

UNIVERSITÀ DEL SALENTO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
“ENNIO DE GIORGI”  
Corso di laurea in Fisica

---

---

TESI DI LAUREA

**Modello a campo medio per  
ipernuclei**

*Laureando:*  
Francesco IAVARONE

*Relatore:*  
Prof. Giampaolo CO’

---

---

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Quantità osservabili degli ipernuclei</b>	<b>5</b>
2.1	Un esempio sperimentale: FINUDA . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Il problema a multicorpi</b>	<b>9</b>
3.1	L'approssimazione a campo medio . . . . .	9
3.2	Il principio variazionale . . . . .	10
3.3	Le equazioni di Hartree-Fock . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Ipernuclei nel modello a campo medio</b>	<b>15</b>
4.1	Costruzione dell'hamiltoniana . . . . .	15
4.2	Applicazione del Principio variazionale . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Equazioni Hartree-Fock per sistemi finiti</b>	<b>19</b>
5.1	Sistema di soli nucleoni . . . . .	19
5.1.1	Ipernuclei con una sola $\Lambda$ . . . . .	22
5.2	Elementi di matrice dell'interazione . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Applicazioni specifiche</b>	<b>27</b>
6.1	Le interazioni . . . . .	27
6.2	Energie di legame totali . . . . .	29
6.3	Energie di singola particella . . . . .	32
6.4	Densità . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>41</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>43</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

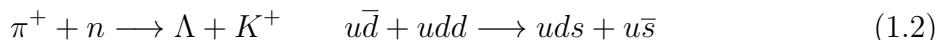
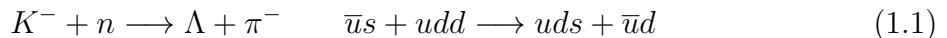
Il proposito di questo lavoro è quello di esplorare le caratteristiche di un sistema composto da A fermioni identici in presenza di una particella differente, la quale può essere considerata un'impurità. Gli ipernuclei rappresentano un esempio di questi sistemi fornito dalla natura.

L'iperone è una particella della famiglia dei barioni (insieme ai nucleoni), composto da una sequenza di tre quark: up, down e strange, a differenza dei nucleoni, come protone e neutrone, i quali contengono solo quark di tipo up e down. Nello specifico, la particella  $\Lambda$  ha spin  $\frac{1}{2}$ , isospin 0, stranezza -1 ed è composta da tre quark diversi di tipo up, down e strange (uds).

Un ipernucleo è un nucleo atomico composto da nucleoni e uno o più iperoni. Lo studio di ipernuclei si rivela di particolare interesse in quanto rende più accessibile lo studio dell'interazione forte e dell'interazione fra iperone e nucleone. È, infatti, più complicato ottenere informazioni sull'interazione iperone-nucleone da esperimenti di diffusione, per via dell'instabilità dell'iperone. La vita media dell'iperone è maggiore quando si trova all'interno di un sistema nucleare.

La presenza di una impurità in un sistema fermionico può metterne in luce delle caratteristiche difficilmente osservabili altrimenti. Nel caso degli ipernuclei l'interesse è legato alla possibilità che all'interno delle stelle di neutroni la materia non sia puramente nucleonica, ma contenga anche particelle strane.

Gli ipernuclei con una sola  $\Lambda$  sono prodotti in reazioni con scambio di stranezza del tipo:



La particella  $\Lambda$  è il barione più leggero avente stranezza non nulla. Il suo decadimento avviene solo tramite processi di interazione debole, divisi in due principali categorie: *mesonico* e *non mesonico*.

Il decadimento *mesonico* comporta la creazione di un mesone, come ad esempio in

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad uds \rightarrow uud + \bar{u}d \quad (1.3)$$

$$\Lambda \rightarrow n + \pi^0 \quad uds \rightarrow udd + \bar{u}u \quad (1.4)$$

Mentre nel decadimento *non mesonico*, possibile solo all'interno di materia nucleare, non si riscontra la produzione di mesoni:

$$\Lambda + p \rightarrow p + n \quad uds + uud \rightarrow uud + udd \quad (1.5)$$

$$\Lambda + n \rightarrow n + n \quad uds + udd \rightarrow udd + udd \quad (1.6)$$

In questo lavoro presenteremo un modello per la descrizione di ipernuclei contenenti una singola particella  $\Lambda$ . La trattazione proposta è basata sul principio variazionale. Utilizzando funzioni d'onda di prova del tipo *determinanti di Slater*, otteniamo delle equazioni analoghe a quelle sviluppate dalla teoria di Hartree-Fock.

Espliceremo poi queste equazioni per il caso di sistemi a simmetria sferica. Le equazioni sono inoltre risolte numericamente e saranno usate per studiare, come esempio, i sistemi adronici  $^{17}_\Lambda\text{O}$  e  $^{209}_\Lambda\text{Pb}$ , col fine di comprendere alcune caratteristiche generali degli ipernuclei.

# Capitolo 2

## Quantità osservabili degli ipernuclei

### 2.1 Un esempio sperimentale: FINUDA

Al fine di presentare le quantità misurate degli ipernuclei, con le quali si possono confrontare le previsioni teoriche, si prende come esempio l'esperimento FINUDA descritto nell'articolo [Agn11], nel quale sono presentati i risultati per nuclei di O, Li, Be, C .

L'esperimento effettuato con FINUDA (Fisica Nucleare a DAΦNE) a Frascati e pubblicato nel 2011 ([Agn11]) è stato effettuato utilizzando DAΦNE, un collisore di elettroni-positroni sito presso i Laboratori nazionali di Frascati dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

Le possibili reazioni utilizzate nei vari laboratori mondiali per produrre iperoni sono schematizzate nella figura 2.1. Si mettono in evidenza gli scambi di sapore tra i quark del nucleone coinvolto nel processo.

Nell'esperimento FINUDA si sono utilizzati i  $K^-$  prodotti da DAΦNE e gli ipernuclei sono stati prodotti secondo la reazione scambio di stranezza:



dove  ${}^A Z$  indica il nucleo bersaglio e  ${}^A_\Lambda Z$  il  $\Lambda$ -ipernucleo dove una particella  $\Lambda$  ha sostituito uno dei neutroni.  $K_{\text{stop}}^-$  invece è riferito al  $K^-$  rallentato in modo da avere energia cinetica essenzialmente nulla rispetto al bersaglio. I  $K^-$  trasmessi in un fascio, collidono con un bersaglio (sono stati utilizzati in particolare bersagli di  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Be}$ ,  ${}^{13}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ), nel quale poi si fermano per dar luogo alla reazione di creazione di ipernuclei.

Tuttavia tale reazione non è l'unica, se ne osservano infatti altre che disturbano l'osservazione interessata, quali:

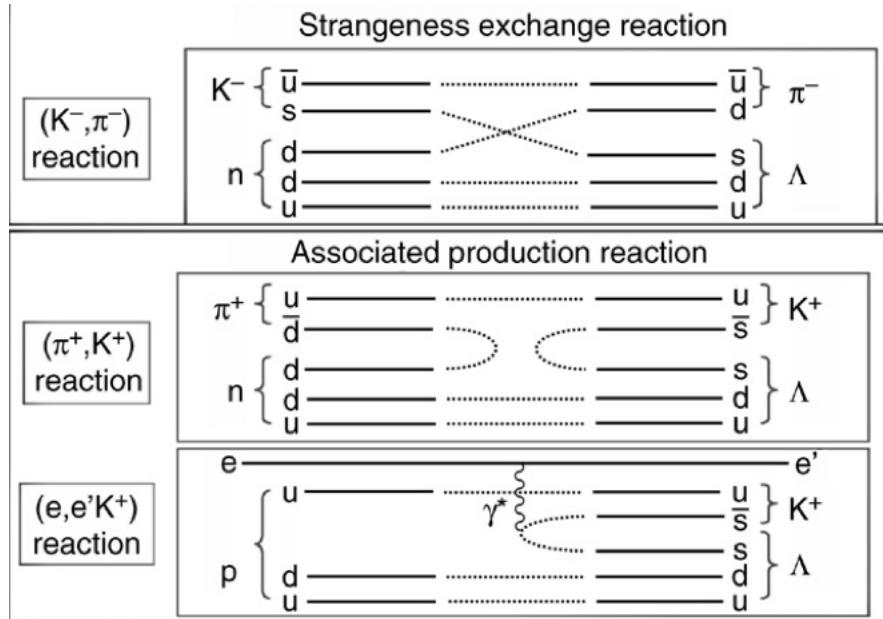


Figura 2.1: Schematizzazione di tre reazioni di produzione di stranezza usate per produrre ipernuclei. Figura presa da [Has06]

- $K^-(np) \rightarrow \Sigma^- p$  (successivamente  $\Sigma \rightarrow n\pi^-$ )
- $K^- n \rightarrow \Lambda\pi^-$
- $K^- p \rightarrow \Sigma^-\pi^+$  (successivamente  $\Sigma \rightarrow n\pi^-$ )
- $K^- \rightarrow \mu^-\bar{\nu}_\mu$

Nell'esperimento FINUDA viene misurato l'impulso e l'energia del  $\pi^-$ , consentendo di dedurre la massa dell'ipernucleo a partire dalla definizione di massa invariante della reazione

$$M_{\Lambda,i}(A) = \sqrt{(m_{K^-} + M(A) - \epsilon_{\pi^-,i})^2 - \mathbf{p}_{\pi^-,i}^2} \quad (2.2)$$

dove ho indicato con  $M_{\Lambda,i}(A)$  la massa dell'ipernucleo, con  $M(A)$  la massa del nucleo composto da soli nucleoni, con  $m_{K^-}$  la massa del  $K^-$ , con  $\epsilon_{\pi^-,i}$  energia misurata del  $\pi^-$ , con  $\mathbf{p}_{\pi^-,i}^2$  (tri-)momento misurato del  $\pi^-$ .

Grazie alla misura della massa dell'ipernucleo è possibile dedurre l'energia di legame di  $\Lambda$ . Una volta nota la massa dell'ipernucleo, si definisce l'energia di legame come

$$B_{\Lambda,i}(A) = M(A - 1) + m_\Lambda - M_{\Lambda,i}(A) \quad (2.3)$$

Rappresentando i conteggi misurati in funzione dell'energia di legame è possibile distinguere i picchi che identificano la formazione di ipernuclei (in verde) da quelli delle

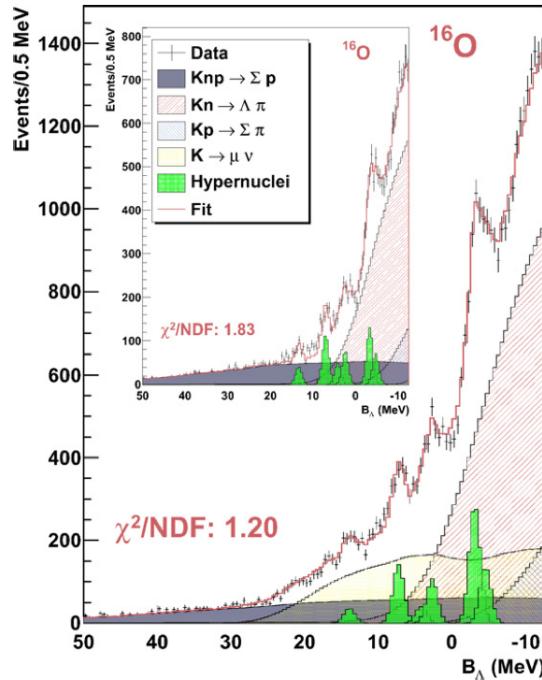


Figura 2.2: Distribuzione dell’energia di legame per  $^{16}\text{O}$  come bersaglio. I picchi verdi indicano la creazione di ipernuclei. Figura presa da [Agn11].

altre reazioni. Per il caso specifico del bersaglio di  $^{16}\text{O}$  i risultati ottenuti da FINUDA [Agn11] sono mostrati nella figura 2.2. I valori numerici di  $B_\Lambda$  per il bersaglio di  $^{16}\text{O}$  corrispondenti ai picchi in verde sono presentati nella tabella 2.3.

L’energia di legame per il nucleo senza  $\Lambda$  è definita come [Pov98]

$$B(A-1) = Zm_p + (N-1)m_n - M(A-1) \quad (2.4)$$

Da questa è possibile dedurre,

$$B_{\Lambda,i}(A) + B(A-1) = Zm_p + (N-1)m_n + m_\Lambda - M_{\Lambda,i}(A) \equiv -\epsilon_{\Lambda,i}(A) \quad (2.5)$$

che indica l’energia necessaria per estrarre l’iperone  $\Lambda$  dal nucleo.

Il modello presentato in questa tesi calcola  $B_{\Lambda,i}(A)$ ,  $B(A-1)$  e anche  $\epsilon_{\Lambda,i}(A)$ .

$^{16}\text{O}$	$B_A$ (MeV)	$E_x$ (MeV)
1	$13.4 \pm 0.4$	-
2	$7.1 \pm 0.4$	6.3
3	$4.3 \pm 0.4$	9.1
4	$2.4 \pm 0.4$	11.0
5	$-3.3 \pm 0.4$	16.7
6	$-4.7 \pm 0.4$	18.1

Figura 2.3: Energia di legame per stati di  $^{16}\text{O}$ .  $E_x$  è l'energia di eccitazione. Figura presa da [Agn11]

# Capitolo 3

## Il problema a multicorpi

### 3.1 L'approssimazione a campo medio

In Meccanica Quantistica, con *Problema a Molticorpi* si intende la descrizione di un sistema composto da particelle identiche. Questo consiste nel ricercare delle soluzioni dell'equazione di Shrödinger con metodi di approssimazione. Trovare una soluzione esatta è infatti estremamente complicato dal punto di vista tecnico.

L'hamiltoniana che descrive un sistema di particelle può essere scritta come segue:

$$H = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) , \quad (3.1)$$

dove A è il numero di particelle, il primo termine indica l'energia cinetica della singola particella, di massa  $m_i$ , e il secondo rappresenta l'interazione che queste particelle sperimentano l'una con l'altra.

L'equazione di Schrödinger per molticorpi non è separabile a causa della presenza del termine di interazione fra particelle che dipende da sia da  $i$  che da  $j$ .

Uno dei metodi utilizzati per risolvere tale problema consiste nell'*approssimazione di campo medio*. Si procede cioè aggiungendo e sottraendo un termine di potenziale medio  $U(i)$  che agisce sulla  $i$ -esima particella:

$$H = \sum_{i=1}^A \left( -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_i} \right) + U(i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) - \sum_i^A U(i) , \quad (3.2)$$

riscrivendo dunque l'hamiltoniana nel seguente modo:

$$H = H_0 + H_1 , \quad (3.3)$$

indicando nello specifico

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) , \quad (3.4)$$

con

$$h(i) = \frac{-\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_i} + U(i) , \quad (3.5)$$

hamiltoniana a un corpo, una per ogni particella presente, e

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) - \sum_i^A U(i) . \quad (3.6)$$

Nell'approssimazione *campo medio* quest'ultimo termine viene trascurato, abilitando dunque il passaggio da un problema a molticorpi ad una somma di problemi ad un corpo, detto appunto a *particelle indipendenti*: le particelle di  $H_0$  infatti non interagiscono fra loro. Questo permette di esprimere gli autostati dell'hamiltoniana  $H_0$  come prodotto degli autostati delle singole  $h(i)$ :

$$|\Phi\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \dots |\phi_A\rangle . \quad (3.7)$$

Tuttavia, per un sistema di fermioni, l'antisimmetria della funzione d'onda per scambio di due particelle implica che la funzione dell'hamiltoniana  $H_0$  sia espressa come combinazione lineare di prodotti antisimmetrizzati. Tale funzione è scrivibile come un determinante di Slater, la cui utilità risiede proprio nel fatto che consente di rispettare il principio di esclusione di Pauli, necessario per un sistema di fermioni identici.

Data l'ortonormalità delle funzioni d'onda di singola particella  $\phi_i(x)$ ,

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} , \quad (3.8)$$

il determinante di Slater viene quindi scritto nel seguente modo:

$$\Phi(x_1 \dots x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_{\nu_1}(x_1) & \dots & \phi_{\nu_A}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{\nu_1}(x_A) & \dots & \phi_{\nu_A}(x_A) \end{vmatrix} , \quad (3.9)$$

e soddisfa la normalizzazione:

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = 1 . \quad (3.10)$$

## 3.2 Il principio variazionale

Uno dei procedimenti utilizzati per risolvere il problema a molticorpi è il *principio variazionale*. La risoluzione dell'equazione di Schrödinger

$$H |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle , \quad (3.11)$$

è analoga alla ricerca del minimo del funzionale:

$$E[\Psi] = \left[ \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \right] . \quad (3.12)$$

Nello specifico, il teorema di Rietz, il quale permette di utilizzare questo metodo, afferma che le soluzioni esatte dell'equazione (3.11) sono anche quelle che rendono stazionario il funzionale (3.12) (si veda a tal proposito il capitolo XVIII di [Mes61]). Pertanto le autofunzioni dell'hamiltoniana, le quali appartengono allo spazio di Hilbert degli stati del sistema, sono le soluzioni dell'equazione variazionale

$$\delta E[\Psi] = \delta \left[ \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \right] = 0 . \quad (3.13)$$

Ricercando il minimo su tutto lo spazio di Hilbert, le soluzioni trovate saranno coincidenti con quelle di (3.11). Restringendo la ricerca del minimo a un sottospazio di quello di Hilbert si otterrà una soluzione approssimata di (3.13) che al più darà un valore di energia maggiore del corretto valore previsto dall'hamiltoniana per lo stato fondamentale. Cioè:

$$E[\Phi] = \frac{\langle \Phi | H | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \geq E_0 . \quad (3.14)$$

### 3.3 Le equazioni di Hartree-Fock

La teoria di Hartree-Fock utilizza il principio variazionale, descritto nella sezione 3.2, per ottenere una soluzione approssimata per il problema a molticorpi.

Il calcolo dell'energia del sistema è fatto cercando il minimo di un funzionale come (3.12),

$$E[\Phi] = \frac{\langle \Phi | H | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} , \quad (3.15)$$

nel sottospazio di Hilbert formato da tutte le funzioni a molticorpi  $|\Phi\rangle$  che possono essere espresse come determinanti di Slater di funzioni d'onda di singola particella.

La scelta del determinante di Slater come funzione d'onda di prova implica che le particelle si muovano indipendentemente l'una dall'altra, ovvero ci si trova nell'ambito di un'approssimazione a particelle indipendenti. Si può dimostrare che, scegliendo il determinante di Slater come funzione d'onda di prova, si trascura la parte dell'hamiltoniana legata ai due corpi [Co20].

Successivamente, una volta fissata l'hamiltoniana e dunque anche l'interazione  $V(i, j)$ , il principio variazionale produce il determinante di Slater che minimizza l'energia per quella interazione. Consideriamo quindi l'hamiltoniana:

$$H = \sum_i^A t_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i, j) , \quad (3.16)$$

con

$$t_i = \frac{-\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_i} . \quad (3.17)$$

Sostituiamo l'hamiltoniana (3.16) in (3.12) considerando i determinanti di Slater  $|\Phi\rangle$  come funzioni d'onda di prova:

$$\begin{aligned}\langle\Phi|H|\Phi\rangle &= \langle\Phi|\sum_{i=1}^A\left(-\frac{\hbar^2\nabla_i^2}{2m_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^AV(ij)|\Phi\rangle \\ &= \langle\Phi|\sum_{i=1}^A\left(-\frac{\hbar^2\nabla_i^2}{2m_i}\right)|\Phi\rangle + \langle\Phi|\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^AV(ij)|\Phi\rangle \\ &= \sum_{i=1}^A\langle\Phi|t_i|\Phi\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^A\langle\Phi|V(ij)|\Phi\rangle .\end{aligned}\quad (3.18)$$

(con  $i,j = 1, 2, \dots$ ).

La ricerca del minimo è vincolata al fatto che le funzioni d'onda  $|\phi_i\rangle$  siano ortonormali. Questo vincolo viene imposto utilizzando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_{ij}$ , secondo la quale esistono  $A^2$  costanti  $\lambda_{ij}$  tali che (con  $i,j = 1,2, \dots, A$ ) sia soddisfatta l'uguaglianza:

$$\delta E - \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \delta \langle j|i \rangle = 0 . \quad (3.19)$$

Da notare che le costanti  $\lambda_{ij}$  possono essere disposte in una matrice  $A \times A$  hermitiana e che i vettori  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_A\rangle$  formano una base ortonormale in un certo sottospazio di quello composto dagli spazi individuali. Si può pertanto definire un cambio di base, generato dalla matrice unitaria  $S(A \times A)$ . In pratica, tale cambio di base si traduce applicandolo ai vettori precedentemente citati, in tal modo:

$$|i'\rangle = \sum_i |i\rangle S_{i,i'} , \quad (3.20)$$

$$|\Phi'\rangle = (\det S) |\Phi'\rangle , \quad (3.21)$$

con  $\det S = 1$ , questo indica che il determinante di Slater è invariante per una trasformazione unitaria. È possibile trovare una base opportuna delle funzioni d'onda  $|\phi_i\rangle$  in cui la matrice  $\lambda_{ij}$  è diagonale:

$$\delta E - \sum_i \lambda_i \delta \langle i|i \rangle = 0 . \quad (3.22)$$

Si noti che la sommatoria non dipende più da due indici, ma solo da  $i$ .

A questo punto non ci resta che sostituire al funzionale  $E$  la formula più estesa (3.18):

$$\delta \langle\Phi|H|\Phi\rangle - \sum_i \lambda_i \delta \langle i|i \rangle = 0 , \quad (3.23)$$

e, sviluppando l'hamiltoniana:

$$\sum_i \langle i | h | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^A (\langle ij | V | ij \rangle - \langle ij | V | ji \rangle) - \sum_i \lambda_i \delta \langle i | i \rangle = 0 . \quad (3.24)$$

Nella seconda sommatoria, il termine con il segno meno è denominato *termine di scambio*, il quale rende nulla la somma nel caso in cui  $i$  e  $j$  si riferissero alla stessa funzione. Ciò permette di rispettare il principio di Pauli. Si noti anche che la sommatoria sulla variazione su due stati

$$\delta \langle ij | = \langle (\delta i) j | + \langle i (\delta j) | , \quad (3.25)$$

viene divisa globalmente per 2, dato che  $\lambda$  e  $\mu$  sono indici arbitrari da 1 ad A; risulta appunto che

$$\sum \delta \langle ij | = 2 \sum \langle \delta ij | , \quad (3.26)$$

e ciò consente di riscrivere la 3.24, (eliminando oltretutto il fattore 1/2):

$$\sum_i \langle \delta i | h | i \rangle + \sum_{ij=1}^A (\langle \delta ij | V | ij \rangle - \langle \delta ij | V | ji \rangle) - \sum_i \lambda_i \langle \delta i | i \rangle = 0 . \quad (3.27)$$

Questa equazione è una somma di termini indipendenti uno dall'altro che deve essere nulla. Poiché ogni variazione  $\delta i$  è arbitraria, questo è possibile solo se ognuno dei termini è nullo.

Per semplificare la scrittura, possiamo supporre che le variazioni sugli stati siano nulle, eccetto la k-esima ( $\delta k$ ), quella ora considerata qui di seguito.

$$\langle \delta k | h | k \rangle + \sum_j^A (\langle (\delta k) j | V | kj \rangle - \langle (\delta k) j | V | jk \rangle) = \lambda_k \langle \delta k | k \rangle . \quad (3.28)$$

$$\langle \delta k | h | k \rangle + \sum_j^A (\langle \delta k | \langle j | V | j \rangle | k \rangle - \langle \delta k | \langle j | V | k \rangle | j \rangle) = \lambda_k \langle \delta k | k \rangle . \quad (3.29)$$

Possiamo dividere la (3.29) per  $\langle \delta k |$ , dato che non è nulla, ottenendo:

$$h_k | k \rangle = t_k | k \rangle + \sum_j (\langle j | V | j \rangle | k \rangle - \langle j | V | k \rangle | j \rangle) = \epsilon_k | k \rangle ; , \quad (3.30)$$

dove abbiamo rinominato  $\lambda_k$  come  $\epsilon_k$  dato che si può dimostrare che, in questo modello,  $\lambda_k$  è l'energia di estrazione della  $k$ -esima particella, ovvero l'energia di singola particella [Co20].

A partire da quest'ultimo risultato per la  $k$ -esima particella, consideriamo le seguenti definizioni per scrivere in maniera più compatta l'equazione precedente.

Si definisce  $x$  che rappresenta la posizione  $\mathbf{r}$  e gli altri numeri quantici, di spin e di isospin, che identificano la particella. Il segno di integrazione su  $x$  implica anche la somma sulle terze componenti dello spin e dell'isospin. Definiamo:

$$\phi_k(x) = \langle x|k\rangle , \quad (3.31)$$

funzione d'onda del  $k$ -esimo fermione;

$$t_k = -\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla^2 , \quad (3.32)$$

$$U(x) = \sum_j \langle j|V|j\rangle = \sum_j \int \phi_j^*(x') V(x, x') \phi_j(x') dx' \quad (3.33)$$

$$W(x, x') = \sum_j \phi_j^*(x) V(x, x') \phi_j(x'), \quad (3.34)$$

Utilizzando queste definizioni nell'equazione (3.30), scriviamo infine l'equazione di Hartree-Fock come:

$$h_k \phi_k(x) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_k} \phi_k(x) + U(x) \phi_k(x) - \int W(x, x') \phi_k(x') dx' = \epsilon_k \phi_k(x) \quad (3.35)$$

(con  $k = 1, 2, \dots, A$ ).

Il termine  $U(x)$  è detto di Hartree, o diretto, mentre  $W(x, x')$  è invece denominato termine di Fock-Dirac, o di scambio.

# Capitolo 4

## Ipernuclei nel modello a campo medio

### 4.1 Costruzione dell'hamiltoniana

Nel capitolo precedente abbiamo presentato il principio variazionale per un sistema di particelle identiche e abbiamo ricavato le espressioni delle equazioni di Hartree-Fock. In questo capitolo, generalizzeremo tale procedimento per descrivere il medesimo sistema con l'aggiunta di un singolo iperon  $\Lambda$ , considerato per questo motivo come un'impurità all'interno del sistema.

L'hamiltoniana si può definire come segue:

$$H = H_N + H_\Lambda , \quad (4.1)$$

dove abbiamo indicato con  $H_N$  la parte nucleare e con  $H_\Lambda$  la parte iperonica.

L'espressione esplicita delle due hamiltoniane che considererò in seguito è

$$H_N = \sum_{i=1}^A t(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(x_{ij}) \quad (4.2)$$

$$H_\Lambda = t_\Lambda(x_\Lambda) + \sum_{i=1}^A V_\Lambda(x_{i\Lambda}) \quad (4.3)$$

dove abbiamo indicato con  $t$  l'operatore, ad un corpo, che descrive l'energia cinetica e con  $V$  e  $V_\Lambda$ , rispettivamente l'interazione nucleone-nucleone e l'interazione  $\Lambda$ -nucleone.

Le variabili  $x$  indicano sia le coordinate spaziali che quelle di spin e isospin di ogni particella considerata.

## 4.2 Applicazione del Principio variazionale

La funzione d'onda di prova utilizzata per la ricerca il minimo del funzionale dell'energia ha la forma di un determinante di Slater dei nucleoni che moltiplica la funzione d'onda di singola particella che descrive l'iperone.

$$|\Phi_\Lambda\rangle = |\phi_\Lambda\rangle \otimes |\Phi\rangle ; \quad H|\Phi_\Lambda\rangle = E|\Phi_\Lambda\rangle . \quad (4.4)$$

Come nel caso precedente la ricerca del minimo è vincolata dalla richiesta di ortonormalizzazione delle funzioni d'onda  $|\phi_i\rangle$ . Imponiamo il vincolo utilizzando le tecniche dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\delta \left[ E[\Phi] - \sum_{i=1}^A \epsilon_i \int d^3r |\phi_i(x)|^2 - \epsilon_\Lambda \int d^3r |\phi_\Lambda(x)|^2 \right] = 0 . \quad (4.5)$$

È possibile separare l'equazione precedente nella parte nucleare e quella iperonica in analogia con la (3.24). Il termine che descrive i nucleoni è

$$\sum_{i=1}^A \langle \delta i | t | i \rangle + \sum_{ij}^A \left[ \langle \delta ij | V | ij \rangle - \langle \delta ij | V | ji \rangle \right] + \sum_{i=1}^A \langle \delta i \Lambda | V_\Lambda | i \Lambda \rangle = \sum_{i=1}^A \epsilon_i \langle \delta i | i \rangle , \quad (4.6)$$

mentre quello che descrive l'iperone è

$$\langle \delta \Lambda | t | \Lambda \rangle + \sum_i \langle \delta \Lambda i | V_\Lambda | \Lambda i \rangle = \epsilon_\Lambda \langle \delta \Lambda | \Lambda \rangle . \quad (4.7)$$

Per questo caso, non esiste un *termine di scambio* dato che l'iperone è una particella diversa dai nucleoni, quindi nel sistema ipernucleo con un singolo iperone, non è soggetta al principio di esclusione di Pauli.

Le due equazioni indicano che la somma di termini indipendenti deve essere nulla, dato che ogni variazione è arbitraria. Come nel capitolo precedente, ciò è possibile se ognuno dei termini è nullo. Si suppone appunto che le variazioni sugli stati siano tutte nulle eccetto la k-esima ( $\delta k$ ).

$$\begin{aligned} \langle \delta k | t | k \rangle &+ \sum_j^A \left[ \langle \delta kj | V | kj \rangle - \langle \delta kj | V | jk \rangle \right] \\ &+ \langle \delta k \Lambda | V_\Lambda | k \Lambda \rangle = \epsilon_k \langle \delta k | k \rangle , \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\langle \delta \Lambda | t | \Lambda \rangle + \sum_k \langle \delta \Lambda k | V_\Lambda | \Lambda k \rangle = \epsilon_\Lambda \langle \delta \Lambda | \Lambda \rangle . \quad (4.9)$$

Dividendo la prima equazione per  $\langle \delta k |$  e la seconda per  $\langle \delta \Lambda |$  otteniamo per le (4.6) e (4.7) le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} t |k\rangle &+ \sum_j^A \left[ \langle j | V | j \rangle |k\rangle - \langle j | V | k \rangle |j\rangle \right] \\ &+ \langle \Lambda | V_\Lambda | \Lambda \rangle |k\rangle = \epsilon_k |k\rangle , \end{aligned} \quad (4.10)$$

e

$$t |\Lambda\rangle + \sum_i \langle i | V_\Lambda | i \rangle |\Lambda\rangle = \epsilon_\Lambda |\Lambda\rangle . \quad (4.11)$$

Riscriviamo queste equazioni in modo che siano espresse nello spazio delle coordinate:  
Considero

$$\langle x | k \rangle = \phi_k(x) , \quad (4.12)$$

e rinomino alcune parti dell'equazione, al fine di alleggerire la scrittura:

$$t_k = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_k} , \quad (4.13)$$

$$U(x) = \sum_{j=1}^A \int dx' \phi_j^*(x') V(x, x') \phi_j(x') , \quad (4.14)$$

$$W(x, x') = \sum_{j=1}^A \phi_j^*(x') V(x, x') \phi_j(x) , \quad (4.15)$$

$$U_\Lambda(x) = \int dx' \phi_\Lambda^*(x') V_\Lambda(x, x') \phi_\Lambda(x') . \quad (4.16)$$

Posso esprimere l'equazione di Hartree-Fock per il gruppo di nucleoni, tenendo conto della correzione causata dall'aggiunta di un'impurità:

$$\begin{aligned} t_k \phi_k(x) &+ U(x) \phi_k(x) - \int dx' W(x, x') \phi_k(x') \\ &+ U_\Lambda(x) \phi_k(x) = \epsilon_k \phi_k(x) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Utilizzando un ragionamento simile per le equazioni di Hartree-Fock riferite all'iperone, si riscrive la (4.11) definendo

$$\mathcal{U}_\Lambda(x) = \sum_{i=1,A} \int dx \phi_i^*(x') V_\Lambda(x, x') \phi_i(x') , \quad (4.18)$$

trovando infine l'equazione

$$t_\Lambda \phi_\Lambda(x) + \mathcal{U}_\Lambda(x) \phi_\Lambda(x) = \epsilon_\Lambda \phi_\Lambda(x) . \quad (4.19)$$



# Capitolo 5

## Equazioni Hartree-Fock per sistemi finiti

### 5.1 Sistema di soli nucleoni

In un sistema finito di nucleoni è conveniente utilizzare la simmetria sferica per esprimere le equazioni Hartree-Fock. In questo capitolo specializzo il formalismo presentato nei capitoli precedenti utilizzando funzioni d'onda di singola particella espresse come:

$$\langle x|k\rangle \equiv \phi_k(x) = R_{nljt}(r)\mathcal{Y}_{ljm}(\Omega)\chi_t \equiv R_k(r)|l\frac{1}{2}jm\rangle\chi_t \equiv R_k(r)|\tilde{k}\rangle\chi_t , \quad (5.1)$$

dove ho indicato con  $n$  il numero quantico principale, con  $l$  il momento angolare orbitale, con  $j$  il momento angolare totale, con  $m$  la sua proiezione sull'asse  $z$  di quantizzazione, con  $t$  la terza componente dell'isospin, con  $\mathcal{Y}$  l'armonica sferica di spin definita come

$$\mathcal{Y}_{ljm}(\Omega) = \sum_{\mu s} \langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle Y_{l,\mu}(\Omega)\chi_s , \quad (5.2)$$

e con  $\chi_s$  lo spinore di Pauli.

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (5.3)$$

Lo spinore nell'espressione (5.1) esprime la parte di isospin della funzione d'onda con  $t = 1/2$  per i protoni e  $t = -1/2$  per i neutroni.

È noto in letteratura [Dec80, Rin80, Ber91, Gor09] che, per ottenere una buona descrizione delle proprietà nucleari in calcoli Hartree-Fock, è necessario includere nell'hamiltoniana un termine di interazione dipendente dalla densità,  $\rho$ , del sistema

$$H = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(i,j) = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} [V_I(i,j) + V_\rho(i,j,\rho)] . \quad (5.4)$$

Nell'applicare il principio variazionale bisogna considerare anche questo nuovo termine. L'equazione (3.29) deve essere opportunamente modificata

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \delta i | h | i \rangle &+ \sum_{ij}^A \left[ \langle \delta i | \langle j | V | j \rangle | i \rangle + \frac{1}{2} \langle ij | \left( \frac{\partial V}{\partial \langle i |} \langle \delta i | \right) | ij \rangle \right. \\ &- \left. \langle \delta i | \langle j | V | i \rangle | j \rangle - \frac{1}{2} \langle ij | \left( \frac{\partial V}{\partial \langle i |} \langle \delta i | \right) | ji \rangle \right] \\ &= \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle \delta i | j \rangle . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Consideriamo il termine

$$\begin{aligned} &\sum_{ij} \langle ij | \left( \frac{\partial V}{\partial \langle i |} \langle \delta i | \right) | ij \rangle \\ &= \sum_{ij} \int d^3 r_1 \int d^3 r_3 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) \left[ \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \phi_i^*(\mathbf{r}_1)} \delta \phi_i^*(r_1) + \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \phi_i^*(\mathbf{r}_2)} \delta \phi_i^*(\mathbf{r}_2) \right] \phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_j(\mathbf{r}_2) \\ &= 2 \sum_{ij} \int d^3 r_1 \int d^3 r_3 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) \left[ \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \phi^*(\mathbf{r}_1)} \delta \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \right] \phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_j(\mathbf{r}_2) \end{aligned}$$

poiché  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ .

Consideriamo la variazione sulla funzione d'onda  $\langle \delta i |$ . Nel caso che stiamo considerando, in cui le funzioni d'onda si singola particella sono espresse come indicato nella (5.1), solo la parte radiale  $R_i(r)$  è implicata nel processo variazionale. Gli spinori di Pauli che considerano la parte di spin e di isospin non variano. In aggiunta, la parte angolare è caratterizzata dall'armonica sferica, quindi invariante.

Nel sistema a simmetria sferica abbiamo che

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,A} |\phi_i(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{nljt} (2j+1) |R_{nljt}(r)|^2 = \rho(r) \quad (5.6)$$

normalizzata in modo che

$$\int d^3 r \rho(\mathbf{r}) = 4\pi \int dr r^2 \rho(r) = A. \quad (5.7)$$

Le variazioni sono fatte come  $\langle \delta i |$ , quindi  $\delta R_i^*(r)$ . Per la densità abbiamo che

$$\frac{\partial \rho(r)}{\partial R_k^*(r)} = \frac{1}{4\pi} R_k(r) \quad (5.8)$$

quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \langle k |} \langle \delta k | = 2 \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \rho(r_1)} \frac{\partial \rho(r_1)}{\partial R_k^*(r_1)} \delta R_k^*(r_1) = \frac{2}{4\pi} \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \rho(r_1)} \delta R_k^*(r_1) R_k(r_1) \quad (5.9)$$

Sostituisco l'espressione (5.1) delle funzioni d'onda di singola particella nell'equazione variazionale (5.5), considero che solo una variazione su  $\langle \delta k |$  sia diversa da zero, moltiplico a sinistra per l'armonica sferica di spin  $\langle \tilde{k} |$  e integro sulla variabile angolare  $\Omega_r$ . Ottengo infine la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{k} | -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\tilde{k}\rangle R_k(r) \\
& + \sum_{j=1}^A \left[ \int dr'(r')^2 R_j^*(\mathbf{r}') R_j(r') \langle \tilde{k} \tilde{j} | V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{k} \tilde{j} \rangle R_k(r) \right] \\
& + \sum_{i,j=1}^A \left[ \int dr'(r')^2 R_j^*(\mathbf{r}') R_j(r') \langle \tilde{i} \tilde{j} | \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \rho} | \tilde{i} \tilde{j} \rangle R_k(r) \right] \\
& - \sum_{j=1}^A \left[ \int dr'(r')^2 R_j^*(\mathbf{r}') R_j(r) \langle \tilde{k} \tilde{j} | V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{j} \tilde{k} \rangle R_k(r') \right] \\
& - \sum_{i,j=1}^A \left[ \int dr'(r')^2 R_j^*(\mathbf{r}') R_j(r) \langle \tilde{i} \tilde{j} | \frac{1}{4\pi} \frac{\partial V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \rho} | \tilde{j} \tilde{i} \rangle R_k(r') \right] \\
& = \epsilon_k R_k(r)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Rinomino, come nel precedente capitolo, alcuni termini dell'equazione in modo da semplificarne l'espressione.

$$U_k(r) = \sum_{j=1}^A \int dr'(r')^2 R_j^*(\mathbf{r}') R_j(r') \langle \tilde{k} \tilde{j} | V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{k} \tilde{j} \rangle \tag{5.11}$$

$$W_k(r, r') = \sum_{j=1}^A \left[ R_j^*(r') R_j(r) \langle \tilde{k} \tilde{j} | V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{j} \tilde{k} \rangle \right] \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^A \int dr' r'^2 \left[ R_i^*(r) R_j^*(r') \langle \tilde{i} \tilde{j} | \frac{\partial V}{\partial \rho} | \tilde{i} \tilde{j} \rangle R_j(r') R_i(r) \right. \\
&\quad \left. - R_i^*(r) R_j^*(r') \langle \tilde{i} \tilde{j} | \frac{\partial V}{\partial \rho} | \tilde{j} \tilde{i} \rangle R_i(r') R_j(r) \right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

L'equazione di Hartree-Fock per un sistema a simmetria sferica, può essere espressa come:

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{k} | -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 |\tilde{k}\rangle R_k(r) + [U_k(r) + \mathcal{K}(r)] R_k(r) \\
& - \int dr' r'^2 W_k(r, r') R_k(r') = \epsilon_k R_k(r).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

### 5.1.1 Ipernuclei con una sola $\Lambda$

La presenza di un iperone  $\Lambda$  nel sistema nucleare implica una modifica della hamiltoniana (5.4) alla quale si aggiunge un termine legato all'interazione nucleone- $\Lambda$ :

$$H_\Lambda = -\frac{\hbar^2}{2m_\Lambda} \nabla^2 + \sum_{i=1}^A V_\Lambda(x_{i\Lambda}) \quad (5.15)$$

Nel caso di simmetria sferica, considero l'espressione della funzione d'onda della  $\Lambda$

$$\phi_\Lambda(\mathbf{r}) = \sum_{n_\Lambda l_\Lambda, \mu_\Lambda} R_{n_\Lambda l_\Lambda}(r) Y_{l_\Lambda, \mu_\Lambda}(\mathbf{r}) \quad (5.16)$$

Questa espressione è utilizzata perchè il termine di spin-orbita nell'interazione nucleone- $\Lambda$  è trascurabile [Ray76, Ban90, Pov98, Has06].

Dato che considererò solo interazioni  $\Lambda$ -nucleone di tipo puramente scalare, il termine di spin della funzione d'onda non interviene negli elementi di matrice dell'interazione.

Ripeto la procedura delineata nel Cap. 4 considerando l'espressione (5.16) della funzione d'onda. La trattazione presentata nel capitolo precedente può essere ripetuta, e specializzata, nel caso di simmetria sferica.

Ottengo delle equazioni differenziali separate per i nucleoni e per la  $\Lambda$ . Per i nucleoni la (5.14) si modifica in

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{k} | \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 | \tilde{k} \rangle R_k(r) + [U_k(r) + \mathcal{K}(r)] R_k(r) - \int dr' r'^2 W_k(r, r') R_k(r') \\ & + \int dr' r'^2 R_\Lambda^*(r') \langle \tilde{\Lambda} \tilde{k} | V_\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{\Lambda} \tilde{k} \rangle R_\Lambda(r') R_k(r) = \epsilon_k R_k(r). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Per la  $\Lambda$  l'equazione differenziale da risolvere è:

$$\langle \tilde{\Lambda} | \frac{-\hbar^2}{2m_\Lambda} \nabla_\Lambda^2 | \tilde{\Lambda} \rangle R_\Lambda(r) + \mathcal{U}_\Lambda(r) R_\Lambda(r) = \epsilon_\Lambda R_\Lambda(r) \quad (5.18)$$

con

$$\mathcal{U}_\Lambda(r) = \sum_{j=1}^A \int dr' r'^2 |R_j(r')|^2 \langle \tilde{\Lambda} \tilde{j} | V_\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{\Lambda} \tilde{j} \rangle \quad (5.19)$$

Il termine dell'energia cinetica è dato da [Mes61]:

$$\langle \tilde{k} | \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_k^2 | \tilde{k} \rangle R_k(r) = \left( -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l_k(l_k+1)\hbar^2}{2mr^2} \right) R_k(r) \quad (5.20)$$

Le energie di singola particella nucleonica  $\epsilon_k$  o della  $\Lambda$   $\epsilon_\Lambda$  sono ottenibili dalle (5.17) e (5.18) moltiplicando per  $R_k^*(r)$  e  $R_\Lambda^*(r)$ , rispettivamente ed integrando sulla variabile  $r$ .

L'energia del sistema è calcolata come valore d'aspettazione dell'hamiltoniana rispetto allo stato (4.4). Anche in questo caso l'energia totale può essere separata da un contributo nucleonico ed uno della  $\Lambda$ . Il contributo nucleonico è dato da

$$\begin{aligned} E_n = \sum_k \epsilon_k & - \frac{1}{2} \sum_k \int dr r^2 |R_k(r)|^2 U_k(r) \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \int dr r^2 \int dr' r'^2 R_k^*(r') R_k(r) W_k(r, r') \\ & - \sum_k \int dr r^2 |R_k(r)|^2 \mathcal{K}(r) \\ & + \sum_k \int dr r^2 \int dr' r'^2 |R_\Lambda(r')|^2 |R_k(r')|^2 \langle \tilde{\Lambda} \tilde{k} | V_\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') | \tilde{\Lambda} \tilde{k} \rangle \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ricordo che l'interazione inserita nei coefficienti  $U_k$  e  $W_k$ , equazioni (5.11) e (5.12) rispettivamente, è  $V = V_I + V_\rho$ . All'energia  $E_n$  bisogna aggiungere il termine

$$E_\Lambda = \epsilon_\Lambda - \frac{1}{2} \sum_k \int dr r^2 |R_k(r)|^2 \mathcal{U}_\Lambda(r) \quad (5.22)$$

L'energia totale dell'ipenucleo è quindi ottenuta come

$$E_H = E_n + E_\Lambda \quad (5.23)$$

## 5.2 Elementi di matrice dell'interazione

Nel paragrafo precedente sono state esplicitate le equazioni differenziali da risolvere per ottenere le funzioni d'onda di singola particella dei nucleoni e della  $\Lambda$ , le energie di singola particella  $\epsilon_k$  e l'energia totale del sistema  $E_{Hy}$ .

Gli unici elementi da definire a questo punto, per poter procedere col calcolo, sono gli elementi di matrice dell'interazione che sono inseriti nelle definizioni di  $U_k$ ,  $W_k$ ,  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{U}_\Lambda$ .

Avendo fattorizzato le funzioni d'onda in parte radiale e angolare, possiamo calcolare separatamente le parti radiale e angolare degli elementi di matrice. È possibile esprimere la parte angolare in termini analitici, mentre la parte radiale è calcolata con tecniche di integrazione numerica.

Gli elementi di matrice della parte nucleare sono noti in letteratura [Don08, Ang14] e non saranno quindi esplicitati nella presente trattazione. Mi concentrerò esclusivamente sugli elementi di matrice riguardanti l'interazione  $\Lambda$ -nucleone.

Per calcolare l'elemento di matrice si calcola un integrale in tre dimensioni utilizzando le coordinate polari sferiche  $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi) = (r, \Omega)$ , esprimendolo separando parte radiale e parte angolare.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\Lambda(\mathbf{r}) &= \sum_{nljm}^A \int dr r^2 R_{n_\Lambda l_\Lambda}^2(r) \int dr' (r')^2 R_{nlj}^2(r') \\ &\quad \int d\hat{r} \int d\hat{r}' Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}^*(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}^*(\hat{r}') V_\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}') \end{aligned} \quad (5.24)$$

L'interazione dipende dalla distanza tra  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Per separare le due variabili consideriamo l'interazione nello spazio delle coordinate come la trasformata di Fourier dell'interazione espressa nello spazio dei momenti

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 q e^{i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} V_\Lambda(q) \quad (5.25)$$

dove ho considerato che la dipendenza dall'impulso sia legata solo al modulo di  $q$ , con  $V_\Lambda(q)$  come antitrasformata. Inserisco questa espressione in quella precedente ed esprimo le due esponenziali in termini dello sviluppo in multipoli

$$e^{iqr} = 4\pi \sum_{LM} i^L j_L(qr) Y_{LM}(\Omega_r) Y_{LM}^*(\Omega_q) , \quad (5.26)$$

dove  $j_L$  indica la funzione di Bessel sferica. Sostituisco le due funzioni esponenziali con il loro sviluppo in armoniche sferiche e ottengo l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\Lambda(\mathbf{r}) &= \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{nljm}^A \int dr r^2 R_{n_\Lambda l_\Lambda}^2(r) \int dr' r'^2 R_{nlj}^2(r') \int d\hat{r} \int d\hat{r}' Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}^*(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}^*(\hat{r}') \\ &\quad \left[ \int dqq^2 V_\Lambda(q) \sum_{LM} \sum_{L'M'} (-i)^{L'-L} j_{L'}(qr') j_L(qr) Y_{L'M'}^*(\hat{r}') Y_{LM}(\hat{r}) \right. \\ &\quad \left. \int d\Omega_q Y_{LM}^*(\Omega_q) Y_{L'M'}^*(\Omega_q) \right] Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}') = \\ &= \sqrt{32\pi} \sum_{nljm} \int dr r^2 R_{nl\Lambda}^2(r) \int dr' r'^2 R_{nlj}^2(r') \left( \int dqq^2 V_\Lambda(q) j_L(qr') j_{L'}(qr) \right) \\ &\quad \int d\hat{r} \int d\hat{r}' Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}^*(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}^*(\hat{r}') \\ &\quad \left( \sum_{LM} \sum_{L'M'} (-i)^{L'-L} Y_{L'M'}^*(\hat{r}') Y_{LM}(\hat{r}) \right) Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}') \\ &\quad \left( \int d\Omega_q Y_{LM}^*(\Omega_q) Y_{L'M'}^*(\Omega_q) \right) . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Proseguendo, è possibile calcolare analiticamente i termini che dipendono dalla parte angolare. La parte radiale è data dai due integrali in  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Vista la simmetria sferica del problema, è possibile integrare per la parte angolare della funzione d'onda in modo da ottenere un potenziale che dipende esclusivamente da  $\mathbf{r}$  e non da  $\mathbf{r}'$ .

L'integrale in  $\Omega_q$  permette di eliminare la sommatoria su  $L'M'$ , visto che

$$\int d\Omega_q Y_{LM}^*(\Omega_q) Y_{L'M'}(\Omega_q) = \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} . \quad (5.28)$$

Segue che la parte angolare dell'equazione (5.27) è

$$\begin{aligned} & \int d\hat{r} \int d\hat{r}' Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}^*(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}^*(\hat{r}') \\ & \left( \sum_{LM} \sum_{L'M'} (-i)^{L'-L} Y_{L'M'}^*(\hat{r}') Y_{LM}(\hat{r}) \right) Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}(\hat{r}) \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}') \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} = \\ & = \sum_{LM} \left[ \int d\hat{r} Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}^*(\hat{r}) \left( Y_{LM}(\hat{r}) \right) Y_{l_\Lambda \mu_\Lambda}(\hat{r}) \right] \\ & \left[ \int d\hat{r}' \mathcal{Y}_{ljm}^*(\hat{r}') \left( Y_{LM}^*(\hat{r}') \right) \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}') \right] \\ & \equiv \sum_{L,M} \langle l_\Lambda \mu_\Lambda | Y_{LM} | l_\Lambda \mu_\Lambda \rangle \langle l \frac{1}{2} jm | Y_{LM}^* | l \frac{1}{2} jm \rangle . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Procediamo risolvendo il termine

$$\langle l \frac{1}{2} jm | Y_{LM}^* | l \frac{1}{2} jm \rangle . \quad (5.30)$$

Nel calcolo che segue utilizzerò, per i numeri quantici legati ai momenti angolari, il simbolo  $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$ . Per le proprietà delle armoniche sferiche ed utilizzando il teorema di Wigner-Eckart, posso scrivere

$$\langle l \frac{1}{2} jm | Y_{LM}^* | l \frac{1}{2} jm \rangle = (-1)^M \langle l \frac{1}{2} jm | Y_{L,-M} | l \frac{1}{2} jm \rangle \quad (5.31)$$

$$= (-1)^M (-1)^{j-m} \left( \begin{array}{ccc} j & L & j \\ -m & -M & m \end{array} \right) \langle l \frac{1}{2} j || Y_L || l \frac{1}{2} j \rangle \quad (5.32)$$

dove il simbolo  $\langle ||Y|| \rangle$  indica l'elemento di matrice ridotto e ho utilizzato il simbolo 3-j di Wigner al posto del Clebsh-Gordan ([Edm57],[Mes61], cap. XIII). Le proprietà dei simboli 3-j implicano che sia  $M = 0$ , questo permette di eliminare la somma su  $M$  in (5.29). L'elemento di matrice ridotto è [Edm57]:

$$\langle l \frac{1}{2} j || Y_L || l \frac{1}{2} j \rangle = (-1)^{j+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j} \hat{j} \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \left( \begin{array}{ccc} j & L & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xi(l + l + L) \quad (5.33)$$

dove  $\xi(K)$  vale 1 per  $K$  pari, 0 altrimenti.

L'espressione di  $\mathcal{U}_\Lambda$  (5.27) prevede una somma su  $m$ . Considerando che

$$\sum_m \begin{pmatrix} j & L & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} (-)^{j-m} = \hat{j} \delta_{L0} , \quad (5.34)$$

la somma in (5.32) porta al risultato:

$$\begin{aligned} & \sum_m \begin{pmatrix} j & L & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} (-)^{j-m} (-1)^{j+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}^2 \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j & L & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xi(2l+L) \\ &= (-1)^{j+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}^3}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j & 0 & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-1)^{j+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}^3}{\sqrt{4\pi}} (-1)^{j+\frac{1}{2}} \frac{1}{j} \delta_{L0} \\ &= (-1)^{2j+1} \frac{\hat{j}^2}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L0} . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Poiché  $j$  è semi-intero,  $2j$  è dispari, ciò implica che  $(-1)^{2j+1} = +1$  e di conseguenza

$$(-1)^{2j+1} \frac{\hat{j}^2}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L0} = + \frac{\hat{j}^2}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L,0} = \frac{(2j+1)}{\sqrt{4\pi}} \delta_{L,0} . \quad (5.36)$$

Il secondo termine della (5.29), applicando il teorema di Wigner-Eckart, e considerando che per il calcolo precedente  $L = 0$  e  $M = 0$ , può essere espresso come

$$\begin{aligned} < l\mu | Y_{LM} | l\mu > &= (-1)^{l-\mu} \begin{pmatrix} l & L & l \\ -\mu & M & \mu \end{pmatrix} < l | Y_L | l > \delta_{L,0} \delta_{M,0} \\ &= (-1)^{l-\mu} \begin{pmatrix} l & L & l \\ -\mu & M & \mu \end{pmatrix} (-1)^l \frac{\hat{l}^2 \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l & L & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{L,0} \delta_{M,0} \\ &= \hat{l} (-1)^l \frac{\hat{l}^2 \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} (-1)^l \frac{1}{\hat{l}} \delta_{L,0} = \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} . \end{aligned}$$

È possibile esprimere l'eq. (5.24) come:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\Lambda(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{nljt} (2j+1)(2l_\Lambda+1) \int dr r^2 R_{n_\Lambda l_\Lambda}^2(r) \int dr' (r')^2 R_{nljt}^2(r') \\ &\quad \int dq q^2 V_\Lambda(q) j_0(qr') j_0(qr) . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Poiché la densità di nucleoni è definita come

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{nljt} (2j+1) R_{nljt}^2(r') \quad (5.38)$$

posso scrivere

$$\mathcal{U}_\Lambda(r) = \sqrt{32\pi} (2l+1) \int dr r^2 R_{n_\Lambda l_\Lambda}^2(r) \int dr' (r')^2 \rho(r') \int dq q^2 V_\Lambda(q) j_0(qr') j_0(qr) . \quad (5.39)$$

Questa è l'espressione utilizzata nel codice per il calcolo di  $\mathcal{U}_\Lambda$ .

# Capitolo 6

## Applicazioni specifiche

In questo capitolo presenteremo i risultati ottenuti studiando i sistemi adronici  $^{17}_{\Lambda}\text{O}$  e  $^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$  con il modello presentato in precedenza. Si tratta di un primo passo rivolto allo studio degli ipernuclei con il nostro modello, allo scopo di capire quali sono le caratteristiche generali di questi sistemi. Per il nostro studio considereremo come viene modificato il nocciolo nucleonico dei due ipernuclei, considerati per la presenza dell'iperone  $\Lambda$ . Quindi con  $^{16}\text{O}$  e  $^{208}\text{Pb}$  indicheremo questi noccioli nucleonici degli ipernuclei  $^{17}_{\Lambda}\text{O}$  e  $^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$ , rispettivamente.

Le equazioni Hartree-Fock sono risolte con metodo iterativo. Utilizzando funzioni d'onda di prova di singola particella si calcolano i potenziali  $V_k$ ,  $W_k$ ,  $\mathcal{K}$  da inserire nell'equazione (5.21) e  $\mathcal{U}_\Lambda$  da inserire nell'equazione (5.22). I dettagli delle tecniche numeriche usate per risolvere queste equazioni differenziali sono presentate in [Ang14]. La soluzione di queste equazioni fornisce un nuovo insieme di funzioni d'onda di singola particella che, a loro volta, vengono usate per calcolare i potenziali. Il processo si ripete fino a quando le energie di legame calcolate in due iterazioni successive non differiscono di una quantità che noi abbiamo scelto essere sulla quinta cifra significativa.

### 6.1 Le interazioni

Il modello nucleare che ho presentato richiede come input fisici l'interazione tra i nucleoni e l'interazione  $\Lambda$ -nucleone.

L'interazione nucleone-nucleone utilizzata si chiama D1M [Gor09] ed è una parametrizzazione dell'interazione di Gogny ([Dec80]), un'interazione a rango finito ben nota in letteratura. In questa interazione sono presenti un termine scalare, uno di spin, uno di isospin e uno di spin-isospin. In aggiunta, ci sono termini dipendenti dalla densità del sistema, un termine di contatto, cioè a rango zero, di spin-orbita, e anche l'interazione coulombiana ([Ber91]). I parametri dell'interazione sono stati fissati per riprodurre, tramite calcoli di Hartree-Fock, i dati sperimentali di energie di legame e raggi di carica di una grande quantità di nuclei in tutte le regioni della tavola dei nuclidi ([Gor09]).

Non essendo presente in letteratura una interazione  $\Lambda$ -nucleone analoga all'interazione di Gogny abbiamo costruito noi una interazione di prova con lo scopo, al momento, di valutare l'andamento qualitativo del modello. La nostra interazione  $\Lambda$ -nucleone è semplicemente formata da una gaussiana con due parametri,  $\mathcal{A}$  e  $b$ .

$$V_\Lambda(r) = \mathcal{A}e^{-br^2} \quad (6.1)$$

Abbiamo dunque definito due parametrizzazioni. Una prima parametrizzazione detta F1 con  $\mathcal{A} = -70$  MeV  $b=1.5$  fm $^{-2}$  e una, detta F2, con  $\mathcal{A} = -110$  MeV e  $b=2.0$  fm $^{-2}$ . Tali valori per i parametri sono stati fissati per riprodurre in modo approssimato l'energia della  $\Lambda$  sul livello  $1s$  nell'ossigeno, la quale si aggira attorno ai 17 MeV.

Nelle figure 6.1 e 6.2 sono mostrati i potenziali medi  $\mathcal{U}_\Lambda(r)$ , eq. (5.39), ottenuti con le due interazioni F1 e F2. I risultati mostrati sono quelli ottenuti dopo che la soluzione iterativa delle equazioni Hartee-Fock ha raggiunto la convergenza. Il potenziale medio che risulta nell'ossigeno (figura 6.1) ha una crescita molto regolare partendo dall'origine. La struttura ricorda molto l'andamento empirico di un potenziale di Woods-Saxon, quasi costante all'interno del nucleo, poi crescente rapidamente sulla superficie per azzerarsi oltre una certa distanza.

Anche nel caso del piombo (figura 6.2) il potenziale presenta un andamento simile, quasi costante al centro, fortemente crescente e poi tendente a zero a grandi distanze dal centro del nucleo. In questo caso l'andamento centrale non è così regolare come nel caso dell'ossigeno. Questo è dovuto alla più complessa struttura del piombo in cui molti più nucleoni partecipano alla struttura del potenziale medio.

È evidente dalle figure presentate che le due interazioni generano potenziali molto simili, anche se quello della F1 risulta essere leggermente più profondo di quello della F2. Di fatto entrambe le interazioni sono state costruite per riprodurre lo stesso dato empirico.

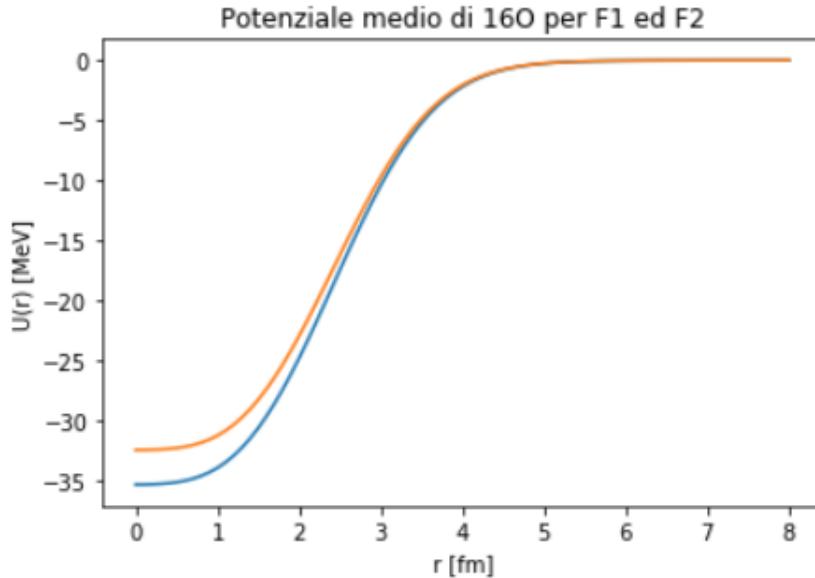


Figura 6.1: Potenziale medio  $U_\Lambda(r)$  per  $l_\Lambda = 0$  percepito dalla particella  $\Lambda$  nell’ossigeno sotto l’effetto dell’interazione F1 (blu) ed F2 (arancione). Sulle ascisse il raggio (r) in fm, sulle ordinate il potenziale in MeV.

## 6.2 Energie di legame totali

Nella tabella (6.1) sono presentate le energie di legame per barione per ogni sistema che abbiamo considerato. La colonna che presenta i risultati per  $^{16}\text{O}$  e  $^{208}\text{Pb}$  confronta le energie di legame della sola parte nucleonica degli ipernuclei  ${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$  e  ${}_{\Lambda}^{209}\text{Pb}$ , mentre le altre colonne indicano le energie di legame dei sistemi adronici totali, cioè con 17 e 209 barioni.

	${}^{16}\text{O}$	${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$	${}^{208}\text{Pb}$	${}_{\Lambda}^{209}\text{Pb}$
F1	$B(A)/A$	$B_\Lambda(A)/A$	$B(A)/A$	$B_\Lambda(A)/A$
F2	-8.74704	-8.95089	-7.90872	-7.97525
D1M	-8.79234	-9.02727	-7.91049	-7.97900
	-7.97507	-	-7.82894	-

Tabella 6.1: Energie di legame per barione, in MeV, per i sistemi considerati. I risultati di  $B(A)/A$  nelle colonne di  $^{16}\text{O}$  e  $^{208}\text{Pb}$  si riferiscono alla sola parte nucleonica degli ipernuclei,  ${}_{\Lambda}^{17}\text{O}$  e  ${}_{\Lambda}^{209}\text{Pb}$ .

È interessante notare come i sistemi nucleonici risultano più legati grazie alla presenza di una particella  $\Lambda$ . Confrontando i valori all’interno della stessa colonna  $^{16}\text{O}$  e  $^{208}\text{Pb}$ ,

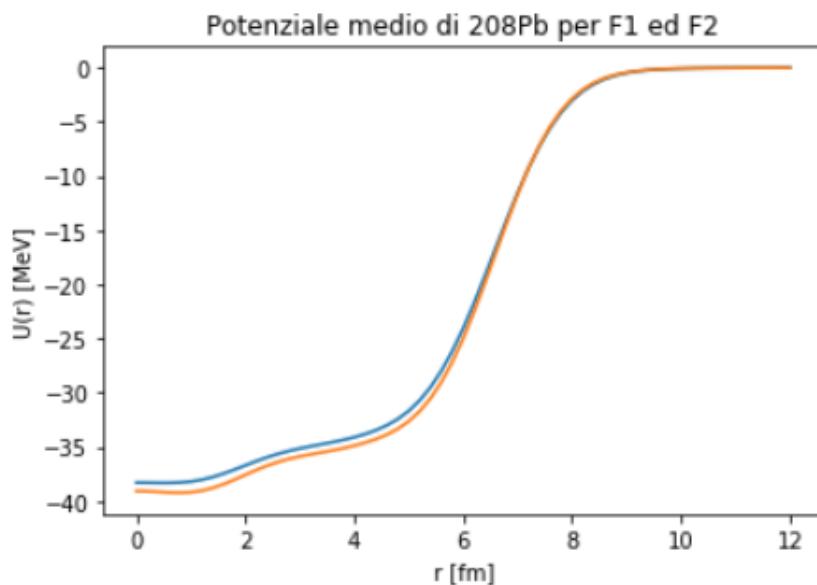


Figura 6.2: Potenziale medio  $\mathcal{U}_\Lambda(r)$  per  $l_\Lambda = 0$  percepito dalla particella  $\Lambda$  nel piombo sotto l'effetto dell'interazione F1 (blu) ed F2 (arancione). Sulle ascisse il raggio ( $r$ ) in  $fm$ , sulle ordinate il potenziale in MeV.

si evidenzia come i valori in corrispondenza dell'interazione F1 ed F2 risultino minori di quasi un MeV rispetto a quelli generati da D1M. La presenza dell'iperone  $\Lambda$  rende dunque più legato il sistema nucleonico. Comunque, l'ipernucleo, in generale, risulta essere maggiormente legato del sistema nucleonico. Confrontando ad esempio, la colonna di  $^{17}_{\Lambda}\text{O}$  con quella del  $^{16}\text{O}$  è possibile notare come  $B_{\Lambda}(A)/A$  sia, in valore assoluto, maggiore di  $B(A)/A$ , indicando dunque quello con la  $\Lambda$  come sistema maggiormente legato. La stessa considerazione può essere fatta per il  $^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$ , evidentemente più legato rispetto a  $^{208}\text{Pb}$ .

### 6.3 Energie di singola particella

Le tabelle inserite in questo paragrafo presentano energie di singola particella di protoni, neutroni e iperoni  $\Lambda$ . I livelli energetici sono indicati tramite il numero quantico principale  $n$  (il primo numero a sinistra), il momento angolare orbitale, usando l'usuale convenzione spettroscopica s, p, d, f, g, h, i, per  $l=0,1,2,3,4,5,6$ . Il pedice indica il momento angolare totale  $j$  della funzione d'onda.

Per i nucleoni presentiamo le energie degli stati di singola particella al di sotto della superficie di Fermi. Sono gli stati che, nel nostro modello, formano lo stato fondamentale del sistema.

Per l'iperone  $\Lambda$  le funzione d'onda di singola particella non dipendono da  $j$  poiché, nel calcolo, non abbiamo inserito un'interazione  $\Lambda$ -nucleone di spin-orbita. In questo caso presentiamo non solo l'energia dello stato fondamentale  $1s$ , ma anche quella di tutti gli stati eccitati e legati, ovvero con energia negativa.

Tutte le energie di singola particella elencate hanno valori negativi, sono appunto stati legati. Si nota, confrontando le colonne di D1M dell'ossigeno utilizzate per l'interazione puramente nucleonica in 6.2 e 6.3 con quelle di F1 e F2, usate invece per l'interazione con l'iperone, che in generale le energie di singola particella sono minori, dunque maggiormente legate, nel caso di presenza di  $\Lambda$ .

Lo stesso discorso è applicabile alle tabelle che presentano i valori del piombo, in 6.5 e 6.6. Confrontando i risultati per sistemi puramente nucleonici con quelli contenenti  $\Lambda$  (6.4 e 6.7), è possibile notare come la presenza di questa particella aggiunta sembri rendere più stabile il sistema; i valori per il sistema iperonico sono infatti minori e dunque più legati rispetto a quelli di D1M, eccetto per i livelli  $1g_{\frac{7}{2}}$ ,  $1h_{\frac{11}{2}}$ ,  $1h_{\frac{9}{2}}$  e  $1i_{\frac{13}{2}}$  presenti nelle tabelle 6.5 e 6.6.

$^{16}\text{O}$		Protoni		
		F1	F2	D1M
	$1s_{\frac{1}{2}}$	-3.50365E+01	-3.52128E+01	-3.27793E+01
	$1p_{\frac{3}{2}}$	-1.89372E+01	-1.89907E+01	-1.76695E+01
	$1p_{\frac{1}{2}}$	-1.23388E+01	-1.22927E+01	-1.19455E+01

Tabella 6.2: Energie di singola particella ( $\epsilon_k$ ), in MeV, per protoni di  $^{16}\text{O}$ .

$^{16}\text{O}$		Neutroni		
		F1	F2	D1M
	$1s_{\frac{1}{2}}$	-3.84000E+01	-3.85859E+01	-3.60387E+01
	$1p_{\frac{3}{2}}$	-2.23139E+01	-2.23758E+01	-2.09499E+01
	$1p_{\frac{1}{2}}$	-1.56130E+01	-1.55731E+01	-1.51393E+01

Tabella 6.3: Energie di singola particella ( $\epsilon_k$ ) in MeV per neutroni di  $^{16}\text{O}$ .

$^{17}_{\Lambda}\text{O}$		Iperone $\Lambda$	
		F1	F2
	1s	-1.62137E+01	-1.75923E+01
	1p	-3.62193E+00	-4.43751E+00

Tabella 6.4: Energie di legame di singola particella ( $\epsilon_\Lambda$ ) in MeV per particelle  $\Lambda$  in  $^{17}_{\Lambda}\text{O}$ .

In generale, i risultati delle interazioni F1 ed F2 sono molto simili, ma risultano maggiori le differenze con la D1M. Si prenda ad esempio il livello  $1s_{\frac{1}{2}}$  di protoni nel piombo, tabella 6.5. I risultati della F1 e F2 (-4.629 MeV, -4.630 MeV) sono molto simili; queste a loro volta, rispetto alla D1M, assumono valori maggiori di 0.04 MeV (-4.587 MeV). Risultati analoghi si riscontrano per i neutroni, tab. 6.6.

Per livelli più alti invece questo effetto diventa meno evidente. È possibile notarlo prendendo come esempio il livello  $1g_{\frac{7}{2}}$  e confrontando i valori nelle tabelle come fatto precedentemente. Partendo dalla tabella 6.5, i valori del livello  $1g_{\frac{7}{2}}$  per le tre interazioni non si distanziano l'uno dall'altro se non di pochi millesimi di MeV. Da ciò possiamo constatare che sono stati più profondi quelli che risentono maggiormente della presenza della  $\Lambda$ .

Confrontando le energie di legame della  $\Lambda$  nei due ipernuclei considerati è evidente come questa sia maggiormente legata nel  $^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$  che nel  $^{17}_{\Lambda}\text{O}$ . Anche se l'interazione è a rango finito, è evidente che l'interazione della  $\Lambda$  con i 16 nucleoni dell'ossigeno risulta globalmente meno intensa di quella con i 208 nucleoni del piombo. Questo risulta evidente non solo dal confronto tra le energie degli stati  $1s$ , ma anche dal fatto che nel  $^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$  ci siano più stati legati della  $\Lambda$  che in  $^{17}_{\Lambda}\text{O}$ .

<sup>208</sup> Pb		Protoni		
		F1	F2	D1M
1s <sub>1/2</sub>	-4.62898E+01	-4.63032E+01	-4.58726E+01	
1p <sub>3/2</sub>	-4.08237E+01	-4.08297E+01	-4.05634E+01	
1p <sub>1/2</sub>	-4.00514E+01	-4.00550E+01	-3.98407E+01	
1d <sub>5/2</sub>	-3.39025E+01	-3.38909E+01	-3.37515E+01	
2s <sub>1/2</sub>	-2.89611E+01	-2.89799E+01	-2.85708E+01	
1d <sub>3/2</sub>	-3.23662E+01	-3.23661E+01	-3.22749E+01	
1f <sub>7/2</sub>	-2.61338E+01	-2.61335E+01	-2.60621E+01	
2p <sub>3/2</sub>	-2.03114E+01	-2.03222E+01	-2.00366E+01	
2p <sub>1/2</sub>	-1.89133E+01	-1.89185E+01	-1.87238E+01	
1f <sub>5/2</sub>	-2.34329E+01	-2.34307E+01	-2.34271E+01	
1g <sub>9/2</sub>	-1.78899E+01	-1.78882E+01	-1.78706E+01	
2d <sub>5/2</sub>	-1.13734E+01	-1.13793E+01	-1.11881E+01	
3s <sub>1/2</sub>	-7.93336E+00	-7.94853E+00	-7.66840E+00	
2d <sub>3/2</sub>	-9.15476E+00	-9.15492E+00	-9.07767E+00	
1g <sub>7/2</sub>	-1.37061E+01	-1.37025E+01	-1.37623E+01	
1h <sub>11/2</sub>	-9.40221E+00	-9.39951E+00	-9.42282E+00	

Tabella 6.5: Energie di legame di singola particella ( $\epsilon_k$ ) in MeV per protoni del <sup>208</sup>Pb.

$^{208}\text{Pb}$	Neutroni		
	F1	F2	D1M
$1s_{\frac{1}{2}}$	-5.92655E+01	-5.92933E+01	-5.85051E+01
$1p_{\frac{3}{2}}$	-5.22411E+01	-5.22533E+01	-5.17891E+01
$1p_{\frac{1}{2}}$	-5.14842E+01	-5.14931E+01	-5.10919E+01
$1d_{\frac{5}{2}}$	-4.45304E+01	-4.45358E+01	-4.42510E+01
$2s_{\frac{1}{2}}$	-4.18749E+01	-4.19011E+01	-4.12882E+01
$1d_{\frac{3}{2}}$	-4.30578E+01	-4.30604E+01	-4.28468E+01
$1f_{\frac{7}{2}}$	-3.61750E+01	-3.61767E+01	-3.60126E+01
$2p_{\frac{3}{2}}$	-3.15733E+01	-3.15905E+01	-3.11500E+01
$2p_{\frac{1}{2}}$	-3.02251E+01	-3.02364E+01	-2.98786E+01
$1f_{\frac{5}{2}}$	-3.35976E+01	-3.35970E+01	-3.35093E+01
$1g_{\frac{9}{2}}$	-2.73999E+01	-2.73994E+01	-2.73226E+01
$2d_{\frac{5}{2}}$	-2.15573E+01	-2.15661E+01	-2.12986E+01
$3s_{\frac{1}{2}}$	-1.92617E+01	-1.92769E+01	-1.89436E+01
$2d_{\frac{3}{2}}$	-1.91697E+01	-1.91722E+01	-1.90243E+01
$1g_{\frac{7}{2}}$	-2.32672E+01	-2.32646E+01	-2.32729E+01
$1h_{\frac{11}{2}}$	-1.84652E+01	-1.84632E+01	-1.84467E+01
$2f_{\frac{7}{2}}$	-1.22222E+01	-1.22261E+01	-1.20659E+01
$3p_{\frac{3}{2}}$	-9.55769E+00	-9.57084E+00	-9.28281E+00
$3p_{\frac{1}{2}}$	-8.25728E+00	-8.26506E+00	-8.04913E+00
$1h_{\frac{9}{2}}$	-1.25365E+01	-1.25324E+01	-1.26131E+01
$2f_{\frac{5}{2}}$	-8.95311E+00	-8.95185E+00	-8.91900E+00
$1i_{\frac{13}{2}}$	-9.62614E+00	-9.62325E+00	-9.65222E+00

Tabella 6.6: Energie di legame di singola particella ( $\epsilon_k$ ) in MeV per neutroni del  $^{208}\text{Pb}$ .

$^{209}_{\Lambda}\text{Pb}$	Iperone $\Lambda$	
	F1	F2
1s	-3.12983E+01	-3.21308E+01
1p	-2.65381E+01	-2.73617E+01
1d	-2.13376E+01	-2.21727E+01
1f	-1.56107E+01	-1.64480E+01
1g	-9.40366E+00	-1.02202E+01

Tabella 6.7: Energie di legame di singola particella ( $\epsilon_\Lambda$ ) in MeV per particelle  $\Lambda$  del  $^{209}\text{Pb}$

## 6.4 Densità

In questo paragrafo presentiamo le densità dei protoni e dei neutroni per i sistemi che abbiamo considerato. Le distanze sull'ascissa sono riferite al centro del nucleo.

Osservando prima le figure 6.3 e 6.4 riguardanti l'ossigeno è possibile accorgersi di come, all'interno di un raggio nucleonico di  $3 \text{ fm}$ , la densità protonica e neutronica siano maggiori per le interazioni che descrivono la particella  $\Lambda$  e minore per l'interazione puramente nucleonica. I picchi di F1 ed F2 si trovano infatti attorno ai  $0.085 \text{ fm}^{-3}$ , mentre il massimo della curva di D1M appena sotto i  $0.080 \text{ fm}^{-3}$ . Infine, dalla 6.3, notiamo che la curva della densità calcolata con F1 è più stretta rispetto alle altre due rappresentate.

Spostiamo ora l'attenzione sulle figure 6.5 e 6.6 riguardanti il piombo. Anche in questo caso, la densità protonica calcolata considerando le interazioni F1 e F2 risulta lievemente superiore rispetto a quella calcolata con D1M e ciò appare evidente confrontando i massimi delle curve (rispettivamente  $0.10 \text{ fm}^{-3}$  per le F1 e F2,  $0.08 \text{ fm}^{-3}$  per la D1M); questo viene osservato al di sotto di un raggio di  $1 \text{ fm}$ , oltre quale le curve poi coincidono. Per quanto riguarda la densità neutronica, un lieve scarto fra le due curve è osservato sotto i  $2.5 \text{ fm}$ , ponendo l'attenzione ai picchi delle densità che si osservano sopra i  $0.10 \text{ fm}^{-3}$  sulle ascisse. Il sistema tuttavia appare più compatto, grazie alla maggiore densità registrata fra i  $2$  e  $6 \text{ fm}$ .

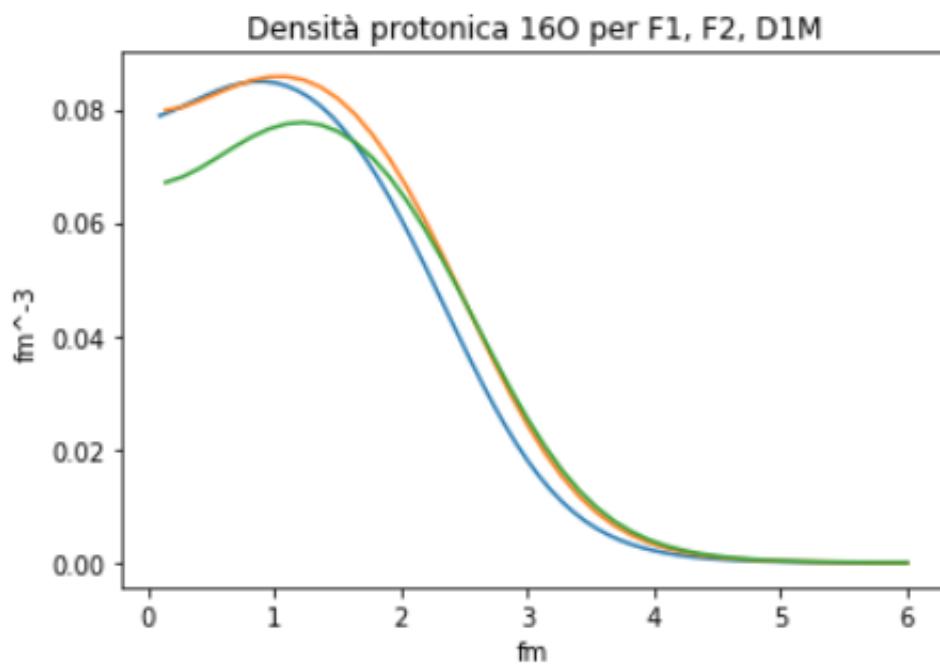


Figura 6.3: Densità dei protoni, in unità  $\text{fm}^{-3}$  in ossigeno ottenuta con le interazioni F1 (blu), F2 (arancione) e D1M (verde).

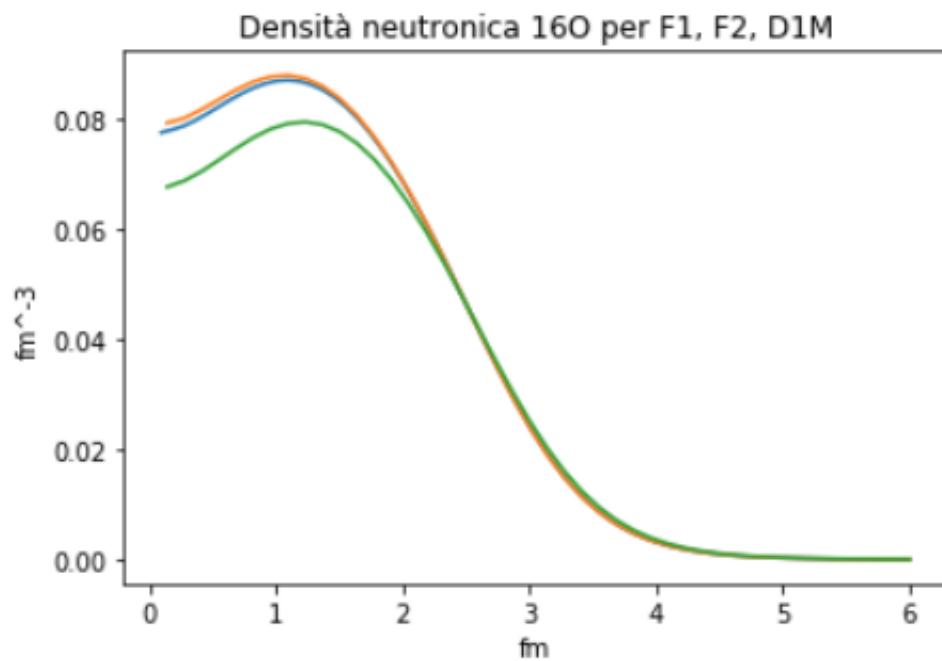


Figura 6.4: Densità neutronica per  $^{16}\text{O}$  ottenuta con le interazioni F1 (blu), F2 (arancione) e D1M (verde).

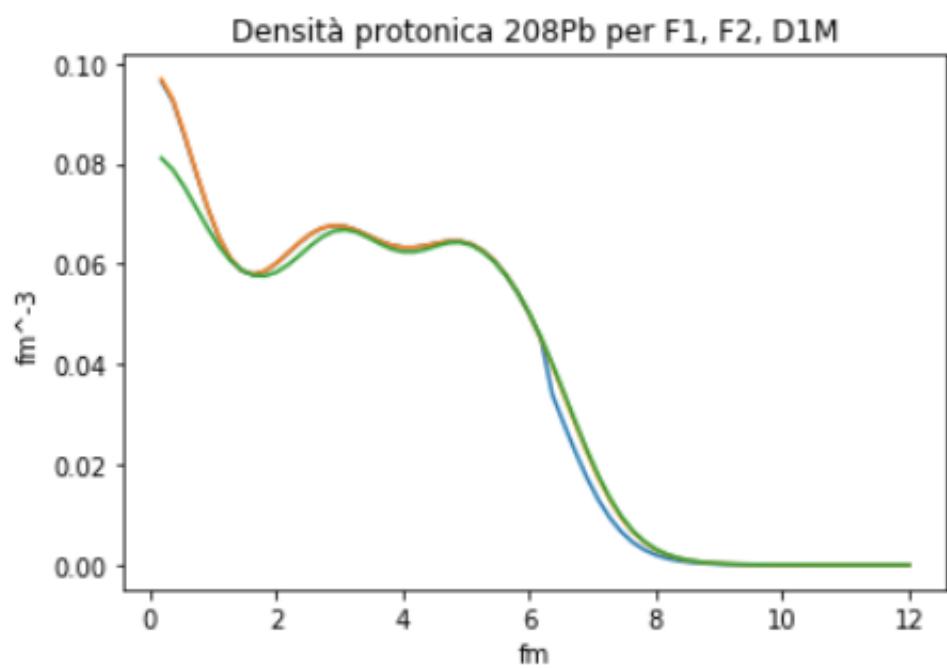


Figura 6.5: Densità protonica per  $^{208}\text{Pb}$  ottenuta con le interazioni interazioni F1 (blu), F2 (arancione) e D1M (verde).

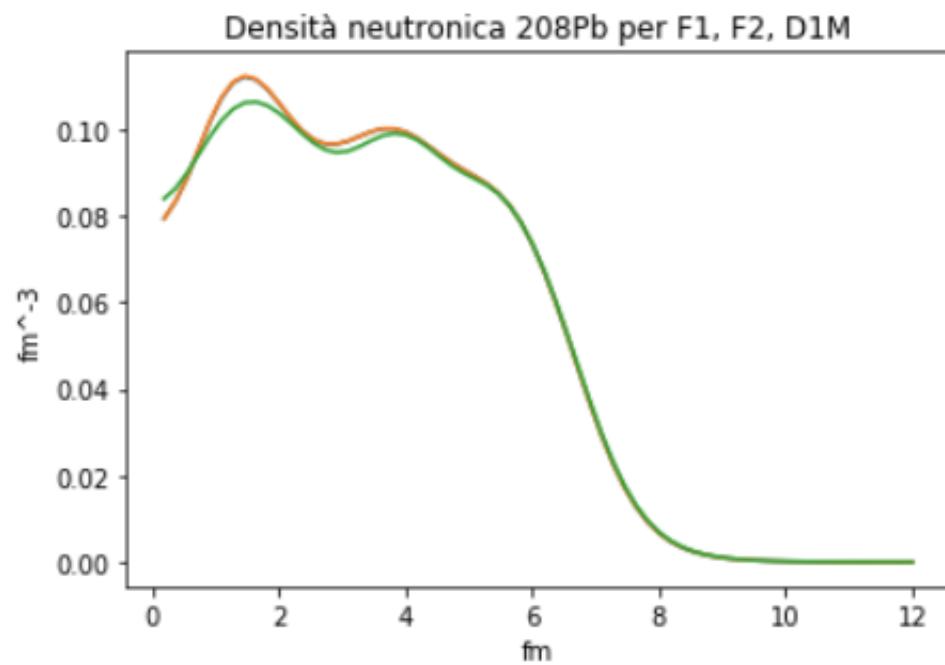


Figura 6.6: Densità neutronica per  $^{208}\text{Pb}$  ottenuta con le interazioni interazioni F1 (blu), F2 (arancione) e D1M (verde). Le due linee indicanti i risultati per F1 e F2 si sovrappongono nella scala della figura.

# Capitolo 7

## Conclusioni

L’idea di base del lavoro presentato è quella di sviluppare un formalismo che permetta di descrivere un sistema di fermioni in cui è inserita una impurità. Gli ipernuclei contenenti un singolo iperone  $\Lambda$  sono un tipico esempio di questo tipo di sistemi.

Abbiamo affrontato il problema con un approccio da campo medio utilizzando il principio variazionale di Rietz. Utilizzando funzioni d’onda di prova con la struttura di determinanti di Slater per i nucleoni, abbiamo ottenuto un insieme di equazioni che, di fatto, sono un’estensione delle tradizionali equazioni di Hartree-Fock.

Successivamente abbiamo specializzato le equazioni ottenute per sistemi finiti, sfruttando la simmetria sferica del sistema. La soluzione numerica, con un metodo iterativo, di queste equazioni ci permette di ricavare le funzioni d’onda di singola particella dei nucleoni e della  $\Lambda$  le energie di singola particella ( $\epsilon_k$ ) e le energie di legame dell’intero sistema ( $E_{H_y}$ ).

Come prima applicazione del formalismo, abbiamo presentato uno studio dei sistemi adronici  $^{17}_\Lambda\text{O}$  e  $^{209}_\Lambda\text{Pb}$  focalizzando l’attenzione su come viene modificato il nocciolo nucleonico dei due ipernuclei.

L’unico input fisico del nostro modello sono le interazioni tra i nucleoni e quella tra i nucleoni e l’iperone  $\Lambda$ . Per i nostri calcoli, abbiamo considerato un’interazione nucleone-nucleone a rango finito ben nota in letteratura. Per l’interazione  $\Lambda - \text{nucleone}$  abbiamo invece una interazione molto semplice di tipo gaussiano. Abbiamo considerato due diverse parametrizzazioni i cui valori sono stati fissati per riprodurre, approssimativamente, l’energia della  $\Lambda$  nello stato  $1s$  del  $^{17}_\Lambda$  a circa -17 MeV.

Grazie all’analisi e al confronto dei livelli di energia di singola particella e delle energie di legame, è stato possibile dedurre come la presenza della particella  $\Lambda$  all’interno del nucleo produca un sistema maggiormente legato. Allo stesso modo, l’osservazione delle densità protonica e neutronica ha messo in luce come l’ipernucleo appaia più compatto rispetto alla normale materia nucleare.

Ovviamente il calcolo presentato in questo lavoro è un approccio preliminare allo questo tipo di studio, il cui approfondimento potrà sicuramente portare informazioni utili

alla comprensione della struttura del nucleo atomico e delle sue dinamiche. Al fine di averne una maggior comprensione, sarà però necessario e fondamentale osservare lo stesso problema da più punti di vista, cioè confrontare i risultati ottenuti con altri dati empirici e risultati di modelli diversi da quello qui presentato. Grazie a tale confronto sarà possibile mettere in luce aspetti che, altrimenti, rimarrebbero celati.

# Ringraziamenti

Le opere umane sono fatte sempre in due: dal protagonista della storia e da chi lo ha sostenuto e guidato. Nel concludere dunque il mio ciclo di studi sento di rendere omaggio a chi mi ha aiutato incondizionatamente a creare questo piccolo successo. Successo che non è altro se non un ingranaggio di un sogno più grande, il quale, a modo mio, realizzerò. Pertanto grazie a:

Alla mia famiglia,  
se oggi realizzo questo nuovo traguardo è solo grazie alle cure, alle attenzioni e all'amore incondizionato che per tutta la vita ho ricevuto.

Al Prof. Giampaolo Co',  
relatore della tesi e prezioso insegnante, il cui impegno nell'insegnamento e la bravura nel trasmettere i concetti più complicati, sono stati di ispirazione a me e molti altri colleghi.

A Salvatore, Luisa, Martina, Damiano, Piermario, Clara, Flavia, Ludovico e tutto il team *Genio in 21 Giorni*, per avermi scaldato con calore di amicizia, insegnato l'inestimabile valore della squadra e avermi dato la possibilità di volare fra le aquile.

A Stefano, Ilaria, Ludovico, Davide e Mario,  
per la sincera amicizia, le mille avventure, le risate, le parole importanti e ogni momento passato a sognare insieme; possano i vostri sogni brillare e realizzarsi.

Alla bravissima pittrice Gabriella Legno,  
per avermi sostenuto, consigliato saggiamente e ispirato nella direzione giusta.

A C,  
per avermi ricordato nel migliore dei modi di non ascoltare le paure e seguire ciò che sento.

A voi va la mia gratitudine.  
Lecce, 15/10/2020  
Francesco Iavarone



# Bibliografia

- [Agn11] M. Agnello et al., Phys. Lett. B 698 (2011) 219.
- [Ang14] M. Anguiano, A. M. Lallena, G. Co', V. De Donno J. Phys. G 41 (2014) 025102.
- [Ban90] H. Bandō, T. Motoba, J. Zöfka, Int. Jour. Mod. Phys. A 21 (1990) 4021.
- [Ber91] J.F. Berger, M. Girod and D. Gogny, Comp. Phys. Commun. 63 (1991) 365.
- [Co20] Molti corpi in Meccanica Quantistica, note delle lezioni A. A. 2020-2021, non pubblicato,  
<http://www.dmf.unisalento.it/~gpc0/FISMAT/many2021.pdf>
- [Coe77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Quantum Mechanics, John Wiley, New York (1977).
- [Dec80] J. Dechargè, D. Gogny, Phys. Rev. C 21 (1980) 1568.
- [Don08] V. De Donno, Nuclear excited states within the Random Phase Approximation theory, Tesi di Dottorato, Lecce , (2008), non pubblicata,  
[http://www.dmf.unisalento.it/~gpc0/PhD\\_DeDonno.pdf](http://www.dmf.unisalento.it/~gpc0/PhD_DeDonno.pdf)
- [Edm57] A. R. Edmonds, Angular momentum in quantum mechanics, Princeton University Press, Princeton (1957).
- [Gor09] S. Goriely, S. Hilaire, M. Girod and S. Péru, Phys. Rev. Lett. 102, (2009) 242501.
- [Has06] O. Hashimoto, H. Tamura, Prog. Part. Nucl. Phys. 57 (2006) 564.
- [Mes61] A. Messiah, Quantum Mechanics, North Holland, Amsterdam (1961), anche, Dover, New York (2014).
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, Particelle e nuclei, Bollati Boringhieri, Torino (1998).
- [Ray76] M. Rayet, Ann. Phys. (N.Y.) 102 (1976) 226.
- [Rin80] P. Ring, P. Schuck, The nuclear many body problem, Springer, Berlino (1980).