

Indice

1 Nane bianche	2
1.1 Cenni storici	2
1.2 Introduzione al problema	3
1.3 Modello a Gas di Fermi	3
1.3.1 Considerazioni preliminari	3
1.3.2 Derivazione dell'equazione di stato	5
1.4 Equilibrio idrostatico per i politropi	9
2 Algoritmi risolutivi	12
2.1 Introduzione al problema	12
2.2 Descrizione degli algoritmi utilizzati	12
2.2.1 Algoritmo di Eulero	12
2.2.2 Algoritmo di Eulero a tre punti	13
2.2.3 Algoritmi di Runge-Kutta	13
2.3 Sistemi di due equazioni differenziali	15
3 Risultati dell'integrazione numerica	17
3.1 Confronto tra algoritmi	17
3.2 Scelta del passo di integrazione	22
3.3 Soluzioni numeriche	23
4 Massa di Chandrasekar	27
A Presentazione dei listati	29
A.0.1 Procedure di acquisizione dati	29
A.0.2 Funzioni derivata prima	30
A.0.3 Inizializzazione	31
A.0.4 Ciclo principale	31
Bibliografia	35

Capitolo 1

Nane bianche

1.1 Cenni storici

Le nane bianche sono stelle di massa paragonabile a quella del sole, ma con un raggio e una luminosità di gran lunga inferiori. Il primo avvistamento di una nana bianca, Keid B nella costellazione di Eridano, risale al XVIII secolo ad opera dell'astronomo William Herschel. In seguito, nel 1844, l'osservazione di alcune irregolarità nel moto di Sirio, nella costellazione del Cane Maggiore, portò Friedrich Bessel a ipotizzare la presenza di una compagna binaria, che fu battezzata Sirio B. Da una stima iniziale la sua massa risultò essere pari a 0.75 - 0.95 masse solari, mentre la luminosità era circa 400 volte inferiore a quella del sole [Sha83]. Nel 1915 W.S. Adams scoprì, con grande sorpresa, che lo spettro di questa stella era del tutto analogo a quello di una stella bianca: dunque la luminosità per unità di superficie (e quindi la sua temperatura) non erano ridotte come si erano inizialmente ipotizzate, bensì comparabili a quelle della sua assai più visibile compagna. Se ne concludeva che la scarsa luminosità di Sirio B era dovuta, in accordo alla legge di Stefan-Boltzmann, ad un raggio molto piccolo, dell'ordine di poche migliaia di km, e dunque che l'oggetto dovesse avere una densità estremamente elevata, più di qualunque altra mai misurata sino ad allora. Nel 1924 Sir Arthur Eddington ipotizzò che simili densità potessero realizzarsi per della materia completamente ionizzata. Nel 1926 Fowler, applicando la statistica di Fermi-Dirac, individuò nella pressione di degenerazione elettronica il meccanismo in grado di impedire il collasso gravitazionale della stella. Il suo lavoro fu poi perfezionato negli anni successivi da Chandrasekhar, che lo generalizzò al caso relativistico.

Attualmente si conoscono diverse migliaia di nane bianche. Le teorie astronomiche odierne considerano questi oggetti celesti come stadio finale dell'esistenza delle stelle di massa medio-piccola.

1.2 Introduzione al problema

In una stella che si trova in una fase attiva del suo ciclo vitale (per esempio nella sequenza principale) l'azione attrattiva della forza di gravità, che tenderebbe a far collassare la stella verso il centro, è bilanciata dalla presenza della pressione di radiazione nucleare, prodotta dalle reazioni di fusione che avvengono negli strati interni.

Le stelle della sequenza principale bruciano soprattutto idrogeno. Terminato tale combustibile la stella esce dalla sequenza principale ed il suo destino è legato alla sua massa.

Stelle di massa medio-piccola (inferiore a 8 masse solari) uscite dalla sequenza principale attraversano una fase di instabilità che le porta a trasformarsi in giganti rosse. La loro struttura si può schematizzare come costituita da un nucleo di elementi pesanti (carbonio, ossigeno) circondato da una frangia di elio in combustione e da un involucro gassoso di elio e idrogeno. Se la massa della stella non è sufficiente per innescare reazioni tra i nuclei di carbonio, l'esaurimento progressivo dell'elio e dunque l'avvicinarsi della frangia in combustione alla superficie, porta ad un aumento della luminosità che contribuisce ad espellere lo strato gassoso esterno (nebulosa planetaria) lasciando a nudo la luminosissima zona centrale. Si origina in questo modo una nana bianca.

La massa di queste stelle non è sufficientemente grande da innescare processi di fusione dei nuclei di carbonio. Poiché negli strati interni di tali oggetti non avvengono più reazioni di fusione nucleare, il meccanismo che contrasta l'attrazione gravitazionale deve essere di altra natura. La sola energia termica del gas non è sufficiente a mantenere una condizione di equilibrio.

Ad agire, come vedremo, è un fenomeno di origine quantistica, la pressione di degenerazione del gas di elettroni generata dal principio di esclusione di Pauli.

1.3 Modello a Gas di Fermi

1.3.1 Considerazioni preliminari

Le nane bianche possiedono generalmente un raggio di poche migliaia di km e una massa simile a quella solare, ovvero circa 10^{30} kg. Pertanto la loro densità media risulta essere dell'ordine di 10^9 kg/m³. Ad una simile densità le distanze tra gli atomi divengono estremamente ridotte. Consideriamo, ad esempio, un volume unitario di elio (massa molare 4g) in queste condizioni.

Esso contiene:

$$\text{n.atomi} = \frac{10^9 \text{kg}}{1 \text{m}^3} \frac{1 \text{mol}}{4 \cdot 10^{-3} \text{kg}} \frac{6 \cdot 10^{23} \text{atomi}}{\text{mol}} \simeq 10^{35} \text{atomi}$$

Ne risultano distanze interatomiche dell'ordine di 10^{-12} m .

La temperatura di tali stelle varia in un intervallo compreso tra 10^5 K alla superficie e 10^8 K all'interno. A questa temperatura corrisponde un'energia cinetica $k_b T$ dell'ordine di 10^4 eV , sufficiente a ionizzare completamente gli atomi. Pertanto possiamo utilizzare, per descrivere il sistema, un modello in cui gli elettroni non sono legati ai nuclei e si muovono liberamente (gas di elettroni). I nuclei atomici rappresentano la quasi totalità della massa del sistema e possono essere considerati sostanzialmente fermi rispetto al centro di massa del sistema.

Introduciamo inoltre due approssimazione al fine di facilitare i calcoli:

1. Gli elettroni non interagiscono tra di loro.
2. Il sistema è infinito e omogeneo.

La prima semplificazione si giustifica osservando che l'energia di interazione tra due elettroni posti ad una distanza pari alla separazione interatomica stimata in precedenza (10^{-12} m) vale:

$$V = \frac{e^2}{r} \simeq 1.5 \cdot 10^3 \text{ eV}$$

il che costituisce una stima per eccesso del valore reale. L'energia cinetica media, come abbiamo visto, è invece dell'ordine 10^4 eV . Dunque, almeno in prima approssimazione, possiamo trascurare il termine di interazione tra gli elettroni.

La seconda semplificazione è comprensibile se si pensa che le dimensioni del sistema, circa 10^7 m , superano di 19 ordini di grandezza le distanze in gioco nell'interazione. Essa comporta che il potenziale in cui si muovono gli elettroni sia costante e dunque che possiamo eliminarlo semplicemente ridefinendo lo zero dell'energia.

Sotto queste due condizioni l'Hamiltoniana del sistema si riduce alla somma delle Hamiltoniane di singolo elettrone, contenenti il solo termine di energia cinetica. Si avrà:

$$H_0 = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \right) \quad (1.1)$$

dove A è il numero di elettroni e m_e la massa dell'elettrone.

Tratteremo il caso di un gas di elettroni completamente degenere [Cha39]. Questo equivale a dire che, nello spazio degli impulsi, gli elettroni riempiono tutti i livelli secondo il principio di minima energia sino al livello di Fermi, mentre tutti i livelli superiori sono vuoti.

1.3.2 Derivazione dell'equazione di stato

Dalle considerazioni fatte in precedenza abbiamo che l'equazione di Schrödinger per il singolo elettrone si riduce a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 \phi(r) = \epsilon \phi(r)$$

Consideriamo inizialmente l'elettrone in un cubo di lato L e volume V (ovviamente i risultati dovranno poi essere indipendenti da tale scelta). Le condizioni al contorno periodiche sono:

$$\begin{aligned} \phi(x+L, y, z) &= \phi(x, y, z) \\ \phi(x, y+L, z) &= \phi(x, y, z) \\ \phi(x, y, z+L) &= \phi(x, y, z) \end{aligned}$$

a cui corrispondono le autofunzioni:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

L'espressione precedente rappresenta la parte radiale della funzione d'onda che deve essere moltiplicata per il fattore relativo allo spin.

Per ottenere l'opportuna normalizzazione delle funzioni d'onda bisogna moltiplicare il loro prodotto scalare per un fattore $V/(2\pi)^3$:

$$\begin{aligned} \langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3 r \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \cdot \vec{r}} d^3 r = \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

Poiché stiamo considerando particelle non interagenti, la densità di probabilità di trovare una particella qualsiasi nel punto \mathbf{r} è pari alla somma delle probabilità di singola particella, data dal modulo quadro della funzione d'onda:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a^A |\phi_a(\mathbf{r})|^2 \quad (1.2)$$

Come annunciato considereremo il sistema nello stato fondamentale, in cui sono occupati tutti i livelli corrispondenti ad un impulso \mathbf{k} tale che $0 \leq |\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|$, dove abbiamo indicato con $|\mathbf{k}_F| \equiv k_F$ il massimo valore dell'impulso, detto impulso di Fermi. Tenendo conto del fattore $V/(2\pi)^3$ di normalizzazione per i prodotti scalari e di un fattore 2 per la degenerazione di spin, il numero di elettroni per unità di volume è:

$$\begin{aligned} n_e &= \sum_{a \leq k_F} |\phi_a(\mathbf{r})|^2 = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\mathbf{k}_a \cdot \mathbf{r}} d^3 k_a \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3 V} \int_0^{k_F} d^3 k_a = \frac{8\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} k_a^2 dk_a = \frac{1}{3\pi^2} k_F^3 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si può ottenere lo stesso risultato ricordando che il numero di stati quantistici di una particella puntiforme dotata di spin che si muove di moto libero è uguale a [Lan77]:

$$\Delta\Gamma = 2 \frac{\Delta p \Delta q}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.4)$$

pertanto il numero di stati occupati in un volume V , da un elettrone avente impulso compreso tra \mathbf{p} e $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$, è:

$$d\Gamma = 2 \frac{4\pi p^2 dp V}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.5)$$

Dividendo per V e integrando su tutti gli impulsi fino all'impulso di Fermi si riottiene il risultato precedente .

L'energia di Fermi risulta:

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{(3\pi^2 n_e)^{2/3} \hbar^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \quad (1.6)$$

mentre per l'energia totale del sistema otteniamo l'espressione:

$$E = 2 \sum_{k < k_f} \epsilon(k) = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{p}| \leq p_F} \frac{1}{\hbar^3} \epsilon(|\mathbf{p}|) d^3 p = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 \epsilon(p) dp \quad (1.7)$$

L'energia relativistica dell'elettrone in funzione dell'impulso è data da:

$$\epsilon(p) = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c)^2} - m_e c^2 = m_e c^2 \left[\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right] \quad (1.8)$$

dove abbiamo introdotto la variabile adimensionale

$$x = \frac{p}{m_e c} \quad (1.9)$$

Notiamo che questa grandezza da una misura di quanto sia "relativistico", per così dire, il sistema. Per $x \ll 1$ il sistema si può trattare con le leggi della meccanica classica, mentre per $x \gg 1$ possiamo operare nel limite ultrarelativistico.

Espressa in questa nuova variabile l'energia cinetica del sistema risulta:

$$E = \frac{(m_e c^2)^4 V}{(\hbar c)^3 \pi^2} \int_0^{x_F} x^2 [\sqrt{x^2 + 1} - 1] dx = \frac{(m_e c^2)^4 V}{(\hbar c)^3 \pi^2} f(x_F) \quad (1.10)$$

con

$$x_F = \frac{\hbar k_F}{m_e c} = \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2 n_e)^{1/3} = \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad (1.11)$$

e

$$\begin{aligned} f(x_F) &= \int_0^{x_F} x^2 [\sqrt{x^2 + 1} - 1] dx = \\ &= \frac{1}{8} \left[x_F (1 + 2x_F^2) \sqrt{1 + x_F^2} - \ln \left(x_F + \sqrt{1 + x_F^2} \right) - \frac{8}{3} x_F^3 \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'equazione di stato si ottiene esprimendo la pressione in funzione dell'energia e facendo uso della relazione:

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{1}{\partial V} \left[\frac{(m_e c^2)^4 V}{(\hbar c)^3 \pi^2} f(x_F) \right] = \\ &= -\frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \left[f(x_F) + V \frac{df(x_F)}{dx_F} \frac{dx_F}{dV} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

dalla (1.11) abbiamo:

$$V \frac{dx_F}{dV} = -\frac{1}{3} x_F \quad (1.14)$$

mentre dalla (1.12) abbiamo:

$$\frac{df(x_F)}{dx_F} = x_F^2 \sqrt{x_F^2 + 1} - x_F^2 \quad (1.15)$$

sostituendo nella (1.13) otteniamo:

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \left[\frac{1}{3} x_F^3 \sqrt{x_F^2 + 1} - \frac{1}{3} x_F^3 - f(x_F) \right] \quad (1.16)$$

A questo punto consideriamo due situazioni estreme. Per $x_F \ll 1$ (caso non relativistico) possiamo considerare lo sviluppo in serie:

$$\sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$$

per cui la (1.12) diventa:

$$f(x_F) \simeq \int_0^{x_F} \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10}$$

e l'espressione per la pressione diviene:

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{x_F^5}{15} \quad (1.17)$$

e per la definizione (1.11)

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{15} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^5 (3\pi^2)^{5/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \quad (1.18)$$

Nel caso ultrarelativistico $x_F \gg 1$ l'espressione per $f(x_F)$ (1.12) si può semplificare, considerando solo i termini di ordine più alto. Otteniamo:

$$f(x_F) \simeq \frac{1}{4} x_F^4$$

che sostituita insieme alla (1.11) nella (1.16) da:

$$P = \frac{(m_e c^2)^4}{(\hbar c)^3 \pi^2} \frac{1}{12} \left(\frac{\hbar c}{m_e c^2} \right)^4 (3\pi^2)^{4/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{4/3} \quad (1.19)$$

Le equazioni (1.18) e (1.19) legano la pressione del gas di elettroni alla densità elettronica per i casi non relativistico e ultrarelativistico.

Quello che ci interessa, a questo punto, è inserire nella (1.18) e nella (1.19) una dipendenza dalla densità di massa della stella. Questo può essere fatto ricordando che alla massa contribuiscono quasi esclusivamente i nuclei degli ioni, dunque la densità si può scrivere come [Sha83]:

$$\rho = \sum_i n_i m_i \quad (1.20)$$

dove n_i e m_i sono rispettivamente la densità (di numero) e la massa dell'i-esima specie ionica presente (stiamo supponendo che nella stella possano essere presenti elementi chimici diversi). Introduciamo la massa media bari-tonica:

$$m_B = \frac{1}{n} \sum_i n_i m_i = \frac{\sum_i n_i m_i}{\sum_i n_i A_i} \quad (1.21)$$

dove n è il numero di nucleoni per unità di volume e A_i è il peso atomico dell'i-esima specie. Indicando con Y_e il numero medio di elettroni per nucleone possiamo scrivere la densità della stella come:

$$\rho = nm_B = \frac{n_e m_B}{Y_e} \quad (1.22)$$

In conclusione le equazioni di stato (1.18) e (1.19) diventano:

$$P = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} (3\pi)^{5/3} \left(\frac{Y_e}{m_B} \right)^{5/3} \rho^{5/3} \quad (1.23)$$

per il caso non relativistico e

$$P = \frac{\hbar c}{12\pi^2} (3\pi)^{4/3} \left(\frac{Y_e}{m_B} \right)^{4/3} \rho^{4/3} \quad (1.24)$$

per il caso ultrarelativistico.

1.4 Equilibrio idrostatico per i politropi

Facciamo l'ipotesi che la stella abbia simmetria sferica.

La forza gravitazionale per unità di volume in funzione della distanza dal centro r vale allora:

$$F_{grav} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r)$$

dove ρ è la densità di materia, G la costante di gravitazione e $m(r)$ è la porzione di massa della stella contenuta in una sfera di raggio r . Se la stella è in equilibrio idrostatico tale forza deve bilanciare il gradiente di pressione: [Sha83] [Co07]

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) \quad (1.25)$$

La relazione differenziale tra massa e densità è:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Utilizzando questa relazione, riordinando i termini dell'equazione (1.25) e differenziando rispetto a r otteniamo:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right] = -4\pi G \rho(r) \quad (1.26)$$

Si definisce **politropo** una stella la cui pressione è legata alla densità dalla relazione:

$$P = K \rho^\Gamma \quad (1.27)$$

con K e Γ costanti reali. L'esponente Γ è detto anche **indice politropico**. Se ora poniamo:

$$\Gamma = \frac{n+1}{n} \quad (1.28)$$

e

$$\rho(r) = \rho_c [\phi(r)]^n \quad (1.29)$$

dove la costante ρ_c ha le dimensioni di una densità e $[\phi(r)]^n$ è una funzione adimensionale della distanza, l'equazione (1.27) diventa:

$$P = K \rho_c^{\frac{n+1}{n}} [\phi(r)]^{n+1} \quad (1.30)$$

Sostituiamo questa relazione nella (1.26), ottenendo:

$$\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4\pi G \rho_c [\phi(r)]^n \quad (1.31)$$

Per ottenere un'espressione che dipenda da parametri a-dimensionali definiamo la costante:

$$a^2 = \frac{(n+1)K\rho_c^{(1-n)/n}}{4\pi G} \quad (1.32)$$

e la variabile a-dimensionale:

$$x = \frac{r}{a} \quad (1.33)$$

ottenendo:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d\phi(x)}{dx} \right] = -\phi(x)^n \quad (1.34)$$

L'equazione (1.34) è detta di *Lane-Emden*.

Le condizioni iniziali sono:

$$\phi(x=0) = 1 \quad (1.35)$$

$$\left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (1.36)$$

Il significato fisico di tali condizioni è abbastanza intuitivo. La (1.35) impone, considerando la (1.29) e la definizione (1.33), che sia $\rho(0) = \rho_c$. In altre parole ρ_c definisce il valore della densità al centro della stella. La (1.36), poi, richiede che tale valore costituisca un massimo.

La (1.34) è un'equazione differenziale del secondo ordine. Per risolvere numericamente tale equazione introduciamo la funzione ausiliaria:

$$q(x) = x^2 \frac{d\phi}{dx}$$

da cui otteniamo:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{q(x)}{x^2} \quad (1.37)$$

Sostituendo tale funzione nella (1.34) si ha:

$$-\frac{1}{x^2} \frac{dq(x)}{dx} = \phi(x)^n \quad (1.38)$$

insieme con le (1.35) e (1.36) le equazioni (1.37) e (1.38) formano il sistema:

$$\begin{cases} \phi' = qx^{-2} & \phi(0) = 1 \\ q' = -x^2\phi^\alpha & q(0) = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

nel capitolo seguente vedremo come risolvere numericamente questo sistema di equazioni differenziali.

Capitolo 2

Algoritmi risolutivi

2.1 Introduzione al problema

Il nostro obiettivo è quello di risolvere il sistema (1.39) di equazioni differenziali del primo ordine con opportune condizioni iniziali.

Iniziamo considerando il caso di una singola equazione differenziale.

Il problema generale è quello di risolvere un'equazione del tipo

$$y'(x) = f(x, y) \quad (2.1)$$

nota l'espressione analitica della f su un intervallo $[x_{min} - x_{max}]$ con una condizione iniziale del tipo

$$y(x_{min}) = y_0$$

L'approccio che useremo in tutti gli algoritmi è quello di dividere tale intervallo in un reticolo di N punti equidistanti, spaziati di una quantità $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}$, quindi di ricavare una relazione ricorsiva (approssimata) in modo da ottenere il valore di y nel punto x_{n+1} conoscendo il suo valore in x_n .

Di seguito saranno presentati quattro algoritmi con questo impianto di base.

2.2 Descrizione degli algoritmi utilizzati

2.2.1 Algoritmo di Eulero

L'approssimazione più semplice che possiamo considerare è basata su uno sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + O(h^2) \quad (2.2)$$

Poichè dall'equazione (2.1) risulta

$$y'_n = f(x_n, y_n)$$

otteniamo

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + O(h^2) \quad (2.3)$$

La relazione (2.3) è nota in letteratura come algoritmo di Eulero.

2.2.2 Algoritmo di Eulero a tre punti

Se oltre ai punti x_n e x_{n+1} consideriamo il punto intermedio $x_{n+(1/2)}$ otteniamo dalla (2.1)

$$y'_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

A questo punto con le due sostituzioni:

$$y'_{n+1/2} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h^2)$$

e

$$f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2}) = \frac{1}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] + O(h^2)$$

si ricava che:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] + O(h^3) \quad (2.4)$$

che equivale alla formula di Eulero con la derivata calcolata nel punto intermedio dell'intervallo $[x_n, x_{n+1}]$. Questa è un'equazione implicita, in quanto il valore di y_{n+1} compare da entrambi i lati dell'uguaglianza. Tuttavia possiamo risolvere il problema utilizzando un algoritmo in due passaggi:

- si fa una prima stima di y_{n+1} utilizzando il metodo di Eulero
- si utilizza tale valore nella (2.4) per ricavare una stima più accurata

2.2.3 Algoritmi di Runge-Kutta

Introduzione

Gli algoritmi di Runge-Kutta costituiscono una classe di metodi a un passo molto diffusa. L'ipotesi di base del metodo è quella di esprimere la variazione della funzione incognita come una somma di più termini, ciascuno

proporzionale alla derivata prima di tale funzione calcolata in punti interni all'intervallo $[x_n, x_{n+1}]$ (detti nodi) La formulazione generale è:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^s w_i k_i \quad (2.5)$$

dove:

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=0}^s a_{ij} k_j) \quad (2.6)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, s$$

Una volta fissato l'ordine s dell'algoritmo la determinazione dei coefficienti a_{ij}, c_i, w_i avviene attraverso il seguente schema:

- si sviluppa la soluzione esatta $y(x_n + h)$ in serie di Taylor attorno ad $h = 0$ sino all'ordine desiderato
- si sviluppa analogamente la (2.5) in serie di Taylor intorno a $h = 0$, utilizzando le (2.6)
- confrontando le due espressioni così ottenute si ottiene un sistema di equazioni. Dalla soluzione di tale sistema si ricavano le relazioni che legano tra loro i diversi coefficienti.

Tali relazioni non determinano i coefficienti in maniera univoca, pertanto per ogni ordine di sviluppo esistono diversi possibili algoritmi dello stesso grado. La scelta tra questi algoritmi è legata all'introduzione di ulteriori opportune restrizioni.

In particolare, la scelta dei parametri c_i fissa i nodi di integrazione, ovvero i punti in cui è valutata la derivata prima della funzione. Poiché nel nostro problema tale derivata non è nota analiticamente, ma va risolta numericamente passo dopo passo, utilizzeremo solo i punti $x_n, x_{n+1/2}, x_{n+1}$, il che equivale a limitare la variabilità dei c_i ai valori $0, \frac{1}{2}, 1$.

Inoltre, nella scelta dei coefficienti a_{ij} imporremo che $a_{ij} = 0$ per $i \leq j$, in modo che nella (2.6), quando si calcola l' i -esimo termine k , esso dipenda solo dai k già calcolati (in altre parole la matrice A_{ij} dei coefficienti a_{ij} dev'essere triangolare bassa in senso stretto). Questa condizione distingue i metodi esplicativi da quelli impliciti, che richiedono ad ogni stadio la soluzione di un sistema per la determinazione del k_i corrispondente.

Utilizzeremo due algoritmi di Runge-Kutta differenti, uno del terzo ordine e uno del quarto ordine.

Algoritmo di Runge-Kutta del 3° ordine

Un'opportuna scelta per i coefficienti conduce al seguente algoritmo del terzo ordine [Koo86] [Nob03]:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\
 k_3 &= hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) + O(h^4)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

La formula (2.7) corrisponde alla regola di Cavalieri-Simpson per la quadratura numerica [Koo86]. Questo algoritmo richiede tre valutazioni della funzione f per ogni passo.

Algoritmo di Runge-Kutta del 4° ordine

Una scelta molto diffusa dei coefficienti per un algoritmo del quarto ordine è la seguente [Koo86] [Nob03]:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
 k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\
 k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\
 k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Questo algoritmo richiede quattro valutazioni della funzione f per ogni passo.

2.3 Sistemi di due equazioni differenziali

Torniamo ora al sistema di due equazioni differenziali (1.39). Quello che cambia, rispetto al caso singolo, è essenzialmente che, presa una delle due funzioni incognite, la sua derivata prima non è nota a priori sull'intervallo di integrazione, in quanto dipende dall'altra funzione incognita.

Tuttavia possiamo utilizzare per entrambe le equazioni lo stesso reticolo di punti di integrazione e procedere di pari passo con le due soluzioni numeriche, in modo che ad ogni stadio i valori calcolati per una funzione siano immediatamente disponibili per la valutazione dell'altra.

Ad esempio l'algoritmo di Eulero diventa:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + hf(x_n, \phi_n) \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + hg(x_n, q_n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

con

$$f = -x^2\phi^\alpha \quad (2.10)$$

$$g = qx^{-2} \quad (2.11)$$

e si vede che a destra dell'uguale compaiono solo quantità note.

Nel caso in cui l'integrazione al passo n -esimo richieda la valutazione della funzione derivata non solo nel punto x_n , ma anche nel punto x_{n+1} o in punti intermedi, come nel caso degli altri tre algoritmi considerati, è necessario che il calcolo delle due soluzioni proceda in simultanea anche per ciascuno di tali stadi intermedi. Ad esempio nel caso dell'algoritmo di Eulero a tre punti si ha:

$$\begin{aligned} q_{n+1}^* &= q_n + hf(x_n, \phi_n) \\ \phi_{n+1}^* &= \phi_n + hg(x_n, q_n) \\ q_{n+1} &= q_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, \phi_n) + f(x_{n+1}, \phi_{n+1}^*)] \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \frac{1}{2}h[g(x_n, q_n) + g(x_{n+1}, q_{n+1}^*)] \end{aligned} \quad (2.12)$$

e analogamente per gli algoritmi di Runge-Kutta.

I listati degli algoritmi implementati in linguaggio FORTRAN sono riportati in appendice.

Capitolo 3

Risultati dell'integrazione numerica

Utilizziamo gli algoritmi presentati nel capitolo precedente per risolvere l'equazione di Lane-Emden e valutiamo i risultati ottenuti.

3.1 Confronto tra algoritmi

Un metodo per valutare l'accuratezza dei quattro algoritmi è quello di risolvere numericamente l'equazione per quei valori di α per cui conosciamo anche una soluzione analitica, in modo da poter effettuare un confronto. In particolare risulta che [Co07] [Wei72]:

- per $\alpha = 0$ $\phi = 1 - \frac{x^2}{6}$
- per $\alpha = 1$ $\phi = \frac{\sin(x)}{x}$
- per $\alpha = 5$ $\phi = (1 + \frac{x^2}{3})^{-1/2}$

Nelle tabelle seguenti sono riportati per valori crescenti di x gli scarti delle soluzioni numeriche da quella analitica per i quattro algoritmi, dove abbiamo definito come scarto la quantità:

$$\Delta = \phi_{analitica} - \phi_{numerica}$$

Il passo utilizzato negli algoritmi risolutivi è $h = 0.1$

- $\alpha = 0$

x	Eulero	Eulero3	Runge3	Runge4
0.1	0.00167	0.00042	0.00084	-0.00041
0.2	0.00417	-0.00132	0.00080	-0.00044
0.5	0.01286	-0.00887	-0.00160	-0.00045
1.0	0.02846	-0.02348	-0.00779	-0.00045
1.5	0.04447	-0.03889	-0.01483	-0.00046
2.0	0.06067	-0.05465	-0.02223	-0.00045
4.0	0.12621	-0.11908	-0.05329	-0.00045
7.0	0.22528	-0.21725	-0.10144	-0.00045
10.0	0.32469	-0.31608	-0.15026	-0.00045

- $\alpha = 1$

x	Eulero	Eulero3	Runge3	Runge4
0.1	0.00167	0.00042	0.00084	-0.00041
0.2	0.00415	-0.00133	0.00078	-0.00044
0.5	0.01242	-0.00879	-0.00157	-0.00043
1.0	0.02386	-0.02185	-0.00666	-0.00038
1.5	0.02826	-0.03221	-0.01006	-0.00030
2.0	0.02344	-0.03793	-0.01035	-0.00021
4.0	-0.04587	-0.01296	0.01020	0.00009
7.0	0.04225	0.01068	-0.00888	-0.00005
10.0	-0.03708	-0.00914	0.00707	0.00002

- $\alpha = 5$

x	Eulero	Eulero3	Runge3	Runge4
0.1	0.00166	0.00041	0.00083	-0.00042
0.2	0.00410	-0.00137	0.00076	-0.00043
0.5	0.01079	-0.00848	-0.00144	-0.00037
1.0	0.01154	-0.01730	-0.00393	-0.00019
1.5	0.00146	-0.02002	-0.00310	-0.00004
2.0	-0.01028	-0.01918	-0.00090	0.00005
4.0	-0.03109	-0.01124	0.00499	0.00012
7.0	-0.03287	-0.00578	0.00653	0.00009
10.0	-0.03117	-0.00372	0.00648	0.00007

La tendenza generale, ovviamente, è quella di una crescita degli scarti all'aumentare di x , seppur con alcune oscillazioni. Risulta inoltre evidente che,

come atteso, l'algoritmo di Runge-Kutta del quarto ordine fornisce risultati più accurati rispetto agli altri metodi.

Un riscontro visivo di tale differenza si può avere osservando le figure seguenti. La fig.(3.1) rappresenta gli scarti per i quattro algoritmi in funzione di x , mentre nella fig.(3.2) sono messe a confronto la soluzione analitica e quelle numeriche ottenute rispettivamente con l'utilizzo dell'algoritmo di Eulero e di quello di Runge-Kutta del quarto ordine (con $h = 0.1$).

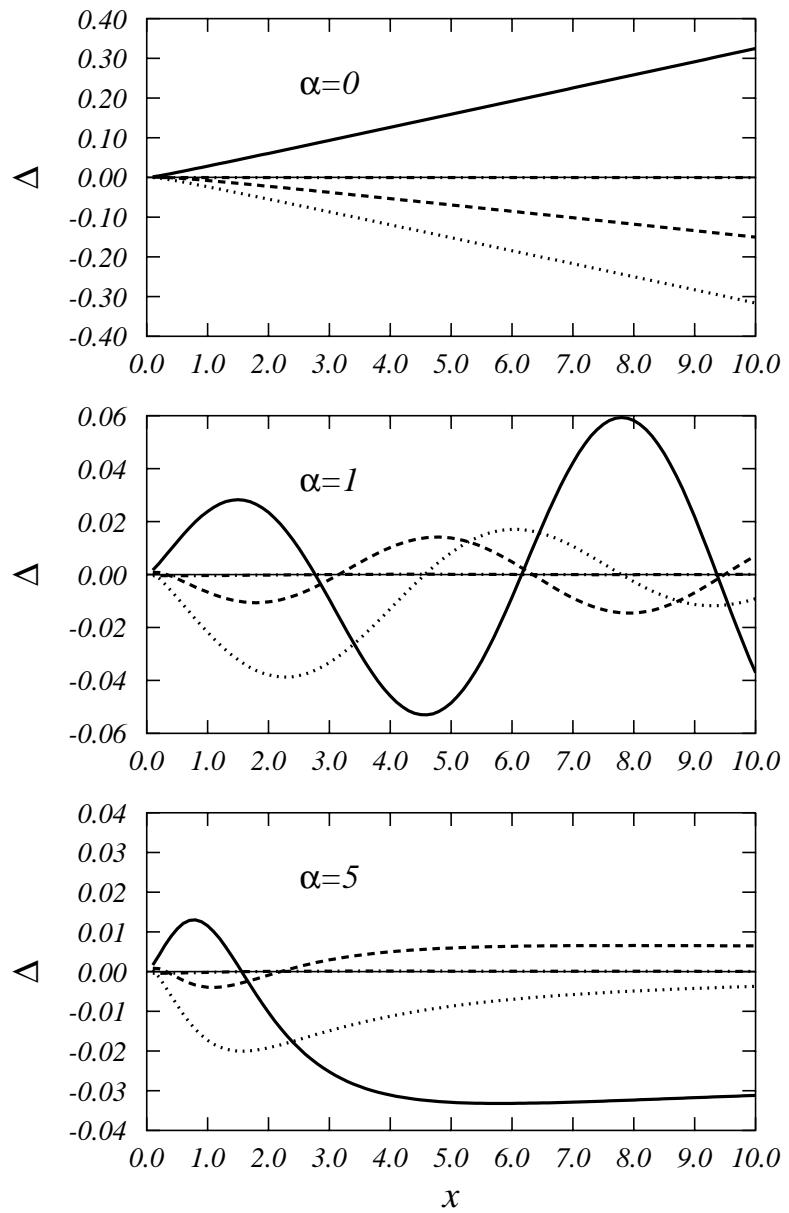


Figura 3.1: Scarti delle soluzioni numeriche da quella analitica per $\alpha = 0, 1$ e 5 . La linea continua corrisponde all'algoritmo di Eulero, quella tratteggiata all'algoritmo di Runge del 3° ordine, i puntini all'algoritmo di Eulero a 3 punti, il tratto-punto all'algoritmo di Runge del 4° ordine.

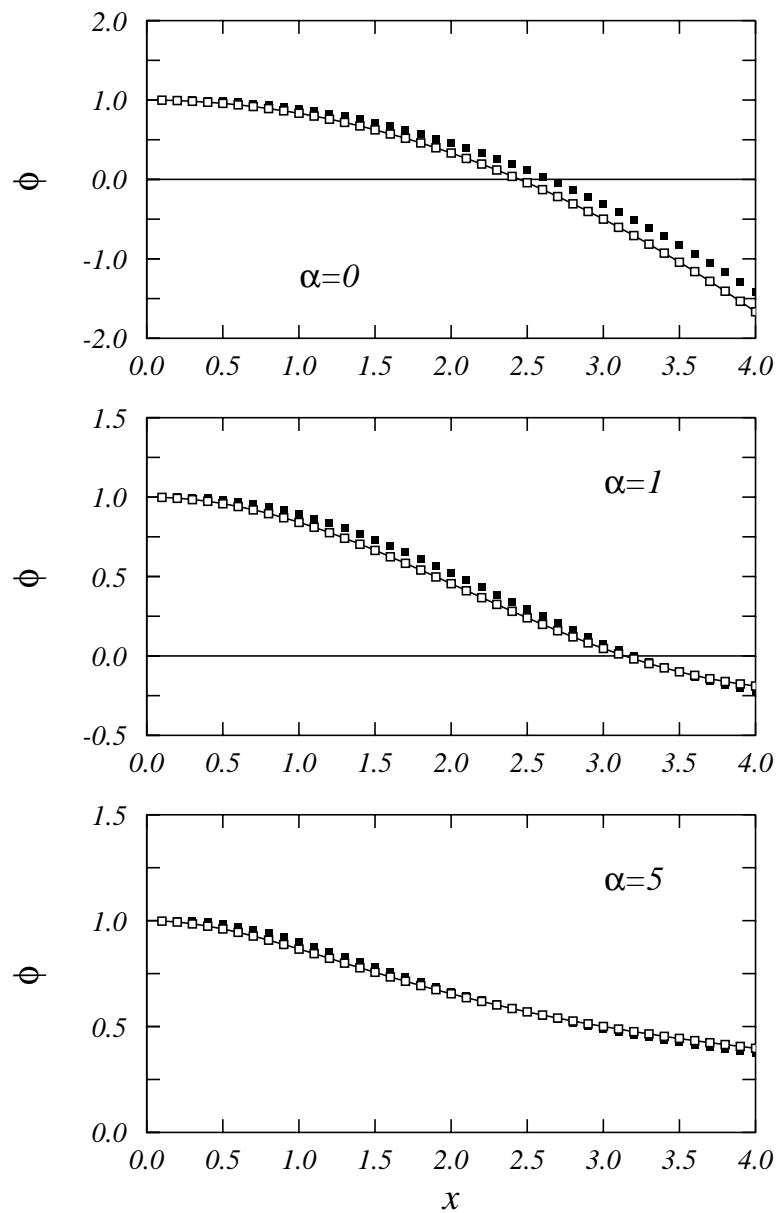


Figura 3.2: Confronto tra soluzione analitica (linea continua) e soluzioni numeriche ottenute con gli algoritmi di Eulero (quadrati neri) e Runge-Kutta del 4° ordine (quadrati bianchi) per $\alpha = 0, 1$ e 5

Dalla fig.(3.1) si nota chiaramente come l'algoritmo di Runge-Kutta del 4° ordine dia risultati nettamente più accurati degli altri per gli indici presi in considerazione; inoltre nella fig.(3.2) è evidente la sovrapposizione quasi perfetta dei punti ottenuti con tale algoritmo rispetto alla linea continua raffigurante la soluzione analitica. Dunque, tenendo conto di quanto detto, nel procedere dei calcoli utilizzeremo sempre, salvo specificazioni ulteriori, l'algoritmo di Runge-Kutta del 4° ordine.

3.2 Scelta del passo di integrazione

Un altro aspetto di cui tener conto è quello relativo alla scelta del passo di interazione. Infatti, se da un lato una riduzione del valore di h consente di ridurre gli errori di discretizzazione, d'altra parte l'aumento del numero di iterazioni, oltre a causare un maggior costo computazionale, può rendere l'algoritmo instabile rispetto alla propagazione degli errori di arrotondamento. Dal momento che, stante la natura del problema in esame, il costo computazionale non costituisce un limite (esso rimane in ogni caso modesto), ci interesseremo soltanto della seconda questione. Consideriamo ancora il caso $\alpha = 1$, particolarmente significativo in quanto la soluzione analitica è una funzione oscillante, e il caso $\alpha = 5$, per cui la funzione è monotona decrescente. Rispetto a quanto visto in precedenza diminuiamo di cento volte il passo d'interazione h , portandolo da **0.1** a **0.001**, e confrontiamo le soluzioni numeriche e quelle analitiche per un insieme crescente di valori di x .

- $\alpha = 1$

x	numerica	analitica
0.001	0.9999998	0.9999999
2.000	0.4546487	0.4546487
4.000	-0.1892005	-0.1892006
6.000	-0.0465693	-0.0465692
8.000	0.1236696	0.1236698
10.000	-0.0544019	-0.0544021

- $\alpha = 5$

x	numerica	analitica
0.001	0.9999998	0.9999998
2.000	0.6546536	0.6546537
4.000	0.3973596	0.3973597
6.000	0.2773501	0.2773501
8.000	0.2116037	0.2116037
10.000	0.1706641	0.1706640

L'errore massimo in questo caso è dell'ordine di 10^{-7} , con un considerevole miglioramento rispetto al caso precedente, in cui risultava di 10^{-4} (vedi pag.18). Ne concludiamo che, almeno a questo livello, gli errori di arrotondamento possono essere trascurati. In realtà, per gli obiettivi prefissi, un'accuratezza fino alla settima cifra decimale risulta persino eccessiva. Preferiamo, dunque, scegliere un passo di interazione intermedio, pari a **0.01**, onde evitare di dover maneggiare una mole eccessiva di dati. Di seguito se non ulteriormente specificato, si darà per scontato l'uso di tale valore negli algoritmi risolutivi.

3.3 Soluzioni numeriche

Avendo scelto l'algoritmo e il passo di interazione procediamo a risolvere l'equazione di Lane-Emden al variare di α . Alcune soluzioni, per un insieme di indici interi e seminteri, sono riportate nella figura seguente:

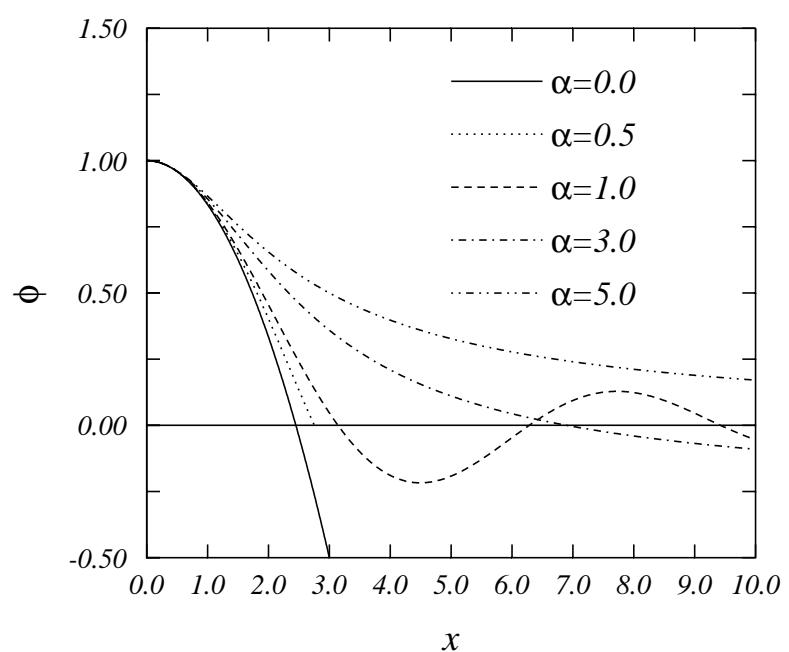


Figura 3.3: soluzioni numeriche per diversi indici α

Poiché le funzioni in questione rappresentano, a meno di costanti dimensionali, la densità della stella, la parte del grafico al di sotto dell'asse x ha un significato puramente formale. Inoltre, ovviamente, le soluzioni con α semintero si interrompono in corrispondenza dell'asse delle ascisse, in quanto il termine $\phi(x)^\alpha$ richiede che sia $\phi > 0$.

E' possibile osservare come tutte le funzioni siano monotone decrescenti almeno fino al primo zero. La soluzione corrispondente ad $\alpha = 5$ si annulla solo per $x \rightarrow \infty$

Dal punto di vista fisico quello che ci interessa è l'intersezione delle funzioni con l'asse x . Poiché in tale punto la densità si annulla, la sua ascissa si può interpretare, a meno di costanti, come il raggio della stella.

Per determinare questo 'raggio adimensionale' per un determinato esponente α abbiamo risolto numericamente l'equazione differenziale corrispondente e identificato la prima coppia di valori consecutivi di x per cui la funzione ϕ cambia di segno. Si ottiene così un intervallo, di ampiezza pari al passo di interazione h , all'interno del quale cade lo zero desiderato. A questo punto abbiamo stimato il valore cercato considerando il punto medio di tale intervallo. Seguendo questo procedimento è stata ottenuta la seguente tabella:

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
x_r	2.445	2.505	2.565	2.625	2.685	2.755	2.825	2.895	2.975	3.055
α	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
x_r	3.145	3.235	3.325	3.435	3.535	3.655	3.775	3.905	4.045	4.195
α	2.1	2.2	2.3	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
x_r	4.355	4.525	4.705	4.905	5.125	5.355	5.605	5.885	6.195	6.525
α	3.1	3.2	3.3	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
x_r	6.895	7.305	7.765	8.285	8.865	9.535	10.305	11.195	12.235	13.475
α	4.1	4.2	4.3	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9
x_r	14.975	16.815	19.135	22.135	26.166	31.846	40.414	54.822	83.825	171.490

Una cui rappresentazione grafica è la seguente:

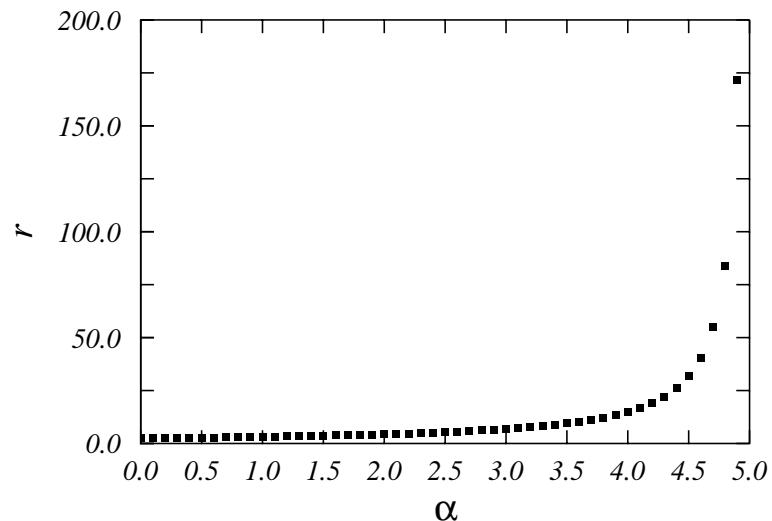


Figura 3.4: raggio (adimensionale) in funzione di α

E' possibile notare come il raggio della stella sia una funzione crescente dell'esponente α . Per $\alpha > 4.5$ esso diverge molto rapidamente.

Riportiamo inoltre i risultati, che ci saranno utili più avanti, per gli indici $n=3/2$ e $n=3$, corrispondenti ai casi non relativistico e ultrarelativistico:

n	x_R	$\phi'(x_R)$
$3/2$	3.655	-0.203
3	6.895	-0.042

Capitolo 4

Massa di Chandrasekar

A questo punto utilizziamo i risultati ottenuti per determinare la massa totale e il raggio della stella. Per il raggio è sufficiente invertire la definizione della quantità x dalla (1.33) e utilizzare la (1.32) per avere:

$$R = ax_r = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n} x_r \quad (4.1)$$

Mentre per la massa abbiamo dalla (1.29) :

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{x_r} x^2 \phi^n(x) dx$$

Sostituendo in quest'ultima espressione l'equazione di Lane-Enden (1.34) otteniamo

$$M = -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} x_r^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{x=x_r} \quad (4.2)$$

Le equazioni di stato (1.23) e (1.24) ricavate in precedenza per un gas di Fermi rientrano evidentemente nella forma generale dei politropi (1.27). Consideriamo il limite non relativistico: il valore dell'indice politropico Γ in questo caso è pari a $5/3$, da cui si ricava $n=3/2$. Sostituendo questi valori nelle (4.1) e (4.2) si ottiene:

$$R \propto \rho_c^{-1/6} \quad (4.3)$$

$$M \propto \rho_c^{1/2} \quad (4.4)$$

che combinate danno:

$$M \propto \frac{1}{R^3} \quad (4.5)$$

Nel limite relativistico, invece, si ha $\Gamma=4/3$, dunque $n=3$. La (4.2) si riduce a

$$M = -4\pi \left[\frac{K}{\pi G} \right]^{3/2} x_r^2 \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{x=x_r}$$

e si osserva che la massa non dipende dalla densità centrale. Questo valore costante di massa è noto come Massa di Chandrasekar.

Dal confronto con la (1.24) si vede che

$$K = \frac{\hbar c}{12\pi^2} (3\pi)^{4/3} \left(\frac{Y_e}{m_B} \right)^{4/3}$$

Consideriamo, a titolo esemplificativo, una stella costituita unicamente di carbonio: in questo caso particolare m_B è proprio uguale all'unità di massa atomica $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg [Sha83]; inoltre $Y_e = Z/A = 1/2$. Dunque il valore di K risulta calcolabile a partire da quello delle costanti fondamentali. Utilizzando i risultati numerici ottenuti nel capitolo precedente per $n=3$ si ottiene una stima della massa di Chandrasekar:

$$M \simeq 2.90 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

che in termini di masse solari ($1.99 \cdot 10^{30}$ kg) risulta $\simeq 1.456$ masse solari.

In stelle con massa superiore a questo limite la pressione di degenerazione non è sufficiente a bilanciare la forza di gravità e la stella va incontro ad altre trasformazioni.

Appendice A

Presentazione dei listati

I procedimenti descritti nel capitolo 2 sono stati implementati in linguaggio FORTRAN. Di seguito sono riportati i listati opportunamente commentati.

A.0.1 Procedure di acquisizione dati

I dati iniziali per tutti gli algoritmi sono:

- gli estremi dell'intervallo di integrazione "xmin" e "xmax"
- l'esponente " α "
- il passo di integrazione "dx"

memorizzati in un apposito file di testo. La subroutine 'input' che si occupa di leggere i dati da file è la seguente:

```
c-----
subroutine input (xmin,xmax,alpha,dx)
    implicit real*8 (a-h,o-p)
    open (unit=10,name='***.txt',status='OLD') !sostituire a *** il nome
                                                !del file di input
    read (10,100)
    read (10,100)
    read (10,*) xmin,xmax
    read (10,100)
    read (10,100)
    read (10,*) alpha
    read (10,100)
    read (10,100)
    read (10,*) dx
    close (10)
```

```

        write (*,200) xmin,xmax
        write (*,*) 
        write (*,300) alpha
        write (*,*) 
        write (*,400) dx
        return
100  FORMAT(1x)
200  FORMAT(' Gli estremi dell''intervallo sono: ',F6.3,' -- ',F6.3)
300  FORMAT(' La potenza della funzione phi è: ',F3.1)
400  FORMAT(' Il passo di iterazione è: ',F6.3)
      end subroutine input
c-----

```

A.0.2 Funzioni derivata prima

Le funzioni f e g definite nelle equazioni (2.10) e (2.11) sono implementate, per gli algoritmi di Eulero e Eulero a tre punti, nelle function 'effe' e 'gi':

```

c-----
      function effe(x,phi,alpha)
c-----
      implicit real*8 (a-h,o-p)

      effe=-x*x*phi**alpha

      return
      end
c-----
      function gi(x,qu)
c-----
      implicit real*8 (a-h,o-p)

      gi=qu/(x*x)

      return
      end
c-----

```

Per gli algoritmi di Runge di ordine tre e quattro, per ragioni di comodità, è stata utilizzata l'unica subroutine 'derivate':

```

c-----
      subroutine derivate(x,phi,alpha,qu,effe,gi)
c-----
      implicit real*8 (a-h,o-p)

      effe=-x*x*phi**alpha
      gi=qu/(x*x)

      return
      end
c-----

```

A.0.3 Inizializzazione

Le procedure di inizializzazione prevedono l'assegnazione dei valori iniziali alle funzioni ϕ e q , incognite del sistema (1.39), ed alle loro derivate f e g , rispettivamente indicate nel programma come 'phin', 'qun', 'effen', 'gin'. Alla variabile x è assegnato il valore xmin. Questa parte del programma, che contiene anche la chiamata alla subroutine di input, è identica per i quattro algoritmi:

```

c-----
      program *** !nome dell'algoritmo
      implicit real*8 (a-h,o-p)

      call input (xmin,xmax,alpha,dx)

      phin=1.0
      qun=0.
      effen=0.
      gin=0.
      x=xmin

c-----

```

A.0.4 Ciclo principale

Di seguito riportiamo il listato dei cicli principali dei quattro algoritmi, corrispondente all'avanzamento di un passo di integrazione.

Eulero

```
c-----
10    continue

    q=qun+dx*effe(x,phin,alpha)
    phi=phin+dx*gi(x,qun)

    x=x+dx

    phin=phi
    qun=q

    if (x.lt.xmax) goto 10  !ripete il ciclo sinché x<xmax
    stop
    end
c-----
```

Eulero a tre punti

```
c-----
10    continue

    qk1=effe(x,phin,alpha)
    phik1=gi(x,qun)

    x2=x+dx
    q2=qun+dx*qk1
    phi2=phin+dx*phik1
    qk2=effe(x2,phi2,alpha)
    phik2=gi(x2,q2)

    q=qun+0.5*dx*(qk1+qk2)
    phi=phin+0.5*dx*(phik1+phik2)

    x=x+dx

    phin=phi
    qun=q

    if (x.lt.xmax) goto 10
```

```

stop
end
c-----
Runge-Kutta del terzo ordine
c-----
phik1=dx*gin
qk1=dx*effen

x2=x+0.5*dx
phi2=phin+0.5*phik1
q2=qun+0.5*qk1
call derivate (x2,phi2,alpha,q2,effen,gin)
phik2=dx*gin
qk2=dx*effen

x3=x+dx
phi3=phin-phi1+2.0*phik2
q3=qun-q1+2.0*qk2
call derivate (x3,phi3,alpha,q3,effen,gin)
phik3=dx*gin
qk3=dx*effen

phi=phin+((phik1+4.0*phik2+phik3)/6.0)
q=qun+((qk1+4.0*qk2+qk3)/6.0)

x=x+dx
call derivate (x,phi,alpha,q,effen,gin)

phin=phi
qun=q

if (x.lt.xmax) goto 10
stop
end
c-----

```

Runge-Kutta del quarto ordine

```
c-----
```

```

10  continue

phik1=dx*gin
qk1=dx*effen

x2=x+0.5*dx
phi2=phin+0.5*phik1
q2=qun+0.5*qk1
call derivate (x2,phi2,alpha,q2,effen,gin)
phik2=dx*gin
qk2=dx*effen

phi3=phin+0.5*phik2
q3=qun+0.5*qk2
call derivate (x2,phi3,alpha,q3,effen,gin)
phik3=dx*gin
qk3=dx*effen

x4=x+dx
phi4=phin+phik3
q4=qun+qk3
call derivate (x4,phi4,alpha,q4,effen,gin)
phik4=dx*gin
qk4=dx*effen

phi=phin+((phik1+2.0*phik2+2.0*phik3+phik4)/6.0)
q=qun+((qk1+2.0*qk2+2.0*qk3+qk4)/6.0)

x=x+dx
call derivate (x,phi,alpha,q,effen,gin)

phin=phi
qun=q

if (x.lt.xmax) goto 10

stop
end
c-----

```

Bibliografia

- [Cha39] S. Chandrasekhar *An introduction to the study of Stellar Structure*, The University of Chicago, Chicago, Illinois (1939).
- [Co07] G. Co', *Note di Astrofisica Nucleare*, Università del Salento, Lecce, non pubblicato (2007).
- [Koo86] S. E. Koonin, D. C. Meredith, *Computational Physics*, Addison-Wesley, Redwood City (1986).
- [Lan77] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskij *Fisica statistica, Part 1. Vol. 5*, Editori Riuniti (1977)
- [Nob03] E. Nobile, *Dispense del corso di Termofluidodinamica Computazionale*, Università di Trieste, Trieste, non pubblicato (2003).
- [Sha83] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, Wiley VCH, New York (1983).
- [Wei72] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, New York (1972)