambda$	$s$	$-12.50 \pm 0.35$	$-12.594$	$-0.3$
	$p$	$-2.5 \pm 0.4$	$-1.748$	$1.9$
${}^{28}Si_\Lambda$	$s$	$-16.6 \pm 0.2$	$-16.666$	$-0.03$
	$p$	$-7.0 \pm 0.2$	$-7.109$	$-0.5$
${}^{32}S_\Lambda$	$s$	$-17.5 \pm 0.5$	$-17.514$	$-0.03$
${}^{40}Ca_\Lambda$	$s$	$-18.7 \pm 1.1$	$-18.481$	$-0.1$
	$p$	$-10.1 \pm 0.3$	$-10.512$	$-1.4$
${}^{51}V_\Lambda$	$s$	$-19.9 \pm 1.0$	$-20.136$	$-0.2$
	$p$	$-12.4 \pm 0.5$	$-12.673$	$-0.5$
	$d$	$-4.6 \pm 0.3$	$-4.418$	$0.6$
${}^{89}Y_\Lambda$	$s$	$-22.0 \pm 0.5$	$-22.640$	$-1.3$
	$p$	$-16.1 \pm 0.3$	$-17.023$	$-3.1$
	$d$	$-8.8 \pm 0.5$	$-10.451$	$-3.3$
${}^{139}La_\Lambda$	$s$	$-23.8 \pm 1.0$	$-24.466$	$-0.6$
	$p$	$-20.1 \pm 0.4$	$-20.087$	$0.03$
	$d$	$-12.1 \pm 0.1$	$-14.833$	$-5.4$
${}^{208}Pb_\Lambda$	$s$	$-26.5 \pm 0.5$	$-26.707$	$-0.4$
	$p$	$-21.3 \pm 0.7$	$-23.236$	$-2.8$
	$d$	$-16.5 \pm 0.5$	$-19.006$	$-5.0$
$Q_s = 6.52$		$Q_{p,d} = 8.11$		

Tab.15 Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ . I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Fig.14 Andamento dei valori calcolati di  $-B_A$  (in MeV) come funzione di  $A^{-2/3}$ .

Le curve corrispondono ai risultati ottenuti con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della precedente tabella.

I valori sperimentali si riferiscono a quelli riportati in Tab. 9.

Confrontando la fig.14 con le Fig.12 e 13 si nota che vi è stato un sensibile miglioramento per quel che riguarda la previsione della  $B_A$  per lo stato  $[1i_{13/2}^{-1}, s_A]$  accompagnato da un peggioramento della previsione della  $B_A$  per gli stati  $[1i_{13/2}^{-1}, p_A]$  e  $[1i_{13/2}^{-1}, d_A]$ . Questo problema era già stato discusso in precedenza quando si concluse che l'anomalo comportamento (rispetto agli altri ipernuclei) delle energie di legame per la lambda nel piombo è difficilmente descrivibile in un modello a campo medio in cui il potenziale non ha alcuna dipendenza dal numero quantico orbitale  $l$ . (vedi capitolo 1).

Si può utilizzare la dipendenza di  $V$  da  $A$  per migliorare ulteriormente l'accordo tra previsioni teoriche e dati sperimentali nella regione delle  $A < 28$ . A tal fine è necessario che la profondità del potenziale sia minore per questi ipernuclei e che aumenti all'aumentare di  $A$ . È quindi necessario utilizzare un valore di  $V_b$  positivo e un valore di  $\gamma$  negativo.

<b><math>V_a = -28.65</math> MeV</b>		<b><math>V_b = 6.80</math> MeV</b>		<b><math>\gamma = -1.250</math></b>
<b><math>r_a = 1.180</math> fm</b>		<b><math>r_b = -0.445</math> fm</b>		<b><math>a = 0.490</math> fm</b>
Ipernucleo	Stato	v. sperimentale (MeV)	v. calcolato (MeV)	q
${}^9Be_\Lambda$	<i>s</i>	$-6.49 \pm 0.68$	$-7.674$	$-1.7$
${}^{10}B_\Lambda$	<i>s</i>	$-8.1 \pm 0.1$	$-8.611$	$-5.1$
${}^{12}C_\Lambda$	<i>s</i>	$-10.8 \pm 0.1$	$-10.213$	$5.8$
${}^{16}O_\Lambda$	<i>s</i>	$-12.50 \pm 0.35$	$-12.637$	$-0.4$
	<i>p</i>	$-2.5 \pm 0.4$	$-1.788$	$1.8$
${}^{28}Si_\Lambda$	<i>s</i>	$-16.6 \pm 0.2$	$-16.797$	$-0.9$
	<i>p</i>	$-7.0 \pm 0.2$	$-7.225$	$-1.1$
${}^{32}S_\Lambda$	<i>s</i>	$-17.5 \pm 0.5$	$-17.664$	$-0.3$
${}^{40}Ca_\Lambda$	<i>s</i>	$-18.7 \pm 1.1$	$-19.001$	$-0.3$
	<i>p</i>	$-10.1 \pm 0.3$	$-10.661$	$-1.8$
${}^{51}V_\Lambda$	<i>s</i>	$-19.9 \pm 1.0$	$-20.303$	$-0.4$
	<i>p</i>	$-12.4 \pm 0.5$	$-12.830$	$-0.8$
	<i>d</i>	$-4.6 \pm 0.3$	$-4.555$	$0.1$
${}^{89}Y_\Lambda$	<i>s</i>	$-22.0 \pm 0.5$	$-22.729$	$-1.5$
	<i>p</i>	$-16.1 \pm 0.3$	$-17.111$	$-3.3$
	<i>d</i>	$-8.8 \pm 0.5$	$-10.535$	$-3.4$
${}^{139}La_\Lambda$	<i>s</i>	$-23.8 \pm 1.0$	$-24.188$	$-0.4$
	<i>p</i>	$-20.1 \pm 0.4$	$-19.822$	$0.7$
	<i>d</i>	$-12.1 \pm 0.1$	$-14.585$	$-4.9$
${}^{208}Pb_\Lambda$	<i>s</i>	$-26.5 \pm 0.5$	$-25.210$	$2.6$
	<i>p</i>	$-21.3 \pm 0.7$	$-21.777$	$-0.7$
	<i>d</i>	$-16.5 \pm 0.5$	$-17.596$	$-2.2$
<b><math>Q_s = 6.74</math></b>		<b><math>Q_{p,d} = 5.68</math></b>		

*Tab.16* Confronto tra valore sperimentale e previsione teorica per i livelli energetici della lambda in alcuni ipernuclei.  $q = \frac{x^{cal} - x^{sper}}{\Delta x^{sper}}$ .  
I valori teorici sono stati calcolati con un potenziale di Woods-Saxon e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della tabella.

Fig.15 Andamento dei valori calcolati di  $-B_A$  (in MeV) come funzione di  $A^{-2/3}$ .  
Le curve corrispondono ai risultati ottenuti con un potenziale di Woods-Saxon  
e la parametrizzazione mostrata nella parte superiore della precedente tabella.  
I valori sperimentali si riferiscono a quelli riportati in Tab. 9.

Tuttavia in questo modo non si sono ottenuti significativi miglioramenti rispetto ai risultati ottenuti con i parametri della tab.12 in cui solo  $r_0$  dipende da  $A$ .

## 4.5 RISULTATI

In questo paragrafo sono riportati i valori delle energie di legame della lambda nello stato fondamentale degli ipernuclei in cui gli ultimi stati protonici e neutronici occupati sono completamente riempiti, cioè quegli ipernuclei in cui il numero di neutroni o protoni che si trovano nell'ultimo stato è uguale alla degenerazione dello stato stesso. Nella tabella 17 sono riassunti i valori trovati per il  $^{13}C_\Lambda$ ,  $^{17}O_\Lambda$ ,  $^{41}Ca_\Lambda$ ,  $^{49}Ca_\Lambda$ ,  $^{91}Zr_\Lambda$ ,  $^{209}Pb_\Lambda$  utilizzando le parametrizzazioni che sono state presentate nel precedente paragrafo:

- A)  $V = -28.80 \text{ MeV}$      $r_0 = 1.1 \text{ fm}$      $a = 0.580 \text{ fm}$  (tab.10)
- B)  $V = -29.60 \text{ MeV}$      $r_0 = 1.1 \text{ fm}$      $a = 0.580 \text{ fm}$  (tab.11)
- C)  $V = -28.70 \text{ MeV}$      $r_a = 1.185 \text{ fm}$      $r_b = -0.455 \text{ fm}$   
 $a = 0.560 \text{ fm}$  (tab.13)
- D)  $V_a = -28.40 \text{ MeV}$      $V_b = -2 \cdot 10^{-7} \text{ MeV}$      $\gamma = 3.0$   
 $r_a = 1.180 \text{ fm}$      $r_b = -0.455 \text{ fm}$      $a = 0.490 \text{ fm}$  (tab.15)
- E)  $V_a = -28.65 \text{ MeV}$      $V_b = 6.8 \text{ MeV}$      $\gamma = -1.25$   
 $r_a = 1.180 \text{ fm}$      $r_b = -0.445 \text{ fm}$      $a = 0.490 \text{ fm}$  (tab.16)

	A	B	C	D	E
$^{13}C_\Lambda$	10.86	11.39	10.85	10.91	10.92
$^{17}O_\Lambda$	12.70	13.28	12.98	13.07	13.14
$^{41}Ca_\Lambda$	18.23	18.92	18.91	18.98	19.15
$^{49}Ca_\Lambda$	19.19	19.90	19.88	19.93	20.10
$^{91}Zr_\Lambda$	22.05	22.79	22.66	22.73	22.81
$^{209}Pb_\Lambda$	24.75	25.53	25.18	26.74	25.22

Tab. 17  $B_\Lambda$  (in MeV) nello stato fondamentale di alcuni ipernuclei calcolata con le parametrizzazioni A,B,C,D,E mostrate nel testo.

È in seguito riportata anche una stima dell'energia di legame della lambda nella materia nucleare infinita  $B_\Lambda^\infty$  cioè con  $A \rightarrow \infty$ . Le parametrizzazione senza alcuna dipendenza da  $A$  e quelle in cui solo  $r_0$  dipende da  $A$  danno lo stesso valore  $B_\Lambda^\infty = 29.0 \pm 0.5 \text{ MeV}$ . Ciò perché queste parametrizzazioni danno risultati differenti solo per gli ipernuclei con  $A < 28$ . Questo valore è stato calcolato con l'utilizzo dei valori di  $B_\Lambda$  calcolati per sistemi con numero di massa compreso tra 200 e 400. È stato poi estrapolato l'andamento di  $B_\Lambda$  nel limite  $A^{-2/3} \rightarrow 0$  con l'utilizzo di una parabola. L'errore riportato

tiene conto della possibilità di scegliere diversi valori di  $A$  compresi tra 200 e 400 per la costruzione della parabola. Il valore trovato è in accordo con quello riportato da [8]. La parametrizzazione in cui anche  $V$  dipende da  $A$  descrive meglio gli ipernuclei con alto numero di massa e quindi dovrebbe fornire una stima più attendibile del valore di  $B_A^\infty$ . In questo caso non sono stati utilizzati i valori di  $B_A$  per sistemi con numero di massa maggiore di 220 perché la profondità del potenziale cresce rapidamente con  $A$  in questa regione. Ho estrapolato  $B_A^\infty$  con l'utilizzo di una parabola costruita con i valori sperimentali di  $B_A$  per il  $^{89}Y_A$ , il  $^{139}La_A$  e il  $^{208}Pb_A$ .

$$B_A^\infty = 42.52 \text{ MeV} \quad (4.9)$$

Lo stesso procedimento è stato utilizzato per estrapolare il valore di  $B_A^\infty$  a partire dalle energie di legame calcolate in ipernuclei con numero di massa compreso tra 180 e 210. È stato trovato il seguente risultato:

$$B_A^\infty = 39.4 \pm 0.6 \text{ MeV} \quad (4.10)$$



## Capitolo 5

# CONCLUSIONI

Quanto riportato in tabella 17, nella 4.9 e nella 4.10 rappresenta il risultato finale di questo lavoro. È stata infatti calcolata l'energia di legame della lambda nello stato fondamentale di alcuni ipernuclei. In particolare gli ipernuclei riportati in tab.17 hanno la caratteristica di avere un core nucleare doppio magico più una particella lambda. Questa caratteristica da un lato li rende difficilmente riproducibili in laboratorio, dall'altro ne fa degli ipernuclei di grande interesse teorico. L'interesse teorico è legato alla possibilità di calcolare con un modello microscopico l'energia di legame della lambda. In questo lavoro, per calcolare  $B_A$  non è stato utilizzato un modello microscopico ma un modello a particella indipendente. È quindi interessante il confronto tra risultati ottenuti con metodi diversi. A titolo di esempio sono riportati i valori ottenuti per  $B_A$  nello stato fondamentale dell' $^{17}O_A$  da un calcolo microscopico basato su tecniche variazionali con metodo di Montecarlo [9].  $B_A(^{17}O_A) = 12.3 \text{ MeV}$  che risulta in sostanziale accordo con quanto riportato in tab.17. Un altro calcolo microscopico trova  $B_A(^{17}O_A) = 13.5 \text{ MeV}$  e  $B_A(^{41}Ca_A) = 22.8 \text{ MeV}$  ma utilizza un termine del potenziale nucleone-lambda i cui parametri sono stati fissati con l'utilizzo di  $B_A^\infty = 30.3 \text{ MeV}$ .

Per quanto riguarda la  $B_A^\infty$  è stato stimato un valore 1/3 più grande del valore solitamente utilizzato in letteratura (vedi la 4.10). A differenza di questo lavoro in precedenza la stima di  $B_A^\infty$  era stata effettuata senza la conoscenza dell'energia di legame della lambda nel  $^{208}Pb_A$ . Il valore relativamente alto della  $B_A$  nel piombo cambia la stima di  $B_A^\infty$ .

Oltre a provocare questo cambiamento, le energie di legame del  $^{208}Pb_A$  hanno manifestato l'impossibilità di conciliare le previsioni di  $B_A$  per lo stato  $[1i_{13/2}^{-1}, s_A]$  e per gli stati  $[1i_{13/2}^{-1}, p_A]$  e  $[1i_{13/2}^{-1}, d_A]$ . Questo aspetto è probabilmente legato ad effetti microscopici che non possono essere spiegati con l'utilizzo di un semplice modello a campo medio.

# Bibliografia

- [1] A. Bouyssy, Physics Letter 84B, (1979) p.41
- [2] D. J. Millener and C. B. Dover, Physical Review C, Vol.28 N.6, (1988)  
p. 2700
- [3] A. Gal, Il Nuovo Cimento 102A, N.1 (1989) p.293
- [4] T.Hasegawa et al., Physical Review C, Vol.53 N.3, (1996) p.1210
- [5] P.H.Pile et al., Physical Review Letters, Vol.66 N.20, (1991) p.2585
- [6] R. Bertini et al., Physics Letter 83B, (1979) p.306
- [7] J. R. Taylor, Introduzione all'analisi degli errori (1986)
- [8] A. Molinari, H. Feshbach, Hypernuclear Physics.
- [9] A.A Usmani, S.C Piepei, Q. N. Usmani, Physical Review C 51 (1995)  
p.2347
- [10] Comunicazione privata con prof. G Co' (Università degli studi di Lecce)

## Capitolo 6

# Appendice A

Utilizzando le convenzioni  $R(r_n) = R_n$ ,  $R(r_n + h) = R_{n+1}$  è stata scritta una formula a tre punti

$$\left(1 + \frac{h^2}{12}k_{n+1}^2\right) R_{n+1} - 2 \left(1 - \frac{5h^2}{12}k_n^2\right) R_n + \left(1 + \frac{h^2}{12}k_{n-1}^2\right) R_{n-1} = 0 \quad (6.1)$$

per la funzione  $R(x)$  soluzione della seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + k^2(r) R(r) = 0 \quad (6.2)$$

Questa formula è alla base dell'algoritmo di Numerov utilizzato per l'integrazione numerica della 6.2 e deriva da uno sviluppo in serie di Taylor troncato della funzione  $R(r)$ .

Si può fare una trattazione più generale per quel che riguarda la derivazione di questa formula. A tal scopo consideriamo una generica equazione differenziale lineare del secondo ordine che abbia nullo il coefficiente della derivata prima.

$$y'' + f(x)y = g(x) \quad (6.3)$$

Consideriamo tre punti equispaziati  $x_n - h$ ,  $x_n$ ,  $x_n + h$ . Sviluppando la  $y(x)$  in serie di Taylor di punto iniziale  $x_n$  si ottiene un'espressione per  $y_n''$  in termini del valore della funzione nei tre punti considerati.

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n'' + \vartheta(h^2) \quad (6.4)$$

oppure utilizzando uno sviluppo troncato ad un ordine superiore

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n'' + \frac{h^2}{12} y_n'''' + \vartheta(h^4) \quad (6.5)$$

l'errore o il resto che ho espresso nella consueta forma di Peano può anche essere espresso nella forma di Lagrange in modo da poter essere meglio quantificato.  $\vartheta(h^4) = -\frac{h^4}{240} \frac{d^6}{dx^6}(\zeta)$  con  $x - h < \zeta < x + h$

Generalmente i metodi numerici che trattano la soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine utilizzano la 6.4. Nel caso della 6.3 invece è possibile utilizzare la 6.5 perchè la  $y_n''''$  può essere espressa riutilizzando la 6.3. Quindi

$$y_n'''' = \frac{d^2}{dr^2}(-f(x)y + g(x)) \quad (6.6)$$

e utilizzando la 6.4

$$y_n'''' = -\frac{(fy)_{n+1} - 2(fy)_n + (fy)_{n-1}}{h^2} + \frac{g_{n+1} - 2g_n + g_{n-1}}{h^2} + \vartheta(h^2) \quad (6.7)$$

Esprimendo la derivata quarta nella 6.5 mediante la 6.7 si ottiene la formula a tre punti :

$$(1 + \frac{h^2}{12}f_{n+1})y_{n+1} - 2(1 + \frac{5h^2}{12}f_n)y_n + (1 + \frac{h^2}{12}f_{n-1})y_{n-1} = \frac{h^2}{12}(g_{n+1} + 10g_n + g_{n-1}) + \vartheta(h^6) \quad (6.8)$$

Con le dovute sostituzioni da questa formula si ottiene la 6.1.

## Capitolo 7

# Appendice B

È riportato nelle pagine seguenti un listato del programma `lambda.c` utilizzato in questo lavoro.