



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”
Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Nuclei esotici e stelle di neutroni

Laureando:
Giovanni Lacatena

Relatore:
Prof. Giampaolo CO’

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Stelle di neutroni	3
2	Gas di Fermi	7
2.1	Configurazione di equilibrio	7
2.2	Gas di elettroni	7
2.3	Relazione tra densità ed impulso di Fermi	9
2.4	Energia relativistica di un sistema di fermioni	10
2.5	Soglia di cattura elettronica	11
3	Formazione di Nuclei Esotici	13
3.1	Densità di energia per un insieme di nuclei in un gas di Fermi	13
3.2	Condizioni di minimo	15
4	Composizione della crosta esterna	19
4.1	Risultati con i valori sperimentali delle masse nucleari	19
4.2	Risultati con i valori semi-empirici delle masse nucleari	21
4.3	Confronto dei risultati con sequenze di riferimento	24
	Conclusioni	31
A	Rotazione di un corpo compatto	33
B	Minimizzazione dell'energia libera di Gibbs	35
C	Codice Fortran	39
	Bibliografia	51

Capitolo 1

Stelle di neutroni

Poco tempo dopo la scoperta del neutrone ad opera del fisico inglese James Chadwick, venne ipotizzata l'esistenza di oggetti stellari composti da tali particelle. I primi a ventilare tale ipotesi furono W.Baade e F.Zwicky [Baa34].

Oggi sappiamo che le stelle di neutroni costituiscono lo stadio finale della vita di stelle molto massicce, ossia con massa maggiore di 8 masse solari [Sha83]. Queste stelle evolvono infatti in giganti rosse caratterizzate da un nocciolo di massa superiore al limite di Chandrasekhar, dell'ordine di 1.44 masse solari [Sch58], che esplode in una supernova di tipo II. Al centro della stella esplosa si forma una stella di neutroni oppure un buco nero, ciò dipende dalla massa del nocciolo.

L'esistenza delle stelle di neutroni venne confermata solo nel 1967 quando Jocelyn Bell ed Antony Hewish identificarono un segnale radio dal periodo di 1.337 secondi proveniente da una determinata regione dello spazio [Hew68]. Queste sorgenti radio periodiche, caratterizzate da intensi campi magnetici e frequenze di emissione di pochi secondi e stabili nel tempo (i periodi di emissione variano da 10^{-14} a 10^{-5} secondi per anno [Co12]), vennero denominate **pulsar** (Pulsating radio source). Dall'analisi delle caratteristiche elencate è possibile inferire che le pulsar sono stelle di neutroni che ruotano ad elevate velocità emettendo radiazione in direzioni privilegiate. Quest'ultima peculiarità delle pulsar, alla quale spesso si fa riferimento in termini di **effetto faro**, è ascrivibile al fatto che i loro poli magnetici non sono allineati con l'asse di rotazione. Tale disallineamento comporta la precessione del campo magnetico attorno all'asse di rotazione descrivendo un cono dal quale vengono espulse particelle che emettono radiazione di sincrotrone. Infine le elevate velocità di rotazione, a cui prima si faceva cenno, ci inducono a concludere che tali oggetti stellari sono caratterizzati da un'alta densità di materia e dimensioni estremamente ridotte, come mostrato nell'Appendice A.

Quanto detto fin ora prova dunque che le stelle di neutroni sono oggetti compatti, ossia caratterizzati da una massa pari a circa 1.5 masse solari confinata in un un diametro di circa 20 km.

Le conoscenze attualmente in nostro possesso in materia di stelle di neutroni prevedono una modellizzazione di queste ultime secondo una struttura a strati (Figura 1.1). Possiamo

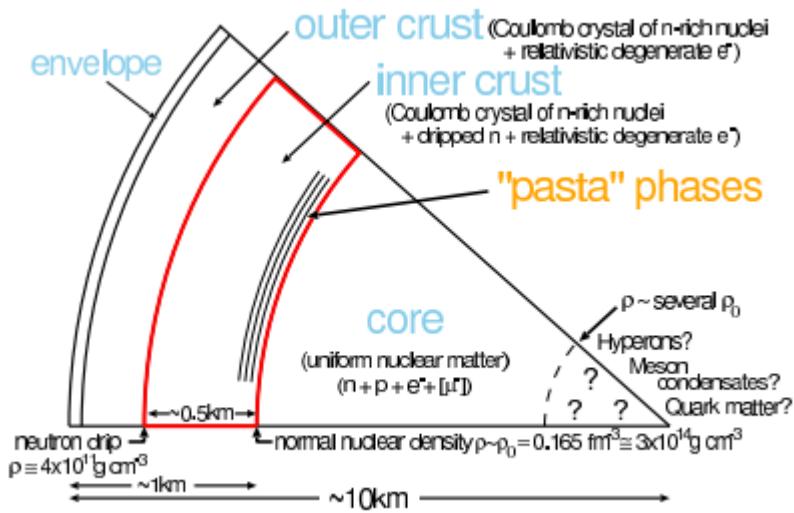


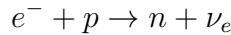
Figura 1.1: Struttura di una stella di neutroni

classificare i vari strati secondo la sequenza di seguito proposta:

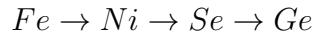
- **Superficie.** In questo strato la materia è composta da un reticolo di atomi di ^{56}Fe e la densità è compresa tra $8.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e 10^9 kg/m^3 ;
- **Crosta esterna.** Questa parte della crosta, argomento di discussione della presente tesi, è caratterizzata da una densità compresa tra 10^9 kg/m^3 (una tale densità è necessaria a garantire la completa ionizzazione degli atomi e l'attivazione dei processi di cattura elettronica) e la cosiddetta densità di gocciolamento neutronico (neutron drip line) dell'ordine di 10^{14} kg/m^3 [Sha83], valore oltre il quale i neutroni prodotti dalla cattura elettronica non si legano più ai nuclei già ricchi di neutroni;
- **Crosta interna.** Essa ha una densità compresa tra il valore di gocciolamento e quello della pura materia neutronica, stimata tra 1.8 e $2.2 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$. Inoltre la materia è composta da un reticolo di nuclei ricchi di neutroni inserito in un gas di elettroni ultrarelativistici e in un gas di neutroni;
- **Nocciolo di materia neutronica.** Per densità superiori a quelle degli strati precedenti i nuclei si uniscono per formare materia neutronica in equilibrio da decadimento β con elettroni, positroni, muoni e antimuoni;
- **Nocciolo esotico.** Questo è lo strato più interno della stella ed in esso, a causa delle elevate densità, si ipotizza la presenza di materia esotica, ossia materia costituita da particelle differenti dai nucleoni.

Come già anticipato, lo strato sul quale ci soffermeremo è la crosta esterna. In questo strato la materia è composta da nuclei più pesanti del ^{56}Fe sistemati in un reticolo coulombiano ed in equilibrio da decadimento β inverso con un gas relativistico e degenere di elettroni. Procedendo più a fondo verso l'interno della crosta, i nuclei diventano sempre più ricchi di neutroni poiché le reazioni di cattura elettronica abbassano l'energia totale del sistema.

In altri termini le reazioni di cattura elettronica (decadimenti β inversi):



eliminano elettroni con alta energia e favoriscono, in condizioni di elevate densità, l'innescoco di processi di **neutronizzazione** che conducono alla formazione di nuclei ad elevato contenuto di neutroni secondo sequenze del tipo:



Questi nuclei vengono definiti **esotici** in quanto in normali circostanze sono instabili o non si formano affatto. Come è infatti evidente dalla Figura 1.2, in situazioni di bassa densità (come sulla terra), i nuclei si formano lungo la cosiddetta *valle di stabilità* e sono generalmente costituiti da un numero di neutroni circa pari al numero dei protoni.

Scopo della tesi è il calcolo delle sequenze di nuclei che permettono di effettuare cattura elettronica, ossia l'individuazione dei nuclei che minimizzano l'energia per barione al variare della densità barionica.

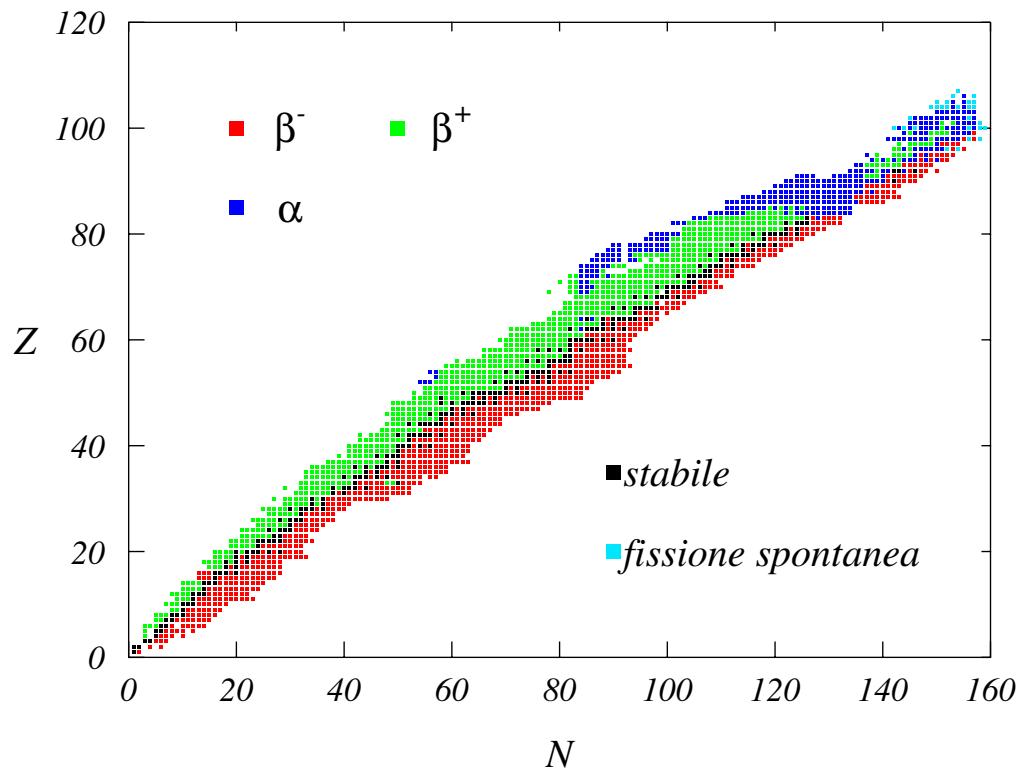


Figura 1.2: Nel grafico sono riportati i nuclei stabili ed i rispettivi isotopi. I diversi colori con cui sono contrassegnati gli isotopi instabili fanno riferimento ai loro modi di decadimento, come indicato dalla legenda.

Capitolo 2

Gas di Fermi

Nel presente capitolo sono illustrate le proprietà del gas di Fermi. L'obbiettivo è quello di ottenere una relazione tra la densità di elettroni e l'impulso di Fermi che consenta di calcolare la soglia di cattura elettronica.

2.1 Configurazione di equilibrio

Quando in una stella l'energia termica raggiunge le decine di keV, gli atomi sono totalmente ionizzati e la stella presenta una nuova struttura caratterizzata da un insieme di nuclei immersi in un gas di elettroni (gas di Fermi). In questa particolare situazione i nuclei assumono una disposizione reticolare. Infatti a differenza della materia ordinaria in cui la carica positiva dei nuclei è schermata dagli elettroni, nel caso in cui gli atomi siano totalmente ionizzati, i nuclei non schermati si respingono a vicenda e il sistema raggiunge una situazione di minimo energetico disponendo i nuclei in posizioni fisse (come in una struttura cristallina).

La crosta esterna di una stella di neutroni può essere schematizzata in modo analogo a quanto appena detto. Ossia all'interno di tale strato i nuclei sono sistemati in un reticolo e circondati da un gas di elettroni relativistici. Infatti in corrispondenza di densità dell'ordine di 10^{10} kg/m^3 , l'energia di Fermi degli elettroni (massima energia cinetica) raggiunge il valore di alcuni MeV e risulta dunque confrontabile con la massa a riposo dell'elettrone.

2.2 Gas di elettroni

L'hamiltoniana che descrive un gas di elettroni immersi nel campo medio generato dagli ioni sistemati in un reticolo cristallino è del tipo:

$$H = \sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i=1}^A U(i) + \sum_{i < j}^A V(i, j), \quad (2.1)$$

dove $T(i)$ rappresenta l'energia cinetica dell' i -esimo elettrone, $V(i, j)$ il termine di interazione reciproca tra due elettroni e $U(i)$ descrive l'interazione tra il singolo elettrone e il campo generato dalle cariche positive dei nuclei. Nel caso si voglia descrivere un solo atomo con più elettroni, il termine $U(i)$ rappresenterebbe l'interazione tra il singolo elettrone e il nucleo.

Nell'approssimazione a campo medio, o modello a particelle non interagenti, il termine di interazione $V(i, j)$ viene trascurato e viene risolta l'equazione di Schrödinger per l'hamiltoniana:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A h(i) = \sum_{i=1}^A [T(i) + U(i)]. \quad (2.2)$$

Con questa approssimazione, il problema ad N corpi viene trasformato in N problemi ad un corpo. L'autostato dell'hamiltoniana H_0 , espressa come somma di hamiltoniane ad un corpo, viene costruito come determinante di Slater¹ degli autostati dell'hamiltoniana di singola particella $h(i)$.

Nel nostro caso tratteremo la crosta esterna delle stelle di neutroni come un sistema infinito ed omogeneo di elettroni relativistici immersi in un campo medio attrattivo generato da nuclei sistemati in un reticolo cristallino. Le proprietà di omogeneità e infinità del sistema garantiscono che il termine di campo medio $U(i)$ sia costante. Ciò consente dunque, mediante una ridefinizione dello zero dell'energia, di riscrivere l'hamiltoniana a molti corpi come semplice somma di operatori dell'energia cinetica dei singoli elettroni:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \right), \quad (2.4)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone. Il problema ad un corpo da risolvere è:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \epsilon \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

Per risolvere tale equazione trovandone le autofunzioni è necessario imporre delle condizioni al contorno. Se supponiamo che l'elettrone sia confinato in un cubo di volume $V = L^3$, l'imposizione di condizioni al contorno di tipo periodico:

$$\phi(x + L, y, z) = \phi(x, y + L, z) = \phi(x, y, z + L) = \phi(x, y, z), \quad (2.6)$$

¹Nel caso di un sistema di fermioni, il determinante di Slater assicura che la funzione d'onda del sistema complessivo sia antisimmetrica per lo scambio di due fermioni e, quindi, che rispetti il principio di esclusione di Pauli:

$$\Phi(x_1 \dots x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_{\nu_1}(x_1) & \dots & \phi_{\nu_A}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{\nu_1}(x_A) & \dots & \phi_{\nu_A}(x_A) \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

garantisce che il numero totale di elettroni all'interno del cubo sia costante (se un elettrone raggiunge il bordo del cubo e lascia il sistema viene prontamente rimpiazzato da un altro elettrone che entra nel cubo dalla faccia opposta) e consente di ottenere delle onde piane come autofunzioni dell'equazione agli autovalori (2.5):

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \chi_{s_i} , \quad (2.7)$$

dove il pedice s indica la terza componente dello spin della particella e χ il tradizionale spinore di Pauli:

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Inoltre affinché il prodotto scalare delle funzioni d'onda precedenti sia correttamente normalizzato, è necessario inserire un fattore moltiplicativo pari a $V/(2\pi)^3$:

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{r} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}} = \delta(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_b) \quad (2.8)$$

2.3 Relazione tra densità ed impulso di Fermi

Dato un sistema di particelle non interagenti, la probabilità di trovare una qualsiasi particella in un certo punto dello spazio, la densità totale del sistema, è data dalla somma delle probabilità prodotte da ogni singola particella, ossia dalla somma dei moduli quadri delle funzioni d'onda di singola particella, secondo la relazione:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a^A |\phi_a(\mathbf{r})|^2 . \quad (2.9)$$

Dal momento che il sistema considerato è infinito e omogeneo, faremo successivamente tendere ad infinito il numero A dei nucleoni.

Nel calcolo della densità di numero degli elettroni, numero di elettroni per unità di volume, bisognerà tenere conto del fatto che i fermioni obbediscono al principio di esclusione di Pauli e dunque alla statistica di Fermi-Dirac. Ciò significa che nello stato fondamentale del sistema, i soli stati ad essere occupati risulteranno quelli con impulso compreso tra zero e l'impulso di Fermi $|\mathbf{k}_F| \equiv k_F$, impulso massimo. Sulla base di quanto appena detto risulta che:

$$n_e = \sum_{a \leq k_F} |\phi_a(\mathbf{r})|^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3\mathbf{k}_a \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \sum_{s_a} \chi_{s_a}^+ \chi_{s_a}^- . \quad (2.10)$$

Poiché lo spinore di Pauli relativo alla terza componente dello spin è normalizzato come:

$$\chi_{s_a}^+ \chi_{s_a}^- = \delta_{s_a, s_a'} , \quad (2.11)$$

e dato che l'indice s_a può assumere i due soli valori $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, ne consegue $\sum_{s_a} \chi_{s_a}^+ \chi_{s_a}^- = 2$. Pertanto la relazione (2.10) può essere riscritta come:

$$n_e = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2}{V} \int_0^{k_F} d^3 \mathbf{k}_a = \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} k_a^2 dk_a = \frac{8\pi}{8\pi^3} \frac{k_F^3}{3} = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3. \quad (2.12)$$

Questo risultato conferma che il sistema studiato è omogeneo. Infatti abbiamo ottenuto che la densità di numero degli elettroni è indipendente da \mathbf{r} . Dunque la densità dipende esclusivamente dall'impulso di Fermi $p_F = \hbar k_F$ secondo la relazione:

$$n_e = \frac{k_F^3}{3\pi^2} = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \quad (2.13)$$

2.4 Energia relativistica di un sistema di fermioni

L'energia del sistema di fermioni è definita dalla relazione:

$$E = 2 \sum_{k < k_f} \epsilon(k), \quad (2.14)$$

dove il fattore 2 tiene conto della degenerazione dovuta allo spin.

Riscrivendo l'equazione precedente nella rappresentazione degli impulsi, si ottiene:

$$E = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\hbar^3} \epsilon(|\mathbf{p}|) \Theta(p_F - |\mathbf{p}|) = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} dp p^2 \epsilon(p), \quad (2.15)$$

dove Θ è la funzione gradino. Consideriamo l'espressione relativistica per l'energia cinetica dell'elettrone:

$$\epsilon(p) = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 = m_e c^2 \left[\sqrt{\left(\frac{pc}{m_e c^2} \right)^2 + 1} - 1 \right]. \quad (2.16)$$

Effettuando il seguente cambio di variabile:

$$x = \frac{pc}{m_e c^2} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} k, \quad (2.17)$$

possiamo riscrivere l'equazione (2.16) come:

$$\epsilon(p) = m_e c^2 \left[\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right]. \quad (2.18)$$

Facendo ora riferimento alle relazioni (2.17) e (2.18) possiamo riscrivere l'equazione (2.15), relativa all'energia del sistema di fermioni, come:

$$\begin{aligned} E &= V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^{x_F} dx x^2 \left[\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right] = V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} f(x_F) \\ &= V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{8} \left[x_F (1 + 2x_F^2) \sqrt{1 + x_F^2} - \ln \left(x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right) - \frac{8}{3} x_F^3 \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Il caso di nostro interesse è quello di un gas di Fermi relativistico, ossia:

$$cp_F \gg m_e c^2 \Rightarrow \hbar c k_F \gg m_e c^2 \Rightarrow x_F \gg 1$$

In tale approssimazione relativistica il termine dominante della relazione (2.19) risulta essere il seguente:

$$E_{rel} = V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{2x_F^4}{8} \quad (2.20)$$

2.5 Soglia di cattura elettronica

Consideriamo un gas di protoni ed elettroni non interagenti a temperatura nulla. Ipotizziamo nulla la massa del neutrino e trascurandone l'interazione con il neutrone residuo possiamo affermare che il processo di cattura elettronica $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$ diventa energeticamente possibile quando l'energia dell'elettrone supera la soglia energetica della differenza di massa tra neutrone e protone:

$$\begin{aligned} m_e + m_p - m_n &> 0, \\ m_e > m_n - m_p &= \Delta, \\ \Delta &= m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se ora si considera che:

$$\Delta^2 = p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4, \quad (2.22)$$

facendo riferimento alla relazione (2.13) tra densità ed impulso di Fermi:

$$n_e = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad (2.23)$$

siamo in grado di calcolare la densità di elettroni in corrispondenza della quale si verifica l'attivazione dei processi di cattura elettronica:

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{\Delta^2 - m_e^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right]^2 \approx 7 \times 10^{36} \text{ m}^{-3}. \quad (2.24)$$

È inoltre importante notare che, superata questa soglia, il processo di formazione del neutrone diventa permanente perché l'elettrone prodotto da un eventuale decadimento β ($p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) avrebbe energia inferiore a quella di Fermi nel gas di elettroni. Ciò significa che la densità degli stati finali del decadimento β è nulla ed il motivo risiede nel fatto che gli stati fino a quello corrispondente all'energia di Fermi risultano essere occupati per via della statistica di Fermi-Dirac.

Capitolo 3

Formazione di Nuclei Esotici

Si è già visto che la crosta esterna delle stelle di neutroni può essere modellizzata come un sistema infinito ed omogeneo di nuclei immersi in un gas di elettroni relativistici (gas di Fermi). In questo capitolo sono discusse le condizioni necessarie affinché un sistema così costituito risulti essere in equilibrio rispetto a processi di cattura elettronica. L'obbiettivo è quindi quello di studiare le condizioni di minimo dell'energia di tale sistema, ottenendo delle relazioni che mostrino come, all'aumentare della densità barionica n_B , la densità di energia ϵ risulti essere minimizzata da nuclei sempre più ricchi di neutroni (**nuclei esotici**).

3.1 Densità di energia per un insieme di nuclei in un gas di Fermi

La densità di energia per un insieme di nuclei (uguali tra loro) di numero di massa A e carica Z , sistemato in un reticolo e circondato da un gas di elettroni relativistici è:

$$\epsilon_T[n_B, A, Z] = \epsilon_e[n_e] + \left(\frac{n_B}{A} \right) \left[M(A, Z)c^2 + \epsilon_L \right]. \quad (3.1)$$

In tale equazione ϵ_e indica la densità di energia degli elettroni e può essere ricavata facendo riferimento alla relazione (2.20):

$$E = V \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{2x_F^4}{8}. \quad (3.2)$$

Poichè da (2.17) risulta:

$$x_F = \frac{\hbar c}{m_e c^2} k_F, \quad (3.3)$$

l'espressine (3.2) può essere riscritta come:

$$E = \frac{V}{4} \frac{\hbar c k_F^4}{\pi^2} = \frac{V}{4} \frac{\hbar c}{\pi^2} (3\pi^2 n_e)^{\frac{4}{3}}, \quad (3.4)$$

dove si è fatto ricorso alla relazione (2.13) che esprime la densità numerica di elettroni in termini dell'impulso di Fermi.

Di conseguenza la densità di energia degli elettroni è data da:

$$\epsilon_e[n_e] = \frac{E}{V} = \frac{3}{4} \hbar c (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} n_e^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \hbar c (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(Z \frac{n_B}{A} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (3.5)$$

infatti la neutralità del sistema e la conservazione della carica totale implicano che la densità numerica degli elettroni sia pari a quella dei protoni:

$$n_e = n_p = \frac{Z}{V} = \frac{Z}{A} \frac{A}{V} = \frac{Z}{A} \left(\frac{Z + N}{V} \right) = \frac{Z}{A} (n_p + n_n) = \frac{Z}{A} n_B. \quad (3.6)$$

Il termine ϵ_L che figura nell'equazione (3.1) rappresenta invece l'energia elettrostatica del reticolo per ogni nucleo ed è pari a:

$$\epsilon_L = -\frac{Z^2}{r_L} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3.7)$$

in cui r_L definisce la distanza tra due atomi:

$$\begin{aligned} r_L &= (V)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{A}{n_B} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r_L} = \left(\frac{n_B}{A} \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pertanto:

$$\epsilon_L = -Z^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{n_B}{A} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.9)$$

Le osservazioni fatte fin ora ci consentono di riscrivere l'equazione (3.1) di partenza come:

$$\epsilon[n_B, A, Z] = \frac{3}{4} \hbar c (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(Z \frac{n_B}{A} \right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{n_B}{A} \right) \left[M[A, Z]c^2 - Z^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{n_B}{A} \right)^{\frac{1}{3}} \right]. \quad (3.10)$$

Resta ora da valutare il termine $M[A, Z]c^2$. Esso può essere calcolato come proposto di seguito:

$$M[A, Z]c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - B(A, Z). \quad (3.11)$$

$B(A, Z)$ rappresenta l'energia di legame e può essere ottenuta facendo riferimento ai valori sperimentali oppure mediante una stima teorica basata sul ricorso alla formula semi-empirica della massa di Bethe-Weizsäcker [Pov98]:

$$B(A, Z) = a_V + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_I \frac{(A - 2Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.12)$$

3.2 Condizioni di minimo

Per un valore fissato della densità barionica n_B , la configurazione di equilibrio (minimo della densità di energia) è data dalle condizioni:

$$\frac{\partial \epsilon_T}{\partial Z} = 0 . \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \epsilon_T}{\partial A} = 0 , \quad (3.14)$$

Per calcolare tali condizioni a partire dall'equazione (3.1) sarà trascurato il termine ϵ_L relativo all'energia elettrostatica del reticolo e verrà utilizzata la stima di $M[A, Z]c^2$ ottenuta mediante l'impiego della formula semi-empirica della massa (3.12) secondo quanto proposto di seguito:

$$M[A, Z]c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - \left[a_V A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_I \frac{(A - 2Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}} \right] . \quad (3.15)$$

Dalla condizione (3.13) otteniamo:

$$\frac{\partial \epsilon_T}{\partial Z} = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial Z} + \frac{n_B c^2}{A} \frac{\partial M(A, Z)}{\partial Z} = 0 . \quad (3.16)$$

Considerando che:

$$n_e = \frac{Z}{V} = \frac{Z n_B}{A} \Rightarrow Z = \frac{A}{n_B} n_e \Rightarrow \frac{\partial}{\partial Z} = \frac{n_B}{A} \frac{\partial}{\partial n_e} , \quad (3.17)$$

allora la relazione (3.16) diventa:

$$\frac{n_B}{A} \frac{\partial \epsilon_e}{\partial n_e} + \frac{n_B c^2}{A} \frac{\partial M(A, Z)}{\partial Z} = 0 . \quad (3.18)$$

Da cui:

$$c^2 \frac{\partial M(A, Z)}{\partial Z} = - \frac{\partial \epsilon_e}{\partial n_e} = -\mu_e , \quad (3.19)$$

dove $\mu_e = \partial \epsilon_e / \partial n_e$ rappresenta il potenziale chimico degli elettroni. Infatti dalla conservazione dell'energia:

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i , \quad (3.20)$$

risulta che:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i} \right)_V , \quad (3.21)$$

o equivalentemente:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n_i} \right)_V. \quad (3.22)$$

Passiamo ora all'analisi della condizione (3.14) dalla quale otteniamo il seguente risultato:

$$\frac{\partial \epsilon_T}{\partial A} = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial A} + n_B c^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{M(A, Z)}{A} \right) = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial n_e} \frac{\partial n_e}{\partial A} + n_B c^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{M(A, Z)}{A} \right) = 0. \quad (3.23)$$

Sapendo che:

$$n_e = \frac{Z n_B}{A} \Rightarrow \frac{\partial n_e}{\partial A} = -\frac{Z n_B}{A^2} \quad (3.24)$$

e considerando la (3.22), la relazione (3.23) può essere riscritta come:

$$\mu_e \left(-\frac{Z n_B}{A^2} \right) + n_B c^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{M(A, Z)}{A} \right) = Z(-\mu_e) + c^2 A^2 \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{M(A, Z)}{A} \right) = 0. \quad (3.25)$$

Sostituendo il risultato (3.19) nell'equazione precedente otteniamo:

$$Z \frac{\partial M}{\partial Z} + A \frac{\partial M}{\partial A} - M = 0. \quad (3.26)$$

$M(A, Z)$ è dato dalla relazione (3.15) trascurando il termine di appaiamento, quindi:

$$\begin{aligned} Z \frac{\partial M}{\partial Z} &= (m_p - m_n)Z + \frac{1}{c^2} \left(-2a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{2} a_I Z - 2a_I \frac{Z^2}{A} \right), \\ A \frac{\partial M}{\partial A} &= \left(m_n - \frac{a_V}{c^2} \right) A + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{2}{3} a_s A^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{4} a_I A + a_I \frac{Z^2}{A} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Queste informazioni, inserite nella (3.26) ci conducono al seguente risultato:

$$Z = \left(\frac{a_s}{2a_c} \right)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}. \quad (3.28)$$

La relazione appena ottenuta mette in evidenza che Z cresce più lentamente di A al variare di n_B . Detto in altri termini, l'aumento della densità nucleonica determina la formazione di nuclei sempre più ricchi di neutroni.

Quanto appena detto è esemplificato dalla Figura (3.1) in cui sono riportati gli andamenti della densità di energia per due isotopi del nichel in funzione della densità barionica n_B . Dall'analisi di tale grafico risulta infatti che a densità barioniche più basse, la densità di energia è inferiore per l'isotopo 62; mentre per valori della densità barionica superiori a $2.7 \cdot 10^{11} \text{ kg/m}^3$, l'isotopo con il valore inferiore della densità di energia è il 64, ossia quello più ricco di neutroni.

È possibile giungere alle stesse conclusioni seguendo l'approccio alternativo presentato nell'Appendice B.

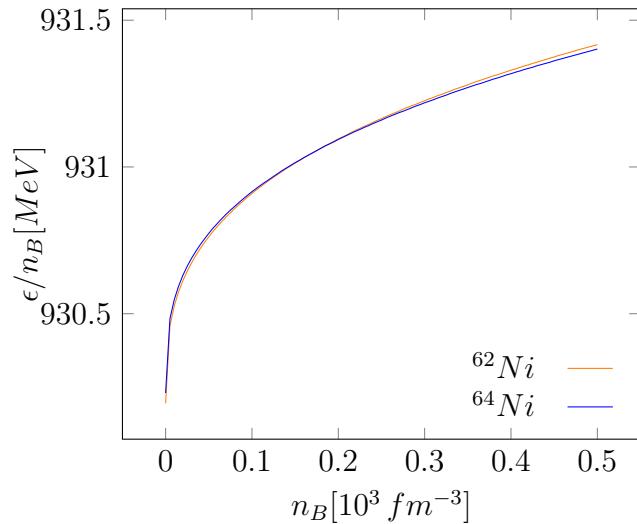


Figura 3.1: Densità di energia per due isotopi del nichel in funzione della densità barionica

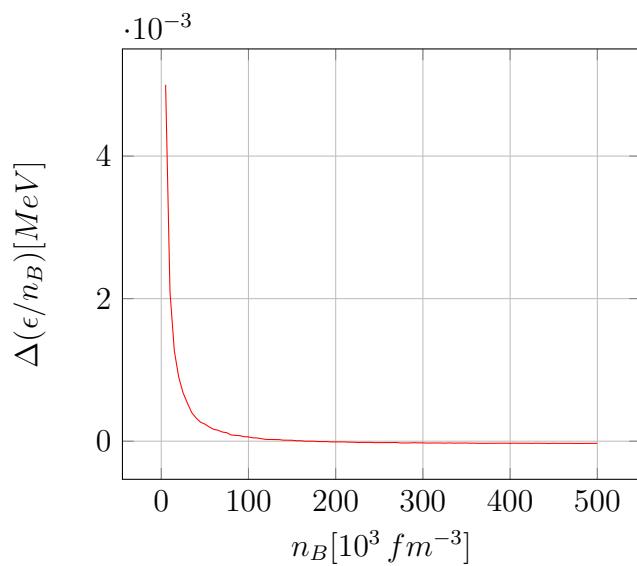


Figura 3.2: Nel grafico è raffigurato l'andamento della differenza tra le due curve in Fig.3.1 in funzione della densità barionica. Si osserva che, per valori della densità barionica superiori a $2.7 \cdot 10^{11} \text{ kg/m}^3$, la differenza assume valori negativi. Ciò è indice del fatto che la densità di energia del ^{64}Ni , inizialmente maggiore, diventa inferiore a quella del ^{62}Ni .

Capitolo 4

Composizione della crosta esterna

Scopo di questo capitolo è quello di determinare la sequenza dei nuclei che caratterizzano la composizione della crosta esterna di una stella di neutroni. Nello specifico, la sequenza che si intende ottenere è composta dai nuclei che, in corrispondenza di determinati valori di densità, minimizzano l'energia di legame per barione.

Come si è già avuto modo di osservare nel capitolo introduttivo sulle stelle di neutroni, la crosta esterna ha inizio in corrispondenza di valori di densità pari a 10^9 kg/m^3 e si estende fino a raggiungere regioni caratterizzate dalla cosiddetta densità di gocciolamento neutronico dell'ordine di 10^{14} kg/m^3 . Questo è dunque l'intervallo di densità del quale si intende sondare la composizione.

In tale intervallo, la sequenza dei nuclei calcolata verrà successivamente confrontata con quella in Ref. [Sha15], riportata di seguito in Tab. 4.4 (si veda il paragrafo 4.3). Per ottenere tali valori, nella risoluzione della (3.10), verranno inizialmente impiegati i valori sperimentali delle energie di legame e successivamente quelli teorici, forniti dalla formula semi-empirica della massa.

4.1 Risultati con i valori sperimentali delle masse nucleari

Le soluzioni numeriche presentate nel capitolo sono ottenute minimizzando, all'interno di un intervallo fissato della densità barionica n_B , la densità di energia fornita dalla relazione (3.10):

$$\epsilon[n_B, A, Z] = \frac{3}{4} \hbar c (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(Z \frac{n_B}{A} \right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{n_B}{A} \right) \left[M[A, Z]c^2 - Z^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{n_B}{A} \right)^{\frac{1}{3}} \right],$$

in cui la massa nucleare $M(A, Z)$ può essere scritta come:

$$M[A, Z]c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - B(A, Z),$$

si veda (3.11).

I risultati di seguito riportati sono quelli ottenuti inserendo nell'equazione precedente i valori sperimentali, ove disponibili, delle energie di legame $B(A, Z)$ (consultare [Bro21]). Fatte queste dovute premesse, le sequenze sperimentali prodotte dal programma, riportato in Appendice C, sono:

Nucleo	Z	N	Z/A	$\rho_{max} [g/cm^3]$
^{56}Fe	26	30	0.4643	$1.3939 \cdot 10^7$
^{62}Ni	28	34	0.4516	$2.2322 \cdot 10^8$
^{58}Fe	26	32	0.4483	$3.0144 \cdot 10^8$
^{64}Ni	28	36	0.4375	$1.3400 \cdot 10^9$
^{66}Ni	28	38	0.4242	$2.0240 \cdot 10^9$
^{86}Kr	36	50	0.4186	$2.9432 \cdot 10^9$
^{84}Se	34	50	0.4048	$1.0709 \cdot 10^{10}$
^{82}Ge	32	50	0.3902	$2.6399 \cdot 10^{10}$
^{80}Zn	30	50	0.3750	$5.9841 \cdot 10^{10}$
^{78}Ni	28	50	0.3590	$1.2026 \cdot 10^{11}$

Tabella 4.1: Lista dei nuclei che minimizzano il valore della densità di energia e densità massima entro la quale ciò risulta essere verificato. **I calcoli sono stati effettuati usando i valori empirici delle energie di legame.**

Come anticipato nell'introduzione del capitolo, l'obiettivo è quello di sondare la composizione di una stella di neutroni per densità comprese tra 10^6 e $10^{11} g/cm^3$ (estensione della crosta esterna); tuttavia i dati sperimentali a disposizione ci consentono di condurre la nostra analisi fino ad una densità massima di $1.2026 \cdot 10^{11}$, corrispondente al ^{78}Ni . Ciò accade poiché l'aumento della densità determina la produzione di nuclei con un elevato numero di neutroni, per i quali i valori sperimentali delle energie di legame non sono noti.

Analizziamo ora la situazione e le difficoltà incontrate in maggiore dettaglio. Sebbene il nucleo più ricco di neutroni, del quale si dispongono informazioni da un punto di vista sperimentale, sia il ^{118}Mo , risulta difficile produrre delle sequenze che vadano oltre il ^{78}Ni facendo riferimento ai soli dati sperimentali a nostra disposizione.

Il calcolo prevede di inserire nuclei che hanno vita breve in laboratorio e di cui non disponiamo i valori delle loro masse. Nella crosta della stella di neutroni il decadimento β è inibito dal principio di esclusione di Pauli che agisce sull'elettrone emesso durante il decadimento. Questi nuclei, fortemente instabili in laboratorio, risultano essere stabili nella materia degenerata della crosta della stella di neutroni. Per poter costruire delle sequenze che descrivano la composizione

della crosta esterna in corrispondenza di densità elevate, sarà quindi necessario ricorrere a dei modelli teorici.

Il primo dato, in buon accordo con la teoria fin ora costruita, che può essere estrapolato dall'analisi dei risultati ottenuti, riguarda la formazione di nuclei esotici con crescente numero di neutroni (processo di neutronizzazione). In Tab.4.1 si osserva infatti che, con andamento quasi continuo, il numero di neutroni N cresce e la frazione dei protoni Z/A decresce. Il valore di Z è l'unico a variare senza continuità. In particolare, il dato inerente all'andamento decrescente del rapporto Z/A mette in risalto come, all'aumentare del numero A dei nucleoni, il numero dei neutroni cresca più rapidamente di quello dei protoni. Ciò conferma dunque le previsioni teoriche fornite dalla relazione (3.28).

È inoltre interessante notare come dopo il ^{56}Fe , che popola la crosta esterna fino ad una densità massima di $1.3939 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$, in Tab. 4.1 si susseguano una serie di nuclei caratterizzati da **numeri magici** di protoni e neutroni. Si sta facendo riferimento agli isotopi del nichel, con $Z = 28$, e alla sequenza di nuclei isotoni, dal ^{86}Kr al ^{80}Zn , con $N = 50$. Le ragioni di queste sequenze sono riconducibili alle particolari caratteristiche di stabilità dei nuclei magici.

4.2 Risultati con i valori semi-empirici delle masse nucleari

Data l'impossibilità, riscontrata nel paragrafo precedente, di ottenere delle sequenze di nuclei che si estendano fino a densità dell'ordine di 10^{11} g/cm^3 , facendo riferimento ai soli valori sperimentali delle energie di legame a nostra disposizione, è stata sollevata la necessità di un ricorso a dei modelli che ne forniscano delle stime teoriche. La parametrizzazione dell'energia di legame della quale ci avvarremo è quella fornita dalla formula semi-empirica della massa di Bethe-Weizsäcker (3.12):

$$B(A, Z) = a_V + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_I \frac{(A - 2Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}.$$

Diverse sono le parametrizzazioni ammissibili per la relazione precedente, quella da noi utilizzata è proposta in Ref.[Pov98] e prevede che alle costanti a_V , a_s , a_c , a_I e δ siano attribuiti i seguenti valori:

- $a_V = 15.67 \text{ MeV}/c^2$,
- $a_s = -17.23 \text{ MeV}/c^2$,
- $a_c = -0.714 \text{ MeV}/c^2$,
- $a_I = -93.15 \text{ MeV}/c^2$,
- $\delta = \begin{cases} -11.2 \text{ MeV}/c^2 & \text{se il nucleo è pari-pari,} \\ 0 \text{ MeV}/c^2 & \text{se il nucleo è dispari-pari (o pari-dispari),} \\ +11.2 \text{ MeV}/c^2 & \text{se il nucleo è dispari-dispari.} \end{cases}$

Nucleo	Z	N	Z/A	$\rho_{max} [g/cm^3]$
^{62}Ni	28	34	0.4516	$6.6185 \cdot 10^7$
^{68}Zn	30	38	0.4412	$1.0600 \cdot 10^8$
^{64}Ni	28	36	0.4375	$9.0479 \cdot 10^8$
^{70}Zn	30	40	0.4286	$2.9081 \cdot 10^9$
^{66}Ni	28	38	0.4242	$2.0240 \cdot 10^9$
^{72}Zn	30	42	0.4167	$7.2075 \cdot 10^9$
^{78}Ge	32	46	0.4103	$1.1408 \cdot 10^{10}$
^{74}Zn	30	44	0.4054	$1.3025 \cdot 10^{10}$
^{80}Ge	32	48	0.4000	$2.1146 \cdot 10^{10}$
^{86}Se	34	52	0.3953	$2.4880 \cdot 10^{10}$
^{82}Ge	32	50	0.3902	$3.0277 \cdot 10^{10}$
^{88}Se	34	54	0.3864	$4.2536 \cdot 10^{10}$
^{90}Se	34	56	0.3778	$5.5729 \cdot 10^{10}$
^{96}Kr	36	60	0.3750	$6.5922 \cdot 10^{10}$
^{92}Se	34	58	0.3696	$6.6123 \cdot 10^{10}$
^{98}Kr	36	62	0.3673	$8.8963 \cdot 10^{10}$
^{100}Kr	36	64	0.3600	$1.0349 \cdot 10^{11}$
^{106}Sr	38	68	0.3585	$1.1763 \cdot 10^{11}$
^{108}Sr	38	70	0.3519	$1.4714 \cdot 10^{11}$
^{110}Sr	38	72	0.3454	$1.6293 \cdot 10^{11}$
^{116}Zr	40	76	0.3448	$1.7821 \cdot 10^{11}$
^{118}Zr	40	78	0.3390	$2.1296 \cdot 10^{11}$
^{120}Zr	40	80	0.3333	$2.4484 \cdot 10^{11}$
^{128}Mo	42	86	0.3281	$2.8317 \cdot 10^{11}$
^{130}Mo	42	88	0.3231	$3.1933 \cdot 10^{11}$
^{132}Mo	42	90	0.3181	$3.6986 \cdot 10^{11}$
^{134}Mo	42	92	0.3134	$4.1701 \cdot 10^{11}$

Tabella 4.2: Sequenza dei nuclei che, entro determinati valori massimi di densità, compongono la crosta esterna di una stella di neutroni. I calcoli sono stati effettuati usando i valori delle masse nucleari ottenuti con la formula semi-empirica della massa.

I valori semi-empirici, prodotti dalla (3.12), ci consentiranno di analizzare la composizione dell'intera crosta esterna di una stella di neutroni, tuttavia la validità di questa approssimazione dovrà necessariamente essere valutata sulla base della sua capacità di riprodurre le sequenze sperimentali ottenute nel paragrafo precedente. In altri termini, ci si aspetta che le stime prodotte

dalla formula di Bethe-Weizsäcker consentano di ottenere dei risultati conformi a quelli riportati in Tab. 4.1.

I risultati ottenuti sono mostrati nella Tab.4.2. La sequenza semi-empirica mostrata in Tab.4.2 non corrisponde a quella sperimentale contenuta in Tab.4.1. Sebbene infatti il processo di formazione di nuclei con crescente numero di neutroni sembri essere rispettato in entrambi i casi, i valori massimi di densità per gli stessi nuclei non coincidono; ad esempio in Tab.4.1 al ^{62}Ni corrisponde un densità massima di $2.2322 \cdot 10^8 g/cm^3$ mentre allo stesso nucleo in Tab.4.2 corrisponde un valore massimo di densità pari a $6.6185 \cdot 10^7 g/cm^3$. Questo implica quindi che nello stesso intervallo di densità in cui in Tab.4.1 compariva un determinato nucleo, in Tab.4.2 ne compare un altro. Quanto appena detto, spiega pertanto come la sequenza di nuclei che si ottiene in Tab.4.2 risulti essere completamente differente da quella sperimentale.

La situazione testé esposta pone evidentemente dei dubbi sulla bontà delle stime fornite dalla (3.12). Per avere un riscontro numerico diretto, presentiamo ora le differenze tra i valori sperimentali e quelli semi-empirici delle energie di legame:

Nucleo	Z	N	$B_{BW}/A [MeV]$	$B_{exp}/A [MeV]$	$\Delta B [MeV]$
^{56}Fe	26	30	8.7680749	8.7903545	0.011 %
^{62}Ni	28	34	8.7944615	8.7945537	-0.001 %
^{58}Fe	26	32	8.7943968	8.7922506	0.012 %
^{64}Ni	28	36	8.7901328	8.7774617	0.072 %
^{66}Ni	28	38	8.7522357	8.7395082	0.073 %
^{86}Kr	36	50	8.6976810	8.7120290	-0.082 %
^{84}Se	34	50	8.6327070	8.6587932	-0.151 %
^{82}Ge	32	50	8.5145170	8.5637630	-0.288 %
^{80}Zn	30	50	8.3359720	8.4235530	-0.523 %
^{78}Ni	28	50	8.0888746	8.2258000	-0.839 %

Tabella 4.3: Per ognuno dei nuclei che caratterizzano la sequenza in Tab.4.1, è riportata sia l'energia di legame per nucleone sperimentale (B_{exp}/A) sia quella ottenuta mediante l'impiego della formula semi-empirica di Bethe-Weizsäcker (B_{BW}/A). Nell'ultima colonna è infine riportata la loro variazione percentuale ΔB .

La variazione percentuale ΔB è stata calcolata come:

$$\Delta B = \frac{B_{BW} - B_{exp}}{B_{BW} + B_{exp}} \cdot 100 . \quad (4.1)$$

Nonostante in media le variazioni siano dell'ordine del 0.22% ed il valore stimato delle energie di legame si discosti quindi molto poco da quello sperimentale, la formula di Bethe-Weizsäcker si dimostra inadeguata ad effettuare delle previsioni attendibili sulla composizione della crosta esterna di una stella di neutroni. Infatti le differenze trovate, per quanto piccole, hanno ripercussioni notevoli nel calcolo del minimo dell'energia di legame per barione.

Sarà necessario ricorrere a dei modelli teorici più accurati.

4.3 Confronto dei risultati con sequenze di riferimento

La sequenza di riferimento con la quale confronteremo i dati ottenuti è la seguente:

<i>Nucleo</i>	<i>Z</i>	<i>N</i>	<i>Z/A</i>	$\rho_{max} [g/cm^3]$
^{56}Fe	26	30	0.4643	$8.2138 \cdot 10^6$
^{62}Ni	28	34	0.4516	$2.6269 \cdot 10^8$
^{58}Fe	26	32	0.4483	$2.7220 \cdot 10^8$
^{64}Ni	28	36	0.4375	$1.3191 \cdot 10^9$
^{66}Ni	28	38	0.4242	$1.5319 \cdot 10^9$
^{86}Kr	36	50	0.4186	$3.0881 \cdot 10^9$
^{84}Se	34	50	0.4048	$1.1285 \cdot 10^{10}$
^{82}Ge	32	50	0.3902	$2.7622 \cdot 10^{10}$
^{80}Zn	30	50	0.3750	$6.3269 \cdot 10^{10}$
^{78}Ni	28	50	0.3590	$9.7955 \cdot 10^{10}$
^{84}Zn	30	54	0.3571	$1.2711 \cdot 10^{11}$
^{124}Mo	42	82	0.3387	$1.8299 \cdot 10^{11}$
^{122}Zr	40	82	0.3278	$2.6163 \cdot 10^{11}$
^{120}Sr	38	82	0.3167	$4.0556 \cdot 10^{11}$
^{114}Se	34	80	0.2982	$4.3721 \cdot 10^{11}$

Tabella 4.4: Lista dei nuclei che minimizzano il valore dell'energia (3.10) e la densità massima entro la quale questo avviene. La sequenza in questione è stata tratta dall'articolo [Sha15]

Questa sequenza è stata realizzata dagli autori dell'articolo [Sha15] prendendo in considerazione i valori sperimentali delle energie di legame fino a densità dell'ordine di $4.1828 \cdot 10^{10} g/cm^3$. Per densità superiori, la produzione di nuclei molto ricchi di neutroni rende ne-

cessario l'impiego di modelli teorici che sopperiscano alla mancanza dei valori delle energie di legame non misurabili per via sperimentale.

Fino al ^{80}Zn , la sequenza in Tab.4.1 sembra riprodurre quella in Tab.4.4. Eseguiamo ora un confronto numerico finalizzato a verificare che i valori massimi delle densità da noi ottenuti coincidano, o comunque non si discostino eccessivamente, da quelli dell'articolo [Sha15] di riferimento.

(La sigla *Sha* sarà da ora utilizzata per contrassegnare tutte le quantità riguardanti l'articolo [Sha15])

Nucleo	Z	N	Z/A	$\rho_{max} [g/cm^3]$		$\Delta\rho_{max}$
				exp	Sha	
^{56}Fe	26	30	0.4643	$1.3939 \cdot 10^7$	$8.2138 \cdot 10^6$	25.84 %
^{62}Ni	28	34	0.4516	$2.2322 \cdot 10^8$	$2.6269 \cdot 10^8$	-8.12 %
^{58}Fe	26	32	0.4483	$3.0144 \cdot 10^8$	$2.7220 \cdot 10^8$	5.10 %
^{64}Ni	28	36	0.4375	$1.3400 \cdot 10^9$	$1.3191 \cdot 10^9$	0.79 %
^{66}Ni	28	38	0.4242	$2.0240 \cdot 10^9$	$1.5319 \cdot 10^9$	13.84 %
^{86}Kr	36	50	0.4186	$2.9432 \cdot 10^9$	$3.0881 \cdot 10^9$	-2.40 %
^{84}Se	34	50	0.4048	$1.0709 \cdot 10^{10}$	$1.1285 \cdot 10^{10}$	-2.62 %
^{82}Ge	32	50	0.3902	$2.6399 \cdot 10^{10}$	$2.7622 \cdot 10^{10}$	-2.26 %
^{80}Zn	30	50	0.3750	$5.9841 \cdot 10^{10}$	$6.3269 \cdot 10^{10}$	-2.78 %
^{78}Ni	28	50	0.3590	$1.2026 \cdot 10^{11}$	$9.7955 \cdot 10^{10}$	10.22 %

Tabella 4.5: Confronto tra la densità massima della sequenza di nuclei da noi calcolata impiegando le energie di legame sperimentali e quella dell'articolo [Sha15] di riferimento. Nell'ultima colonna è infine riportata la variazione percentuale tra le due densità.

La variazione percentuale $\Delta\rho_{max}$ è stata calcolata come:

$$\Delta\rho_{max} = \frac{\rho_{exp} - \rho_{Sha}}{\rho_{exp} + \rho_{Sha}} \cdot 100 . \quad (4.2)$$

Le variazioni più significative si notano in corrispondenza di ^{56}Fe , ^{62}Ni , ^{66}Ni , ^{78}Ni e sono probabilmente dovute ai valori sperimentali delle energie di legame impiegati nel calcolo, infatti differenze molto piccole tra questi valori sono in grado di produrre grandi effetti sulla densità. In ogni caso, non è possibile eseguire nessun tipo di confronto atto a verificare la bontà della nostra ipotesi dal momento che i valori sperimentali delle energie di legame utilizzati non sono

indicati in [Sha15]. Al di là di queste variazioni più o meno pronunciate dei valori massimi della densità, variazioni che si attestano mediamente attorno al 7%, si nota comunque un buon accordo con la sequenza di riferimento. Infatti l'ordine dei nuclei, che si susseguono dal ^{56}Fe al ^{78}Ni con il progredire della densità, riproduce esattamente quello presentato in [Sha15].

Per quanto riguarda la sequenza calcolata mediante l'impiego della formula semi-empirica della massa (Tab.4.2), ogni tipo di confronto è reso impossibile dal fatto che la sequenza in questione differisce completamente da quella in Tab.4.4. A tal proposito era già stato ipotizzato che la ragione di tale incompatibilità potesse risiedere nelle stime poco accurate delle energie di legame fornite dalla formula di Bethe-Weizsäcker. Considerato ciò, si era anche proposto il ricorso a dei modelli teorici alternativi.

In [Sha15], i valori delle energie di legame di nuclei con un elevato contenuto di neutroni sono fornite dal funzionale BCPM (Barcellona, Catania, Parigi, Madrid) della densità di energia e si fa inoltre menzione del fatto che tali valori siano molto vicini a quelli computati tramite il modello FRDM (finite-range droplet model). Non avendo a disposizione i valori forniti dal funzionale BCPM, al fine di avvalorare la nostra ipotesi sulla scarsa accuratezza delle stime fornite dalla formula di Bethe-Weizsäcker, eseguiremo un confronto diretto tra queste ultime, i valori sperimentali e quelli relativi al modello FRDM disponibili nell'articolo [Möl12]:

Nucleo	Z	N	B_{BW}/A [MeV]	B_{exp}/A [MeV]	B_{FRDM}/A [MeV]
^{56}Fe	26	30	8.7680749	8.7903545	8.7891071
^{62}Ni	28	34	8.7944615	8.7945537	8.7817742
^{58}Fe	26	32	8.7943968	8.7922506	8.7856897
^{64}Ni	28	36	8.7901328	8.7774617	8.7735938
^{66}Ni	28	38	8.7522357	8.7395082	8.7380303
^{86}Kr	36	50	8.6976810	8.7120290	8.7139530
^{84}Se	34	50	8.6327070	8.6587932	8.6570238
^{82}Ge	32	50	8.5145170	8.5637630	8.5670730
^{80}Zn	30	50	8.3359720	8.4235530	8.4328750
^{78}Ni	28	50	8.0888746	8.2258000	8.2429487

Tabella 4.6: Per ognuno dei nuclei che caratterizzano la sequenza in Tab.4.1, è riportata l'energia di legame sperimentale (B_{exp}/A), quella ottenuta mediante l'impiego della formula semi-empirica di Bethe-Weizsäcker (B_{BW}/A) e quella ricavata dall'applicazione del modello FRDM (B_{FRDM}/A).

Calcoliamo ora le variazioni percentuali, rispetto alle energie di legame sperimentali, dei valori forniti dalla formula semi-empirica e di quelli relativi al modello FRDM:

<i>Nucleo</i>	ΔB_1	ΔB_2
^{56}Fe	-0.127 %	-0.007 %
^{62}Ni	-0.001 %	-0.073 %
^{58}Fe	0.012 %	-0.037 %
^{64}Ni	0.072 %	-0.022 %
^{66}Ni	0.073 %	-0.008 %
^{86}Kr	-0.082 %	0.011 %
^{84}Se	-0.151 %	-0.010 %
^{82}Ge	-0.288 %	0.019 %
^{80}Zn	-0.523 %	0.055 %
^{78}Ni	-0.839 %	0.104 %

Tabella 4.7: ΔB_1 e ΔB_2 rappresentano rispettivamente la variazione percentuale dei valori semi-empirici e di quelli del modello FRDM dai dati sperimentali (si veda la relazione (4.1)).

Sebbene le variazioni percentuali dei valori del modello FRDM siano in media più piccole di quelle semi-empiriche, non siamo ancora nelle condizioni di asserire con assoluta certezza che la causa della discrepanza da noi riscontrata tra le sequenze semi-empiriche e quelle in [Sha15], sia dovuta alla scarsa accuratezza dei dati prodotti dalla formula di Bethe-Weizsäcker. Per questo motivo effettuiamo degli ulteriori calcoli utilizzando i valori FRDM delle energie di legame [Mö12]. Le soluzioni numeriche ottenute sono riportate nella tabella sottostante:

<i>Nucleo</i>	<i>Z</i>	<i>N</i>	<i>Z/A</i>	$\rho_{max} [g/cm^3]$
^{56}Fe	26	30	0.4643	$6.0089 \cdot 10^7$
^{58}Fe	26	32	0.4483	$2.2429 \cdot 10^8$
^{64}Ni	28	36	0.4375	$1.1729 \cdot 10^9$
^{66}Ni	28	38	0.4242	$1.4864 \cdot 10^9$
^{86}Kr	36	50	0.4186	$3.4212 \cdot 10^9$
^{84}Se	34	50	0.4048	$9.3390 \cdot 10^9$
^{82}Ge	32	50	0.3902	$2.3547 \cdot 10^{10}$
^{80}Zn	30	50	0.3750	$5.3645 \cdot 10^{10}$
^{78}Ni	28	50	0.3590	$1.3413 \cdot 10^{11}$
^{80}Ni	28	52	0.3500	$1.4174 \cdot 10^{11}$
^{124}Mo	42	82	0.3387	$1.7307 \cdot 10^{11}$
^{122}Zr	40	82	0.3278	$2.4765 \cdot 10^{11}$

Nucleo	Z	N	Z/A	$\rho_{max} [g/cm^3]$
^{120}Sr	38	82	0.3167	$3.5253 \cdot 10^{11}$
^{118}Kr	36	82	0.3051	$4.8771 \cdot 10^{11}$

Tabella 4.8: Sequenza di nuclei che caratterizzano la composizione della crosta esterna di una stella di neutroni. Ad ogni nucleo è associato un valore massimo di densità. Nei calcoli sono state utilizzate le stime delle energie di legame fornite dal modello FRDM [Möll12].

La sequenza in Tab.4.8 non presenta particolari differenze rispetto a quella proposta in Tab.4.4. Non si può però fare a meno di notare in Tab.4.8 l'assenza del ^{62}Ni , il quale in Tab.4.4 fa seguito al ^{56}Fe e precede il ^{58}Fe , e la presenza del ^{80}Ni , il quale si posiziona tra ^{78}Ni e ^{124}Mo prendendo il posto del ^{84}Zn in Tab.4.4. Infine la sequenza in Tab.4.8 si conclude con il ^{118}Kr mentre in Tab.4.4 termina con il ^{114}Se . Eseguimano ora un confronto tra i valori massimi di densità per i nuclei che compaiono in entrambe le tabelle (Tab.4.8 e Tab.4.4):

Nucleo	Z	N	Z/A	$\rho_{max} [g/cm^3]$		$\Delta\rho_{max}$
				FRDM	Sha	
^{56}Fe	26	30	0.4643	$6.0089 \cdot 10^7$	$8.2138 \cdot 10^6$	75.95 %
^{58}Fe	26	32	0.4483	$2.2429 \cdot 10^8$	$2.7220 \cdot 10^8$	-9.65 %
^{64}Ni	28	36	0.4375	$1.1729 \cdot 10^9$	$1.3191 \cdot 10^9$	-5.87 %
^{66}Ni	28	38	0.4242	$1.4864 \cdot 10^9$	$1.5319 \cdot 10^9$	-1.51 %
^{86}Kr	36	50	0.4186	$3.4212 \cdot 10^9$	$3.0881 \cdot 10^9$	5.12 %
^{84}Se	34	50	0.4048	$9.3390 \cdot 10^9$	$1.1285 \cdot 10^{10}$	-9.44 %
^{82}Ge	32	50	0.3902	$2.3547 \cdot 10^{10}$	$2.7622 \cdot 10^{10}$	-7.96 %
^{80}Zn	30	50	0.3750	$5.3645 \cdot 10^{10}$	$6.3269 \cdot 10^{10}$	-8.23 %
^{78}Ni	28	50	0.3590	$1.3413 \cdot 10^{11}$	$9.7955 \cdot 10^{10}$	15.59 %
^{124}Mo	42	82	0.3387	$1.7307 \cdot 10^{11}$	$1.8299 \cdot 10^{11}$	-2.79 %
^{122}Zr	40	82	0.3278	$2.4765 \cdot 10^{11}$	$2.6163 \cdot 10^{11}$	-2.75 %
^{120}Sr	38	82	0.3167	$3.5253 \cdot 10^{11}$	$4.0556 \cdot 10^{11}$	-7.00 %

Tabella 4.9: Confronto tra la densità massima della sequenza di nuclei calcolata in Tab.4.8 e quella dell'articolo [Sha15] di riferimento. Nell'ultima colonna è infine riportata la variazione percentuale tra le due densità.

Le variazioni percentuali, calcolate facendo riferimento alla relazione (4.2), si attestano in media attorno al 7% quindi, fatta eccezione per il ^{56}Fe , le densità massime predette dal modello FRDM sono in buon accordo con quelle contenute in Ref. [Sha15]. Il fatto che le stime delle energie di legame fornite dal modello FRDM, a differenza di quelle prodotte dalla formula di Bethe-Weizsäcker, conducano a delle sequenze di nuclei attendibili, ossia confrontabili con quelle contenute in [Sha15] e, per estensione, anche con quelle da noi ottenute impiegando i valori sperimentali delle energie di legame, dimostra la nostra ipotesi sulla scarsa accuratezza delle approssimazioni della formula semi-empirica.

Conclusioni

Il lavoro svolto nella presente tesi è stato quello di verificare la composizione della crosta esterna delle stelle di neutroni. Sono quindi state trovate delle sequenze di nuclei che popolano la crosta esterna in corrispondenza di determinati valori di densità. Tali nuclei sono stati definiti esotici dal momento che il loro elevato contenuto di neutroni ne rende possibile la formazione solo in condizioni di elevate densità, sufficienti a garantire l'innesto di processi di cattura elettronica.

L'impossibilità di formare nuclei ricchi di neutroni all'interno dei laboratori, in condizioni di densità ordinarie, limita considerevolmente la nostra conoscenza delle loro energie di legame. Questo impone dunque il ricorso, nella nostra analisi della composizione della crosta esterna, a dei modelli teorici capaci di fornire delle stime dei valori non disponibili per via sperimentale.

Fatte queste premesse, i calcoli delle sequenze di nuclei sono stati effettuati, in un primo momento, sfruttando i soli dati sperimentali a nostra disposizione e successivamente si è cercato di soppiare alla mancanza di ulteriori dati ricorrendo alle stime semi-empiriche fornite dalla formula di Bethe-Weizsäcker. Il nostro punto di riferimento, con il quale eseguire un successivo confronto, è stata la sequenza riportata nell'articolo [Sha15].

I dati sperimentali delle energie di legame hanno condotto alla sequenza riportata in Tab.4.1, la quale si è visto essere in buon accordo con quella di riferimento in Ref. [Sha15]. La sequenza trovata in questo modo si arresta al ^{78}Ni , per il quale è stato individuato un valore massimo di densità pari a $1.2026 \cdot 10^{11} g/cm^3$. Causa di ciò è l'assenza di dati sperimentali relativi ai nuclei prodotti in corrispondenza di densità superiori a tale valore.

La formula semi-empirica della massa è stata utilizzata per ovviare ai problemi appena esposti e produrre delle sequenze che andassero oltre il valore massimo di densità sopra menzionato per il ^{78}Ni . Grazie all'ausilio di tale formula siamo quindi riusciti a produrre una sequenza di nuclei che si arresta al ^{134}Mo in corrispondenza di una densità pari a $4.1701 \cdot 10^{11} g/cm^3$ (Tab.4.2). Questi risultati sono stati scartati in quanto ci si aspettava che la sequenza ottenuta impiegando i valori semi-empirici delle energie di legame riproducesse quella riportata in Tab.4.1, almeno fino a $\rho_{max} = 1.2026 \cdot 10^{11} g/cm^3$. Quanto appena detto mette in risalto l'inadeguatezza delle stime delle energie di legame fornite dalla formula di Bethe-Weizsäcker e l'elevata sensibilità della teoria alla conoscenza delle masse nucleari; infatti sebbene le differenze tra i valori semi-empirici e quelli sperimentali siano relativamente piccole (si veda Tab.4.3), i risultati a cui conducono i primi sono completamente differenti da quelli prodotti dai secondi.

Stime alternative, disponibili in Ref. [Mö12], a quelle di Bethe-Weizsäcker derivano dal modello FRDM (finite-range droplet model). I risultati numerici ottenuti mediante l'impiego

di questo modello hanno infine condotto alla sequenza riportata in Tab. 4.8. L'elevata compatibilità tra la sequenza prodotta in questo modo e quella dell'articolo [Sha15] di riferimento, come è evidente dal loro confronto diretto in Tab.4.9, ha quindi confermato l'ipotesi, sulla scarsa accuratezza delle stime semi-empiriche delle energie di legame, da noi proposta per spiegare l'inattendibilità dei risultati in Tab.4.2.

Nonostante ciò, non è ancora ben chiaro quale possa essere un'osservazione sperimentale capace di validare o meno la teoria.

Appendice A

Rotazione di un corpo compatto

Valutiamo le condizioni necessarie affinché un corpo rimanga unito per effetto dell'interazione gravitazionale.

Consideriamo una particella di massa unitaria posta sull'equatore di una sfera omogenea rotante. Tale particella resta sulla sfera solo nel limite in cui risulta essere soddisfatta la seguente uguaglianza tra attrazione gravitazionale e forza centrifuga:

$$G_N \frac{M}{R^2} = \Omega_{max}^2 R , \quad (\text{A.1})$$

dove M e R indicano rispettivamente la massa e il raggio della stella, e Ω_{max} la massima velocità angolare. Dalla precedente uguaglianza risulta dunque che:

$$\Omega_{max} = \sqrt{G_N \frac{M}{R^3}} = \sqrt{G_N \frac{4\pi}{3} \rho} , \quad (\text{A.2})$$

dove ρ è la densità media della stella. Il periodo di rotazione è infine dato dalla relazione:

$$P = \frac{2\pi}{\Omega_{max}} . \quad (\text{A.3})$$

Pertanto ne concludiamo che, affinché si possano ottenere periodi di rotazione di pochi secondi o qualche millisecondo, la velocità di rotazione del corpo (e di conseguenza, come risulta dalla relazione (A.2), anche la sua densità) deve essere particolarmente elevata.

Appendice B

Minimizzazione dell'energia libera di Gibbs

Il metodo ideato da Baym, Pethick e Sutherland [Bay71] per il calcolo della composizione della crosta esterna delle stelle di neutroni si basa sulla minimizzazione dell' energia libera di Gibbs per barione a temperatura nulla ($T = 0$) e pressione P fissata, sotto la condizione di neutralità della carica $n_e = n_p$.

Dalla conservazione dell'energia risulta:

$$d\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right) = -Pd\left(\frac{1}{n_B}\right) + Tds + \sum_i \mu_i dY_i , \quad (\text{B.1})$$

dove $1/n_B$ e s rappresentano rispettivamente il volue e l'entropia per barione, mentre $Y_i = n_i/n_B$ la concentrazione della specie i -esima. Mediante l'applicazione di una trasformazione di Legendre è possibile riscrivere la relazione (B.1) come:

$$dg = d\left(\frac{\epsilon + P}{n_B} - Ts\right) = \frac{1}{n_B}dP - sdT + \sum_i \mu_i dY_i . \quad (\text{B.2})$$

La quantità:

$$g = \frac{G}{A} = \frac{\epsilon + P}{n_B} - Ts , \quad (\text{B.3})$$

costituisce l'energia libera di Gibbs per barione. Nel caso di nostro interesse la temperatura è nulla, quindi:

$$g = \frac{\epsilon + P}{n_B} , \quad (\text{B.4})$$

dove $\epsilon = \epsilon_T$ è dato da (3.1):

$$\epsilon_T[n_B, A, Z] = \epsilon_e[n_e] + \left(\frac{n_B}{A}\right) \left[M(A, Z)c^2 + \epsilon_L\right] \quad (\text{B.5})$$

e la pressione P , per $T = 0$, risente esclusivamente dei contributi degli elettroni e del reticolo:

$$P = P_e + P_L , \quad (\text{B.6})$$

l'assunzione di base è che, in condizioni di equilibrio termico, idrostatico e chimico, la pressione esercitata dai nuclei sia nulla.

Passiamo ora al calcolo di P_e :

$$\begin{aligned} P_e &= -\frac{\partial E_e}{\partial V} = -\frac{\partial(V\epsilon_e)}{\partial V} = -V\frac{\partial\epsilon_e}{\partial V} - \epsilon_e = -\frac{Z}{n_e}\frac{\partial\epsilon_e}{\partial(Z/n_e)} - \epsilon_e \\ &= -\frac{1}{n_e}\frac{\partial\epsilon_e}{\partial(1/n_e)} - \epsilon_e = -\frac{1}{n_e}\left(-n_e^2\frac{\partial\epsilon_e}{\partial n_e}\right) - \epsilon_e \\ &= n_e\frac{\partial\epsilon_e}{\partial n_e} - \epsilon_e = n_e\mu_e - \epsilon_e , \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

dove si è considerato che l'energia degli elettroni è pari a $E_e = V\epsilon_e$. Si è inoltre fatto ricorso alla conservazione della carica:

$$n_e = n_p = \frac{Z}{V} \Rightarrow V = \frac{Z}{n_e} \quad (\text{B.8})$$

Per quanto riguarda P_L si trova che:

$$P_L = -\frac{\partial\epsilon_L}{\partial V} = \frac{1}{3}\left(-Z^2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}V^{-\frac{1}{3}}\right)V^{-1} = \frac{1}{3}\epsilon_L\frac{n_B}{A} , \quad (\text{B.9})$$

dove l'energia elettrostatica del reticolo (3.9) è stata posta pari a:

$$\epsilon_L = -Z^2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{n_B}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = -Z^2\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}V^{-\frac{1}{3}} . \quad (\text{B.10})$$

Sulla base di quanto appena detto è possibile calcolare l'energia libera di Gibbs per barione (B.4):

$$\begin{aligned} g &= \frac{\epsilon_e + \left(\frac{n_B}{A}\right)[M(A, Z)c^2 + \epsilon_L] + P_L + P_e}{n_B} \\ &= \frac{M(A, Z)c^2 + \frac{4}{3}\epsilon_L}{A} + \frac{n_e}{n_B}\mu_e \\ &= \frac{M(A, Z)c^2 + \frac{4}{3}\epsilon_L}{A} + \frac{Z}{A}\mu_e \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

A questo punto, fissata la pressione P , si può calcolare la densità elettronica risolvendo numericamente l'equazione (B.6) per ogni nucleo (A, Z) . Tra questi, il nucleo che costituisce lo

stato fondamentale della crosta esterna della stella di neutroni sarà quello che, a pressione P , minimizza l'energia libera di Gibbs per barione.

A partire dall'equazione (B.11) è inoltre possibile comprendere il processo di neutronizzazione della materia mediante le seguenti considerazioni. Trascurando il termine relativo all'energia elettrostatica del reticolo, la (B.11) può essere riscritta come:

$$g \approx \frac{M(A, Z)c^2}{A} + \frac{Z}{A}\mu_e. \quad (\text{B.12})$$

Sapendo che:

$$\mu_e = \frac{\partial \epsilon_e}{\partial n_e} = \hbar c (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} n_e^{\frac{1}{3}} \propto n_e^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{B.13})$$

e che la pressione per un gas di fermioni, ricorrendo alla (3.4), è pari a:

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{V}{4} \frac{\hbar c}{\pi^2} (3\pi^2)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{Z}{V} \right)^{\frac{4}{3}} \right] = \frac{\hbar c}{12\pi^2} (3\pi^2)^{\frac{4}{3}} n_e^{\frac{4}{3}} \propto n_e^{\frac{4}{3}}, \quad (\text{B.14})$$

il potenziale chimico μ_e risulta dunque avere un andamento del tipo $P^{\frac{1}{4}}$. Ne consegue che l'aumento della pressione rende energeticamente favorevole la diminuzione della frazione di protoni $Y_p = Z/A$ in modo tale da compensare l'incremento del termine $M(A, Z)c^2/A$.

Appendice C

Codice Fortran

Di seguito è riportato il codice utilizzato per ottenere le sequenze di nuclei sperimentali e semi-empiriche presentate in Cap. 4. Il codice in questione consente di individuare quale sia l'isotopo di un dato nucleo che, all'interno di un determinato intervallo di densità inserito come input, minimizza la densità di energia fornita dalla relazione (3.10):

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      PARAMETER(NISO=1000)
C
      COMMON/NUCLEI/NAI,NAF,NZI,NZF
      COMMON/NUC/XMASS,NA,NZ
      COMMON/DENSGRID/DMIN,DMAX,NDEN
C
      DIMENSION INUC(2,NISO),EALL(NISO)
C
      CALL INPUT
      CALL MAT
C
      WRITE(6,1001)
      DD=(DMAX-DMIN)/FLOAT(NDEN)
      DO ID=1,NDEN+1
          ICOUNT=0
          RNB=DMIN+FLOAT(ID-1)*DD
          DO NA=NAI,NAF,2
              AA=FLOAT(NA)
              DO NZ=NZI,NZF,2
                  ICOUNT=ICOUNT+1
                  IF (ICOUNT.GT.NISO) THEN
```

```

      WRITE(6,3000) NISO
      STOP
      ENDIF
      ZZ=FLOAT(NZ)
      INUC(1,ICOUNT)=NA
      INUC(2,ICOUNT)=NZ
      CALL NUCLEUS
      CALL EDEN(RNB,RGSI,ETOT)
      EALL(ICOUNT)=ETOT
      ENDDO
      ENDDO
      CALL EMIN(ICOUNT,EALL,IMIN)
      WRITE(6,1000) RNB,RGSI,INUC(1,IMIN),INUC(2,IMIN),EALL(IMIN)
      ENDDO
C
      STOP
1000 FORMAT(2X,2(1PE12.5,4X),2(I5,1X),2X,1PE12.5)
1001 FORMAT(15X,'n_b '/,3X,'10^9 / fm^3 ',3X,'10^6 g /cm^3 ',8X,
     ^ 'A',5X,'Z',4X,'B MeV')
3000 FORMAT(1X,'NUMBER OF NUCLEI > ',I5)
      END
C*****SUBROUTINE INPUT*****
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON/NUCLEI/NAI,NAF,NZI,NZF
      COMMON/DENSGRID/DMIN,DMAX,NDEN
      COMMON/OPT/IBE
C
      !READ(5,99)
      !READ(5,99)
      READ(5,*) NAI,NAF,NZI,NZF
      WRITE(6,1000) NAI,NAF,NZI,NZF
C
      !READ(5,99)
      !READ(5,99)
      READ(5,*) DMIN,DMAX,NDEN
      WRITE(6,1001) DMIN,DMAX,NDEN
C
      !READ(5,99)

```

```

      READ(5,*) IBE
      WRITE(6,1000) IBE
C
      WRITE(6,1002)
C
      RETURN
99   FORMAT(1X)
1000 FORMAT(2X,4(I5,2X))
1001 FORMAT(2X,2(1PE12.5,2X),I5)
1002 FORMAT(/,'----- END OF THE INPUT ----',/)

C
      END
C*****SUBROUTINE NUCLEUS
C*****SUBROUTINE NUCLEUS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON/NUC/XMASS,NA,NZ
      COMMON/CONST/ PI ,HBC,APMASS,ANMASS,E2
      COMMON/OPT/IBE
C
      XNOBIND=FLOAT(NZ)*APMASS + FLOAT(NA-NZ)*ANMASS
C
      CALL WEISZ(BE)
      XMASS=XNOBIND-BE
C
      IF (IBE.EQ.0) RETURN
C
      BE=0.0
C
      FERRO
C
      IF (NA.EQ.46.AND.NZ.EQ.26) BE=7.60911*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.48.AND.NZ.EQ.26) BE=8.0238*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.50.AND.NZ.EQ.26) BE=8.3540317*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.52.AND.NZ.EQ.26) BE=8.6095710*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.54.AND.NZ.EQ.26) BE=8.7363827*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.56.AND.NZ.EQ.26) BE=8.7903545*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.58.AND.NZ.EQ.26) BE=8.7922506*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.60.AND.NZ.EQ.26) BE=8.755856*FLOAT(NA)
      IF (NA.EQ.62.AND.NZ.EQ.26) BE=8.692885*FLOAT(NA)

```

```

IF (NA.EQ.64.AND.NZ.EQ.26) BE=8.612398*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.66.AND.NZ.EQ.26) BE=8.521726*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.68.AND.NZ.EQ.26) BE=8.4125*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.70.AND.NZ.EQ.26) BE=8.3026*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.72.AND.NZ.EQ.26) BE=8.1847*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.74.AND.NZ.EQ.26) BE=8.0618*FLOAT(NA)
C NICHEL
IF (NA.EQ.48.AND.NZ.EQ.28) BE=7.26510*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.50.AND.NZ.EQ.28) BE=7.71610*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.52.AND.NZ.EQ.28) BE=8.0798*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.54.AND.NZ.EQ.28) BE=8.393039*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.56.AND.NZ.EQ.28) BE=8.6427798*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.58.AND.NZ.EQ.28) BE=8.7320596*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.60.AND.NZ.EQ.28) BE=8.7807746*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.62.AND.NZ.EQ.28) BE=8.7945537*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.64.AND.NZ.EQ.28) BE=8.7774617*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.66.AND.NZ.EQ.28) BE=8.73950821*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.68.AND.NZ.EQ.28) BE=8.682474*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.70.AND.NZ.EQ.28) BE=8.604293*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.72.AND.NZ.EQ.28) BE=8.520213*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.74.AND.NZ.EQ.28) BE=8.4303*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.76.AND.NZ.EQ.28) BE=8.3315*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.78.AND.NZ.EQ.28) BE=8.2258*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.80.AND.NZ.EQ.28) BE=8.0809*FLOAT(NA)
C SELENIO
IF (NA.EQ.64.AND.NZ.EQ.34) BE=8.0738*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.66.AND.NZ.EQ.34) BE=8.3003*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.68.AND.NZ.EQ.34) BE=8.4770477*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.70.AND.NZ.EQ.34) BE=8.57603323*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.72.AND.NZ.EQ.34) BE=8.644493*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.74.AND.NZ.EQ.34) BE=8.687715*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.76.AND.NZ.EQ.34) BE=8.711477*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.78.AND.NZ.EQ.34) BE=8.717806020*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.80.AND.NZ.EQ.34) BE=8.71081312*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.82.AND.NZ.EQ.34) BE=8.6931966*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.84.AND.NZ.EQ.34) BE=8.65879323*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.86.AND.NZ.EQ.34) BE=8.581823*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.88.AND.NZ.EQ.34) BE=8.495004*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.90.AND.NZ.EQ.34) BE=8.3964*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.92.AND.NZ.EQ.34) BE=8.2904*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.94.AND.NZ.EQ.34) BE=8.1805*FLOAT(NA)

```

C GERMANIO

IF (NA.EQ. 58.AND.NZ.EQ.32) BE=7.7629*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 60.AND.NZ.EQ.32) BE=8.1065*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 62.AND.NZ.EQ.32) BE=8.341020*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 64.AND.NZ.EQ.32) BE=8.528826*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 66.AND.NZ.EQ.32) BE=8.625444*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 68.AND.NZ.EQ.32) BE=8.688143*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 70.AND.NZ.EQ.32) BE=8.72170012*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 72.AND.NZ.EQ.32) BE=8.731745010*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 74.AND.NZ.EQ.32) BE=8.7252*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 76.AND.NZ.EQ.32) BE=8.705236*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 78.AND.NZ.EQ.32) BE=8.671665*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 80.AND.NZ.EQ.32) BE=8.627573*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 82.AND.NZ.EQ.32) BE=8.563763*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 84.AND.NZ.EQ.32) BE=8.465524*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 86.AND.NZ.EQ.32) BE=8.3555*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 88.AND.NZ.EQ.32) BE=8.2435*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 90.AND.NZ.EQ.32) BE=8.1186*FLOAT(NA)

C ZINCO

IF (NA.EQ. 54.AND.NZ.EQ.30) BE=7.7537*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 56.AND.NZ.EQ.30) BE=8.1067*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 58.AND.NZ.EQ.30) BE=8.39599*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 60.AND.NZ.EQ.30) BE=8.5830509*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 62.AND.NZ.EQ.30) BE=8.67934310*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 64.AND.NZ.EQ.30) BE=8.73590510*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 66.AND.NZ.EQ.30) BE=8.75963211*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 68.AND.NZ.EQ.30) BE=8.75568012*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 70.AND.NZ.EQ.30) BE=8.729813*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 72.AND.NZ.EQ.30) BE=8.691813*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 74.AND.NZ.EQ.30) BE=8.642753*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 76.AND.NZ.EQ.30) BE=8.58227319*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 78.AND.NZ.EQ.30) BE=8.507383*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 80.AND.NZ.EQ.30) BE=8.423553*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 82.AND.NZ.EQ.30) BE=8.301124*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 84.AND.NZ.EQ.30) BE=8.1725*FLOAT(NA)

C MOLIBDENO

IF (NA.EQ. 82.AND.NZ.EQ.42) BE=8.1635*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 84.AND.NZ.EQ.42) BE=8.3254*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 86.AND.NZ.EQ.42) BE=8.434714*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 88.AND.NZ.EQ.42) BE=8.523914*FLOAT(NA)
 IF (NA.EQ. 90.AND.NZ.EQ.42) BE=8.597034*FLOAT(NA)

```

IF (NA.EQ. 9 2 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.657730020*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 4 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.662333020*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 6 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.653987010*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 8 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.635168020*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 0 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.6046623*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 2 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.568458*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 4 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.527979*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 6 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.479589*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 8 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.422229*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 0 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.3593522*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 2 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.291020*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 4 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.2203*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 6 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.1464*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 8 .AND. NZ.EQ.4 2 ) BE=8.0694*FLOAT(NA)

C ZIRCONIO
IF (NA.EQ. 7 8 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.1945*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 0 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.3604*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 2 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.4656814*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 4 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.549037*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 6 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.614054*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 8 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.666036*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 0 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.709969010*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 2 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.692678010*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 4 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.666801020*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 6 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.635327010*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 9 8 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.581459*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 0 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.522158*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 2 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.466369*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 4 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.402389*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 6 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.3284*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 0 8 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.2574*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 0 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.1775*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 1 1 2 .AND. NZ.EQ.4 0 ) BE=8.0946*FLOAT(NA)

C STRONZIO
IF (NA.EQ. 7 4 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.221010*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 7 6 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.39395*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 7 8 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.5001010*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 0 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.578604*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 2 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.635727*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 4 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.67751215*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ. 8 6 .AND. NZ.EQ.3 8 ) BE=8.708456*FLOAT(NA)

```

```

IF (NA.EQ.88.AND.NZ.EQ.38) BE=8.732595*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.90.AND.NZ.EQ.38) BE=8.69597224*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.92.AND.NZ.EQ.38) BE=8.648914*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.94.AND.NZ.EQ.38) BE=8.59383418*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.96.AND.NZ.EQ.38) BE=8.521279*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.98.AND.NZ.EQ.38) BE=8.445753*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.100.AND.NZ.EQ.38) BE=8.372237*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.102.AND.NZ.EQ.38) BE=8.29127*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.104.AND.NZ.EQ.38) BE=8.2103*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.106.AND.NZ.EQ.38) BE=8.1196*FLOAT(NA)
C KRIPTON
IF (NA.EQ.70.AND.NZ.EQ.36) BE=8.2563*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.72.AND.NZ.EQ.36) BE=8.4293211*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.74.AND.NZ.EQ.36) BE=8.533043*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.76.AND.NZ.EQ.36) BE=8.608815*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.78.AND.NZ.EQ.36) BE=8.6612384*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.80.AND.NZ.EQ.36) BE=8.6929289*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.82.AND.NZ.EQ.36) BE=8.710675*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.84.AND.NZ.EQ.36) BE=8.717446*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.86.AND.NZ.EQ.36) BE=8.712029*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.88.AND.NZ.EQ.36) BE=8.656853*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.90.AND.NZ.EQ.36) BE=8.59125921*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.92.AND.NZ.EQ.36) BE=8.512673*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.94.AND.NZ.EQ.36) BE=8.4243313*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.96.AND.NZ.EQ.36) BE=8.3308521*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.98.AND.NZ.EQ.36) BE=8.2363*FLOAT(NA)
IF (NA.EQ.100.AND.NZ.EQ.36) BE=8.1404*FLOAT(NA)
C
C XMASS=XNOBIND-BE
C
C RETURN
C END
C*****
C***** SUBROUTINE EDEN(RNB,RGSI,ETOT)
C*****
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C COMMON/NUC/XMASS,NA,NZ
C COMMON/DENSGRID/DMIN,DMAX,NDEN
C COMMON/CONST/ PI ,HBC,APMASS,ANMASS,E2
C

```

```

AA=FLOAT(NA)
ZZ=FLOAT(NZ)
FACT= 10.0**9
C
XMBAR=0.5*(APMASS+ANMASS)*1.78266272/10**3 ! 10^-27 KG
C
FT=4.0/3.0
Z43=ZZ**FT
PIQQ=(3.0*PI*PI)**0.333333
C
RNB=RNB/FACT
RNBA=RNB/AA
EELE=HBC*PIQQ*Z43*RNBA**FT * 3.0/4.0
ENUC=XMASS*RNBA
ELAT=E2*ZZ*ZZ*RNBA**FT
ETOT=EELE+ENUC-ELAT
IF (ABS(RNB*FACT).LT.1.0E-10) THEN
    ETOT=XMASS/AA
ELSE
    ETOT=ETOT/RNB
ENDIF
RGSI=RNB*XMBAR*FACT*10**6
RNB=RNB*FACT
C
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE EMIN(ICOUNT,EALL,IMIN)
C*****
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
PARAMETER(NISO=100)
DIMENSION EALL(NISO)
C
IMIN=1
DO I=2,ICOUNT
    IF(EALL(I).LT.EALL(IMIN)) IMIN=I
ENDDO
C
RETURN
END

```

```

C*****
      SUBROUTINE WEISZ(BE)
C*****
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON/NUC/XMASS,NA,NZ
C
      AA=FLOAT(NA)
      ZZ=FLOAT(NZ)
C
      VOL=15.67*AA
      SURF=17.23*AA**(.2./3.) !0.66666666
      COU=0.714*ZZ*ZZ/AA**(.33333)
      SYM=93.15*(AA-2.0*ZZ)*(AA-2.0*ZZ)/(4.0*AA)
C
      IP=0
      NT=1/NZ
      NP=NT*NZ
      IF (NP.NE.NZ) IP=1
      IN=0
      NN=NA-NZ
      NT=1/NN
      NP=NT*NN
      IF (NP.NE.NN) IN=1
      IF (IP.EQ.1.AND.IN.EQ.0) PAI=0.
      IF (IP.EQ.0.AND.IN.EQ.1) PAI=0.
      IF (IP.EQ.0.AND.IN.EQ.0) PAI=11.2/SQRT(AA)
      IF (IP.EQ.1.AND.IN.EQ.1) PAI=-11.2/SQRT(AA)
C
      BE=VOL-SURF-COU-SYM+PAI
C
      RETURN
      END
C*****
      SUBROUTINE MAT
C*****
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
      COMMON/CONST/ PI ,HBC,APMASS,ANMASS,E2
      COMMON/MATCON/FAK(0:60),SQ(0:60),BIN(100,100),ISIG(0:50)

```

```

COMMON/REDFAK/GFAK(100)
COMMON/NJCOEF/Q(100,100),KH(200)
C
FAK(0)=1.D+00
ISIG(0)=1
SQ(0)=0.0
FAK(1)=1.D+00
ISIG(1)=-1
SQ(1)=1.D+00
DO 11 I=2,50
ISIG(I)=-ISIG(I-1)
SQ(I)=SQRT(DFLOAT(I))
11 FAK(I)=I*FAK(I-1)
C
DO 40 I=1,200
KH(I)=1
40 CONTINUE
KH(100)=0
DO 10 I=1,50
KH(I+I+100)=0
10 CONTINUE
DO 15 I=1,100
BIN(I,1)=1.0D+00
BIN(I,I)=1.0D+00
15 CONTINUE
DO 20 I=2,99
DO 30 K=2,I
30 BIN(I+1,K)=BIN(I,K-1)+BIN(I,K)
20 CONTINUE
C
DO I1=1,100
DO I2=1,100
Q(I1,I2)=BIN(I1,I2)
ENDDO
ENDDO
C
GFAK(1)=1.0D+00
DO 1 I=1,99
AI=DFLOAT(I)
GFAK(I+1)=GFAK(I)*1.0D-1*AI
1 CONTINUE

```

```
C
PI=DACOS( -1.D0)
HBC=197.327053+00
APMASS=938.2796D+00
ANMASS=939.5739D+00
C
ALPHA=1.0/137.035
E2=HBC*ALPHA
C
RETURN
END
```


Bibliografia

- [Baa34] W. Baade e F. Zwicky, Phys. Rev. 46 (1934) 76.
- [Bay71] G. Baym, C. Pethick and P. Sutherland, Astrophys. J. 170 (1971) 299.
- [Ben05] O. Benhar, *Physics of dense matter*, Roma "La Sapienza" (2005), non pubblicato.
- [Bro21] Brookhaven National Laboratory, NuDat 2.8, <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>.
- [Car20] T. Carreau, *Modeling the (proto)neutron star crust : toward a controlled estimation of uncertainties*. Physics [physics]. Normandie Université, 2020.
- [Co12] G. Co', *Note di Astrofisica Nucleare*, Università del Salento (2012), non pubblicato, www.dmf.unisalento/~gpc/astro/astro.pdf
- [Hew68] A. Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pilkington, P.F. Scott, R.A. Collins, Nature 217, (1968) 709.
- [Möll12] P. Möller, A.J. Sierk, T. Ichikawa, H. Sagawa, Atomic Data and Nuclear Data Tables, 109 (2012) 1.
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche *Particelle e nuclei: un'introduzione ai concetti fisici*, Bollati Boringhieri, Torino (1998).
- [Sch58] M. Schwarzschild, *Structure and evolution of the stars*, Princeton University Press, Princeton (1958).
- [Sha15] B.K. Sharma, M. Centelles, X. Viñas, M. Baldo and G.F. Burgio, A&A 584, A103 (2015) 7.
- [Sha83] S.L. Shapiro e S.A. Teukolsky *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*, John Wiley and Sons, New York (1983).