



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”
Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Dai nuclei alla materia nucleare

Laureanda:
Ludovica INDINO

Relatore:
Prof. Giampaolo CO'

Anno Accademico 2023/2024

Indice

Introduzione	3
1 Equazione di stato della materia nucleare	5
1.1 Energia di legame dei nuclei	5
1.2 Energia della materia nucleare	7
2 Energia di legame	11
3 Densità di saturazione	17
4 Compressibilità	21
4.1 Compressibilità ed eccitazione di monopolo elettrico	21
4.2 Confronto con i dati sperimentali	24
5 Termine di simmetria	29
6 Spessore della neutron skin e termine L	33
7 Coefficiente K_{SYM}	39
8 Conclusioni	41
A Nuclei simmetrici pari-pari	45
B Compressibilità di una sfera uniformemente carica	47

Introduzione

Le caratteristiche della fenomenologia nucleare, soprattutto quelle legate al corto raggio d'azione, hanno spinto a formulare l'idea di un sistema ideale chiamato materia nucleare [Bet71]. Si definisce materia nucleare un sistema composto da un numero infinito di nucleoni legati esclusivamente dalla forza nucleare forte, mentre l'interazione coulombiana è stata spenta.

Questo è un sistema ideale in cui l'invarianza traslazionale permette di considerare le funzioni d'onda di singola particella come onde piane, eliminando dettagli derivanti dal considerare nuclei veri, quali la necessità di dover lavorare con funzioni d'onda limitate nello spazio e gli effetti di shell. Tali caratteristiche rendono la materia nucleare un sistema di riferimento ideale per confrontare i risultati di varie teorie a molti corpi, utilizzate per descrivere sistemi nucleari costituiti da molti nucleoni [Ben20].

Lo studio della materia nucleare è di grande importanza non solo per la fisica nucleare ma anche per l'astrofisica, poichè questo sistema è una buona approssimazione della parte centrale delle stelle di neutroni. Conoscere l'equazione di stato della materia nucleare, dove le variabili di stato sono energia e densità ad una temperatura fissata, permette di fare un confronto tra teoria ed osservazioni astrofisiche di questi oggetti estremamente densi e compatti [Ben23].

Il confronto tra risultati teorici e dati empirici è essenziale al fine di migliorare e ampliare la nostra conoscenza della materia nucleare. In questo contesto si colloca il seguente lavoro di tesi che mira a collegare i valori dei parametri della formula semi-empirica della massa ai valori empirici misurati nei nuclei. Il problema che affronteremo è duplice. In primo luogo, si tratta di identificare gli osservabili legati a ciascun termine della formula semi-empirica della massa, che descrive l'energia di legame dei nuclei in funzione del numero di protoni e neutroni. Una volta individuati gli osservabili, si tratta di separare il contributo dovuto alla materia nucleare da quello dovuto invece alle caratteristiche specifiche del nucleo reale, il quale è un sistema finito.

Capitolo 1

Equazione di stato della materia nucleare

1.1 Energia di legame dei nuclei

Il Modello a Goccia presentato da Myers e Swiatecki [Mye69] si propone come anello di congiunzione tra una trattazione macroscopica (Modello a Goccia di Liquido) e una trattazione microscopica (Modello a Strati) di un sistema saturante, quale un nucleo, composto da protoni e neutroni.

Quando il nucleo raggiunge un determinato valore di densità di nucleoni, diviene stabile e si dice "saturato". Questa situazione di equilibrio è il risultato del corto raggio d'azione dell'interazione nucleare forte. Infatti, al crescere del numero di massa, il valor medio dell'energia di legame per nucleone, che verrà in seguito definita e discussa, resta stabile: ciò significa che ogni nucleone (facendo eccezione per quelli situati nella regione superficiale del nucleo) interagisce con lo stesso numero di nucleoni circa.

La loro teoria si basa su un sistema finito e rappresenta un'evoluzione e un affinamento del Modello a Goccia di Liquido, cui apporta due correzioni fondamentali riguardanti la finitezza dello spessore della superficie nucleare e la finitezza della compressibilità nucleare. Infatti, mentre nel Modello a Goccia di Liquido le densità di neutroni e protoni sono considerate costanti all'interno di un confine netto e nulle all'esterno, nel Modello a Goccia le densità sono approssimativamente costanti nella maggior parte del sistema e invece di un confine netto vi è una regione superficiale diffusa in cui le densità diminuiscono gradualmente fino ad annullarsi.

In questa trattazione verranno analizzati unicamente sistemi finiti aventi configurazione sferica.

L'energia di legame di un sistema rappresenta l'energia richiesta per separare completamente i suoi costituenti, portandoli a una distanza infinita l'uno dall'altro. Questa energia è ottenuta dalla differenza tra la somma delle masse dei singoli componenti del

sistema e la massa del sistema stesso:

$$E = -Zm_p - Nm_n + M(A, Z) \quad , \quad (1.1)$$

dove A è il numero di massa, Z il numero di protoni, m_p la massa del protone, m_n la massa del neutrone ed $M(A, Z)$ la massa del nucleo.

Il Modello a Goccia di Liquido porta a parametrizzare l'energia di legame in funzione di A in modo da riprodurre i valori empirici.

La formulazione più conosciuta e ampiamente utilizzata dell'energia di legame è la parametrizzazione di Bethe-Weizsäcker [Wei35, Bet36], che utilizza gli a e $\delta(A)$ come parametri mentre il numero di massa A e il numero atomico Z come variabili indipendenti:

$$-E^{BW} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_i \frac{(N - Z)^2}{4A} - \delta(A) \quad , \quad (1.2)$$

con $N = A - Z$ numero di neutroni, $a_v A$ termine di volume, $a_s A^{2/3}$ termine di superficie, $a_c Z^2 / A^{1/3}$ termine coulombiano, $a_i (N - Z)^2 / A$ termine di asimmetria, $\delta(A)$ termine di appaiamento che assume valore negativo, quindi attrattivo, per i nuclei pari-pari, nullo per i pari-dispari e positivo, repulsivo, per i dispari-dispari.

Il termine di volume, proporzionale ad A , è l'unico termine legante presente nella (1.2). I restanti termini presenti nella formula costituiscono le correzioni al termine di volume e compaiono con segno opposto. Il termine di superficie tiene conto del fatto che i nucleoni sulla superficie del nucleo siano circondati da un numero di nucleoni inferiore rispetto a quelli più centrali, per questo meno legati. Il termine coulombiano considera la repulsione esistente tra i protoni, dovuta alla carica uguale, che riduce l'energia di legame. Il termine di asimmetria considera che, nei nuclei più massicci, vi sia un eccesso via via crescente del numero di neutroni per compensare l'aumento della repulsione coulombiana tra i protoni.

Per quanto riguarda il termine di appaiamento, studi delle masse nucleari hanno evidenziato che i nuclei mostrano maggiore stabilità quando presentano un numero pari di protoni e/o neutroni. Questa constatazione suggerisce l'idea che tanto i protoni quanto i neutroni abbiano la tendenza ad accoppiarsi.

I coefficienti a_v , a_s , a_c , a_i , $\delta(A)$ sono determinati in modo tale da riprodurre al meglio i dati sperimentali.

Myers e Swiatecki esprimono la (1.2) considerando gli effetti della finitezza del sistema nucleare, la dipendenza dalla densità nucleare ρ e del parametro di asimmetria nucleare

$I = (N - Z)/(N + Z) = (N - Z)/A$. L'espressione che propongono ha la forma:

$$\begin{aligned} E^{MS}(\rho, I) = & [E_{SNM} + S_2 I^2 + S(\rho, I)] A \\ & + (b_1 + b_2 \tau^2 + b_3 A^{-1/3}) A^{2/3} \\ & + c_1 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 + \frac{1}{2} \tau A^{-1/3} \right) - c_2 Z^2 A^{1/3} - c_3 \frac{Z^2}{A} - c_4 \frac{Z^{4/3}}{A^{1/3}} + \delta(A) , \end{aligned} \quad (1.3)$$

dove b_i e c_i sono parametri i cui valori sono fissati da un fit con i dati sperimentali mentre $\tau = (R_N - R_Z)/r_0$, dove R_N è il raggio del neutrone, R_Z è raggio del protone e r_0 il raggio nucleare centrale, è legata alla "neutron skin" ed è data dalla differenza tra raggio della distribuzione dei neutroni e quello della distribuzione dei protoni. Tutti questi coefficienti verranno spiegati nel corso della trattazione.

Nelle prime due righe dell'equazione compaiono rispettivamente il termine di volume, che è il termine base della materia infinita, e i termini di correzione legati all'energia di superficie, mentre nell'ultima riga sono presenti termini di correzione legati all'energia di Coulomb.

Nella sezione seguente verrà chiarito il significato dei coefficienti contenuti nel termine di volume.

1.2 Energia della materia nucleare

Studiando il comportamento dell'energia di legame per nucleone, E^{MS}/A , si può osservare che nel limite in cui $A \rightarrow \infty$, gli unici termini a sopravvivere sono quelli presenti nella prima riga della (1.3), ovvero i termini legati all'energia di volume, mentre i restanti si annullano.

Come detto nell'introduzione, si definisce materia nucleare un sistema composto da un numero infinito di nucleoni tenuti insieme esclusivamente dalla forza nucleare forte, mentre l'interazione coulombiana è stata spenta. Quando il numero di protoni Z è uguale al numero di neutroni N , si parla di materia nucleare simmetrica $N = Z$. Al contrario, quando il numero di protoni e il numero di neutroni sono differenti, si parla di materia nucleare asimmetrica.

L'andamento di $E(\rho, I)$ in funzione di ρ è detto Equazione di stato (EoS dall'inglese Equation of State) in analogia con la termodinamica, dove le variabili di stato sono pressione e volume ad una temperatura fissata. Il minimo dell'EoS, che cade in corrispondenza di un preciso valore della densità, ovvero $\rho_0 = 0.17 \pm 0.02 \text{ fm}^{-3}$, rappresenta

una situazione di stabilità intorno alla quale è possibile sviluppare in serie di Taylor per analizzare le proprietà del sistema.

Si può pertanto procedere ad uno sviluppo in serie di Taylor dell'energia di legame per nucleone sia in funzione del termine di asimmetria I che della densità ρ .

Sviluppando in serie di Taylor attorno a valori simmetrici di materia nucleare ($N = Z$), $\epsilon_{SNM}(\rho)$ ossia attorno a $I = 0$, l'energia per nucleone di materia nucleare asimmetrica è data da:

$$\epsilon(\rho, I) = \frac{E}{A}(\rho, I) = \epsilon_{SNM}(\rho) + S_2(\rho)I^2 + S(I) + O(4) . \quad (1.4)$$

L'energia di simmetria S_2 potrà essere pertanto calcolata come segue:

$$S_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial I^2} \Big|_{I=0} . \quad (1.5)$$

Per chiarire come l'Eq. (1.4) dipenda dal parametro di densità ρ , è essenziale dapprima comprendere come ogni singola componente costituente dell'energia $\epsilon(\rho, I)$, ovvero energia di legame per nucleone di materia nucleare ϵ_{SNM} ed energia di simmetria S_2 , vari in funzione della densità ρ .

Si procede pertanto effettuando uno sviluppo dell'energia di legame per nucleone di materia nucleare simmetrica ϵ_{SNM} in serie di Taylor attorno a valori di saturazione della densità, ossia attorno a $\rho = \rho_0$, ottenendo quindi:

$$\epsilon_{SNM}(\rho) = \frac{E_{SNM}(\rho)}{A} = \epsilon_0 + \frac{K_0}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + O(3) , \quad (1.6)$$

con

ϵ_0 : energia per nucleone a saturazione

$$\epsilon_0 = \epsilon_{SNM}(\rho = \rho_0) , \quad (1.7)$$

K_0 : coefficiente di compressibilità per $\rho = \rho_0$

$$K_0 = 9\rho_0^2 \frac{\partial^2 \epsilon_{SNM}(\rho)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} . \quad (1.8)$$

In modo analogo, si può definire la dipendenza dell'energia di simmetria S_2 dalla densità effettuando uno sviluppo in serie di Taylor attorno a valori di saturazione della densità, ovvero per $\rho = \rho_0$, ottenendo:

$$S_2(\rho) = E_{SYM} + L \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right) + \frac{K_{SYM}}{2} \left(\frac{\rho - \rho_0}{3\rho_0} \right)^2 + O(3) , \quad (1.9)$$

con

E_{SYM} : energia di simmetria a saturazione,

L : termine che fornisce la dipendenza della densità dall'energia di simmetria

$$L = 3\rho_0^2 \frac{\partial S_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0}, \quad (1.10)$$

K_{SYM} : coefficiente di compressibilità di simmetria per $\rho = \rho_0$

$$K_{SYM} = 9\rho_0^2 \frac{\partial^2 S_2}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (1.11)$$

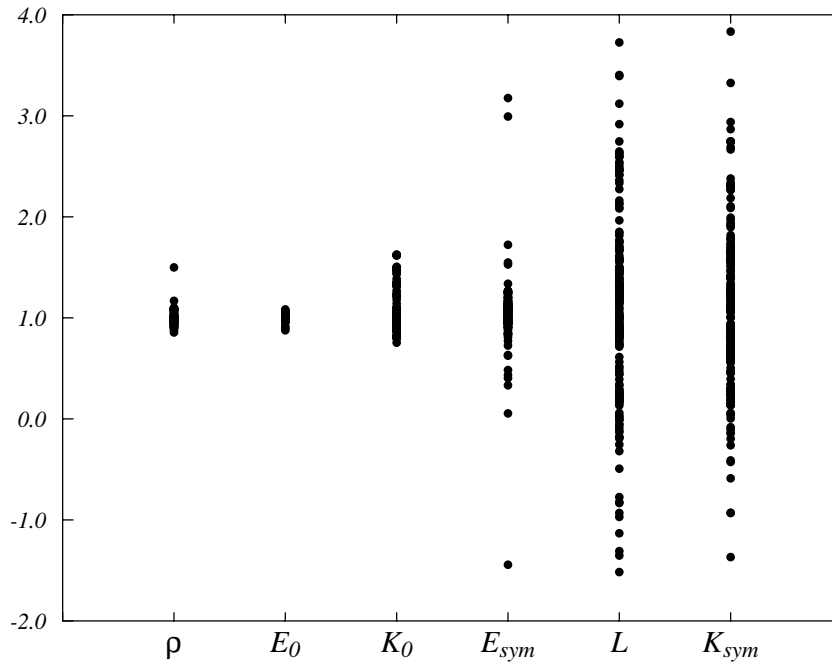


Figura 1.1: Valori delle grandezze presentate, normalizzati al loro valor medio.

Le teorie a molticorpi che calcolano l'equazione di stato di materia nucleare producono valori molto diversi per ognuna di queste variabili. Ad esempio, il grafico di Figura 1.1 riporta, per ciascuna delle grandezze introdotte in precedenza, 257 valori ottenuti considerando diverse equazioni di stato e normalizzati rispetto alla media. Il valore ideale risulterebbe quindi essere 1 ma possiamo osservare fluttuazioni attorno a questo valore per ciascuna quantità.

É evidente la necessità di definire i valori di questi parametri associandoli a dati sperimentali. Nei prossimi capitoli esamineremo come i valori dei coefficienti presenti nell'Eq. (1.2) e nell'Eq. (1.3) siano correlati ai dati empirici.

Capitolo 2

Energia di legame

In questo capitolo ci occuperemo di stimare il valore dell'energia di legame per nucleone per il caso di materia nucleare simmetrica. Si tratta, quindi, del valore ϵ_0 definito nell'Eq. (1.7). A tale scopo, analizzeremo una serie di energie di legame per nucleone di diversi nuclei secondo la (1.2), utilizzando dati estratti dalle compilazioni delle referenze [Aud95] e [Wap95].

Per limitarci al caso di materia nucleare simmetrica, studieremo le energie di legame dei nuclei con $N = Z$. I nuclei con $N = Z$ sono relativamente pochi rispetto ai nuclei noti. I dati considerati si trovano nell'Appendice A. Sono state selezionate soltanto le energie di legame per nucleone di nuclei simmetrici pari-pari, in modo tale che il termine di appaiamento abbia un valore uguale per ogni nucleo.

Abbiamo confrontato i dati sperimentali con le previsioni fatte dall'Eq. (1.2) usando i valori dei coefficienti presi da [Pov98] e presentati nella tabella 2.1.

	Ref. [Pov98]	Ref. [Wan10]
a_v	15.67	15.62
a_s	17.23	18.06
a_c	0.71	0.72
a_i	93.15	29.16
$\delta(A)$	$-11.20/(A^{1/2})$	$-5.51/(A^{1/3})$

Tabella 2.1: Valori dei parametri, in MeV, usati nell'Eq. (1.2) per calcolare l'energia di legame dei nuclei con $N = Z$.

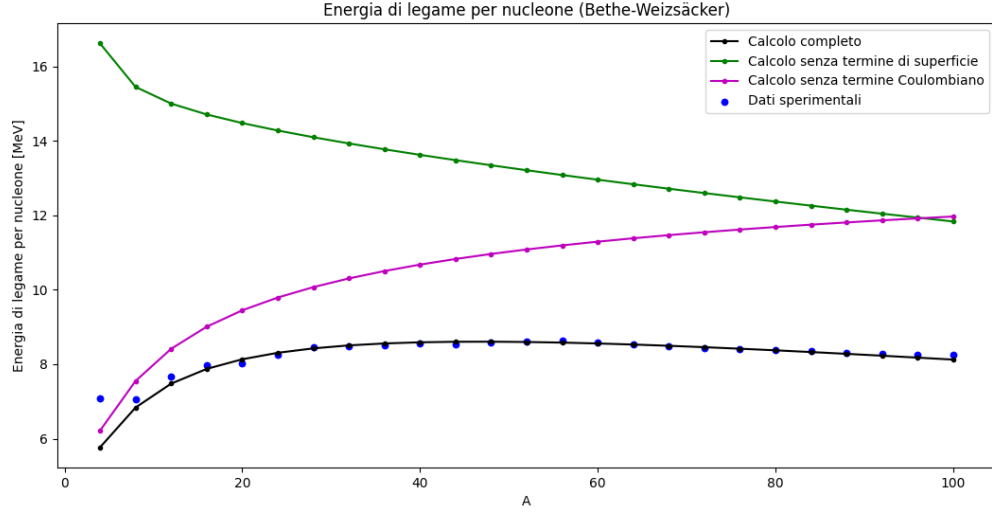


Figura 2.1: Energie di legame per nucleone per i nuclei con $N = Z$ dell'appendice A. Le curve sono state calcolate utilizzando i parametri di [Pov98]. Le curve magenta e verde mostrano i risultati che si ottengono spegnendo, rispettivamente, il termine coulombiano e di superficie.

Nella Figura 2.1 vengono confrontati i valori sperimentali dell'energia di legame per nucleone dei nuclei in precedenza selezionati (in blu) con i valori teorici calcolati utilizzando la formula semi-empirica di massa di Bethe-Weizsäcker. In particolare, presentiamo i seguenti confronti:

- valori teorici dell'energia di legame per nucleone calcolati con la formula completa di Bethe-Weizsäcker (1.2) (in nero);
- valori teorici dell'energia di legame per nucleone calcolati con la formula di Bethe-Weizsäcker senza il termine di superficie (in verde);
- valori teorici dell'energia di legame per nucleone calcolati con la formula di Bethe-Weizsäcker senza il termine coulombiano (in magenta).

Si osserva che per nuclei leggeri, ovvero nuclei aventi un basso numero di massa A , l'energia di legame per nucleone cresce rapidamente fino a raggiungere un valore quasi costante attorno a $A = 40$. Questo fatto è una indicazione del corto raggio d'azione dell'interazione nucleare forte, e produce quel fenomeno indicato come saturazione.

Abbiamo effettuato un calcolo del χ^2 e della deviazione standard delle energie di legame per nucleone σ , ottenendo rispettivamente: $\chi^2 = 27.050$, con χ^2 ridotto pari a $\chi^2/ndof = 1.352$, dove $ndof$ sono i 20 gradi di libertà della funzione ottenuti come $ndof = N_{dati} - N_{param}$ e infine $\sigma = 0.632$ MeV.

La curva dell'energia di legame per nucleone senza il termine di superficie (in verde) è notevolmente più elevata rispetto alle altre curve.

In particolare, per i nuclei leggeri, l'energia di legame per nucleone senza il termine di superficie è significativamente più alta rispetto al modello completo (in nero). Questo accade perchè una frazione significativa dei nucleoni si trova sulla superficie, quindi il termine di superficie ha un impatto maggiore. Per i nuclei più pesanti, invece, la distanza tra la curva in verde e quella in nero tende a diminuire, questo perchè una frazione minore di nucleoni si trova sulla superficie, la maggior parte dei nucleoni saranno infatti all'interno del nucleo, pertanto l'impatto del termine di superficie è ridotto.

La curva dell'energia di legame per nucleone senza il termine coulombiano (in magenta) è più elevata rispetto alla curva raffigurante il modello completo (in nero) e al plot dei dati (in blu). Questo suggerisce che il termine coulombiano, il quale tiene conto della repulsione tra i protoni all'interno del nucleo, ha un impatto significativo nel ridurre l'energia di legame.

In particolare, per i nuclei leggeri, l'effetto legato al termine coulombiano è poco significativo, nonostante ciò, la curva in magenta risulta essere più alta rispetto alla curva rappresentante il modello completo (in nero), questo accade perchè i nuclei più piccoli contengono un numero minore di protoni. Per i nuclei più pesanti, invece, la distanza tra la curva in magenta e quella in nero tende ad aumentare, questo perchè i nuclei pesanti hanno un numero maggiore di protoni, di conseguenza l'impatto del termine coulombiano è maggiore.

Inserendo nella (1.2) i coefficienti estratti dall'articolo di [Wan10] e correggendo il termine coulombiano come suggerito nello stesso articolo, ovvero:

$$E_C = a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} [1 - Z^{-2/3}] \quad , \quad (2.1)$$

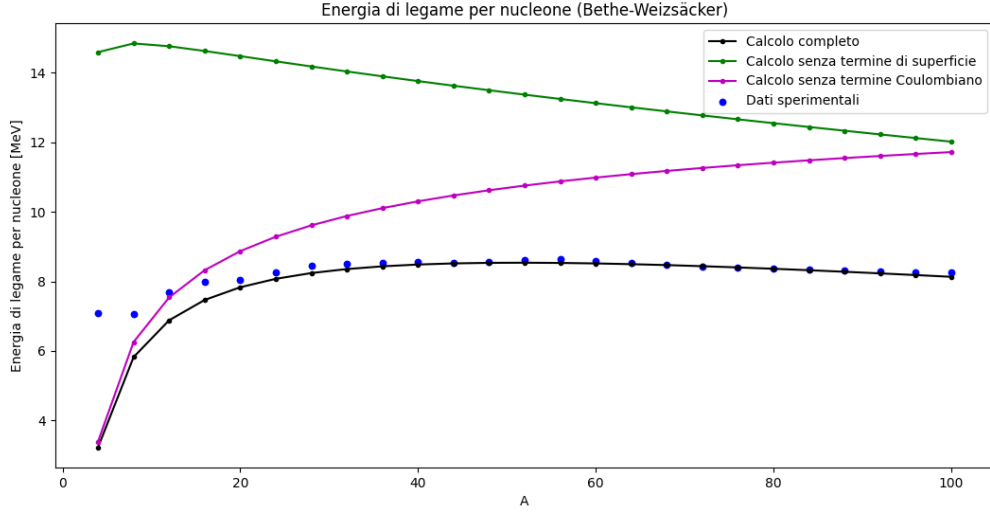


Figura 2.2: Energie di legame per nucleone per i nuclei con $N = Z$ dell'appendice A. Le curve sono state calcolate utilizzando i parametri di [Wan10]. Le curve magenta e verde mostrano i risultati che si ottengono spegnendo, rispettivamente, il termine coulombiano e di superficie.

Nella Figura 2.2 vengono confrontati i valori sperimentali dell'energia di legame per nucleone dei nuclei in precedenza selezionati (in blu) con i valori teorici calcolati utilizzando la formula semi-empirica di massa di Bethe-Weizsäcker in cui abbiamo inserito i coefficienti di [Wan10] e corretto il termine coulombiano come indicato in (2.1). In particolare, presentiamo i seguenti confronti:

- valori teorici dell'energia di legame per nucleone calcolati utilizzando il modello completo (1.2) (in nero);
- valori teorici dell'energia di legame per nucleone calcolati privando il modello del termine di superficie (in verde);
- valori teorici dell'energia di legame per nucleone calcolati privando il modello del termine coulombiano (in magenta).

Abbiamo effettuato un calcolo del χ^2 e della deviazione standard delle energie di legame per nucleone σ , ottenendo rispettivamente: $\chi^2 = 29.247$, con χ^2 ridotto pari a $\chi^2/ndof = 1.462$ e $\sigma = 1.137 \text{ MeV}$.

Anche in questo caso osserviamo gli stessi effetti.

Il valore del termine di nostro interesse risulta essere quindi ben definito. Sebbene l'esempio sia stato fatto utilizzando solo due parametrizzazioni della formula semi-empirica della massa, il confronto con altre parametrizzazioni indica che $a_v \simeq 15.8$ MeV con un'incertezza di 0.3 MeV.

Capitolo 3

Densità di saturazione

L'analisi dei dati di diffusione elastica di elettroni su nuclei indica che la densità di carica è quasi costante al centro del nucleo e diminuisce in modo graduale verso la superficie, fino ad annullarsi.

Consideriamo, ad esempio, i nuclei di ^{16}O , ^{40}Ca , ^{116}Sn , ^{208}Pb , i cui valori di densità di carica sono tratti dalla compilazione di [Dev87] e sono presentate nella Figura 3.1

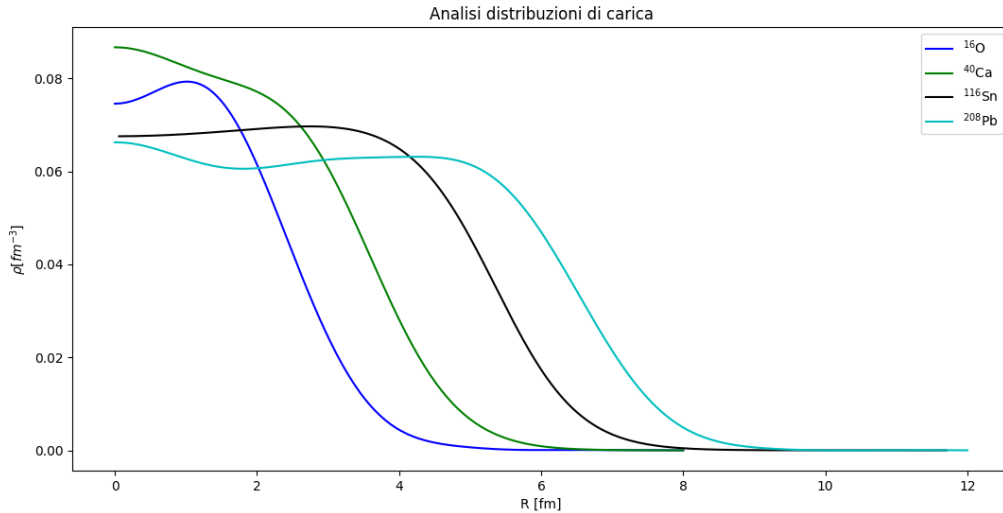


Figura 3.1: Distribuzioni di carica $\rho(r)$ per i nuclei ^{16}O , ^{40}Ca , ^{116}Sn , ^{208}Pb .

La densità di carica al centro del nucleo diminuisce lievemente all'aumentare del numero di massa.

Moltiplicando la densità per il fattore A/Z , che in qualche modo considera la presenza di neutroni nel nucleo, è possibile osservare che la densità nucleare all'interno del

nucleo è sostanzialmente uguale per quasi tutti i nuclei e risulta essere pari a $\rho_{0,1} = 0.16$ nucleoni/fm³.

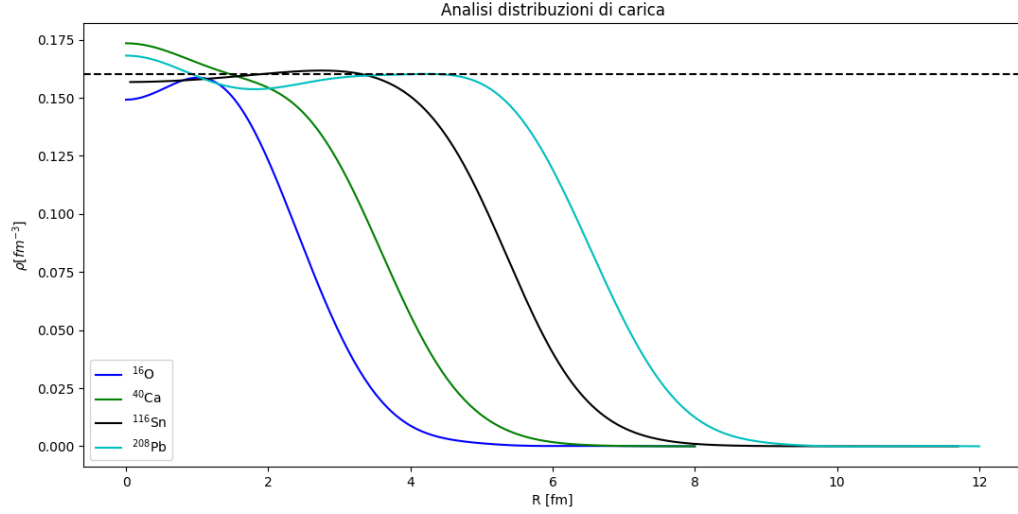


Figura 3.2: Distribuzioni di carica di ^{16}O , ^{40}Ca , ^{116}Sn , ^{208}Pb moltiplicate per il fattore A/Z . La linea tratteggiata indica $\rho_{0,1} = 0.16$ nucleoni/fm³.

Nella Figura 3.2, $\rho_{0,1}$ è indicata dalla retta tratteggiata.

Questo si verifica perchè l'interazione nucleare forte è un'interazione a corto raggio d'azione e pertanto al crescere di A , ogni nucleone (facendo eccezione per quelli situati nella regione superficiale del nucleo) interagisce all'incirca con lo stesso numero di nucleoni, ovvero quelli più vicini. Di conseguenza $\rho_{0,1}$ risulterà all'incirca costante e indipendente dal numero di nucleoni nella maggior parte dei nuclei atomici.

Da questa densità si possono calcolare i raggi quadratici medi, le cui radici quadrate corrispondono ai raggi di carica sperimentali. I raggi quadratici medi sono definiti come segue:

$$\langle r^2 \rangle \equiv \frac{\int d^3r \, r^2 \rho(r)}{\int d^3r \, \rho(r)} . \quad (3.1)$$

Il Modello a Goccia di Liquido usato per ottenere l'espressione della formula semi-empirica della massa (1.2) da cui parte tutta la trattazione che stiamo facendo, considera il nucleo come una sfera di densità uniforme con raggio R . In questo modello:

$$\rho = \rho_0 \, \Theta(R - r) , \quad (3.2)$$

dove $\Theta(R - r)$ è la funzione a gradino. Inserendola nella (3.1) otteniamo:

$$\langle r^2 \rangle \equiv \frac{\rho \int_0^R d^3r r^2}{\rho \int_0^R d^3r} = \frac{3}{5} R^2 , \quad (3.3)$$

quindi

$$R = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\langle r^2 \rangle} , \quad (3.4)$$

Abbiamo quindi proceduto ad un'analisi dei raggi sperimentali riportati nell'articolo [Ang13].

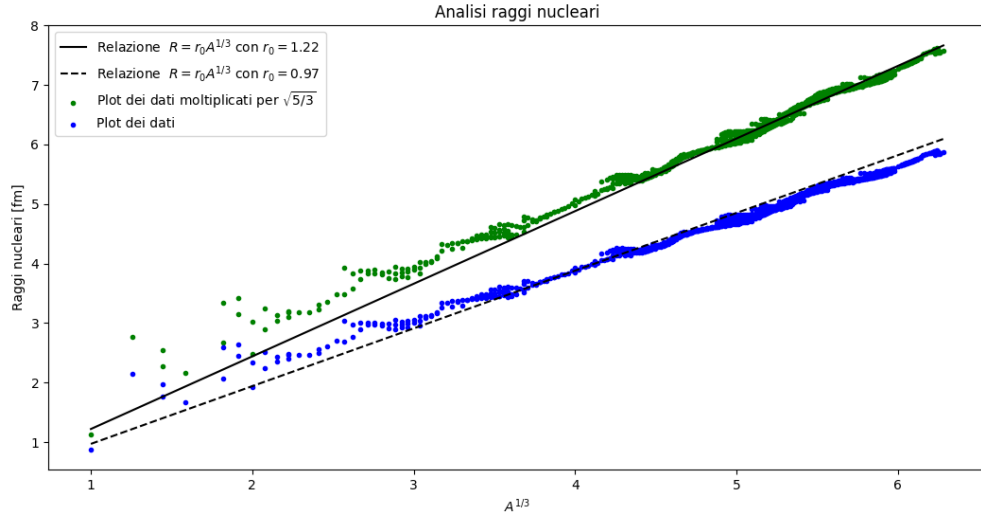


Figura 3.3: Confronto tra i raggi della sfera uniformemente carica e i raggi sperimentali di [Ang13].

I dati sperimentali (in blu) sono i raggi quadratici medi di carica misurati per vari nuclei usando varie tecniche. Nella Figura 3.3 presentiamo questi dati in funzione di $A^{1/3}$, dove A è il numero di massa del nucleo. Questi dati sono tratti dall'articolo di [Ang13] e presentano una chiara dipendenza lineare da $A^{1/3}$, secondo la relazione:

$$R = 0.97 \cdot A^{1/3} fm ,$$

Poiché dobbiamo ottenere i raggi di una sfera uniformemente carica abbiamo moltiplicato per $\sqrt{5/3}$ i raggi quadratici medi. Questi dati sono mostrati dai punti verdi nella Figura 3.3 e sono riprodotti da un'espressione

$$R = r_0 \cdot A^{1/3} = 1.2 \cdot A^{1/3} fm . \quad (3.5)$$

La densità costante della sfera di raggio R si ottiene dividendo il numero di nucleoni per il volume della sfera

$$\rho_{0,2} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0.14 \text{ nucleoni/fm}^3, \quad (3.6)$$

con $r_0 = 1.2 \text{ fm}$.

Dall'analisi appena condotta abbiamo ottenuto due valori di densità costante ovvero $\rho_{0,1} = 0.16 \text{ nucleoni/fm}^3$ e $\rho_{0,2} = 0.14 \text{ nucleoni/fm}^3$, possiamo procedere combinando i valori e calcolando una media di ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{\rho_{0,1} + \rho_{0,2}}{2} = 0.15 \text{ nucleoni/fm}^3,$$

con relativa incertezza:

$$\sigma_{\rho_0} = \frac{|\rho_{0,1} - \rho_{0,2}|}{2} = 0.01 \text{ nucleoni/fm}^3,$$

ottenendo pertanto $\rho_0 = 0.15 \pm 0.01 \text{ nucleoni/fm}^3$.

Capitolo 4

Compressibilità

4.1 Compressibilità ed eccitazione di monopolo elettrico

La compressibilità di un corpo è definita in [Ros94] come:

$$K = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad , \quad (4.1)$$

con P pressione, V volume e $\rho = 1/V$ densità (di numero).

Considerando che

$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{A}{\rho^2} = -\frac{V}{\rho} \quad .$$

e inserendo il risultato appena trovato nella (4.1), si ottiene:

$$K = (-V) \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dV} = \rho \frac{dP}{d\rho} \quad . \quad (4.2)$$

La pressione è definita in termini di variazione dell'energia per variazione del volume in cui è contenuto il gas

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{A}{V} \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} V \frac{d\rho}{dV} = \rho^2 \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} \quad . \quad (4.3)$$

Nel punto di saturazione di materia nucleare E/A ha un minimo, quindi:

$$\left. \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad ; \quad P(\rho_0) = 0 \quad . \quad (4.4)$$

Per valutare la compressibilità nel punto di saturazione abbiamo che:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} &= \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} \right]_{\rho=\rho_0} \\ &= \left[2\rho \frac{\partial(E/A)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \rho^2} \right]_{\rho=\rho_0} = \rho^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} , \end{aligned} \quad (4.5)$$

La relazione tra densità di saturazione e momento di Fermi k_F in materia nucleare simmetrica è [Pov98]

$$\rho_0 = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 , \quad (4.6)$$

quindi

$$\frac{d\rho}{dk_F} = \frac{2}{3\pi^2} 3k_F^2 = \frac{2}{\pi^2} k_F^2 , \quad (4.7)$$

Elevando al quadrato ambo i membri della (4.7) si ottiene:

$$\left(\frac{d\rho}{dk_F} \right)^2 = \left(\frac{2}{\pi^2} k_F^2 \right)^2 ,$$

Esprimendo la (4.5) in funzione del momento di Fermi k_F , si ottiene

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} &= \left(\frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \right)^2 \frac{\partial^2(E/A)}{(\partial k_F)^2} \frac{(\partial k_F)^2}{(\partial \rho)^2} = \\ &= \frac{4}{9} \frac{1}{\pi^4} k_F^6 \frac{\pi^4}{4} \frac{1}{k_F^4} \frac{\partial^2(E/A)}{(\partial k_F)^2} = \frac{1}{9} k_F^2 \frac{\partial^2(E/A)}{(\partial k_F)^2} , \end{aligned} \quad (4.8)$$

È tradizione definire la compressibilità della materia nucleare nel punto di saturazione come:

$$K_\infty = 9\rho^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} = k_F^2 \frac{\partial^2(E/A)}{(\partial k_F)^2} \Big|_{k=k_F} \quad (4.9)$$

Analizziamo ora come si lega la compressibilità all'eccitazione di monopolo elettrico. Nel Modello a Goccia di Liquido consideriamo fluttuazioni della densità del tipo:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{r}) . \quad (4.10)$$

Dalla linearizzazione delle equazioni di trasporto di Boltzmann si ottengono equazioni al primo ordine per $\delta\rho$ e δP . Queste sono, rispettivamente, l'equazione di continuità e l'equazione di Eulero così definite:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\rho(\vec{r}, t) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0 , \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{m\rho_0} \vec{\nabla} \delta P(\vec{r}, t) , \quad (4.12)$$

dove m è la massa della particella che si muove nel fluido composto dalle altre particelle e $\vec{v}(\vec{r}, t)$ è la velocità della particella.

Derivando la (4.11) rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\delta}{\delta t} (\delta\rho) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\rho) + \rho_0 \frac{\delta}{\delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\rho) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\delta}{\delta t} \vec{v} \right) = 0 , \quad (4.13)$$

per la (4.12)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\rho) + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{-1}{m\rho_0} \right) \vec{\nabla} \cdot \delta P = 0 , \quad (4.14)$$

utilizzando la (4.5) e la (4.9), otteniamo quindi la seguente espressione per la compressibilità

$$K_\infty = 9 \frac{\partial P}{\partial \rho} , \quad (4.15)$$

da cui possiamo isolare la pressione come segue

$$\delta P = \frac{K_\infty}{9} \delta\rho . \quad (4.16)$$

Sostituendo quindi (4.16) in (4.14) ricaviamo

$$\nabla^2 (\delta\rho) - \frac{9m}{K_\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\rho) = 0 , \quad (4.17)$$

la cui soluzione è l'onda piana

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} . \quad (4.18)$$

Sostituendo la (4.18) nella (4.14) otteniamo

$$-\vec{k}^2 + \left(\frac{9m}{K_\infty} \right) \omega^2 = 0 , \quad (4.19)$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{K_\infty}{9m} \vec{k}^2 , \quad (4.20)$$

$$\hbar\omega = \hbar c |\vec{k}| \sqrt{\frac{K_\infty}{9mc^2}} . \quad (4.21)$$

Questa relazione esprime un'importante connessione tra la compressibilità di un sistema e l'energia di eccitazione del sistema stesso, in particolare osserviamo che l'energia di eccitazione $\hbar\omega$ del sistema dipende dalla radice quadrata della compressibilità K_∞ .

Consideriamo lo sviluppo in multipoli dell'onda piana, ovvero:

$$e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = e^{i\omega t} 4\pi \sum_{\lambda, \mu} i^\lambda j_\lambda(kr) Y_{\lambda, \mu}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{\lambda, \mu}^*(\theta_r, \phi_r) . \quad (4.22)$$

Siamo interessati all'eccitazione di monopolo $\lambda = 0$, $\mu = 0$, ovvero alle eccitazioni longitudinali che costituiscono un modo di compressione. Sotto tali condizioni, la forma della goccia rimane sferica e cambia il volume oscillando attorno alla situazione di equilibrio. Questa eccitazione si chiama anche eccitazione di respiro. In questo caso abbiamo che

$$e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \xrightarrow{\lambda=\mu=0} e^{i\omega t} j_0(kr) = e^{i\omega t} \frac{\sin(kr)}{kr} . \quad (4.23)$$

Sulla superficie della goccia, ovvero quando $r = R$, la pressione esterna è equilibrata da quella interna:

$$0 = \delta P(r = R) = \frac{K_\infty}{9} \delta \rho(r = R) , \quad (4.24)$$

il che implica $\delta \rho(R) = 0$ e di conseguenza, per la (4.18) e (4.23), $j_0(kR) = 0$

Il primo zero di j_0 si ottiene quindi per:

$$k_{1\lambda} R = \pi , \quad (4.25)$$

quindi, isolando $k_{1\lambda}$

$$k_{1\lambda} = \frac{\pi}{R} , \quad (4.26)$$

sostituendo in (4.21), otteniamo:

$$E_{0+} = \hbar \omega_{0+} = \hbar c \frac{\pi}{R} \sqrt{\frac{K_\infty}{9mc^2}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2 \pi^2 K_\infty}{mc^2 15 \langle r^2 \rangle}} , \quad (4.27)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione (3.4).

4.2 Confronto con i dati sperimentali

L'espressione (4.27) è stata derivata considerando K_∞ . Tuttavia, poichè trattiamo sistemi finiti, si misura il modulo di compressione di un sistema finito K_A . È prassi sviluppare K_A in analogia all'energia di legame [Bla80]

$$K_A = K_\infty + K_s A^{-1/3} + K_I \left(\frac{N - Z}{A} \right)^2 + \frac{6 e^2}{5 r_0} \frac{Z^2}{A^{4/3}} . \quad (4.28)$$

L'ultimo termine è il termine coulombiano che rappresenta la compressibilità di una sfera uniformemente carica di raggio $R = r_0 A^{1/3}$. La sua derivazione è inserita in appendice B.

I valori dei tre parametri dell'Eq. (4.28) sono fissati mediante un fit di dati sperimentali. Per determinare i tre parametri indipendenti della (4.28) sarebbero sufficienti tre misurazioni, tuttavia sono disponibili molti più dati. Questi dati riguardano i nuclei in cui è stata identificata l'eccitazione di monopolo elettrico 0^+ . Si tratta di vari nuclei che vanno da ^{16}O al ^{208}Pb [Gar18]. In principio la procedura è ben definita, tuttavia, sorgono diverse problematiche e ambiguità nell'applicazione di questa relazione puramente empirica.

Il primo problema deriva dal fatto che l'Eq. (4.28) sia stata ottenuta utilizzando il Modello a Goccia di Liquido. Pertanto, è fondamentale identificare i nuclei che sono adeguatamente descritti da questo modello e di conseguenza stabilire quali dati nucleari siano appropriati per il fit dei parametri dell'Eq. (4.28). I nuclei pesanti si adattano meglio a questo modello poiché si avvicinano di più alla descrizione di una goccia di liquido incompressibile, anche se non presentano una superficie netta ben definita. Tuttavia, è necessario chiarire quali nuclei siano da considerare e quali invece siano da escludere.

Il secondo problema deriva dall'imprecisione nell'identificazione di E_{0+} , poiché la sua distribuzione non è a singolo valore ma segue una distribuzione del tipo mostrato in Figura 4.2, adattata da [Bol80]. In questo lavoro è stata studiata l'eccitazione delle risonanze giganti utilizzando gli elettroni. Normalmente, per questo tipo di studio si utilizzano sonde adroniche. Le risonanze giganti di multipolo sono più facilmente analizzabili nei nuclei pesanti, pertanto il nucleo di ^{208}Pb risulta essere particolarmente adatto a questo studio. In questi nuclei, le risonanze vengono identificate attraverso il decadimento $(e, e'n)$, in cui si osservano l'elettrone diffuso e un neutrone.

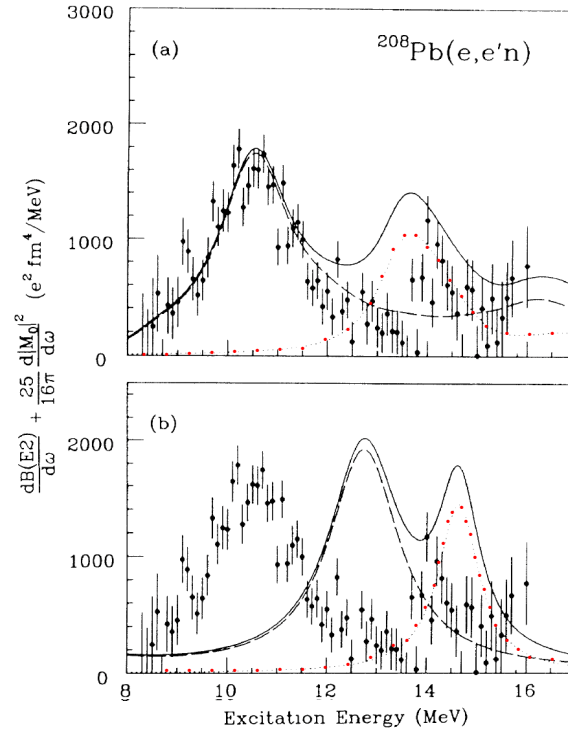


Figura 4.2: Sezione d'urto esclusiva $(e, e'n)$ sul bersaglio di ^{208}Pb . Le curve sono state ottenute utilizzando due differenti calcoli RPA nei quali si sono calcolate le eccitazioni 0^+ (linea a punti) e 2^+ (linea tratteggiata). La linea continua è la somma delle altre due. La figura è stata adattata da [Bol80].

I dati sono stati studiati usando una teoria che descrive l'eccitazione del nucleo come combinazione lineare di eccitazioni particella-buca, la teoria RPA che sta per Random Phase Approximation.

Nella Figura 4.2 possiamo osservare la sovrapposizione di due eccitazioni, 0^+ e 2^+ . Calcoli RPA di diverso tipo mostrano come le due risonanze si sovrappongano, presentando picchi ad energie differenti. La curva punteggiata e quella tratteggiata forniscono,

rispettivamente, le risposte di monopolo e di quadrupolo mentre la curva continua fornisce la risposta totale.

Per chiarire questo punto dobbiamo introdurre il concetto del "continuo": si parla di "continuo" in riferimento alla regione dello spettro in cui i livelli energetici non sono più discreti ma formano un insieme continuo. A basse energie, i nuclei atomici presentano livelli energetici discreti. In questa parte dello spettro il nucleo decade in uno stato con energia inferiore emettendo raggi γ . Superata la "soglia del continuo", che è l'energia minima necessaria per strappare un nucleone dal nucleo, il nucleo accede a una gamma continua di stati energetici, invece che a livelli discreti. In questa situazione, un nucleo eccitato è in una sovrapposizione di stati energetici. Per ogni energia di eccitazione, in principio, tutti i valori del momento angolare e della parità sono permessi, ma solo alcuni di essi sono rilevanti poiché gli altri non danno contributi quantitativamente significativi. Per portarsi ad una configurazione più stabile, il nucleo può perdere nucleoni ed emettere radiazione.

L'incertezza legata ad E_{0+} , cioè l'ampiezza della risonanza è di circa 1 MeV ed è significativamente maggiore dell'incertezza strumentale.

Il terzo problema riguarda l'indipendenza dei parametri. Empiricamente è emerso che K_∞ e K_s sono correlati, in particolare possiamo ottenere fit di pari qualità se il loro rapporto rimane costante.

La discussione su queste incertezze è ancora attiva e, oggi, il valore più comunemente accettato per K_∞ è 240 ± 20 MeV [Gar18], anche se ci sono proposte con maggiore margine di incertezza $250 < K_\infty < 315$ MeV [Sto14].

Capitolo 5

Termine di simmetria

Similmente a quanto discusso per la compressibilità, poiché trattiamo sistemi finiti, anche il termine di simmetria viene valutato per un sistema di dimensioni finite. Il termine di simmetria è pertanto definito come:

$$a_I = c_I^V - c_I^S A^{-1/3} , \quad (5.1)$$

dove c_I^V è il coefficiente di volume e c_I^S è il coefficiente di superficie. I valori di questi coefficienti dipendono dalla tipologia del nucleo che può essere pari-pari, pari-dispari o dispari-dispari.

Per studiare il termine di simmetria seguiamo l'approccio utilizzato da [Jia12], calcolando le energie di simmetria sperimentali come

$$\begin{aligned} E_{sym}^{exp}(A, Z) &= - [E^{exp}(A, Z) - E^{BW}(A, Z)] \\ &= -E^{exp}(A, Z) - \left[a_v A - a_s A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} [1 - Z^{-2/3}] - \delta(A) \right] , \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove $E^{exp}(A, Z)$ sono le energie di legame sperimentali tratte dalle compilazioni delle referenze [Aud95] [Wap95], mentre $E^{BW}(A, Z)$ sono le energie di legame calcolate utilizzando l'Eq. (1.2) con i coefficienti forniti da [Wan10], azzerando il termine di simmetria e correggendo il termine coulombiano come suggerito nello stesso articolo.

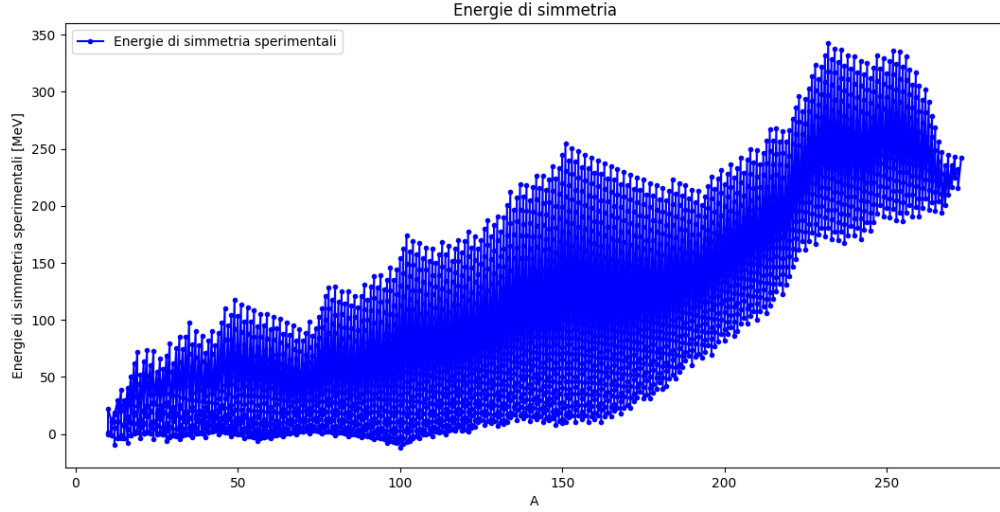


Figura 5.1: Energie di simmetria sperimentali calcolate usando la (5.2).

La Figura 5.1 mostra le energie di simmetria sperimentali di 2931 nuclei in funzione del numero di massa A . Le energie di simmetria sperimentali mostrano un andamento crescente per valori elevati di A , dove i nuclei presentano, mediamente, un incremento del rapporto tra il numero dei neutroni e quello dei protoni.

Poiché l'uso di questi dati per ottenere i valori dei parametri c_I^V e c_I^S è molto complicato, [Jia12] suggerisce di considerare la relazione

$$R_{i,j}^{exp}(Z, A) = E_{sym}^{exp}(A, Z) + E_{sym}^{exp}(A - i - j, Z - i) - E_{sym}^{exp}(A - j, Z) - E_{sym}^{exp}(A - i, Z - i) . \quad (5.3)$$

Per illustrare come funziona la procedura, consideriamo un esempio fissando $i = 2$ e $j = 2$ e assicurandoci che tutte le energie di simmetria coinvolte nell'Eq. (5.3) siano diverse da zero, otteniamo pertanto i valori presentati dai punti neri nella Figura 5.2

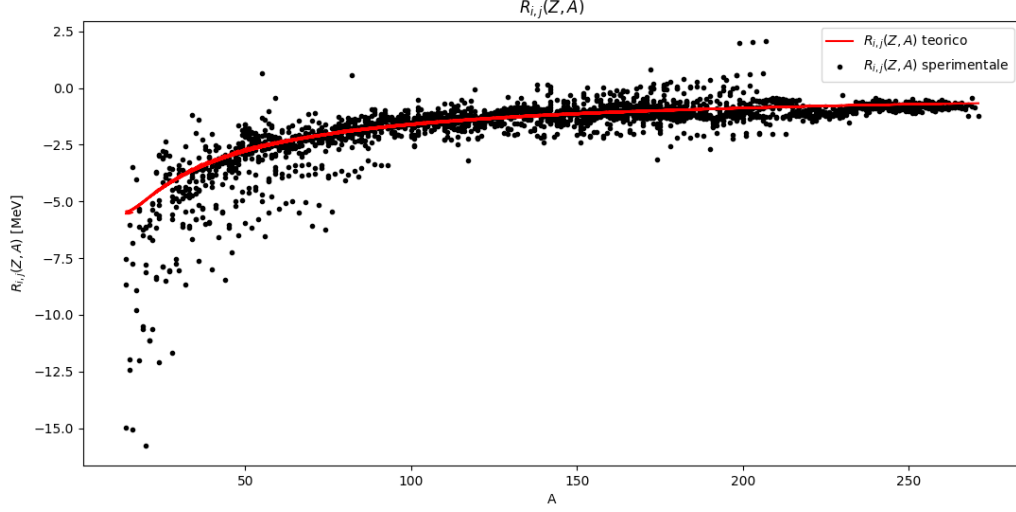


Figura 5.2: Confronto tra $R_{i,j}^{exp}(Z, A)$ e $R_{i,j}^{th}(Z, A)$.

La curva mostra un andamento crescente, partendo da valori negativi, circa -15 MeV per piccoli valori del numero di massa A , e stabilizzandosi attorno a 0 MeV per valori più alti di A . Questo andamento indica un progressivo raggiungimento di equilibrio nelle energie di simmetria all'aumentare del numero di massa. Questo insieme di dati è più compatto, rendendolo più adatto ad essere utilizzato per la determinazione dei parametri c_I^V e c_I^S dell'Eq. (5.1).

L'energia di simmetria teorica è pari a

$$E_{sym}^{th}(A, Z) = a_I I^2 A = \left(c_I^V - \frac{c_I^S}{A^{1/3}} \right) \left(\frac{A - 2Z}{A} \right)^2 A, \quad (5.4)$$

dove $I = (A - 2Z)/A$ è il termine di asimmetria.

In modo analogo alla (5.3) si definisce

$$R_{i,j}^{th}(Z, A) = E_{sym}^{th}(A, Z) + E_{sym}^{th}(A - i - j, Z - i) - E_{sym}^{th}(A - j, Z) - E_{sym}^{th}(A - i, Z - i), \quad (5.5)$$

Il fit ai dati sperimentali indica per i parametri della (5.4) rispettivamente i valori $c_I^V = 31.60$ MeV e $c_I^S = 53.66$ MeV. La Figura 5.2 confronta i valori di $R_{i,j}^{exp}(Z, A)$ ottenuti con la (5.3) (in nero) con quelli di $R_{i,j}^{th}(Z, A)$ ottenuti con la (5.5) (in rosso), mostrando come la teoria riproduca efficacemente i valori sperimentali.

Per confermare la validità del fit, confrontiamo le energie di simmetria sperimentali $E_{sym}^{exp}(A, Z)$ con le energie di simmetria teoriche $E_{sym}^{th}(A, Z)$, ottenendo

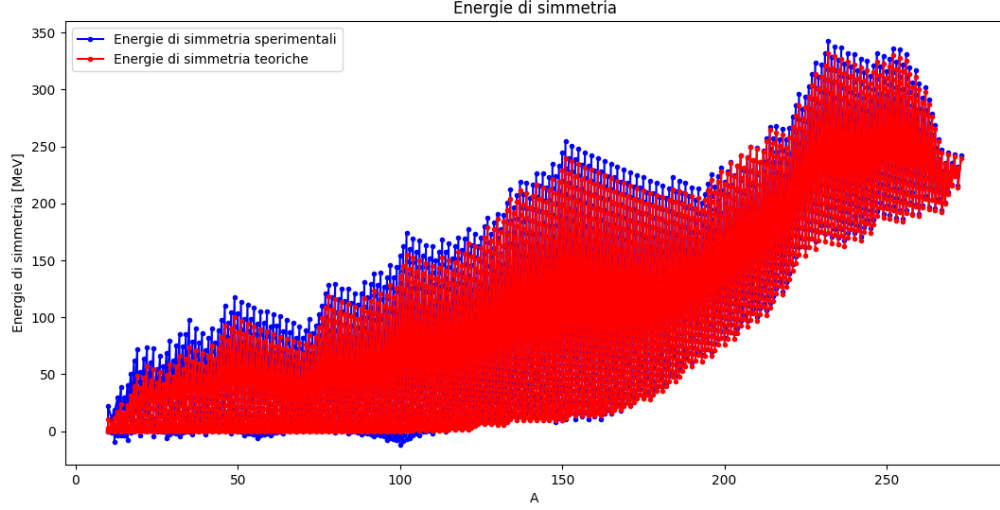


Figura 5.3: Confronto tra energie di simmetria sperimentali $E_{sym}^{exp}(A, Z)$ ed energie di simmetria teoriche $E_{sym}^{th}(A, Z)$.

La Figura 5.3 confronta i valori delle energie di simmetria sperimentali $E_{sym}^{exp}(A, Z)$ (in blu) con i valori delle energie di simmetria teoriche $E_{sym}^{th}(A, Z)$ (in rosso), mostrando che $E_{sym}^{th}(A, Z)$ sia una buona approssimazione di $E_{sym}^{exp}(A, Z)$ su grandi regioni.

L'analisi che abbiamo condotto limitandoci alla coppia $i = 2$ e $j = 2$, nel lavoro [Jia12] viene estesa a diverse combinazioni di valori di i e di j , ottenendo che il coefficiente di volume risulta pari a $c_I^V = 31.26 \pm 0.32$ MeV mentre il coefficiente di superficie è $c_I^S = 52.15 \pm 1.12$ MeV.

Capitolo 6

Spessore della neutron skin e termine L

La *neutron skin* (n.s.) è definita come:

$$\Delta r = \langle r^2 \rangle_n^{1/2} - \langle r^2 \rangle_p^{1/2} , \quad (6.1)$$

dove $\langle r^2 \rangle_n^{1/2}$ è il raggio quadratico medio dei neutroni e $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ è il raggio quadratico medio dei protoni, definiti nell'Eq. (3.1).

Come mostrato nell'articolo [Bro00] la n.s. presenta una dipendenza quasi lineare dalla derivata dell'energia di simmetria in funzione della densità, quantità che abbiamo precedentemente indicato con L , definita come in (1.10).

Seguendo l'analisi fatta in [Cen10], per identificare la parte di *bulk* da quella di superficie della n.s. ci serviamo di diverse definizioni di raggi, tra questi il raggio netto R di una distribuzione uniforme la cui densità è pari alla densità della regione centrale $\rho(bulk)$ e contiene lo stesso numero di particelle

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho(bulk) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr , \quad (6.2)$$

e il raggio quadratico medio equivalente Q , che descrive una distribuzione uniforme netta con lo stesso raggio quadratico medio $\langle r^2 \rangle$ della densità considerata, secondo l'Eq. (3.4)

$$Q = \sqrt{\frac{5}{3}} \langle r^2 \rangle^{1/2} . \quad (6.3)$$

I raggi R e Q , sono legati tra loro da un'espressione che considera uno sviluppo

$$Q = R \left(1 + \frac{5}{2} \frac{b^2}{R^2} + \dots \right) , \quad (6.4)$$

dove il parametro b è la larghezza della superficie del profilo di densità e fornisce una misura di quanto si estende la regione di transizione tra la parte centrale, dove la densità è alta e relativamente uniforme, e la parte esterna, dove la densità decresce gradualmente fino ad annullarsi.

Consideriamo il nucleo ^{208}Pb come esempio per illustrare il nostro procedimento. Il ^{208}Pb è spesso scelto per tali studi perché è un nucleo pesante e dispone di una vasta gamma di dati sperimentali sulla n.s. . Le densità di questo nucleo sono state calcolate utilizzando il metodo Hartree-Fock con l'interazione D1S [Amedee]. Partendo da queste densità abbiamo poi calcolato i raggi quadratici medi dei protoni $\langle r^2 \rangle_p$ e dei neutroni $\langle r^2 \rangle_n$. Inserendo i risultati appena ottenuti in (6.3), abbiamo ottenuto rispettivamente Q_p e Q_n . Successivamente abbiamo calcolato R_p ed R_n isolando R da (6.2). In questo passaggio, la principale difficoltà è stata definire $\rho(\text{bulk})$ a causa delle oscillazioni della densità $\rho(r)$. Abbiamo pertanto scelto di calcolare $\rho(\text{bulk})$ come la media tra la densità al centro del nucleo, $\rho(r=0)$, e la densità valutata in corrispondenza del raggio quadratico medio, $\rho(r = \langle r^2 \rangle^{1/2})$.

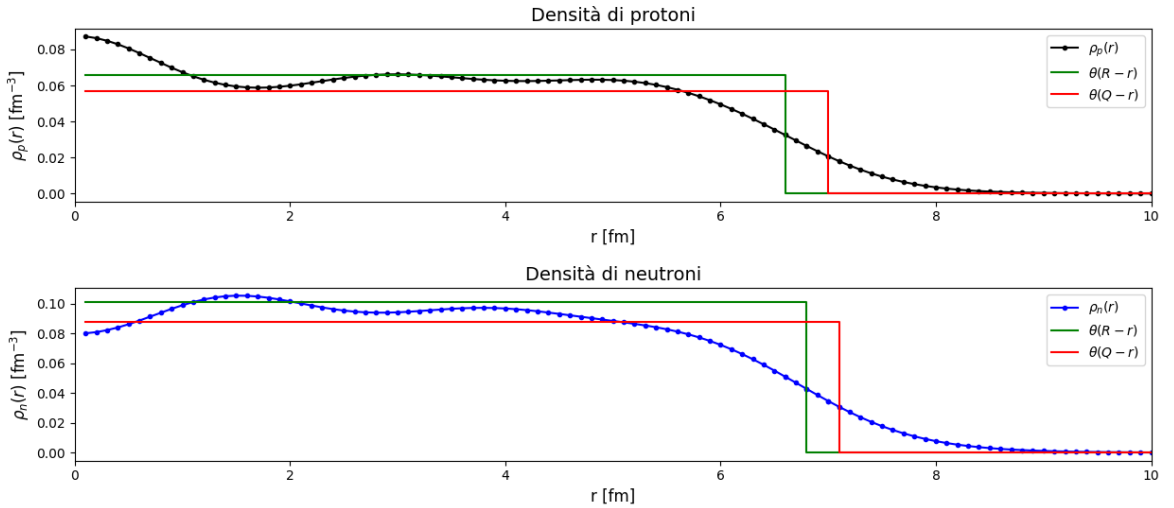


Figura 6.1: Densità di ^{208}Pb di protoni e neutroni calcolate con il metodo Hartree-Fock in funzione della distanza dal centro del nucleo r .

La figura 6.1 mostra i profili di densità radiale per protoni e neutroni di ^{208}Pb . Nel pannello superiore, la densità radiale dei protoni $\rho_p(r)$ (curva nera) presenta massimo valore al centro, ovvero in corrispondenza di $r = 0$, per poi diminuire gradualmente con l'aumentare della distanza dal centro fino ad annullarsi. La curva verde rappresenta la

funzione a gradino $\theta(R - r)$, che descrive una densità protonica costante all'interno di un raggio R , oltre il quale la densità si annulla bruscamente. La curva rossa rappresenta la funzione a gradino $\theta(Q - r)$, che descrive una densità protonica costante fino ad una distanza Q , legata al raggio quadratico medio, per poi annullarsi oltre Q . Nel pannello inferiore mostriamo le curve analoghe per le densità radiali dei neutroni.

Con i valori di Q ed R ricavati in precedenza, abbiamo poi calcolato b utilizzando la (6.4). A questo punto, siamo in grado di ridefinire l'Eq. (6.1), in quest'ultima emerge una distinzione naturale tra la regione centrale della distribuzione, dove la densità è relativamente uniforme e costante, e la superficie, dove la densità diminuisce in modo graduale fino ad annullarsi, possiamo pertanto ridefinire la (6.1)

$$\Delta r = \Delta r^{bulk} - \Delta r^{surf} = \sqrt{\frac{3}{5}}(Q_n - Q_p) \ , \quad (6.5)$$

con

$$\Delta r^{bulk} = \sqrt{\frac{3}{5}}(R_n - R_p) \ , \quad (6.6)$$

e

$$\Delta r^{surf} = \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{5}{2} \left(\frac{b_n^2}{R_n} - \frac{b_p^2}{R_p} \right) \ . \quad (6.7)$$

Otteniamo i seguenti valori: $\Delta r = 0.122 \pm 0.061$ fm, $\Delta r^{bulk} = 0.118 \pm 0.059$ fm, $\Delta r^{surf} = 0.004 \pm 0.002$ fm .

Questa è la procedura usata in [Cen10] dove sono stati considerati i risultati di venticinque calcoli di campo medio fatti utilizzando diverse interazioni nucleone-nucleone.

Mostriamo nella Figura 6.2 i risultati di Ref. [Cen10] per Δr , Δr^{bulk} e Δr^{surf} .

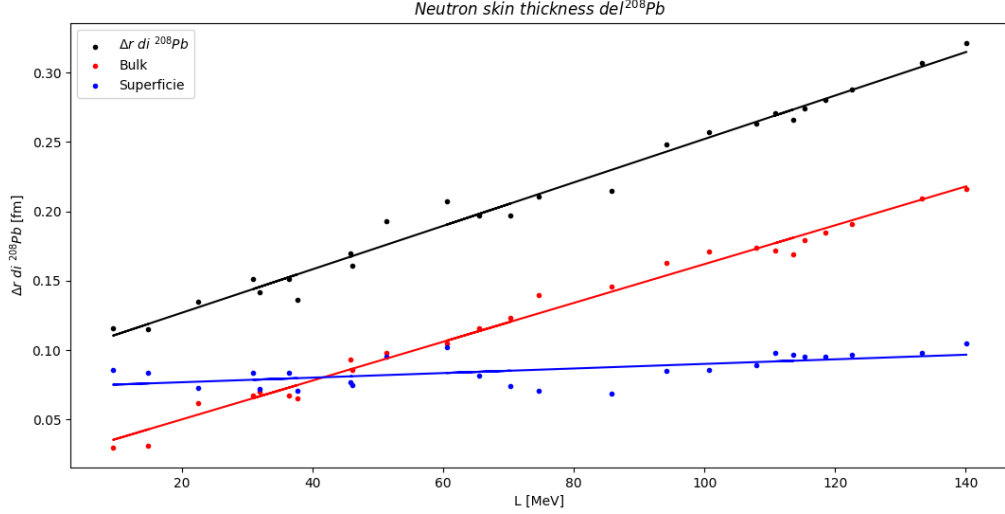


Figura 6.2: Confronto tra Δr , Δr^{bulk} e Δr^{surf} .

La figura 6.2 mostra come i valori di Δr calcolati (in nero) aumentino in modo quasi lineare con L . L'andamento di Δr è dominato dal bulk perchè il termine di superficie risulta essere quasi costante.

Tra i risultati usati in [Cen10] ci sono anche quelli ottenuti utilizzando il metodo Hartree-Fock con l'interazione D1S. Nel confronto tra i nostri risultati, ottenuti utilizzando lo stesso metodo, e quelli presentati in [Cen10], notiamo un'importante differenza nei valori delle componenti Δr^{bulk} e Δr^{surf} . In [Cen10], Δr^{surf} risulta essere maggiore di Δr^{bulk} , mentre nei nostri risultati, Δr^{bulk} domina su Δr^{surf} . Questo scostamento è strettamente legato ai diversi approcci utilizzati per calcolare $\rho(bulk)$.

Misure di Δr nel ^{208}Pb fatte sfruttando lo scattering elastico di elettroni polarizzati [Adh21] (esperimento PREX-II, Parity Radius Experiment II) indicano un valore di $\Delta r = 0.283 \pm 0.071$ fm che corrisponde ad un valore di $L = 106 \pm 37$ MeV. Tuttavia, un recente articolo [Ess21] che combina i dati di PREXII con misure astrofisiche di masse e raggi di stelle di neutroni ($\chi\text{EFT Astro+PREX-II Posterior}$), propone un valore di $L = 53^{+14}_{-15}$ MeV corrispondente ad un valore di Δr del ^{208}Pb pari a 0.17 ± 0.04 fm.

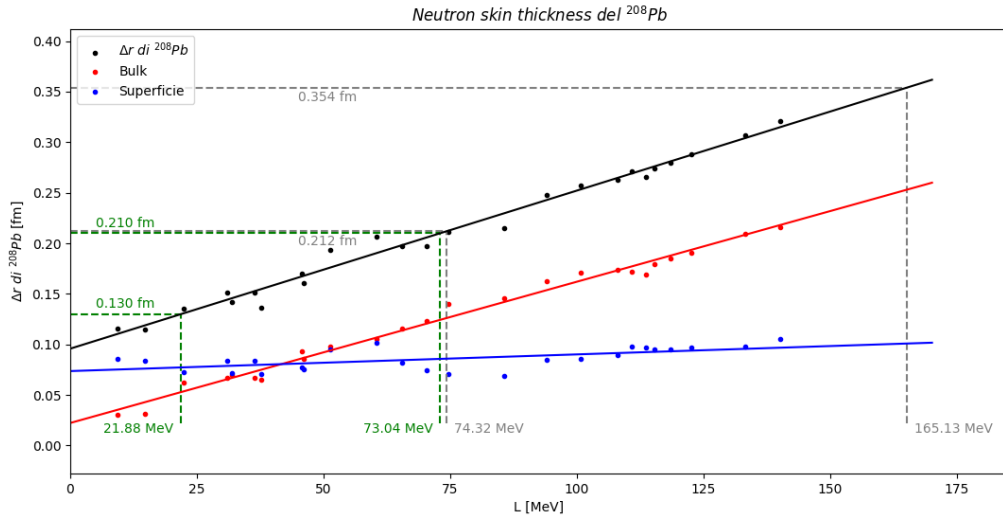


Figura 6.3: Le bande orizzontali grigie individuano un valore di $\Delta r = 0.283$ fm con un'incertezza di ± 0.071 fm, associate ad un intervallo di $L = 106 \pm 37$ MeV, indicato dalle linee verticali grigie. Le bande orizzontali verdi rappresentano un valore di $\Delta r = 0.17$ fm con un'incertezza di ± 0.04 fm, che corrisponde ad un intervallo di $L = 53^{+14}_{-15}$, indicato dalle linee verticali verdi.

Lo studio di Δr rimane tutt'oggi argomento di discussione e ricerca.

Capitolo 7

Coefficiente K_{SYM}

In analogia a quanto fatto per L , anche per K_{SYM} , che misura come l'energia di simmetria cambia quando la densità nucleare varia attorno al valore di saturazione, si cerca una relazione lineare tra questa grandezza e altre quantità teoriche. L'approccio prevede l'esecuzione di numerosi calcoli di campo medio per verificare la validità di questa relazione lineare.

Al momento, il lavoro più accreditato è quello di [Mon17], il quale presenta un'analisi di 500 calcoli di Hartee-Fock suddivisi in due categorie: i calcoli non relativistici, basati sull'interazione Skyrme, che presentano valori negativi per K_{SYM} , definito come nell'Eq. (1.11), e i calcoli RMF (Relativistic Mean Field), che tendono a presentare valori più elevati di K_{SYM} , alcuni dei quali possono essere anche positivi.

Durante il loro studio è stata trovata una relazione lineare che lega il termine K_{SYM} , al coefficiente di volume $a_I = c_I^V$ e al termine L secondo la relazione

$$K_{SYM} = -d_1[3c_I^V - L] + d_2 \quad , \quad (7.1)$$

con $d_1 = -4.97 \pm 0.07$ MeV e $d_2 = 66.80 \pm 2.14$ MeV.

Utilizzando i valori di $c_I^V = 31.26 \pm 0.32$ MeV e $L = 53_{-15}^{+14}$ MeV ottenuti nei capitoli precedenti otteniamo un valore di $K_{SYM} = -135.88_{-74.79}^{+69.83}$ MeV.

Capitolo 8

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è la determinazione dei parametri che caratterizzano l'equazione di stato della materia nucleare. Nei vari capitoli abbiamo esaminato come i valori dei coefficienti presenti nell'Eq. (1.2), quali il termine di volume a_V , la densità di saturazione ρ_0 , la compressibilità K_∞ , il coefficiente di volume a_I , il termine L e il termine K_{SYM} , siano correlati ai dati empirici. Il problema nel legare i parametri della (1.2) ai dati sperimentali risiede nelle incertezze e nelle approssimazioni proprie del modello utilizzato, che possono compromettere la precisione dei risultati e la loro interpretazione.

Possiamo sviluppare l'energia di legame di $E(\rho, I)$ in funzione di ρ in corrispondenza di un preciso valore della densità, ovvero $\rho_0 = 0.17 \pm 0.02 \text{ fm}^{-3}$, ovvero la densità di saturazione che successivamente analizzeremo. Questa densità di saturazione è associata a un minimo dell'energia di legame, corrispondente a una situazione di stabilità. Intorno a questo minimo, l'energia di legame per nucleone di materia nucleare asimmetrica $\epsilon(\rho)$ può essere sviluppata in serie di Taylor attorno a valori simmetrici di materia nucleare ($N = Z$), $\epsilon_{SNM}(\rho)$ ossia attorno a $I = 0$. Pertanto, fermandoci al quarto ordine, essa sarà data dalla somma di due componenti: l'energia di legame per nucleone di materia nucleare simmetrica ϵ_{SNM} e l'energia di simmetria S_2 . Comprendere come queste due energie dipendano dalla densità ρ ci permetterà di chiarire come $\epsilon(\rho)$ vari in funzione della densità ρ .

Abbiamo pertanto iniziato la nostra trattazione con un'analisi delle energie di legame per nucleone per il caso di materia nucleare simmetrica, ovvero studiando le energie di legame per nuclei pari-pari con $N = Z$, arrivando a osservare che il valore del termine di nostro interesse, ovvero il termine di volume a_V , risulta essere ben definito.

Dall'analisi dei dati di diffusione elastica di elettroni sui nuclei di ^{16}O , ^{40}Ca , ^{116}Sn , ^{208}Pb osserviamo che la densità nucleare risulta essere costante al centro del nucleo e diminuisce lievemente all'aumentare del numero di massa. Successivamente abbiamo lavorato con i raggi: da questa densità abbiamo calcolato i raggi quadratici medi, le cui radici quadrate corrispondono ai raggi di carica sperimentali. Il Modello a Goccia di Liquido usato per ottenere l'espressione della formula semi-empirica della massa da cui

parte tutta la trattazione che stiamo facendo, considera il nucleo come una sfera di densità uniforme. Questa ipotesi ci permette di calcolare i raggi teorici di una sfera uniformemente carica, che vengono poi confrontati con i raggi sperimentali, ottenendo una relazione empirica tra il raggio R e il numero di massa A , espressa come $R = r_0 \cdot A^{1/3} = 1.22 \cdot A^{1/3}$. Questo ci permette di calcolare la densità costante della sfera di raggio R con la formula $\rho = A/(\frac{4}{3}\pi R^3) = A/(\frac{4}{3}\pi r_0^3 A) = 3/(4\pi r_0^3)$

La compressibilità K_∞ è stata ricavata attraverso l'analisi delle risonanze giganti, concentrandosi in modo specifico sulla derivazione del modulo di compressione per sistemi finiti. Per determinare i tre parametri indipendenti che definiscono il modulo di compressione dei sistemi finiti, inclusa K_∞ , si utilizzano dati riguardanti i nuclei in cui è stata identificata l'eccitazione di monopolo elettrico 0^+ . Si tratta di vari nuclei che vanno da ^{16}O al ^{208}Pb .

Abbiamo studiato le energie di simmetria, concentrandoci sulla determinazione dei parametri c_I^V e c_I^S . I contributi di volume e superficie sono stati studiati separatamente. Nel contesto nucleare, si misurano sia c_I^V che c_I^S , ma solo il primo, c_I^V , è rilevante per la determinazione del termine a_I nella materia nucleare.

In letteratura, si è scoperta una relazione lineare tra i valori di L e della neutron skin Δr , facendo calcoli di campo medio (Hartree-Fock). Abbiamo considerato il caso del nucleo ^{208}Pb perchè è un nucleo pesante e dispone di una vasta gamma di dati sperimentali sulla neutron skin. Abbiamo separato le componenti di "bulk" e di "superficie". Come esempio abbiamo usato risultati ottenuti da un calcolo H-F con interazione D1S.

Lo stesso approccio empirico usato per L è stato usato per K_{SYM} sfruttando una relazione lineare tra questo coefficiente e a_I e L trovata in letteratura. Con i dati ottenuti in precedenza abbiamo ottenuto il valore di K_{SYM} .

I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella 8.1 .

Parametro	Valore
a_v	$15.8 \pm 0.3 \text{ MeV}$
ρ_0	$0.15 \pm 0.01 \text{ nucleoni/fm}^3$
K_∞	$240 \pm 20 \text{ MeV}$
a_I	$31.26 \pm 0.32 \text{ MeV}$
L	$106 \pm 37 \text{ MeV};$ $53_{-15}^{+14} \text{ MeV}$
K_{SYM}	$-135.88_{-74.79}^{+69.83} \text{ MeV}$

Tabella 8.1: Tabella riassuntiva dei risultati ottenuti.

Sebbene il modello semi-empirico ci abbia permesso di ottenere delle stime per i parametri nucleari, questo presenta dei limiti, per esempio, nel caso dei nuclei leggeri. In questo caso, il termine di superficie, che tiene conto del fatto che i nucleoni sulla superficie del nucleo siano meno legati rispetto ai nucleoni centrali, gioca un ruolo significativo: nei

nuclei leggeri una frazione significativa dei nucleoni si trova sulla superficie, di conseguenza, le approssimazioni fatte nel modello semi-empirico possono portare ad incongruenze con i dati sperimentali.

Il valore della compressibilità K_∞ non è ancora ben determinato, Sebbene sia stimato un valore di 240 ± 20 MeV ci sono proposte con maggiore margine di incertezza $250 < K_\infty < 315$ MeV. Sono quindi necessari ulteriori studi per restringere l'incertezza e ottenere un valore più preciso.

Misure di Δr nel ^{208}Pb fatte sfruttando lo scattering elastico di elettroni polarizzati (PREX-II) indicano un valore di $\Delta r = 0.283 \pm 0.071$ fm che corrisponde ad un valore di $L = 106 \pm 37$ MeV. Tuttavia, uno studio che combina i dati di PREXII con misure astrofisiche di masse e raggi di stelle di neutroni ($\chi\text{EFT Astro+PREX-II Posterior}$), propone un valore di $L = 53^{+14}_{-15}$ MeV corrispondente ad un valore di Δr del ^{208}Pb pari a 0.17 ± 0.04 fm. Al fin di determinare L e Δr è necessario condurre ulteriori indagini, confrontando i risultati ottenuti da esperimenti in laboratorio con quelli ottenuti da analisi astrofisiche.

Appendice A

Nuclei simmetrici pari-pari

Energie di legame sperimentali dei nuclei con $N = Z$ considerati.

N	Z	A	E/A [MeV]
2	2	4	7.073918
4	4	8	7.062438
6	6	12	7.680146
8	8	16	7.976209
10	10	20	8.032243
12	12	24	8.260704
14	14	28	8.447746
16	16	32	8.493146
18	18	36	8.519880
20	20	40	8.551299
22	22	44	8.533517
24	24	48	8.572132
26	26	52	8.609552
28	28	56	8.642640
30	30	60	8.583199
32	32	64	8.530532
34	34	68	8.476441
36	36	72	8.431713
38	38	76	8.395802
40	40	80	8.372362
42	42	84	8.344500
44	44	88	8.310806
46	46	92	8.283392
48	48	96	8.264563
50	50	100	8.248790

Appendice B

Compressibilità di una sfera uniformemente carica

La densità di carica ρ di una sfera uniformemente carica di raggio R è pari a

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad , \quad (\text{B.1})$$

dove Q è la carica totale.

La carica q contenuta in una sfera di raggio r all'interno della sfera di raggio R è data da

$$q = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = Q \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad (\text{B.2})$$

derivando rispetto al raggio r otteniamo

$$dq = 3Q \frac{r^2}{R^3} dr \quad , \quad (\text{B.3})$$

ovvero la carica contenuta in un guscio sferico di raggio r e spessore dr .

Il potenziale elettrico V di una sfera uniformemente carica è pari a

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} \quad , \quad (\text{B.4})$$

con ϵ_0 costante dielettrica del vuoto.

L'energia necessaria per aumentare la carica q di dq è pari a

$$dE = V dq = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^6} r^4 dr \quad , \quad (\text{B.5})$$

pertanto, possiamo ottenere l'energia totale come segue:

$$E = \int_0^Q V(q) dq = \int_0^R \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^6} r^4 dr = \frac{3}{5} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{R} \quad , \quad (\text{B.6})$$

48 APPENDICE B. COMPRESSIBILITÀ DI UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

Per il nucleo vale la seguente relazione:

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} = Z^2 e^2 \quad , \quad (\text{B.7})$$

pertanto, il termine coulombiano nella formula semi-empirica è

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Consideriamo la densità di nucleoni di una sfera uniforme di raggio R :

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi} r_0^{-3} \quad . \quad (\text{B.9})$$

Per esprimere la compressibilità in funzione del raggio r_0 si procede differenziando la relazione $\rho = 3r_0^{-3}/4\pi$:

$$\frac{d\rho}{dr_0} = \frac{-9}{4\pi} r_0^{-4} \quad .$$

Inserendo il risultato appena trovato nella (4.9) e nella (B.9), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{K_\infty^C}{9} &= \rho^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial \rho^2} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 r^{-6} \frac{\partial^2(E/A)}{\partial r_0^2} \left(\frac{\partial r_0}{\partial \rho}\right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 r^{-6} \left(\frac{4\pi}{9}\right)^2 r^8 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial r_0^2} = \frac{1}{9} r_0^2 \frac{\partial^2(E/A)}{\partial r_0^2} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Consideriamo le (B.8) e (B.10)

$$K_\infty^C = r_0^2 \frac{\partial^2(E_C/A)}{\partial r_0^2} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{A^{4/3}} e^2 r_0^2 \frac{2}{r_0^3} = \frac{6}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{4/3}} \quad . \quad (\text{B.11})$$

Bibliografia

- [Abr12] S. Abrahamyan et al., *Measurement of the Neutron Radius of ^{208}Pb through Parity Violation in Electron Scattering*, Phys. Rev. Lett., 108 (2012), 112502.
- [Adh21] D. Adhikari et al., *Accurate Determination of the Neutron Skin Thickness of ^{208}Pb through Parity-Violation in Electron Scattering*, Phys. Rev. Lett., 126 (2021), 172502
- [Amedee] S. Hilaire, M. Girod, *Hartree-Fock-Bogoliubov Results Based on the Gogny Force AMEDEV Database*. Available online: http://www-phynu.cea.fr/HFB-Gogny_eng.htm
- [Ang13] I. Angeli, K.P. Marinova, *Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update*, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 99 (2013), 69.
- [Aud95] G. Audi, A. H. Wapstra, *The 1995 update to the atomic mass evaluation*, Nucl. Phys. A, 595 4 (1995), 409.
- [Ben20] O. Benhar, S. Fantoni, *Nuclear Matter Theory*, CRC press, Boca Raton (NY), (2020).
- [Ben23] O. Benhar, *Structure and Dynamics of Compact Stars*, Springer, Berlino, (2023).
- [Bet36] H. A. Bethe, R. F. Bacher, *Nuclear Physics. A Stationary states of nuclei*, Rev. Mod. Phys., 8 (1936), 82.
- [Bet71] H. Bethe, *Theory of Nuclear Matter*, Annual Review of Nuclear and Particle Science, 21 (1971), 93.
- [Bla80] J. P. Blaizot, *Nuclear compressibility*, Phys. Rep., 64 (1980) 171.
- [Bol80] G. O. Bolme, L. S. Cardman, R. Doerfler, L. J. Koester, B. L. Miller, C. N. Papanicolas, H. Rothhaas, S. E. Williamson, *($e, e'n$) Coincidence Studies of the Giant Multipole Resonances of ^{208}Pb* , Phys. Rev. Lett., 61 (1988), 1081.
- [Bro00] B. A. Brown, *Nuclear radii in nuclei and neutron equation of state*, Phys. Rev. Lett., 85 (2000), 5296.

- [Cen10] M Centelles, X. Roca-Maza, X. Viñas, M. Warda, *Origin of the neutron skin thickness of ^{208}Pb in nuclear mean-field models*, Phys. Rev. C, 82 (2010), 054314.
- [Dev87] H. De Vries, C.W. De Jager, C. De Vries, *Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering*, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 36 (1987), 495.
- [Ess21] R. Essick, I. Tews, Ph. Landry, A. Schwenk, *Astrophysical Constraints on the Symmetry Energy and the Neutron Skin of ^{208}Pb with Minimal Modeling Assumptions*, Phys. Rev. Lett., 127 (2021), 192701.
- [Gar18] U. Garg, Gianluca Colò, *The compression-mode giant resonances and nuclear incompressibility*, Progr. Part. and Nucl. Phys., 101 (2018) 55.
- [Jia12] H. Jiang, G. J. Fu, Y. M. Zhao, A. Arima, *Volume and surface symmetry energy coefficients*, Phys. Rev. C, 85 (2012), 024301.
- [Mon17] C. Mondal, B. K. Agrawal, J. N. De, S. K. Sammadar, M Centelles, X. Viñas, *Interdependence of different symmetry energy elements*, Phys. Rev. C, 96 (2017), 021302(R).
- [Mye69] W. D. Myers, W. J. Swiatecki, *Average nuclear properties*, Ann. Phys., 55 (1969), 395.
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Particelle e nuclei: un'introduzione ai concetti fisici*, Bollati Boringhieri, Torino (1998).
- [Ros94] S. Rosati, *Fisica generale*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano (1994).
- [Sto14] J. R. Stone, N. J. Stone, S. Moszkowski, *Incompressibility in finite nuclei and nuclear matter*, Phys. Rev. C, 89 (2014) 044316.
- [Sha88] M.M. Sharma, W.T. A. Borghols, S. Brandenburg, S. Crona, A. van der Woude, M.N. Harakeh, *Giant monopole resonance in Sn and Sm nuclei and the compressibility of nuclear matter*, Phys. Rev. C, 38 (1988) 2562.
- [Vid09] I. Vidaña, C. Providência, A. Polls, A. Rios, *Density dependence of the nuclear symmetry energy: A microscopic perspective*, Phys. Rev. C, 80 (2009) 045806.
- [You04] D.H. Youngblood, Y.-W. Lui, B. John, Y. Tokimoto, H.L. Clark, X. Chen, *Iso-scalar E0-E3 strength in ^{116}Sn , ^{144}Sm , ^{154}Sm , and ^{208}Pb* , Phys. Rev. C, 69 (2004) 054312.
- [Wan10] N. Wang, Z. Liang, M. Liu, X. Wu, *Mirror nuclei constraint in nuclear mass formula*, Phys. Rev. C, 82 (2010) 044304.

- [Wap95] G. Audi, A. H. Wapstra, *The 1995 update to the atomic mass evaluation*, Nucl. Phys. A, 595 4 (1995), 409.
- [Wei35] C. F. von Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*, Z. für Physik, 96 (1935), 431.