

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SALENTO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di laurea in Fisica

**Interazione di appaiamento
di rango finito
in nuclei semi-magici**

Relatore

Prof. Giampaolo Co'

Co-Relatore

Prof.ssa Marta Anguiano Millán

Laureanda

Enza Marra

ANNO ACCADEMICO 2008-2009

Eppur si muove...
(G. Galilei)

Introduzione

Nelle pagine che seguono approfondiremo il fenomeno dell'appaiamento (o pairing) che si presenta in molti sistemi a molticorpi formati da fermioni, particelle di spin semintero descritte dalla statistica di Fermi-Dirac, che mostrano una tendenza ad appaiarsi formando delle coppie. Questa caratteristica spiega il comportamento di alcune proprietà della materia a basse temperature, come ad esempio i superconduttori e i superfluidi.

Un fluido di atomi di He, composto da nuclei dell'isotopo ^3He , presenta una transizione da fluido normale a superfluido per particolari valori di basse temperature. Le proprietà dell'elio fermionico superfluido, assenza di viscosità e conducibilità termica infinita, sono spiegabili ipotizzando l' ^3He composto da bosoni e non da fermioni. Il meccanismo che porta alla superfluidità è simile a quello che conduce alla superconduttività. Infatti coppie di fermioni si legano e formano un condensato di bosoni.

La formazione di coppie bosoniche è l'idea di base per la descrizione della superconduttività nei metalli fornita dalla teoria BCS, dalle iniziali dei tre ricercatori (Bardeen, Cooper e Schrieffer) che la formularono nel 1957.

Come sarà discusso nel Capitolo 1, anche i nuclei presentano numerosi fenomeni che indicano la formazione di coppie di nucleoni, dette di Cooper. Per questa ragione la formulazione della teoria BCS è stata estesa per poter trattare anche sistemi nucleari.

Il formalismo generale della teoria BCS sarà presentato nel Capitolo 2.

Le dimensioni dei metalli semiconduttori e dei fluidi quantistici sono maggiori per ordini di grandezza rispetto alla distanza tipica che separa due singoli costituenti dei sistemi in esame, ovvero atomi nel primo caso ed elettroni nel secondo.

Perciò, questi sistemi sono considerati infiniti e godono di invarianza traslazionale.

Il nucleo atomico non può essere descritto come un sistema infinito. È quindi necessario specializzare le equazioni BCS al caso di sistemi finiti che godono però di invarianza rotazionale.

La formulazione delle equazioni BCS per sistemi nucleari verrà presentata nel Capitolo 3.

I fenomeni di pairing non vengono descritti da teorie effettive di campo medio come, ad esempio, la teoria Hartree-Fock. La teoria BCS dà per scontata l'esistenza di un campo medio ed ipotizza, in aggiunta, il termine di pairing.

Normalmente l'interazione utilizzata per formare coppie di Cooper è diversa da quella che produce il campo medio.

Questa procedura è utilizzata per comodità, ma non ha fondamento teorico. In realtà sia l'interazione di pairing sia quella di campo medio sono generate dalla stessa interazione tra due nucleoni.

Nella prospettiva di sviluppare una teoria unificata che tratti sia il campo medio sia il pairing con la stessa interazione, abbiamo sviluppato le equazioni per interazioni a rango finito.

Queste interazioni sono molto più simili alle interazioni macroscopiche nucleone-nucleone rispetto alle interazioni a zero range. Mostriamo comunque i vantaggi dell'uso di interazioni a raggio finito per trattare il pairing.

I risultati dei nostri calcoli sono presentati nel Capitolo 4.

Prima discuteremo della stabilità dei risultati rispetto ai cambiamenti dei parametri di input. Poi discuteremo dell'effetto del pairing su un insieme di quantità che caratterizzano lo stato fondamentale dei nuclei pari-pari. A titolo d'esempio studieremo l' ^{18}O e il ^{24}Mg .

Come esempio di applicazione della teoria BCS, analizzeremo la catena isotopica del Ca, studiando l'evoluzione delle proprietà del pairing da una shell chiusa ad un'altra shell chiusa.

Concluderemo nel Capitolo 4.5, riassumendo i risultati più importanti della nostra indagine.

Indice

1	Fenomeni di pairing nei nuclei	2
1.1	Spin nucleari	2
1.2	Gap di energia nello spettro di eccitazione	5
1.3	Effetto pari-dispari sulle energie di legame	5
1.4	Il fenomeno del backbending	8
1.5	Momenti d'inerzia	11
2	La teoria BCS nei nuclei	13
2.1	Le quasi-particelle	13
2.2	Le trasformazioni di Bogoliubov-Valatin	14
2.3	Il modello Bardeen-Cooper-Schrieffer	17
2.4	Le equazioni BCS	19
3	Equazioni BCS in base sferica	25
3.1	Formulazione del principio variazionale in base sferica	26
3.2	Soluzione numerica delle equazioni BCS	28
3.3	La matrice densità	29
3.4	La distribuzione dei momenti	31
3.5	Densità di pairing	32
3.6	Matrice densità a due corpi (TBDF)	34
4	Risultati	35
4.1	Base di particella singola	35
4.2	Interazioni di pairing	37
4.3	Effetti del pairing	45
4.4	Il pairing è una correlazione a corto raggio?	51
4.5	Risultati BCS per la catena degli isotopi del Calcio	58
	Conclusioni	61
A	Rappresentazione dei Numeri di Occupazione	64
A.1	Operatori di creazione e di distruzione	64
A.2	Teorema di Wick	66
B	Lo stato fondamentale delle quasi-particelle	68

INDICE	1
C L'elemento di matrice di pairing	70
C.1 Teorema di Wigner-Eckart	71
D La base di particella singola	74
E Risultati BCS per gli isotopi del Calcio	76
Ringraziamenti	81
Bibliografia	84

Capitolo 1

Fenomeni di pairing nei nuclei

In questo capitolo introduttivo presenteremo alcune evidenze sperimentali che mostrano la tendenza dei nucleoni a formare coppie di momento angolare totale nullo. In analogia con la teoria della superconduttività, queste coppie sono dette *coppie di Cooper*. I fatti sperimentali che hanno fatto maturare l'idea del termine di pairing all'interno dei nuclei, coinvolgono diversi aspetti.

1.1 Spin nucleari

Consideriamo l'hamiltoniana che descrive un sistema di A particelle, nel nostro caso nucleoni,

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + V(i, \dots, A) \quad (1.1)$$

dove T è l'operatore di energia cinetica e V il termine di interazione. Se ci limitiamo a considerare interazioni a due corpi, possiamo scrivere l'hamiltoniana nella forma

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i, j) \quad (1.2)$$

Aggiungiamo e togliamo all'hamiltoniana (1.2) un termine di campo medio $U(i)$ che agisce su ogni singolo nucleone, e otteniamo

$$H = \sum_i \left[-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U(i) \right] + H_{\text{res}} = H_0 + H_{\text{res}} \quad (1.3)$$

dove l'interazione residua è definita come

$$H_{\text{res}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(i, j) - \sum_i U(i) \quad (1.4)$$

Il modello a particelle indipendenti consiste nel trascurare il termine di interazione residua. In questo modo l'hamiltoniana del sistema a multicorpi diventa somma di hamiltoniane a un corpo, indipendenti l'una dall'altra. Il problema a molti corpi viene ridotto alla soluzione di molti problemi ad un corpo. In analogia al caso

atomico, la soluzione del problema ad un corpo genera stati di singola particella caratterizzati da energia e momento angolare.

La figura seguente mostra i livelli energetici ottenuti nel modello a particelle indipendenti utilizzando un potenziale centrale con un termine di spin-orbita [Ber07]. Il termine di spin-orbita produce potenziali diversi per i casi in cui il momento angolare orbitale l e lo spin s del nucleone siano allineati o anti-allineati. La degenerazione energetica di un livello di momento angolare l viene parzialmente rimossa a seconda del valore del momento angolare totale $j = l \pm 1/2$. La degenerazione di ogni livello dello schema è adesso $2j + 1$.

La Fig. 1.1 mostra come i vari livelli si raggruppino in strati, detti shell, e come i numeri magici emergano non tanto dal riempimento di ogni singolo livello, ma dal riempimento dello strato.

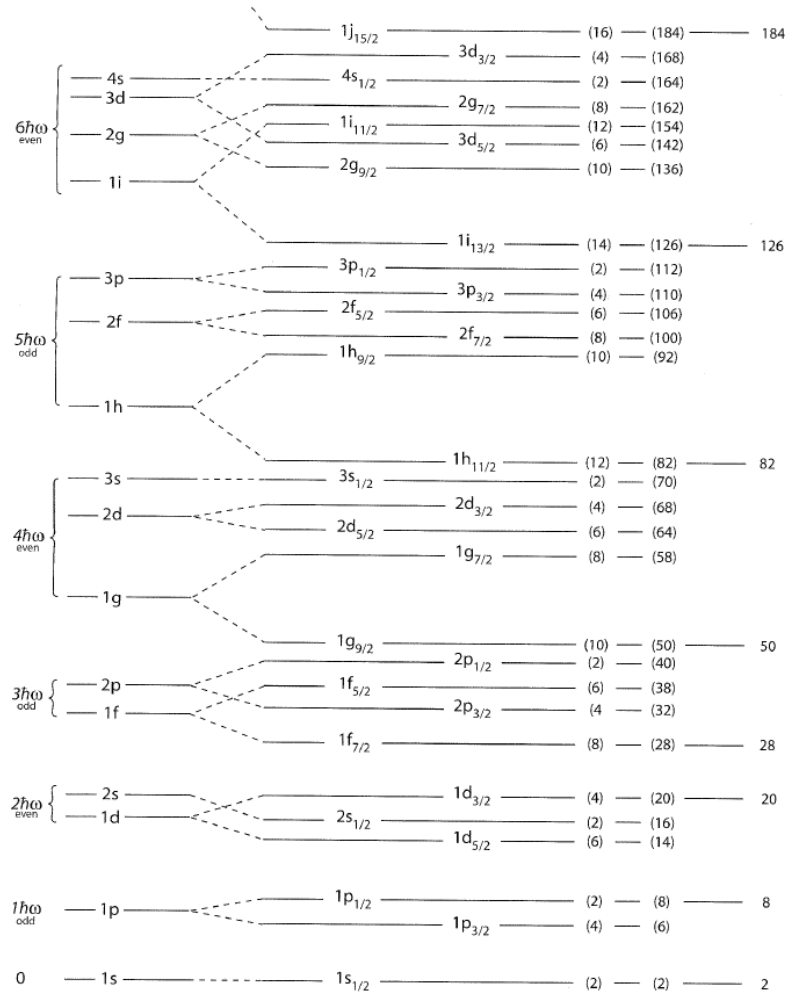


Figura 1.1: Livelli energetici di singola particella del modello a shell

Il modello a strati ha un grande successo nel prevedere la sequenza empirica dei numeri magici, ma fallisce nella previsione dello spin dei nuclei. I dati osservativi indicano che, senza alcuna eccezione, **tutti i nuclei pari-pari hanno spin nullo**.

Nel modello a shell così presentato questo fatto è inspiegabile. In questo modello i valori possibili del momento angolare di ogni nucleo sono quelli che si ottengono sommando i momenti angolari dei vari livelli.

Per potere spiegare questo dato osservativo, è necessario andare oltre il modello a shell, e considerare un termine di interazione che si trova in H_{res} , il termine di appaiamento, o di pairing. Questo termine attrae nucleoni della stessa specie e aumenta l'energia di legame del sistema. Dal punto di vista geometrico la situazione più efficiente è quella in cui i due nucleoni si trovano sullo stesso livello con momento angolare j , e si accoppiano in modo da avere momento angolare totale nullo

$$|JM\rangle = |00\rangle = \sum_{mm'} \langle jmjm'|00\rangle |jm\rangle |jm'\rangle \quad (1.5)$$

dove abbiamo indicato con $\langle | \rangle$ il coefficiente di Clebsch-Gordan.

Aggiungendo all'hamiltoniana un termine di interazione di pairing, tutti i nucleoni si accoppiano, quindi i nuclei pari-pari risultano essere formati da coppie di nucleoni con spin zero e tutto il sistema ha spin zero, come osservato. In questo quadro, lo spin dei nuclei pari-dispari è determinato dal momento angolare j dell'ultimo nucleone spaiato. Anche in questo caso le previsioni del modello sono ben verificate, come mostrato nella Fig. 1.2. Le poche discrepanze tra valori previsti ed osservati sono dovute alla difficoltà di identificare il livello su cui si trova il nucleone, e non invalidano la teoria.

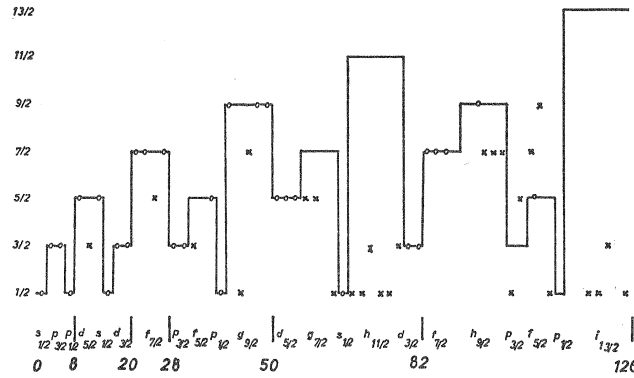


Figura 1.2: Spin di nuclei con un numero dispari di neutroni. La linea continua rappresenta il valore dello spin secondo il modello di particella singola. I cerchetti sono i valori sperimentali in accordo con la teoria, le crocette rappresentano invece, i valori di spin osservati in disaccordo con le previsioni teoriche.

Abbiamo visto che la formazione di coppie di Cooper non è prevista nel modello a strati. In realtà questo effetto viene sempre trattato all'interno di una teoria di campo medio in cui sono le coppie, e non i singoli nucleoni, a muoversi indipendentemente una dall'altra.

1.2 Gap di energia nello spettro di eccitazione

I nuclei pari-pari e i pari-dispari mostrano una marcata differenza nello spettro di eccitazione. A titolo d'esempio, mostriamo nella Fig. 1.3 lo spettro di eccitazione di alcuni isotopi dello stagno.

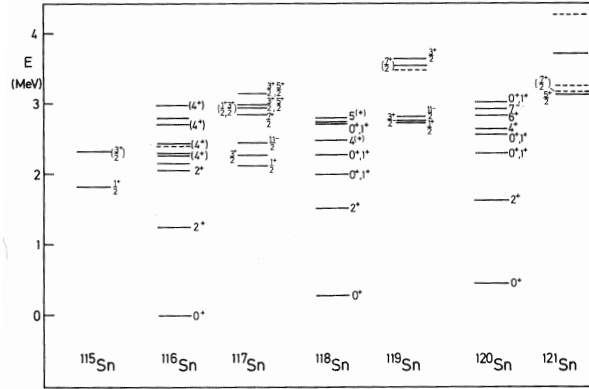


Figura 1.3: Spettri di eccitazione di alcuni isotopi dello stagno. Le energie sono relative allo stato fondamentale dello ^{116}Sn .

Nello spettro dei nuclei pari-pari il primo stato eccitato appare ad energie maggiori che nel caso di nuclei pari-dispari. Questa differenza non è descritta dal rigido modello a strati, o a shell. In questo modello, gli stati eccitati sono ottenuti promuovendo nucleoni da livelli di singola particella al di sotto delle superficie di Fermi, completamente occupati nel modello a shell, a livelli al di sopra la superficie di Fermi, totalmente vuoti nel modello. Dato che livelli ed energie di singola particella sono identici per tutti gli isotopi considerati, non c'è nessuna ragione per avere spettri di eccitazione differenti per nuclei pari-pari e pari-dispari.

La differenza tra gli spettri può essere facilmente spiegata considerando la presenza dell'interazione di pairing. In nuclei pari-dispari il nucleone spaiato viene promosso da sotto a sopra la superficie di Fermi. In nuclei pari-pari non ci sono nucleoni spaiati, e i nucleoni sono tutti accoppiati. In questo caso prima di eccitare il sistema è necessario rompere la coppia, oppure eccitare la coppia stessa. Anche in quest'ultima ipotesi, l'energia necessaria per promuovere due nucleoni in stati al di sopra dell'energia di Fermi è superiore a quella richiesta per un nucleone singolo.

1.3 Effetto pari-dispari sulle energie di legame

L'energia di legame di un nucleo con A nucleoni e Z protoni è definita dalla relazione seguente:

$$B(A, Z) = ZM_p + NM_n - M(A, Z) \quad (1.6)$$

dove M_p e M_n sono rispettivamente la massa del protone e del neutrone, mentre $M(A, Z)$ è la massa del nucleo.

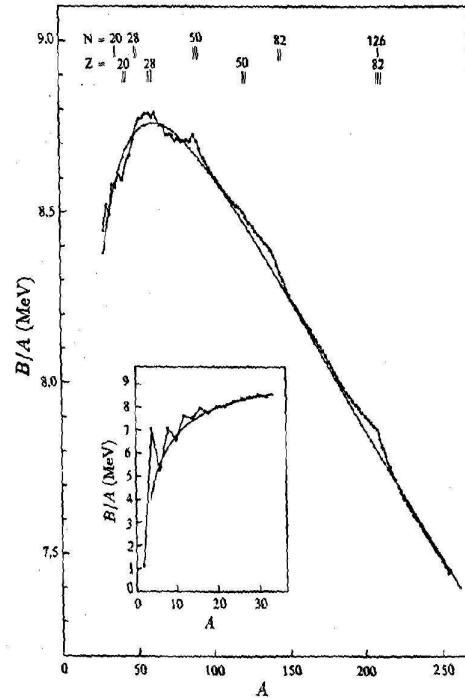


Figura 1.4: Valori sperimentali dell'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa. La linea rappresenta le previsioni fatte dalla formula semi-empirica della massa (1.8).

Studiando l'andamento dell'energia di legame per nucleone, si vede che essa è approssimativamente costante per nuclei medio pesanti, come si vede in Fig. 1.4. Intuitivamente quindi, ci si aspetterebbe per questi nuclei, una relazione del tipo

$$B(A) \simeq \frac{1}{4} [B(A+1, Z) + B(A+1, Z+1) + B(A-1, Z) + B(A-1, Z-1)] \quad (1.7)$$

$\frac{100}{44}\text{Ru}_{56}$	$\frac{101}{44}\text{Ru}_{57}$	$\frac{101}{45}\text{Rh}_{56}$	$\frac{99}{44}\text{Ru}_{55}$	$\frac{99}{43}\text{Te}_{56}$
861.9282	868.7303	867.406	852.2551	852.743

Tabella 1.1: Energie di legame in MeV per i nuclei attorno al nucleo $\frac{100}{44}\text{Ru}_{56}$ [Aud93].

Sperimentalmente invece si trova che, per nuclei pari-pari, l'energia di legame è maggiore della media aritmetica dell'energia di legame dei nuclei dispari ad esso adiacenti.

A titolo d'esempio, in Tab. 1.1 mostriamo le energie di legame del nucleo $\frac{100}{44}\text{Ru}_{56}$ e di quelli adiacenti presi dalla compilazione della referenza [Aud93]. Il valore ottenuto utilizzando l'espressione Eq.(1.7) è 860.283 MeV, da confrontarsi con il valore misurato di 861.9282 MeV.

Un altro esempio dell'effetto pari-dispari sull'energia di legame è mostrato in Fig. 1.5. Nella figura a sinistra sono mostrate le energie di legame per gli isobari con

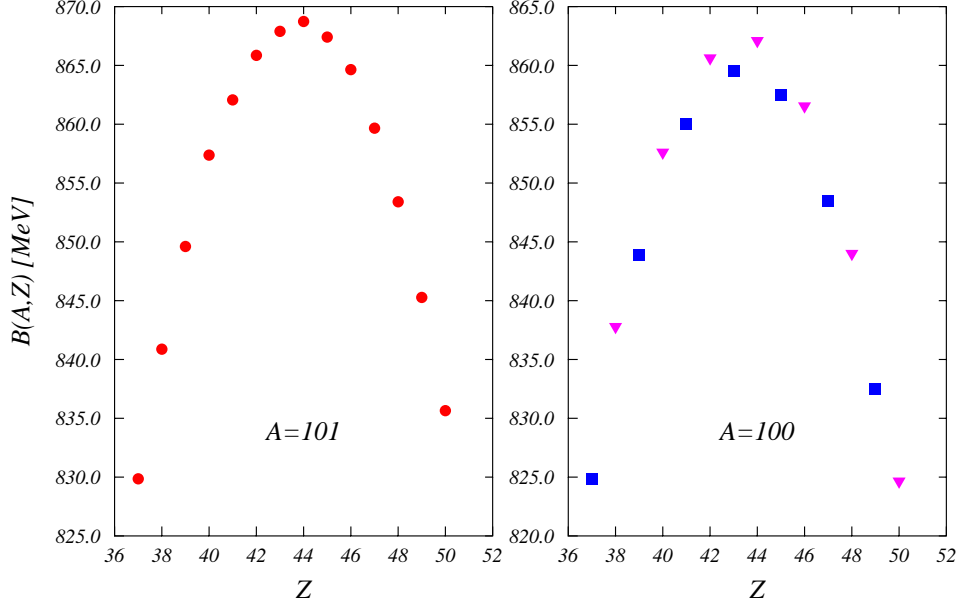


Figura 1.5: Energie di legame per isobari di massa 101 (pari-dispari) e di massa 100. In questo caso i triangoli indicano i nuclei pari-pari ed i quadrati i nuclei pari-dispari. I valori delle energie di legame sono presi dalla compilazione di Ref. [Aud93].

$A=101$, ovviamente sono tutti pari-dispari. Questi dati mostrano un andamento che può essere ben rappresentato da una parabola. Nella parte destra della figura sono presentate le energie di legame degli isobari con $A=100$. In questo caso sono presenti nuclei pari-pari, le cui energie di legame sono rappresentate dai triangoli, e dispari-dispari, le cui energie di legame sono rappresentate dai quadrati. In questo caso i dati sono descritti da due parabole, una per i pari-pari, ed una per i dispari-dispari. La parabola dei nuclei pari-pari ha un massimo maggiore di quello dei nuclei dispari dispari.

I valori delle energie di legame sono descritti da formule semiempiriche della massa come quella Bethe e Weizsäcker [Sha74]:

$$B(N, Z) = a_V A + a_S A^{\frac{2}{3}} + a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_I \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (1.8)$$

In questa espressione accanto ai termini di volume, di superficie, di Coulomb e di simmetria, rispettivamente a_V , a_S , a_C e a_I , c'è un termine di pairing $\delta(A)$. Al di là degli specifici valori dei parameteri usati per il fit ai dati sperimentali, il termine di appaiamento è costruito in modo da aumentare l'energia di legame per i nuclei

pari-pari ripetuto ai pari-dispari e diminuirla per i dispari-dispari

$$\delta(A) = \begin{cases} \Delta & \text{per nuclei pari-pari} \\ 0 & \text{per nuclei pari-dispari} \\ -\Delta & \text{per nuclei dispari-dispari} \end{cases} \quad (1.9)$$

dove Δ è un numero positivo.

L'espressione (1.8) della formula semi-empirica della massa è una funzione quadratica in Z per A fissato. Questa espressione produce una singola parabola per gli isobari con numero di massa dispari. Il termine di pairing (1.9) produce due parabole per gli isobari con A pari. Una parabola per i pari-pari ed una per i dispari-dispari, così come indica l'evidenza sperimentale.

1.4 Il fenomeno del backbending

Gli spettri di rotazione dei nuclei deformati vengono studiati ipotizzando che il nucleo sia un rotatore rigido [Rin80]. Consideriamo un nucleo pari-pari, con spin zero, che abbia però una deformazione permanente. Supponiamo inoltre che il nucleo goda di una simmetria rotazionale attorno all'asse z . Per questo motivo, la scelta degli assi x e y è arbitraria nel piano ortogonale a z .

Dal punto di vista della meccanica quantistica la rotazione attorno all'asse di simmetria non è definita. La simmetria del problema implica che la funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r})$ che descrive il nucleo sia indipendente dall'angolo di rotazione ϕ rispetto all'asse z . Se L_z è la componente dell'operatore momento angolare di rotazione attorno all'asse z si ha che:

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial \Psi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (1.10)$$

Ovviamente le rotazioni attorno ad assi perpendicolari all'asse di simmetria sono permesse. Supponendo che il nucleo possenga un momento angolare di rotazione L , l'espressione classica dell'energia di rotazione è:

$$H_{rot} = \frac{\mathbf{L}^2}{2\mathcal{I}} \quad (1.11)$$

dove \mathcal{I} è il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione.

Passando alla meccanica quantistica, utilizzando il principio di corrispondenza, l'equazione agli autovalori che descrive la rotazione è:

$$\frac{\mathbf{L}^2}{2\mathcal{I}} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (1.12)$$

dove adesso \mathbf{L}^2 è un operatore. Autostati dell'operatore di rotazione sono le armoniche sferiche $Y_{JM}(\theta, \phi)$:

$$\mathbf{L}^2 Y_{JM}(\theta, \phi) = L(L+1) \hbar^2 Y_{LM}(\theta, \phi) \quad \text{con } L = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

La parità delle armoniche sferiche è $(-1)^L$. Il nucleo che stiamo considerando è simmetrico per riflessioni nel piano (x, y) . Le armoniche sferiche con L dispari

cambiano segno per riflessioni in questo piano, quindi non possono essere autostati del problema preso in esame. Per questo motivo sono permessi soltanto valori pari di L . Utilizzando le due equazioni precedenti gli autostati dell'energia di rotazione sono

$$E_{rot}(L) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} L(L+1) \quad L = 0, 2, 4, \dots \quad (1.14)$$

L'espressione precedente riproduce molto bene lo spettro di rotazione a basse energie e a bassi valori del momento angolare [Rin80, Ber07]. Dall'analisi dello spettro è possibile risalire al valore del momento d'inerzia \mathcal{I} del nucleo.

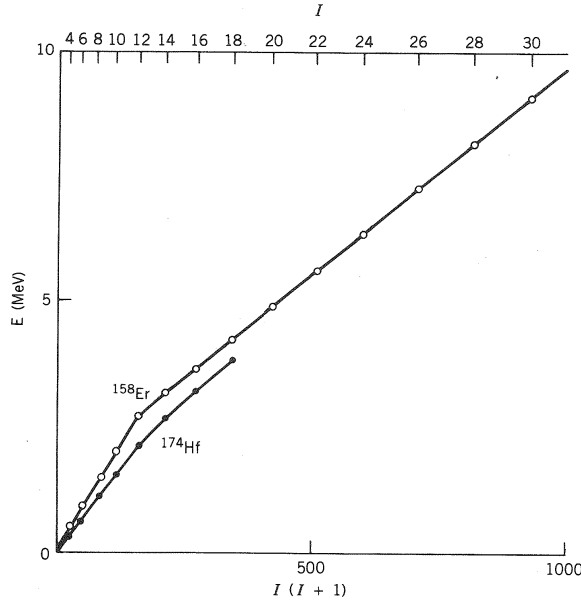


Figura 1.6: Energie di rotazione di ^{158}Er e ^{174}Hf .

Questa trattazione è basata sull'ipotesi che il nucleo sia un corpo rigido e che di conseguenza durante la rotazione il valore del momento d'inerzia \mathcal{I} non venga modificato. Un modo di verificare questa ipotesi è quello di disegnare le energie dello spettro in funzione di $L(L+1)$ che dovrebbero disegnare una retta, come previsto dall'equazione (1.14). La Fig. 1.6 è un esempio di questi plot e mostra deviazioni dall'andamento atteso. Mentre nel nucleo ^{174}Hf la deviazione dalla linea retta è graduale, nel caso del ^{158}Er è improvviso attorno a valori di L tra 12 e 14.

Il cambiamento del valore di \mathcal{I} indica che il nucleo non è un corpo rigido, ma a grandi valori di L , e quindi di E_{rot} , si comporta come un fluido, classicamente parlando. La grande velocità di rotazione produce un effetto centrifugo, forza di Coriolis, che deforma il corpo, aumentando il valore di \mathcal{I} . Dato che le variazioni di \mathcal{I} sono piccole rispetto al valore del momento di inerzia per $L = 0$, possono essere descritte come correzioni di questo valore

$$\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}_0 + kL(L+1) + \dots \quad (1.15)$$

dove k è una costante da determinare dal confronto con i dati sperimentali. In alternativa, considerando che E_{rot} dipende dalla velocità angolare del sistema

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2 \quad (1.16)$$

possiamo scrivere

$$\mathcal{I}(\omega) = \mathcal{I}_0 + \alpha \omega^2 + \dots \quad (1.17)$$

dove α è una costante.

Dalla Eq. (1.14) risulta che

$$E_{rot}(L) - E_{rot}(L-2) = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}(4\mathcal{I} - 2) , \quad (1.18)$$

da cui otteniamo

$$\frac{2\mathcal{I}}{\hbar^2} = \frac{4\mathcal{I} - 2}{E_{rot}(L) - E_{rot}(L-1)} . \quad (1.19)$$

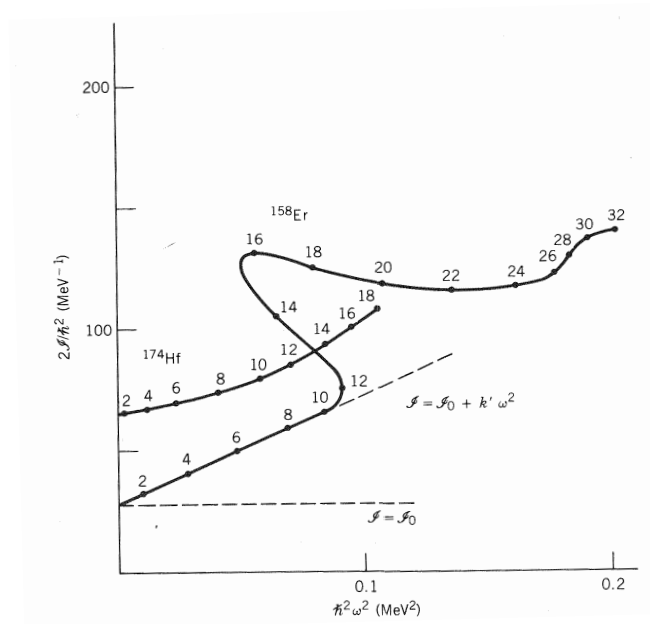


Figura 1.7: Momenti d'inerzia in funzione di $\hbar^2\omega^2$.

Disegnando \mathcal{I} così ottenuto in funzione di ω^2 , ci si aspetta di vedere un andamento costante dal valore \mathcal{I}_0 , o al massimo una linea retta. Nella Fig. 1.7 questo è il comportamento del nucleo ^{174}Hf . D'altra parte la figura mostra che il momento d'inerzia del nucleo ^{158}Er si comporta come atteso fino a valori di $L=10$ poi cambia totalmente il suo comportamento. Questo comportamento anomalo del momento d'inerzia in funzione di ω^2 è conosciuto come effetto di *backbending*.

Il modello a shell ingenuo non riesce a spiegare questo fenomeno. Sono state proposte varie spiegazioni microscopiche di questo fenomeno, ma quella più accreditata riguarda la presenza di coppie di Cooper tra nucleoni dello stesso tipo. Ad

alti valori dell'energia di rotazione il termine centrifugo dell'energia cinetica diventa molto importante. La presenza di questo termine ha effetto opposto a quello della forza di pairing e può diventare sufficientemente grande da rompere la coppia di Cooper. I due nucleoni spaiati si muovono su orbite differenti e cambiano il valore del momento di inerzia. Lo studio di rotazioni ad alto momento angolare ha mostrato come per valori attorno a $L = 30$ ci sia un altro *backbending*. Questo indica la rottura di un'altra coppia di Cooper.

Questa spiegazione del *backbending* ha grosse analogie con alcuni fenomeni legati alla superfluidità. La rottura delle coppie di Cooper fa passare un fluido quantistico da uno stato superfluido allo stato di normale fluidità. In analogia anche nel caso dei nuclei, la rottura delle coppie di Cooper fa fare una transizione di fase che si traduce nel cambiamento del valore del momento d'inerzia.

1.5 Momenti d'inerzia

La figura che segue mostra i valori sperimentali dei momenti d'inerzia di vari nuclei in funzione del numero di massa.

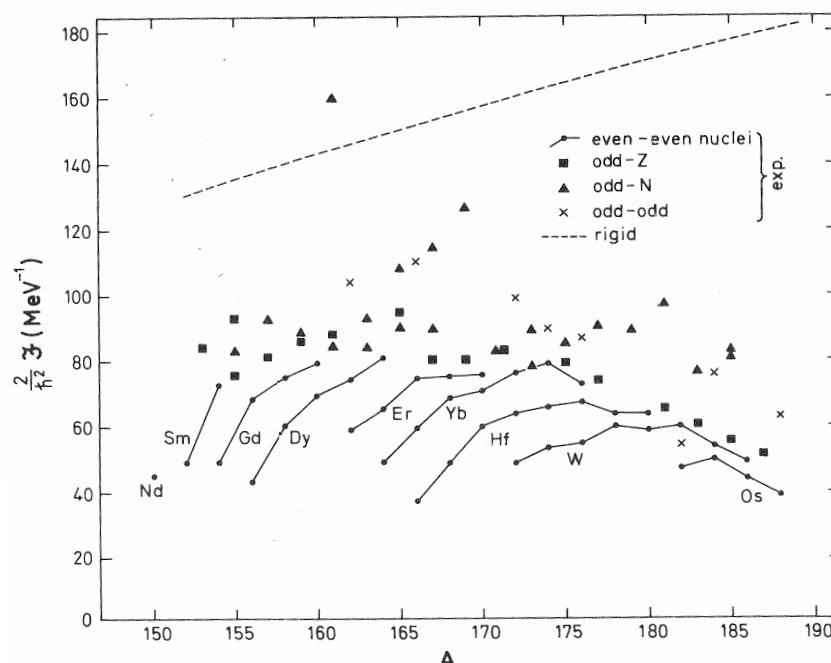


Figura 1.8: Valori sperimentali del momento d'inerzia

La linea tratteggiata indica il valore dei momenti d'inerzia calcolato per un ro-

tatore rigido. Dal nostro punto di vista è più interessante confrontare i valori dei momenti d'inerzia misurati per nuclei pari-pari e pari-dipari. Si osserva sistematicamente che i momenti d'inerzia dei nuclei pari-pari sono minori rispetto a quelli dei nuclei pari-dispari vicini. Anche questo effetto può essere spiegato ricorrendo al pairing. Si suppone che un nucleo formato esclusivamente da coppie di Cooper di nucleoni abbia una struttura geometrica più compatta rispetto alla situazione in cui si trova un nucleone spaiato.

I risultati sperimentali che abbiamo elencato in questo paragrafo, indicano l'esistenza di un'interazione a due corpi attrattiva con la conseguente formazione di coppie, dette coppie di Cooper, in stretta analogia con la superconduttività dei metalli.

Capitolo 2

La teoria BCS nei nuclei

In questo capitolo mostreremo un'applicazione ai nuclei atomici della teoria sviluppata da Bardeen Cooper e Schrieffer (BCS) per descrivere la superconduttività nei metalli. La struttura nucleare presenta particolari similitudini con la struttura dei metalli. In entrambi i casi abbiamo a che fare con sistemi di fermioni che, in prima approssimazione, possono essere descritti in termini di particelle in moto indipendente. In entrambi i sistemi ci sono importanti correlazioni tra le particelle che derivano dall'azione di forze fra esse e, nel caso dei metalli, dall'interazione con le vibrazioni del reticolo.

Nel capitolo precedente abbiamo discusso del gap di energia osservato nello spettro di eccitazione dei nuclei. È possibile trovare qualcosa di simile anche nei metalli superconduttori. Misure delle proprietà termiche e elettromagnetiche dei superconduttori indicano che lo spettro di eccitazione elettronica alle energie più basse, differisce essenzialmente da quello del gas di Fermi per la presenza di un gap di energia fra lo stato fondamentale e gli stati che rappresentano le eccitazioni elettroniche [Boh58]. L'analogia fra il modello dei nuclei e la teoria della superconduttività è basata principalmente sul fatto che l'interazione fra gli elettroni che risultano dallo scambio virtuale di fononi, è attrattiva. Lo stato fondamentale di un metallo superconduttore è descritto da una combinazione lineare di stati di particelle indipendenti, in cui gli elettroni si accoppiano in modo da formare coppie di spin nullo.

Metalli superconduttori e nuclei presentano analogie ma hanno anche caratteristiche che li differenziano notevolmente. Ad esempio bisogna considerare che i metalli contengono un numero di particelle dell'ordine del numero di Avogadro e possono dunque essere trattati come sistemi infiniti, contrariamente ai nuclei. Calcoleremo in questo capitolo, il termine di appaiamento utilizzando le classiche equazioni BCS formulate per descrivere la superconduttività.

2.1 Le quasi-particelle

Nel Cap.1 abbiamo visto che il modello a particelle indipendenti non riesce a descrivere fenomeni di pairing. D'altra parte è estremamente semplice, e comodo, descrivere un sistema in termini di particelle indipendenti. Si introduce allora, il formalismo delle *quasi-particelle*. Quest'ultime sono particelle fittizie che si muovono in

un campo medio, e rappresentano le vere particelle già vestite degli effetti prodotti dalla muta interazione con le altre particelle.

Il punto fondamentale è il legame tra particelle e quasi-particelle.

Nello stato fondamentale di un modello a particelle indipendenti, uno stato di singola particella $|\nu\rangle$ è vuoto se sta sopra la superficie di Fermi (stato di particella), oppure è occupato se sta al di sotto (stato di buco). La presenza di termini dell'hamiltoniana che vanno oltre il campo medio, H_{res} dell'equazione (1.3), modificano questa situazione. La superficie di Fermi non è più una netta separazione tra stati vuoti e occupati. Ogni stato $|k\rangle$ avrà una probabilità $|v_k|^2 \leq 1$ di essere occupato, e ovviamente una probabilità $|u_k|^2 = 1 - |v_k|^2$ di essere vuoto. La Fig. 2.1 mostra le probabilità di occupazione di orbitali di particella singola ed evidenzia le differenze fra il modello a particelle indipendenti a sinistra e lo schema che include la forza di pairing a destra [Row70].

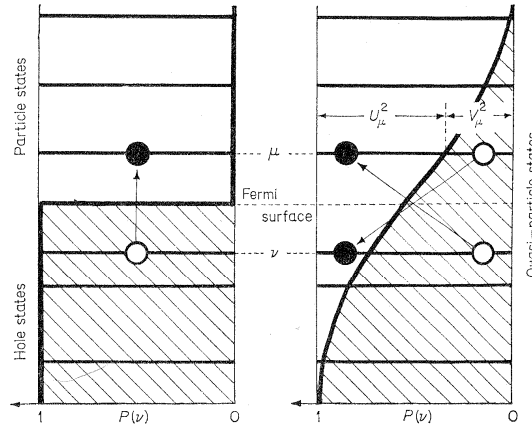


Figura 2.1: Orbitali di particella singola. Le frecce indicano le possibili eccitazioni dei nuclei.

2.2 Le trasformazioni di Bogoliubov-Valatin

Consideriamo una base di funzioni d'onda di singola particella $|k\rangle$. L'indice k indica tutti i numeri quantici che caratterizzano in maniera univoca lo stato di singola particella. Per ogni stato $k > 0$ esiste uno stato coniugato $-k < 0$ e gli stati $\{k, -k\}$ generano l'intero spazio di particella singola. Se l'hamiltoniana è invariante per inversione temporale, si può scegliere lo stato coniugato $|-k\rangle$ come

$$|-k\rangle \equiv T|k\rangle \quad (2.1)$$

dove T è l'operatore di inversione temporale.

In una base sferica k è dato dal numero quantico principale n , dal momento angolare orbitale l , dal momento angolare totale j e dalla sua proiezione sull'asse z , m , quindi

$$|k\rangle = |nljm\rangle \quad (2.2)$$

Applicando l'operatore di inversione temporale abbiamo lo stato

$$|-k\rangle = |nlj - m\rangle \quad (2.3)$$

con $m > 0$. Questo significa che per questi stati il valore di m , ossia della componente z del momento angolare j è uguale in modulo ma di segno opposto.

Consideriamo una situazione con superficie di Fermi netta, dove particelle e quasi-particelle coincidono. Definiamo due operatori di creazione e distruzione di quasi-particelle nel seguente modo

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k & \text{se il livello } k \text{ non è occupato, } (k > k_F) \\ -a_{-k}^+ & \text{se il livello } k \text{ è occupato, } (k \leq k_F) \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\alpha_k^+ = \begin{cases} a_k^+ & \text{se il livello } k \text{ non è occupato, } (k > k_F) \\ -a_{-k} & \text{se il livello } k \text{ è occupato, } (k \leq k_F) \end{cases} \quad (2.5)$$

dove a_k e a_k^+ sono rispettivamente gli operatori di distruzione e di creazione nel modello a particelle indipendenti.

Per un generico livello k , i nuovi operatori α_k e α_k^+ soddisfano l'equazione

$$\alpha_k |\Phi_0\rangle = 0 \quad (2.6)$$

dove $|\Phi_0\rangle$ è lo stato fondamentale nel modello a particelle indipendenti in cui tutti i livelli al di sotto della superficie di Fermi sono occupati. Per come abbiamo definito l'operatore α_k , l'equazione (2.6) dimostra che $|\Phi_0\rangle$ è lo stato di vuoto delle quasi-particelle.

Fino a questo momento abbiamo considerato una superficie di Fermi netta. Possiamo generalizzare la situazione scrivendo α_k e α_k^+ come combinazione lineare degli operatori di particella a_k e a_k^+

$$\begin{aligned} \alpha_k &= u_k a_k - v_k a_{-k}^+ \\ \alpha_k^+ &= u_k a_k^+ - v_k a_{-k} \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove i parametri u_k e v_k sono numeri reali.

Le relazioni (2.7) sono dette trasformazioni di Bogoliubov-Valatin e costituiscono il legame fra le particelle fisiche e le quasi-particelle. Ponendo $u_k = 0$ e $v_k = 1$ per un livello occupato e $u_k = 1$, $v_k = 0$ per un livello non occupato, ritroviamo il caso a particelle indipendenti.

Dalle trasformazioni di Bogoliubov inverse si ricavano facilmente le relazioni

$$\begin{aligned} a_k^+ &= u_k \alpha_k^+ + v_k \alpha_{-k} \\ a_k &= u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^+ \end{aligned} \quad (2.8)$$

I parametri v_k^2 e u_k^2 sono interpretati come le probabilità di occupazione e di non occupazione di un livello, rispettivamente. Imponiamo dunque, la condizione

$$|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1 \quad (2.9)$$

Vedremo in seguito, che l'equazione (2.9) normalizza lo stato fondamentale BCS.

Per le relazioni di commutazione fra gli operatori di quasi-particella si trova, usando le trasformazioni di Bogoliubov,

$$\begin{aligned} \{\alpha_k, \alpha_{k'}^+\} &= \alpha_k \alpha_{k'}^+ + \alpha_{k'}^+ \alpha_k \\ &= (u_k a_k - v_k a_{-k}^+) (u_{k'} a_{k'}^+ - v_{k'} a_{-k'}^+) \\ &\quad + (u_{k'} a_{k'}^+ - v_{k'} a_{-k'}^+) (u_k a_k - v_k a_{-k}^+) \\ &= u_k u_{k'} a_k a_{k'}^+ - u_k v_{k'} a_k a_{-k'}^+ - v_k u_{k'} a_{-k}^+ a_{k'}^+ + v_k v_{k'} a_{-k}^+ a_{-k'}^+ \\ &\quad + u_k u_{k'} a_{k'}^+ a_k - u_{k'} v_k a_{k'}^+ a_{-k}^+ + v_{k'} v_k a_{-k'}^+ a_{k'}^+ - v_{k'} u_k a_{-k'}^+ a_k \\ &= u_k u_{k'} (a_k a_{k'}^+ + a_{k'}^+ a_k) - u_k v_{k'} (a_k a_{k'}^+ + a_{k'}^+ a_k) \\ &\quad - v_k u_{k'} (a_{-k}^+ a_{k'}^+ + a_{k'}^+ a_{-k}^+) + v_k v_{k'} (a_{-k}^+ a_{-k'}^+ + a_{-k'}^+ a_{-k}^+) \\ &= u_k u_{k'} \{a_k, a_{k'}^+\} - u_k v_{k'} \{a_k, a_{-k'}^+\} \\ &\quad - v_k u_{k'} \{a_{-k}^+, a_{-k'}^+\} + v_k v_{k'} \{a_{-k}^+, a_{-k'}^+\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ricordando ora le usuali relazioni di commutazione degli operatori di particella, riportate in Appendice A, ed utilizzando l'equazione (2.9) si ha

$$\{\alpha_k, \alpha_{k'}^+\} = (u_k^2 + v_k^2) \delta_{kk'} = 1 \quad (2.11)$$

Allo stesso modo possiamo calcolare $\{\alpha_k, \alpha_{-k}\}$ dove l'espressione di α_{-k} è ottenuta sostituendo $k \rightarrow -k$ nella prima equazione di (2.7),

$$\begin{aligned} \{\alpha_k, \alpha_{-k}\} &= \alpha_k \alpha_{-k} + \alpha_{-k} \alpha_k \\ &= (u_k a_k - v_k a_{-k}^+) (u_{-k} a_{-k} - v_{-k} a_k^+) \\ &\quad + (u_{-k} a_{-k} - v_{-k} a_k^+) (u_k a_k - v_k a_{-k}^+) \\ &= u_k u_{-k} a_k a_{-k} - u_k v_{-k} a_k a_k^+ - v_k u_{-k} a_{-k}^+ a_{-k} + v_k v_{-k} a_{-k}^+ a_k^+ \\ &\quad + u_{-k} u_k a_{-k} a_k - u_{-k} v_k a_{-k} a_{-k}^+ - v_{-k} u_k a_k^+ a_k + v_{-k} v_k a_k^+ a_{-k}^+ \\ &= u_k u_{-k} \{a_k, a_{-k}\} - u_k v_{-k} \{a_k^+, a_k\} \\ &\quad - u_{-k} v_k \{a_{-k}^+, a_{-k}\} + v_k v_{-k} \{a_{-k}^+, a_k^+\} \\ &= -(u_k v_{-k} + v_k u_{-k}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Osserviamo a questo punto, che per ottenere le usuali relazioni di anticommutazione tra operatori fermionici

$$\{\alpha_k, \alpha_{-k}\} = \{\alpha_k^+, \alpha_{-k}^+\} = 0 \quad (2.13)$$

dobbiamo imporre

$$u_k v_{-k} + v_k u_{-k} = 0 \implies \frac{u_k}{v_k} = -\frac{u_{-k}}{v_{-k}} \quad (2.14)$$

Questa equazione ovviamente implica un legame fra u_k e u_{-k} e fra v_k e v_{-k} .

Sfruttando il grado di libertà sui due parametri, di solito si sceglie [Rin80],

$$v_{-k} = -v_k \quad \text{e} \quad u_{-k} = u_k \quad (2.15)$$

Data questa relazione le trasformazioni di Bogoliubov-Valatin possono essere scritte come:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= u_k a_{-k} + v_k a_k^+ \\ \alpha_k^+ &= u_k a_{-k}^+ + v_k a_k \\ \alpha_k &= u_k a_{-k} + v_k a_k^+ \\ \alpha_k^+ &= u_k a_{-k}^+ + v_k a_k \end{aligned} \quad (2.16)$$

Poichè la funzione d'onda BCS è fissata a meno di un fattore di fase, è sempre possibile scegliere i coefficienti u_k reali e positivi. In principio la fase di v_k è determinata dalla variazione del valore di aspettazione dell'energia. Normalmente però, si usa porre anche i parametri v_k reali e positivi,

Per concludere, le proprietà di anticommutazione per gli operatori di quasiparticella sono

$$\{\alpha_k, \alpha_{k'}^+\} = \delta_{kk'} \quad \text{e} \quad \{\alpha_k, \alpha_{-k}\} = \{\alpha_k^+, \alpha_{-k}^+\} = 0 \quad (2.17)$$

2.3 Il modello Bardeen-Cooper-Schrieffer

La teoria BCS è basata sul principio variazionale di Ritz che è un metodo approssimato di soluzione dell'equazione di Schrödinger. Esprimiamo lo stato fondamentale di un nucleo pari-pari nel modo seguente

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0}^{\infty} (u_k + v_k a_k^+ a_{-k}^+) |-\rangle \quad (2.18)$$

dove con $|-\rangle$ abbiamo indicato lo stato di vuoto (assenza di particelle) e consideriamo u_k e v_k come parametri variazionali.

Lo stato $|BCS\rangle$ è stato definito in modo che le particelle vengano create a coppie.

Consideriamo la normalizzazione dello stato fondamentale definito nella (2.18)

$$\begin{aligned} \langle BCS|BCS\rangle &= \prod_{k>0}^{\infty} \langle -| (u_k^* + v_k^* a_{-k} a_k) (u_k + v_k a_k^+ a_{-k}^+) |-\rangle \\ &= \prod_{k>0}^{\infty} \left\{ u_k u_k^* \langle -|-\rangle + u_k^* v_k \langle -| a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle \right. \\ &\quad \left. + v_k^* u_k \langle -| a_{-k} a_k |-\rangle + v_k v_k^* \langle -| a_{-k} a_k a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle \right\} \\ &= \prod_{k>0}^{\infty} (u_k^2 + v_k^2) = 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove abbiamo sfruttato la scelta di usare i coefficienti u_k e v_k reali e positivi.

L'equazione di normalizzazione (2.19) giustifica il significato fisico di probabilità che abbiamo attribuito ai due parametri variazionali. Il termine $\langle -|a_k^+ a_{-k}^+| - \rangle$ è nullo perché crea due particelle con numeri quantici diversi, e, per l'ortonormalità della base, il loro prodotto scalare è nullo. Lo stesso discorso vale anche per $\langle -|a_k a_{-k}| - \rangle$, termine nullo anche perché $a_{-k}| - \rangle = 0$.

Lo stato $|BCS\rangle$ è lo stato fondamentale delle quasi-particelle. Questo è dimostrato in Appendice B, in cui mostriamo che l'applicazione di α_k allo stato $|BCS\rangle$ dà risultato nullo.

Il numero di particelle che formano un sistema fermionico è ottenuto calcolando il valore di aspettazione dell'operatore numero di occupazione $a_\nu^+ a_\nu$, tra tutti gli stati di singola particella, come mostrato in Appendice A. L'operatore numero di particelle è quindi

$$N = \sum_\nu a_\nu^+ a_\nu \quad (2.20)$$

Riscriviamo questo operatore in termini di operatori di creazione e distruzione di quasi-particella. Separiamo nell'equazione (2.20), gli stati $|k\rangle$ dai loro coniugati $|-k\rangle$

$$\begin{aligned} N &= \sum_\nu a_\nu^+ a_\nu = \sum_{k>0} (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}) \\ &= \sum_{k>0} \left[(u_k \alpha_k^+ + v_k \alpha_{-k}) (u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^+) \right. \\ &\quad \left. + (u_k \alpha_{-k}^+ - v_k \alpha_k) (u_k \alpha_k - v_k \alpha_k^+) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Calcoliamo ora il valore di aspettazione di N sullo stato fondamentale BCS, utilizzando i risultati ottenuti nelle equazioni (B.2) e (B.3) per cui $\alpha_{\pm k}|BCS\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \langle BCS|N|BCS\rangle &= \sum_{k>0} \langle BCS| (u_k \alpha_k^+ + v_k \alpha_{-k}) (u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^+) \\ &\quad + (u_k \alpha_{-k}^+ - v_k \alpha_k) (u_k \alpha_k - v_k \alpha_k^+) |BCS\rangle \\ &= \sum_k \langle BCS| v_k^2 \alpha_{-k} \alpha_{-k}^+ + v_k^2 \alpha_k \alpha_k^+ |BCS\rangle \\ &= 2 \sum_{k>0} v_k^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Quello che abbiamo ottenuto è in realtà, un valore medio perché lo stato $|BCS\rangle$ non ha un numero fisso di particelle. Questo può essere visto riscrivendo l'equazione (2.18) nella forma

$$\begin{aligned} |BCS\rangle &= (u_1 + v_1 a_{k_1}^+ a_{-k_1}^+) (u_2 + v_2 a_{k_2}^+ a_{-k_2}^+) (u_3 + v_3 a_{k_3}^+ a_{-k_3}^+) \cdots |-\rangle \\ &= A \left\{ |-\rangle + \sum_{k>0} \frac{v_k}{u_k} a_k^+ a_{-k}^+ + \frac{1}{2} \sum_{kk'} \frac{v_k v_{k'}}{u_k u_{k'}} a_k^+ a_{-k}^+ a_{k'}^+ a_{-k'}^+ + \cdots \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove

$$A = \prod_k u_k \quad (2.24)$$

Il primo termine nella (2.23) non ha alcuna particella, il secondo due, il terzo quattro e così di seguito.

In fisica dello stato solido, dove $N \simeq 10^{23}$, la violazione dell'invarianza del numero di particelle non ha identificabili conseguenze sul valore degli osservabili, nei nuclei invece, genera qualche problema. Si tratta pertanto di un'approssimazione tanto più valida quanto più pesante è il nucleo.

2.4 Le equazioni BCS

Affrontiamo ora il problema di esprimere un'hamiltoniana H in funzione degli operatori α e α^+ . Partiamo allora dall'espressione più generale di un'hamiltoniana a multi-corpi per particelle che interagiscono con forze a due corpi

$$H = \sum_{\nu\nu'} \langle \nu | t | \nu' \rangle a_\nu^+ a_{\nu'} + \frac{1}{4} \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} \langle \nu \mu | \tilde{V} | \nu' \mu' \rangle a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'} \quad (2.25)$$

dove abbiamo indicato

$$\begin{aligned} \langle \nu \mu | \tilde{V} | \nu' \mu' \rangle &= V_{\nu\mu,\nu'\mu'} - V_{\nu\mu,\mu'\nu'} \\ &= \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_\nu^*(\mathbf{r}_1) \phi_\mu^*(\mathbf{r}_2) V(1,2) \phi_{\nu'}(\mathbf{r}_1) \phi_{\mu'}(\mathbf{r}_2) \\ &\quad - \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_\nu^*(\mathbf{r}_1) \phi_\mu^*(\mathbf{r}_2) V(1,2) \phi_{\mu'}(\mathbf{r}_1) \phi_{\nu'}(\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

dove $\phi(\mathbf{r})$ sono le funzioni d'onda di singola particella della base.

Inseriamo le espressioni inverse delle trasformazioni di Bogoliubov (2.8).

Consideriamo a titolo d'esempio il termine di energia cinetica

$$\begin{aligned} a_\nu^+ a_{\nu'} &= (u_\nu \alpha_\nu^+ + v_\nu \alpha_{-\nu}) (u_{\nu'} \alpha_{\nu'} + v_{\nu'} \alpha_{-\nu'}^+) \\ &= u_\nu u_{\nu'} \alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'} + u_\nu v_{\nu'} \alpha_\nu^+ \alpha_{-\nu'}^+ \\ &\quad + v_\nu u_{\nu'} \alpha_{-\nu} \alpha_{\nu'} + v_\nu v_{\nu'} \alpha_{-\nu} \alpha_{-\nu'}^+ \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} a_{-\nu}^+ a_{-\nu'} &= (u_\nu \alpha_{-\nu}^+ - v_\nu \alpha_\nu) (u_{\nu'} \alpha_{-\nu'}^+ - v_{\nu'} \alpha_{\nu'}^+) \\ &= u_\nu u_{\nu'} \alpha_{-\nu}^+ \alpha_{-\nu'}^+ - u_\nu v_{\nu'} \alpha_{-\nu}^+ \alpha_{\nu'}^+ \\ &\quad - v_\nu u_{\nu'} \alpha_\nu \alpha_{-\nu'} + v_\nu v_{\nu'} \alpha_\nu \alpha_{\nu'}^+ \end{aligned} \quad (2.28)$$

Applichiamo il teorema di Wick alle quasi-particelle

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'} &= N [\alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'}] + \langle BCS | \alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'} | BCS \rangle = N [\alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'}] \\ \alpha_\nu \alpha_{\nu'}^+ &= N [\alpha_\nu \alpha_{\nu'}^+] + \langle BCS | \alpha_\nu \alpha_{\nu'}^+ | BCS \rangle = N [\alpha_\nu \alpha_{\nu'}^+] + \delta_{\nu\nu'} \\ \alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'}^+ &= N [\alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'}^+] + \langle BCS | \alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'}^+ | BCS \rangle = N [\alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'}^+] \\ \alpha_\nu \alpha_{\nu'} &= N [\alpha_\nu \alpha_{\nu'}] + \langle BCS | \alpha_\nu \alpha_{\nu'} | BCS \rangle = N [\alpha_\nu \alpha_{\nu'}] \end{aligned} \quad (2.29)$$

dove con N abbiamo indicato il prodotto normale ordinato.

Utilizzando le equazioni (2.27) e (2.28), possiamo riscrivere il termine di energia cinetica dell'Hamiltoniana (2.6) come

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,k' > 0} \langle k|t|k' \rangle \left[a_k^+ a_{k'} + a_{-k}^+ a_{-k'} \right] = \\
& = \sum_{\nu, \nu' > 0} \langle \nu|t|\nu' \rangle \left\{ u_\nu u_{\nu'} \left(N \left[\alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'} \right] + N \left[\alpha_{-\nu}^+ \alpha_{-\nu'} \right] \right) \right. \\
& + u_\nu v_{\nu'} \left(N \left[\alpha_\nu^+ \alpha_{-\nu'}^+ \right] - N \left[\alpha_{-\nu}^+ \alpha_{\nu'}^+ \right] \right) + v_{\nu'} u_\nu \left(N \left[\alpha_{-\nu} \alpha_{\nu'} \right] - N \left[\alpha_\nu \alpha_{-\nu'} \right] \right) \\
& + v_\nu v_{\nu'} \left(N \left[\alpha_{-\nu}^+ \alpha_{-\nu'}^+ \right] + \delta_{-\nu, -\nu'} + N \left[\alpha_{-\nu} \alpha_{-\nu'}^+ \right] + \delta_{\nu, \nu'} \right) \left. \right\} \\
& = \sum_{\nu, \nu'} \left\{ \left(N \left[\alpha_\nu^+ \alpha_{\nu'} \right] + N \left[\alpha_{-\nu}^+ \alpha_{-\nu'} \right] \right) (u_\nu u_{\nu'} - v_\nu v_{\nu'}) \right. \\
& + \left. \left(N \left[\alpha_\nu^+ \alpha_{-\nu'}^+ \right] + N \left[\alpha_{-\nu} \alpha_{\nu'} \right] \right) (u_\nu v_{\nu'} + v_{\nu'} u_\nu) + 2 v_\nu v_{\nu'} \delta_{\nu, \nu'} \right\} \langle \nu|t|\nu' \rangle \quad (2.30)
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la condizione $N[\alpha_{-\nu}^+ \alpha_{\nu'}^+] = -N[\alpha_\nu^+ \alpha_{-\nu'}^+]$ e il fatto che ν e ν' sono indici muti della sommatoria.

L'espressione (2.30) contiene un solo termine scalare, proporzionale a $2v_\nu^2$, e vari termini operatoriali che dipendono dal prodotto normale ordinato di operatori di creazione e distruzione di quasi-particelle. Il valore di aspettazione di questi termini rispetto allo stato fondamentale $|BCS\rangle$, è nullo per definizione.

Utilizzando le trasformazioni di Bogolioubov (2.7) anche il termine di potenziale viene riscritto in termini di operatori di quasi-particella. Il calcolo è ovviamente più complesso di quello dell'energia cinetica, dato che si deve riscrivere un termine con quattro operatori di creazione e distruzione. I dettagli del calcolo di questa parte dell'hamiltoniana sono presentati in [Suh07].

Abbiamo già detto che applicheremo il principio variazionale per determinare i valori di v_k e u_k . Nel fare questo inseriamo il vincolo che, in media, il numero di nucleoni sia conservato. Quindi l'operatore di cui calcolare il valore di aspettazione è

$$H' = H - \lambda N \quad (2.31)$$

dove abbiamo indicato con λ il moltiplicatore di Lagrange e con N l'operatore numero di particelle definito nell'equazione (2.20).

Dato che la dipendenza operatoriale di N è identica a quella del termine di energia cinetica, possiamo utilizzare il risultato (2.30) cambiando opportunamente t in N .

L'espressione esplicita di H' è

$$H' = H - \lambda N = U + H_{11} + H_{20} + H_{int} \quad (2.32)$$

dove i vari termini indicano diverse dipendenze operatoriali.

Esplicitamente

$$\begin{aligned}
 U = & \sum_{k>0} \left[\langle k|t|k' \rangle - \lambda + \frac{1}{2} \sum_{k'} \left(\langle k k' | V | k k' \rangle + \langle k - k' | V | k - k' \rangle \right) v_{k'}^2 \right] 2 v_k^2 \\
 & + \sum_{k, k' > 0} \langle k - k' | V | k' - k' \rangle u_{k'} v_{k'} u_k v_k
 \end{aligned} \quad (2.33)$$

è un termine di campo medio senza alcuna dipendenza esplicita da operatori di creazione e distruzione.

$$\begin{aligned}
 H_{11} = & \sum_{k, k' > 0} \left\{ \left[\langle k|t|k' \rangle - \lambda \delta_{kk'} + \sum_{k'' > 0} \left(\langle k - k'' | V | k' - k'' \rangle + \langle k k'' | V | k' k'' \rangle \right) v_{k''}^2 \right] \right. \\
 & \left. (u_k u_{k'} - v_k u_{k'}) - \sum_{k'' > 0} \langle k - k' | V | k'' - k'' \rangle u_{k''} v_{k''} (u_{k'} v_{k'} + v_k u_{k'}) \right\} \\
 & N \left[\alpha_k^+ \alpha_{k'} + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k'} \right]
 \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
 H_{20} = & \sum_{k, k' > 0} \left\{ \left[\langle k|t|k' \rangle - \lambda \delta_{kk'} + \sum_{k'' > 0} \left(\langle k - k'' | V | k' - k'' \rangle + \langle k k'' | V | k' k'' \rangle \right) v_{k''}^2 \right] \right. \\
 & \left. (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) + \sum_{k'' > 0} \langle k - k' | V | k'' - k'' \rangle u_{k''} v_{k''} (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) \right\} \\
 & N \left[\alpha_k^+ \alpha_{-k'}^+ + \alpha_{-k}^+ \alpha_{k'} \right]
 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Il termine H_{int} contiene i prodotti normali ordinati di quattro operatori e descrive le interazioni fra le quasi-particelle. In letteratura è normalmente scritto come [Suh07]

$$H_{int} = H_{40} + H_{31} + H_{22} \quad (2.36)$$

dove i due pedici indicano rispettivamente il relativo numero di operatori di creazione e di distruzione di quasi-particelle [Eis72].

Per semplificare le espressioni definiamo

$$\varepsilon_k = \langle k|t|k \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k'} \left(\langle k k' | V | k k' \rangle + \langle k - k' | V | k - k' \rangle \right) v_{k'}^2 \quad (2.37)$$

e riscriviamo il termine U dell' equazione (2.33) come

$$U = \sum_{k>0} \left[(\varepsilon_k - \lambda) 2 v_k^2 + \sum_{k' > 0} \langle k - k' | V | k' - k' \rangle u_{k'} v_{k'} u_k v_k \right] \quad (2.38)$$

A questo punto possiamo calcolare il valore d'aspettazione di H' tra gli stato $|BCS\rangle$

$$\langle BCS | H' | BCS \rangle = \langle BCS | H - \lambda N | BCS \rangle = \langle BCS | U | BCS \rangle \quad (2.39)$$

L'ultimo risultato è stato ottenuto considerando che i termini che contengono dei prodotti normali ordinati danno, per definizione, contributo nullo quando sono applicati sullo stato fondamentale, in questo caso sullo stato BCS.

Ponendo

$$\Delta_{k'} = - \sum_{k''} \langle k' - k' | V | k'' - k'' \rangle u_{k''} v_{k''} \quad (2.40)$$

possiamo scrivere le equazioni legate al principio variazionale come

$$\delta (\langle BCS | U | BCS \rangle) = \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ 2 \sum_{k'} (\varepsilon_{k'} - \lambda) v_{k'}^2 - \sum_{k'} \Delta_{k'} u_{k'} v_{k'} \right\} = 0 \quad (2.41)$$

Per procedere con i calcoli ricordiamo che i due parametri u_k e v_k non sono del tutto indipendenti ma come abbiamo già detto soddisfano il vincolo (2.9), da cui

$$u_k = \sqrt{1 - v_k^2} \quad (2.42)$$

quindi

$$\frac{du_k}{dv_k} = \frac{1}{2} (1 - v_k^2)^{-\frac{1}{2}} (-2v_k) = -\frac{v_k}{u_k} \quad (2.43)$$

e l'equazione (2.41) diventa

$$\begin{aligned} & \delta (\langle BCS | U | BCS \rangle) \\ &= 2 (\varepsilon_k - \lambda) 2 v_k - \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial v_k} \right) u_k v_k - \Delta_k u_k - \Delta_k v_k \left(\frac{du_k}{dv_k} \right) \\ &= 4 v_k (\varepsilon_k - \lambda) - \left[\Delta_k \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) + u_k v_k \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial v_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Inoltre, dalla definizione (2.40)

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial v_k} = - \langle k - k | V | k' - k' \rangle \left[u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right] \quad (2.45)$$

In definitiva possiamo esprimere il principio variazionale come

$$\begin{aligned} \delta (\langle BCS | H' | BCS \rangle) &= 4 v_k (\varepsilon_k - \lambda) - \left[\Delta_k \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) + u_k v_k \right. \\ &\quad \left. (- \langle k - k | V | k' - k' \rangle) \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) \right] \\ &= 4 v_k (\varepsilon_k - \lambda) - 2 \Delta_k \left(u_k - \frac{v_k^2}{u_k} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

quindi

$$2 (\varepsilon_k - \lambda) v_k u_k = \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) \quad (2.47)$$

Facciamo il quadrato ad entrambi i membri della relazione (2.47)

$$4 (\varepsilon_k - \lambda)^2 v_k^2 u_k^2 = \Delta_k^2 (u_k^2 - v_k^2)^2 = \Delta_k^2 (v_k^2 + u_k^2 - 2 u_k^2 v_k^2) \quad (2.48)$$

Poichè dalla condizione (2.9) si ricava che

$$(u_k^2 + v_k^2)^2 = u_k^4 + v_k^4 + 2 u_k^2 v_k^2 = 1 \quad (2.49)$$

allora

$$u_k^4 + v_k^4 = 1 - 2 v_k^2 u_k^2 \quad (2.50)$$

Sostituendo quest'ultima espressione nell'equazione (2.48) si trova

$$4 (\varepsilon_k - \lambda)^2 v_k^2 u_k^2 = \Delta_k^2 (1 - 4 u_k^2 v_k^2) \quad (2.51)$$

da cui

$$u_k^2 v_k^2 = \frac{\Delta_k^2}{4 (\varepsilon_k - \lambda)^2} (1 - 4 u_k^2 v_k^2) = \frac{\Delta_k^2}{4 (\varepsilon_k - \lambda)^2} - \frac{u_k^2 v_k^2 \Delta_k^2}{(\varepsilon_k - \lambda)^2} \quad (2.52)$$

A questo punto, raccogliamo $u_k^2 v_k^2$ a fattor comune

$$\frac{\Delta_k^2}{4 (\varepsilon_k - \lambda)^2} = u_k^2 v_k^2 \left[1 + \frac{\Delta_k^2}{(\varepsilon_k - \lambda)^2} \right] = u_k^2 v_k^2 \left[\frac{(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2}{(\varepsilon_k - \lambda)^2} \right] \quad (2.53)$$

quindi

$$\begin{aligned} u_k^2 v_k^2 &= \frac{\Delta_k^2}{4 (\varepsilon_k - \lambda)^2} \frac{(\varepsilon_k - \lambda)^2}{(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2} = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(\varepsilon_k - \lambda)^2}{(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta_k^2}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - \lambda}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k - \lambda}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Il moltiplicatore di Lagrange λ è determinato dalla condizione che il valore di aspettazione sullo stato $|BCS\rangle$ dell'operatore numero di particelle sia il valore desiderato N_{tot}

$$\langle BCS | N | BCS \rangle \equiv \langle N \rangle = 2 \sum_{k>0} v_k^2 = N_{\text{tot}} \quad (2.55)$$

dove N è l'operatore che abbiamo definito nell'equazione (2.20) e con N_{tot} abbiamo indicato il numero totale di particelle.

Il parametro λ è anche detto *potenziale chimico* e rappresenta la variazione della energia totale del sistema quando varia il numero di particelle. Infatti dall'equazione (2.39)

$$\frac{\partial}{\partial N} \langle H' \rangle = \frac{\partial}{\partial N} \langle H - \lambda N \rangle = 0 \quad (2.56)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial N} \langle H \rangle = \lambda \quad (2.57)$$

questo implica che λ è proprio l'energia che si ha in più quando si aggiunge una particella al sistema.

L'equazione (2.54) esprime il prodotto $v_k^2 u_k^2$ come prodotto di due termini.

Vogliamo identificare quale dei due termini corrisponde a v_k^2 e quale a u_k^2 . Sappiamo che in assenza di pairing, cioè nel limite $\Delta_k \rightarrow 0$, gli stati sotto la superficie di Fermi sono pienamente occupati, quindi $v_k^2 = 1$ e $u_k^2 = 0$. Facendo il limite $\Delta_k \rightarrow 0$ in equazione (2.55), e considerando che $\varepsilon_k - \lambda < 0$ per gli stati sotto la superficie di Fermi, vediamo che il primo termine tra parentesi graffe tende a zero, e l'altro termine ad uno. Per questo motivo facciamo la seguente identificazione

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_k - \lambda)}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (2.58)$$

e

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{(\varepsilon_k - \lambda)}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (2.59)$$

Tenendo conto della definizione di Δ_k (2.40) e dell'equazione (2.54), possiamo esprimere il gap secondo l'equazione

$$\begin{aligned} \Delta_k &= - \sum_{k'} \langle k - k | V | k' - k' \rangle \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\varepsilon_{k'} - \lambda)^2}{(\varepsilon_{k'} - \lambda)^2 + \Delta_{k'}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= - \sum_{k'} \langle k - k | V | k' - k' \rangle \frac{1}{2} \frac{\Delta_{k'}}{[(\varepsilon_{k'} - \lambda)^2 + \Delta_{k'}^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

ovvero

$$1 = - \sum_{k'} \langle k - k | V | k' - k' \rangle \frac{1}{2} [(\varepsilon_{k'} - \lambda)^2 + \Delta_{k'}^2]^{-1/2} \quad (2.61)$$

L'equazione (2.61) del gap deve essere risolta unitamente alla (2.55) che indica la conservazione del numero di nucleoni, e che, utilizzando la (2.58), può essere scritta come

$$\begin{aligned} N_{\text{tot}} &= 2 \sum_{k>0} v_k^2 = 2 \sum_{k>0} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_k - \lambda)}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \\ &= \sum_{k>0} \left\{ 1 - \frac{(\varepsilon_k - \lambda)}{[(\varepsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Capitolo 3

Equazioni BCS in base sferica

Le espressioni delle equazioni BCS presentate nel Capitolo 2 sono indipendenti dalla scelta della base di singola paricella. Dato che descriveremo i nuclei come sistemi finiti di nucleoni, risulta conveniente utilizzare una base di funzioni d'onda di singola particella generata da un potenziale medio a simmetria sferica. Data la presenza del termine di spin-orbita nel potenziale medio [Rin80], l'espressione della funzione d'onda che utilizzeremo è:

$$\begin{aligned}\phi_k(\mathbf{r}) &= R_{nlj}(r) Y_{lj}^m(\Omega) = R_{nlj}(r) \sum_{\mu s} \langle l \mu \frac{1}{2} s | j m \rangle Y_{l\mu}(\Omega) \chi_s \\ &= R_{nlj}(r) \sum_{\mu s} (-)^{l-\frac{1}{2}+m} \hat{j} \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ \mu & s & -m \end{pmatrix} Y_{l\mu}(\Omega) \chi_s\end{aligned}\quad (3.1)$$

dove gli indici n, l, j, m rappresentano rispettivamente i numeri quantici relativi al numero di nodi della funzione radiale, al momento angolare orbitale, al momento angolare totale e alla proiezione sull'asse z di j . Nell'equazione precedente abbiamo usato l'espressione $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$.

Nelle pagine che seguono otterremo le espressioni delle equazioni BCS utilizzando la base sferica (3.1). Le idee di base per ottenere le equazioni sono quelle presentate nel capitolo precedente.

Anche in questo contesto è conveniente utilizzare il formalismo dei numeri di occupazione e delle quasi-particelle. Introduciamo la seguente notazione

$$\alpha = (a, m_\alpha) \quad \text{e} \quad a = (n_a l_a, j_a) \quad (3.2)$$

per tenere separati il numero quantico legato alla proiezione del momento angolare sull'asse di quantizzazione dai restanti numeri quantici. Nella base sferica, è conveniente lavorare con termini che sono tensori sferici irriducibili, per questo motivo si utilizzano gli operatori di distruzione e creazione definiti come [Suh07]:

$$\tilde{a}_\alpha = (-1)^{j_\alpha+m_\alpha} a_{-\alpha} = (-1)^{j_\alpha+m_\alpha} a_{a,-m_\alpha} \quad (3.3)$$

e

$$\tilde{a}_\alpha^+ = (-1)^{j_\alpha+m_\alpha} a_{-\alpha}^+ = (-1)^{j_\alpha+m_\alpha} a_{a,-m_\alpha}^+ \quad (3.4)$$

In base sferica lo stato BCS è definito come [Suh07]:

$$|BCS\rangle = \prod_{\alpha>0}^{\infty} \left(u_{\alpha} + v_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\alpha}^{\dagger} \right) |-\rangle \quad (3.5)$$

3.1 Formulazione del principio variazionale in base sferica

Riscriviamo l'espressione di H' (2.31)

$$H' = H - \lambda N \quad (3.6)$$

dove l'operatore numero di particelle N è espresso come

$$N = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} . \quad (3.7)$$

Calcoliamo il valore di aspettazione di N sullo stato fondamentale BCS,

$$\begin{aligned} \langle BCS|N|BCS\rangle &= \prod_{\beta>0}^{\infty} \langle -| (u_{\beta} + v_{\beta} \tilde{a}_{\beta} a_{\beta}) \sum_{\gamma} a_{\gamma}^{\dagger} a_{\gamma} \prod_{\alpha>0}^{\infty} (u_{\alpha} + v_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\alpha}^{\dagger}) |-\rangle \\ &= \prod_{\alpha,\beta>0} \sum_{\gamma} v_{\beta} v_{\alpha} \langle -| \tilde{a}_{\beta} a_{\beta} a_{\gamma}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{a}_{\alpha}^{\dagger} |-\rangle \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove abbiamo eliminato tutti i termini che sono nulli per

$$\tilde{a}_{\alpha} |-\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle -| \tilde{a}_{\alpha}^{\dagger} = 0 . \quad (3.9)$$

Il valore di aspettazione del prodotto di operatori di creazione e distruzione viene calcolato utilizzando il teorema di Wick, vedi Appendice A. Ci sono due contrazioni diverse da zero che danno il risultato $\delta_{\alpha,\gamma} \delta_{\beta,\gamma} + \delta_{-\alpha,\gamma} \delta_{-\beta,\gamma}$ dove δ è simbolo di Kronecker. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \langle BCS|N|BCS\rangle &= \sum_{\mathbf{a}, m_{\alpha}} v_{\mathbf{a}}^2 \int d^3 r \phi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{nlj, m_{\alpha}} v_{nlj}^2 \int dr r^2 \int d\Omega R_{nlj}^2(r) Y_{lj}^{*m}(\Omega) Y_{lj}^m(\Omega) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Poiché

$$\int d\Omega Y_{lj}^{*m}(\Omega) Y_{lj}^m(\Omega) = 1 \quad (3.11)$$

e

$$\int dr r^2 R_{nlj}^2(r) = 1 \quad (3.12)$$

abbiamo

$$\langle BCS|N|BCS\rangle = \sum_{nlj} v_{nlj}^2 \sum_m = \sum_{nlj} v_{nlj}^2 (2j+1) = \sum_{nlj} \hat{j}^2 v_{nlj}^2 \quad (3.13)$$

Da notare che per l'espressione specifica delle funzioni d'onda di singola particella (3.1), i coefficienti u e v non dipendono dal numero quantico m .

La tecnica presentata per l'operatore numero di nucleoni può essere utilizzata anche per i vari termini dell'Hamiltoniana. Riscrivendo le espressioni (2.33), (2.34), (2.35) nella nuova base, si trova [Suh07]

$$U = \sum_b \hat{j}_b^2 \left[v_b^2 (\varepsilon_b - \lambda) - \frac{1}{2} u_b v_b \Delta_b \right] \quad (3.14)$$

$$H_{11}(b) = \hat{j}_b \left[(u_b^2 - v_b^2) (\varepsilon_b - \lambda) + 2 u_b v_b \Delta_b \right] \quad (3.15)$$

$$H_{20}(b) = \hat{j}_b \left[u_b v_b (\varepsilon_b - \lambda) - \frac{1}{2} (u_b^2 - v_b^2) \Delta_b \right] \quad (3.16)$$

dove abbiamo definito

$$\Delta_b \equiv -\frac{\hat{j}_b^{-1}}{2} \sum_a \hat{j}_a u_a v_a \langle a a 0 | V | b b 0 \rangle \quad (3.17)$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo trascurato un termine di reinterazione tra il nucleone b e gli altri nucleoni. Questo termine rinormalizza l'energia di singola particella ε_b , generato dall'interazione del singolo nucleone con tutti gli altri.

È importante in calcoli autoconsistenti come Hartree-Fock Bogoliubov, ma irrilevante nel nostro caso in cui la base di singola particella ha origine fenomenologica e quindi il valore delle energie di singola particella viene fissato dal confronto con l'esperimento. In altri termini, nel nostro approccio la base di funzioni d'onda di singola particella verrà prodotta utilizzando campi medi fenomenologici che automaticamente rinormalizzano le energie di particella singola, considerando in maniera effettiva il contributo di questo termine.

A questo punto procediamo con i calcoli variazionali e richiediamo che, per ogni stato sia soddisfatta la relazione

$$\frac{\partial}{\partial v_a} U = 0 \quad (3.18)$$

Questo porta ad avere

$$u_a^2 v_a^2 = \frac{\Delta_a^2}{4 \left[(\varepsilon_a - \lambda)^2 + \Delta_a^2 \right]} \quad (3.19)$$

da cui

$$u_a = (-1)^{l_a} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon_a - \lambda)}{\sqrt{(\varepsilon_a - \lambda)^2 + \Delta_a^2}}} \quad (3.20)$$

$$v_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{(\varepsilon_a - \lambda)}{\sqrt{(\varepsilon_a - \lambda)^2 + \Delta_a^2}}} \quad (3.21)$$

Infine per nuclei sferici, l'equazione del gap si scrive

$$2 \hat{j}_a \Delta_a = - \sum_b \frac{\hat{j}_b \Delta_b}{\sqrt{(\varepsilon_b - \lambda)^2 + \Delta_b^2}} \langle a a 0 | V | b b 0 \rangle \quad (3.22)$$

Dato che nello stato fondamentale BCS (2.18) il numero di particelle è conservato solo in media, è interessante legare il valore del gap di energia alla fluttuazione del numero di particelle. Una misura di queste fluttuazioni per protoni e per neutroni è data dalla deviazione quadratica media dal valore medio \bar{N}

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2 &\equiv \langle BCS | (N - \bar{N})^2 | BCS \rangle \\ &= \langle BCS | N^2 | BCS \rangle - 2\bar{N} \langle BCS | N | BCS \rangle + \bar{N}^2 \langle BCS | BCS \rangle \\ &= \langle BCS | N^2 | BCS \rangle - 2\bar{N}^2 + \bar{N}^2 = \langle BCS | N^2 | BCS \rangle - \bar{N}^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove N è un operatore.

Inserendo l'espressione esplicita (3.5) dello stato $|BCS\rangle$, e tenendo conto delle equazioni (3.19) e (3.29) troviamo

$$(\Delta n)^2 = 2 \sum_a \hat{j}_a u_a^2 v_a^2 = \frac{1}{2} \sum_a \hat{j}_a \frac{\Delta_a^2}{(\varepsilon_a - \lambda) + \Delta_a^2} \quad (3.24)$$

Dalla equazione precedente si vede che a fluttuazioni maggiori del numero di nucleoni corrisponde un gap di energia più largo. Dato che per nuclei magici $(\Delta n)^2$ è uguale a zero, ci aspettiamo che tutti i Δ_a siano nulli.

3.2 Soluzione numerica delle equazioni BCS

La soluzione del sistema di equazioni (3.13), (3.20), (3.21) e (3.22) è ottenuta numericamente con un metodo iterativo.

A questo punto, è importante mettere in evidenza la procedura di soluzione delle equazioni BCS.

I Costruiamo la base di funzioni d'onda di particella singola ϕ_a , con energie ε_a risolvendo l'equazione di Schrödinger di singola particella. Nel nostro caso utilizziamo un potenziale di Woods-Saxon come campo medio e diagonalizziamo l'Hamiltoniana in una base di oscillatore armonico. Con questa procedura si ottengono soluzioni discrete anche per le funzioni d'onda con energia positiva. In gergo, si discretizza lo spettro continuo.

Dettagli di questa procedura sono presentati in Appendice D.

II Si fa una prima stima dei valori dei parametri variazionali. Nel nostro caso utilizziamo distribuzioni del tipo

$$v_a^{(n=0)} = \left(1 + e^{\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_F}{\hbar \omega}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

$$u_a^{(n=0)} = \left(1 - v_a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

dove ε_F è l'energia di Fermi nella base di particella singola del modello a shell.

III Si calcolano i valori di $\Delta_b^{(n+1)}$ utilizzando l'equazione (3.17)

$$\Delta_b^{(n+1)} = -\hat{j}_b^{-1} \sum_a \hat{j}_a u_a^{(n)} v_a^{(n)} \langle aa0|V|bb0\rangle \quad (3.27)$$

L'espressione esplicita dell'elemento di matrice è data in Appendice C. I dettagli delle interazioni di pairing che abbiamo utilizzato saranno discussi nel Capitolo 4.

IV Si trova il valore di $\lambda^{(n+1)}$ che soddisfa

$$\lambda^{(n+1)} = \frac{\sum_a \hat{j}_a^2 \left(v_a^{(n)}\right)^2 - \frac{1}{2} \sum_a \hat{j}_a^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_a}{E_a^{(n)}}\right)}{\frac{1}{2} \sum_a \frac{\hat{j}_a^2}{E_a^{(n)}}} \quad (3.28)$$

dove

$$E_a \equiv \sqrt{\varepsilon_a^2 + \Delta_a^2} \quad (3.29)$$

è l' energia di quasi-particella.

V Con i valori di $\lambda^{(n+1)}$ e $\Delta_k^{(n+1)}$ così ottenuti, si calcolano i valori di $v_k^{(n+1)}$ e $u_k^{(n+1)}$ utilizzando le equazioni (3.20), (3.21).

VI Si calcola il valore δn definito come la differenza

$$\delta n = N - \sum_a \hat{j}_a^2 \left(v_a^{(n+1)}\right)^2 \quad (3.30)$$

Se $|\delta n|$ è inferiore ad un valore definito di convergenza numerica, il processo termina, altrimenti si ricomincia dal punto III sostituendo tutti i termini con n con quelli $n+1$.

La soluzione delle equazioni fornisce il valore del potenziale chimico λ , quelli delle probabilità di occupazione, v_k , u_k e del gap Δ_k per ogni stato della base. Con queste informazioni è possibile calcolare le quantità che definiremo nei paragrafi successivi di questo capitolo.

3.3 La matrice densità

È utile, a questo punto, studiare come il termine di pairing modifica le espressioni di alcune quantità che caratterizzano lo stato fondamentale del sistema. In questo paragrafo ricaviamo l'espressione che assume la matrice densità.

L'operatore matrice densità è definito come

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_k \phi_k(\mathbf{r}_1) \phi_k^*(\mathbf{r}_2) a_k^\dagger a_k \quad (3.31)$$

dove ϕ_k sono funzioni di particella singola.

Calcoliamo il valore di aspettazione dell'operatore ρ rispetto allo stato fondamentale BCS. Il calcolo è analogo a quello fatto per ottenere \bar{N} quindi si ha

$$\begin{aligned} \langle BCS | a_k^\dagger a_k | BCS \rangle = \\ \langle BCS | (u_k \alpha_k^\dagger + v_k \alpha_{-k}) (u_k \alpha_k + v_k \alpha_{-k}^\dagger) | BCS \rangle = v_k^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Quindi,

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \langle BCS | \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) | BCS \rangle = \sum_k v_k^2 \phi_k^*(\mathbf{r}_1) \phi_k(\mathbf{r}_2) \quad (3.33)$$

Poichè in approssimazione di campo medio, per un livello occupato, $v_k = 1$, l'equazione (3.33) riproduce esattamente la ben nota espressione della matrice densità [Rin80] ottenuta lavorando con stati modello a shell

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{k < k_F} \phi_k^*(\mathbf{r}_1) \phi_k(\mathbf{r}_2) \quad (3.34)$$

Il termine di appaiamento dunque, modifica la tradizionale distribuzione della densità di carica dei nuclei, per la presenza del fattore v_k^2 .

Ora inseriamo l'espressione in base sferica di una funzione d'onda di particella singola

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{nljm} v_{nlj}^2 R_{nlj}(r_1) R_{nlj}(r_2) \\ &\sum_{\mu s} (-)^{l-\frac{1}{2}+m} \hat{j} \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ \mu & s & -m \end{pmatrix} Y_{l\mu}^*(\Omega_1) \chi_s^+ \\ &\sum_{\mu' s'} (-)^{l-\frac{1}{2}+m} \hat{j} \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ \mu' & s' & -m \end{pmatrix} Y_{l\mu'}(\Omega_2) \chi_{s'} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Moltiplicando gli spinori, nell'equazione (3.35), si trova

$$\chi_{s'} \chi_s^+ = \delta_{ss'} \quad (3.36)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{nljm} v_{nlj}^2 R_{nlj}(r_1) R_{nlj}(r_2) \\ &\sum_{\mu} \hat{j}^2 \sum_{ms} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & j & l \\ s & -m & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & j & l \\ s & -m & \mu' \end{pmatrix} \\ &Y_{l\mu}^*(\Omega_1) Y_{l\mu'}(\Omega_2) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dato che [Edm96]

$$\sum_{ms} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & j & l \\ s & -m & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & j & l \\ s & -m & \mu' \end{pmatrix} = \frac{1}{\hat{l}^2} \delta_{\mu\mu'} \quad (3.38)$$

troviamo

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{nljm} v_{nlj}^2 R_{nlj}(r_1) R_{nlj}(r_2) \frac{\hat{j}^2}{\hat{l}^2} \sum_{\mu} Y_{l\mu}^*(\Omega_1) Y_{l\mu}(\Omega_2) \quad (3.39)$$

Per le proprietà delle armoniche sferiche [Edm96]

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{nlj} v_{nlj}^2 R_{nlj}(r_1) R_{nlj}(r_2) \frac{\hat{j}^2}{\hat{l}^2} \frac{\hat{l}^2}{4\pi} P_l(\cos\theta_{12}) \quad (3.40)$$

dove abbiamo indicato con P_l il polinomio di Legendre [Edm96] e θ_{12} è l'angolo tra le direzioni Ω_1 e Ω_2 .

La densità di probabilità di trovare un nucleone nel punto \mathbf{r} è data dalla parte diagonale della matrice densità, quindi $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ e $\theta_{12} = 0$. Per questa quantità otteniamo

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{nlj} (2j+1) R_{nlj}^2(r) v_{nlj}^2 \quad (3.41)$$

Integrando l'espressione (3.41) su tutto lo spazio, data l'ortogonalità delle funzioni d'onda di singola particella, si ottiene l'espressione (3.13) per il numero di particelle.

La normalizzazione è data da

$$\begin{aligned} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) &= \int d\Omega \int dr r^2 \rho(r) \\ &= 4\pi \frac{1}{4\pi} \sum_{nlj} v_j^2 (2j+1) \int dr r^2 R_{nlj}^2(r) \\ &= \sum_{nlj} v_j^2 (2j+1) = N_{tot} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Limitando le somme delle espressioni (3.40) e (3.41) ai soli neutroni, o protoni, si hanno matrici densità, e distribuzioni di densità, di neutroni o protoni.

3.4 La distribuzione dei momenti

Un'altra quantità d'interesse per la descrizione dello stato fondamentale dei sistemi a multicorpi, in generale, è la distribuzione dei momenti. Anche per questa quantità vogliamo ottenere l'espressione legata al termine di pairing. La definizione della distribuzione dei momenti è

$$n(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{N_{tot}} \int d^3r_1 \int d^3r_2 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.43)$$

dove $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ è la matrice densità. La definizione della distribuzione dei momenti data nell'equazione (3.43) soddisfa la condizione di normalizzazione

$$\int d^3k n(k) = 1 \quad (3.44)$$

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come il termine di appaiamento modifica i risultati ottenuti in approssimazione di Hartree-Fock. Per valutare l'importanza delle correlazioni di pairing per la distribuzione dei momenti, lavoriamo inizialmente in approssimazione di campo medio.

Inseriamo nella (3.43) l'espressione (3.39) della matrice densità

$$\begin{aligned}
n(k) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{N} \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 4\pi \sum_{L_1, M_1} (\imath)^{L_1} j_{L_1}(kr_1) \\
&\quad Y_{L_1 M_1}^*(\Omega_k) Y_{L_1 M_1}(\Omega_1) 4\pi \sum_{L_2, M_2} (\imath)^{L_2} j_{L_2}(kr_2) Y_{L_2 M_2}(\Omega_k) Y_{L_2 M_2}^*(\Omega_2) \\
&\quad \sum_{nlj} v_{nlj}^2 R_{nlj}(r_1) R_{nlj}(r_2) \frac{\hat{j}^2}{\hat{l}^2} \sum_{\mu} Y_{l\mu}^*(\Omega_1) Y_{l\mu}(\Omega_2)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

dove abbiamo sviluppato l'esponenziale in termini di armoniche sferiche.

Per le proprietà di ortogonalità delle armoniche sferiche [Edm96], dall'integrazione sulla parte angolare si ha

$$\int d\Omega_1 Y_{L_1 M_1}(\Omega_1) Y_{l\mu}^*(\Omega_1) = \delta_{L_1, l} \delta_{M_1, \mu} \tag{3.46}$$

$$\int d\Omega_2 Y_{L_2 M_2}(\Omega_2) Y_{l\mu}^*(\Omega_2) = \delta_{L_2, l} \delta_{M_2, \mu} \tag{3.47}$$

Facciamo adesso la scelta che l'asse z sia parallelo alla direzione del vettore \mathbf{k} . Il risultato è indipendente dalla scelta dell'asse di quantizzazione. Con questa ipotesi, le coordinate angolari sono $\theta = 0$, $\varphi = 0$, $\Omega = 0$ e si ha [Edm96]

$$Y_{l\mu}(0) = \frac{\hat{l}}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\mu, 0} \tag{3.48}$$

Otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned}
n(k) &= \frac{1}{(2\pi)^3} (4\pi)^2 \frac{1}{N} \int dr_1 r_1^2 \int dr_2 r_2^2 \sum_{nlj} v_{nlj}^2 R_{nlj}(r_1) j_l(kr_1) \\
&\quad R_{nlj}(r_2) j_l(kr_2) \frac{\hat{j}^2}{\hat{l}^2} \frac{\hat{l}^2}{4\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{N} \sum_{nlj} (2j+1) v_{nlj}^2 \left[\int dr r^2 R_{nlj}(r) j_l(kr) \right]^2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Integrando su \mathbf{k} , ricordando che

$$\int dk k^2 j_l(kr_1) j_l(kr_2) = \frac{\pi}{2} \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1^2} \tag{3.50}$$

e l'ortonormalizzazione delle funzioni d'onda di singola particella, si verifica la normalizzazione (3.44).

3.5 Densità di pairing

In questo paragrafo consideriamo un'altra quantità d'interesse: la densità di pairing. Si tratta della probabilità di trovare una coppia di nucleoni con spin appaiato. Lo

studio di questa funzione da informazioni se la correlazione di appaiamento è un fenomeno di superficie o di volume [San05].

La densità di pairing è definita come:

$$\kappa(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}, s = 1/2) \psi(\mathbf{r}, s = -1/2) \rangle \quad (3.51)$$

dove l'operatore $\psi(\mathbf{r}, s = 1/2)$ annichila un nucleone di spin $s = 1/2$ nel punto \mathbf{r} .

In termini di operatori di creazione e distruzione si ha

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum \nu \phi_\nu(\mathbf{r}) a_\nu \quad (3.52)$$

e

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \sum \nu \phi_\nu^*(\mathbf{r}) a_\nu^+ \quad (3.53)$$

Calcoliamo ora, l'elemento di matrice $\langle BCS | a_k a_{-k} | BCS \rangle$ utilizzando la definizione di stato fondamentale BCS

$$\begin{aligned} \langle BCS | a_k a_{-k} | BCS \rangle &= \langle - | \prod_\alpha (u_\alpha^* + v_\alpha^* a_{-\alpha} a_\alpha) a_k a_{-k} \prod_\beta (u_\beta + v_\beta a_{-\beta}^+ a_{-\beta}) | - \rangle \\ &= u_k^2 \langle - | a_k a_{-k} | - \rangle + u_k^* v_k \langle - | a_k a_{-k} a_k^+ a_{-k}^+ | - \rangle \\ &+ v_k^* u_k \langle - | a_{-k} a_k a_k a_{-k} | - \rangle + v_k^2 \langle - | a_{-k} a_k a_k a_{-k} a_k^+ a_{-k}^+ | - \rangle \\ &= u_k^* v_k \end{aligned} \quad (3.54)$$

Per la convenzione di fase (2.15) presentata nel capitolo precedente,

$$\kappa(\mathbf{r}) = \sum_k |u_k| |v_k| \phi_k(\mathbf{r}) \phi_k^*(\mathbf{r}) \quad (3.55)$$

Esprimiamo le funzioni di particella singola in base sferica

$$\phi_k(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) Y_{lj}^m(\Omega) \quad (3.56)$$

e

$$\phi_k^*(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) Y_{lj}^{*m}(\Omega) \quad (3.57)$$

quindi

$$\kappa(\mathbf{r}) = \sum_{nljm} u_{nlj} v_{nlj} R_{nlj}^2(r) Y_{lj}^{*m}(\Omega) Y_{lj}^m(\Omega) \quad (3.58)$$

Ricordando la relazione

$$\sum_m Y_{lj}^{*m}(\Omega) Y_{lj}^m(\Omega) = \frac{2j+1}{4\pi} \quad (3.59)$$

si trova l'espressione finale della densità di pairing per un sistema a simmetria sferica

$$\kappa(\mathbf{r}) = \sum_{nlj} |u_{nlj}| |v_{nlj}| R_{nlj}^2(r) \frac{2j+1}{4\pi} \quad (3.60)$$

3.6 Matrice densità a due corpi (TBDF)

Ricaviamo ora come il termine di appaiamento modifica l'espressione della matrice di densità a due corpi. (Two-Body Density Function - TBDF)

Per un sistema di A nucleoni, la matrice a due corpi è definita come

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int d^3r_3 d^3r_4 \dots d^3r_A \Psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_A) \quad (3.61)$$

La matrice densità fornisce la probabilità di trovare due nucleoni nei punti \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Nota che l'integrazione è fatta su tutte le coordinate del sistema eccetto su queste variabili.

Inserendo nella definizione (3.61), le espressioni dei determinanti di Slater per le funzioni d'onda $\Psi(\mathbf{r})$, si trova

$$\begin{aligned} \rho_2^{HF}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \sum_{i=1}^{\varepsilon_F} \sum_{k=1}^{\varepsilon_F} \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i^*(\mathbf{r}_2) [\phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_k(\mathbf{r}_2) - \phi_k(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2)] \\ &= \sum_{i=1} |\phi_i(\mathbf{r}_1)|^2 \sum_{k=1} |\phi_k(\mathbf{r}_2)|^2 - \sum_{i=1} \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2) \sum_{k=1} \phi_k^*(\mathbf{r}_2) \phi_k(\mathbf{r}_1) \\ &= \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) - \rho^2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Da questa espressione si vede le probabilità di trovare un nucleone in un punto dello spazio, non sono indipendenti. La probabilità di avere due particelle nei punti \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 è infatti minore del prodotto delle singole probabilità.

Le espressioni di $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ e $\rho(\mathbf{r})$, per il caso BCS, sono date dalle equazioni (3.40) e (3.41) rispettivamente.

Nel presente lavoro, presentiamo la TBDF in funzione della distanza relativa dei due nucleoni

$$\mathbf{r}_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \quad (3.63)$$

Per fare questo, integriamo la TBDF sulla coordinata del centro di massa della coppia

$$\mathbf{R}_{12} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \quad (3.64)$$

e, in definitiva, otteniamo

$$\rho(\mathbf{r}_{12}) = \int d^3R_{12} \rho(\mathbf{R}_{12}, \mathbf{r}_{12}) \quad (3.65)$$

Capitolo 4

Risultati

Le informazioni necessarie per risolvere le equazioni BCS sono la base di particella singola e l'interazione di pairing.

In questo capitolo, faremo prima una discussione per chiarire la sensibilità dei risultati rispetto alla scelta dei parametri di input. Poi studieremo alcuni aspetti teorici relativi alla soluzione delle equazioni BCS e al pairing in generale e presenteremo infine, gli effetti del fenomeno nella catena isotopica del Ca.

4.1 Base di particella singola

Le funzioni d'onda di particella singola usate in questo lavoro di tesi, sono state ottenute risolvendo l'equazione di Schrödinger ad un corpo con un potenziale sferico di tipo Wood-Saxon.

$$\begin{aligned} V(r) &= V_0(r) + V_{SO}(r) + V_C(r) \\ &= \frac{U_o}{1 + e^{\frac{r-R_o}{a_o}}} + \left(\frac{\hbar c}{m_\pi c^2} \right)^2 \frac{U_{so}}{a_{so} r} \frac{e^{\frac{r-R_{so}}{a_{so}}}}{1 + e^{\frac{r-R_{so}}{a_{so}^2}}} \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\sigma} - V_c(r) \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove

$$V_c(r) = \begin{cases} (Z-1) \frac{e^2}{2R} & \text{se } r \geq R_c \\ \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{se } r \leq R_c \end{cases} \quad (4.2)$$

Il potenziale di Wood-Saxon è formato da un termine centrale V_0 , da V_{SO} che dipende dall'interazione del momento angolare orbitale e quello di spin e, solo per i protoni, da un potenziale elettrostatico repulsivo V_C generato da una distribuzione uniforme di carica.

L'equazione di Schrödinger con questo potenziale viene risolta utilizzando la tecnica dello sviluppo su una base di oscillatore armonico (vedi Appendice D).

In questo modo si ottengono solo soluzioni discrete, anche per valori positivi dell'energia di singola particella. Questo fatto, in gergo, viene indicato come *discretizzazione del continuo*.

Le soluzioni ottenute possono essere classificate in termini di shell chiuse, ognuna caratterizzata dal numero quantico N che identifica le soluzioni degeneri per l'oscillatore armonico

$$\varepsilon = \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \quad (4.3)$$

dove

$$N = 2(n - 1) + \ell \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

La soluzione Wood-Saxon e la presenza del termine di spin-orbita distruggono la degenerazione. In ogni caso, utilizzeremo lo stesso valore di N per caratterizzare le diverse shell, come mostrato di seguito.

Ad esempio per ottenere $N = 2$ abbiamo due possibilità

$$\begin{cases} n = 2 & \ell = 0 & \text{che corrisponde a } 2 s_{1/2} \\ n = 1 & \ell = 2 & \text{che corrisponde a } 1 d_{5/2} \quad 1 d_{3/2} \end{cases} \quad (4.5)$$

In questo modo si può costruire l'intero spazio delle configurazioni (vedi Tab. 4.1 e Fig. 1.1).

Spazio delle configurazioni.

N	HO	HO + S.O.
0	1s	$1s_{1/2}$
1	1p	$1p_{(3,1)/2}$
2	2s, 1d	$2s_{1/2}, 1d_{(5,3)/2}, 1f_{7/2}$
3	2p, 1f	$2p_{(3,1)/2}, 1f_{5/2}, 1g_{9/2}$
4	3s, 2d, 1g	$3s_{1/2}, 2d_{(5,3)/2}, 1g_{7/2}, 1h_{11/2}$
5	3p, 2f, 1h	$3p_{(3,1)/2}, 2f_{5/2}, 1h_{9/2}, 1i_{13/2}$
6	4s, 3d, 2g, 1i	$4s_{1/2}, 3d_{(5,3)/2}, 2g_{(9,7)/2}, 1i_{11/2}, 1j_{15/2}$
7	4p, 3f, 2h, 1j	$4p_{(3,1)/2}, 3f_{(7,5)/2}, 2h_{(11,9)/2}, 1j_{13/2}$
..

Tabella 4.1: Stati di particella singola per alcuni valori di N . L'espressione $1p_{(5,3)/2}$ è un modo compatto di scrivere gli stati $1p_{5/2}$ e $1p_{3/2}$.

Nella Tab. 4.2 presentiamo i valori dei parametri di Wood-Saxon per l' ^{16}O e il ^{40}Ca [Ari07]. Questi dati sono fissati per riprodurre le energie di singola particella vicino alla superficie di Fermi e i raggi di carica.

Studieremo nel paragrafo successivo la sensibilità dei risultati dei nostri calcoli rispetto all'ampiezza dello spazio delle configurazioni.

	^{16}O		^{40}Ca	
	<i>protoni</i>	<i>neutroni</i>	<i>protoni</i>	<i>neutroni</i>
U_0	-52.50	-52.50	-57.50	-55.00
U_{SO}	-7.00	-6.54	-11.11	-8.50
a_0	0.53	0.53	0.53	0.53
a_{SO}	0.53	0.53	0.53	0.53
R_0	3.20	3.20	4.10	4.10
R_{SO}	3.20	3.20	4.10	4.10
R_{C}	3.22	0	4.10	0

Tabella 4.2: Valori dei parametri di Wood-Saxon. U_0 e U_{SO} sono espressi in MeV, i restanti in fm.

4.2 Interazioni di pairing

In questo lavoro di tesi utilizziamo tre diversi tipi di interazioni effettive di pairing.

- (a) un'interazione schematica G , in cui tutti gli elementi di matrice, calcolati in una base di particella singola, sono uguali ad una costante. Questo valore, convenzionalmente utilizzato in letteratura [Suh07], è pari a $-17.0/A$ MeV, dove A è il numero di nucleoni;
- (b) un'interazione zero range $\delta \equiv V_0 \delta(r_{12})$, con $V_0 = -220$ MeV. Il parametro V_0 è stato scelto in modo da riprodurre il valore del gap di sperimentale per l' ^{18}O ;
- (c) un'interazione di rango finito $F \equiv V(r_{12})$.

Nei nostri calcoli utilizziamo un'espressione del tipo

$$V(r_{12}) = A e^{-\frac{r_{12}^2}{\mu_1^2}} + B e^{-\frac{r_{12}^2}{\mu_2^2}} \quad (4.6)$$

dove $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

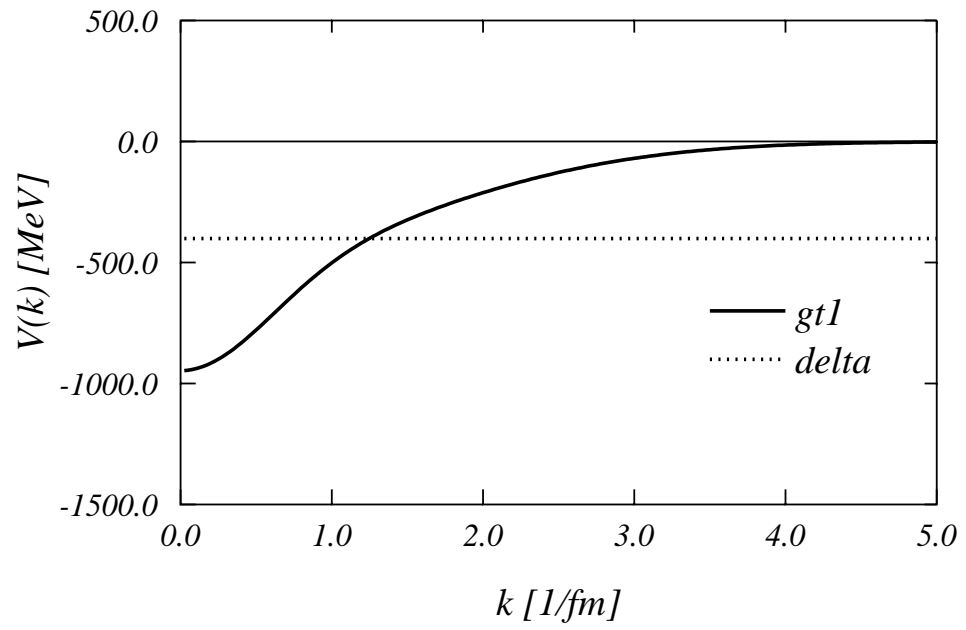
I parametri dell'interazione sono $A = -55.131$ MeV, $B = 647.057$ MeV, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 0.7$ e sono stati fissati in modo da riprodurre il gap dell' ^{18}O .

Nella Fig. 4.1 mostriamo le interazioni δ a zero range e F a rango finito, nello spazio degli impulsi.

Per risolvere le equazioni del gap (3.22) dobbiamo sommare gli elementi di matrice

$$\langle a a 0 | V | b b 0 \rangle \quad (4.7)$$

la cui espressione è presentata in Appendice C, su tutto lo spazio delle configurazioni. È necessario quindi, fare un test di convergenza, cioè studiare come variano le quantità presentate nel capitolo precedente, all'aumentare dello spazio delle configurazioni.

Figura 4.1: Interazioni δ e F nello spazio dei momenti.

Nei nostri calcoli, per ogni nucleo studiato, abbiamo sempre utilizzato lo spazio delle configurazioni che assicura stabilità dei risultati, soprattutto nei valori di λ e Δ .

A titolo d'esempio, mostriamo i risultati legati allo studio di convergenza per ^{18}O .

Il nucleo dell' ^{18}O è formato da 8 protoni ($Z = 8$) e 10 neutroni.

Nel modello a shell, i protoni occupano i livelli di particella singola corrispondenti a $N = 1$ (vedi Fig. 1.1). Per i neutroni invece, gli stati interessati sono $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$ e $1d_{5/2}$ occupato parzialmente.

Per la presenza della shell chiusa dei protoni, l'effetto del pairing sui essi è nullo. Dunque, nell' ^{18}O , il fenomeno di pairing appare solo per i neutroni.

Utilizzando le tre interazioni G , δ e F abbiamo calcolato i valori di λ e del gap Δ . I risultati sono mostrati in Tab. 4.3.

Test di convergenza.

$\hbar\omega$	G		δ		F	
	λ	Δ	λ	Δ	λ	Δ
2	-7.71	1.576	-7.31	2.091	-7.31	2.050
3	-9.50	1.986	-7.34	2.065	-7.33	2.030
4	-13.45	2.065	-7.34	2.063	-7.33	2.027
5	-19.69	2.170	-7.36	2.047	-7.34	2.019
6	-28.66	2.323	-7.37	2.035	-7.35	2.011
7	-41.04	2.471	-7.38	2.017	-7.35	2.007

Tabella 4.3: Valori di λ e Δ in MeV calcolati usando le tre interazioni per ^{18}O e aumentando lo spazio di particella singola di $\hbar\omega$ ad ogni passo.

I valori del gap sono dati dal modulo della differenza di energia fra l'ultimo livello di singola particella occupato e il livello vuoto immediatamente successivo. Nel caso dell' ^{18}O per i neutroni, risulta

$$\Delta = |\varepsilon(1d_{5/2}) - \varepsilon(2p_{1/2})| \quad (4.8)$$

Questi calcoli mostrano che l'interazione a rango finito converge più rapidamente rispetto alle altre due. Come si vede dalla Tab. 4.3 infatti, i valori per la F si stabilizzano già per $N = 4$.

L'interazione δ ha invece, una convergenza più lenta, mentre G non presenta convergenza.

Come si vede dalla Tab. 4.3 i valori ottenuti per l'interazione G aumentano all'aumentare dello spazio delle configurazioni. Questo è l'effetto di un'interazione schematica: quando si aumenta lo spazio delle configurazioni, aumenta il numero di elementi di matrice (4.7) che contribuiscono in modo costante alla somma in (3.22), e di conseguenza cambia il valore di Δ e di λ .

È importante però, usare interazioni che non siano così fortemente sensibili allo spazio di particella singola che utilizziamo. Nella nostra trattazione dunque, vogliamo lavorare con interazioni che producono un *taglio naturale* al problema.

L'interazione δ contiene la funzione delta di Dirac che è una costante nello spazio dei momenti. Questo vuol dire che sono accoppiate con la stessa intensità, funzioni d'onda con alte componenti di Fourier.

L'interazione di rango finito F invece, non accoppia alti valori del momento angolare perchè $F \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Per questo F dimostra essere l'interazione più conveniente rispetto alle altre funzioni prese in esame.

Discutiamo ora, di come l'effetto di pairing modifica le altre quantità presentate nel Capitolo 3, aumentando lo spazio delle configurazioni. Utilizziamo le tre interazioni e lavoriamo ancora sul nucleo dell' ^{18}O .

Nella Fig. 4.2 presentiamo le densità di neutroni per l' ^{18}O utilizzando le tre interazioni. I risultati ottenuti con δ e F mostrano un comportamento simile, e le variazioni della $\rho(r)$ all'aumentare dello spazio delle configurazioni, sono molto piccole. Per l'interazione schematica invece, le fluttuazioni ottenute al variare di N non sono trascurabili. Per piccoli valori di r infatti, la densità varia da 0.03 fm^{-3} a 0.09 fm^{-3} circa.

La Fig. 4.3 mostra come varia la distribuzione dei momenti all'aumentare dello spazio delle configurazioni di singola particella. Per l'interazione F le curve che caratterizzano i valori di N , si sovrappongono confermando la rapida convergenza della funzione. I risultati per l'interazione δ mostrano invece piccole oscillazioni per alti valori di k , oltre i valori di $k = 3 \text{ fm}^{-1}$. Grandi variazioni si vedono infine per l'interazione G , in particolare per grandi valori di k , dove le curve si discostano maggiormente.

Nella Fig. 4.4 abbiamo graficato i valori ottenuti per la densità di pairing. Si nota che l'interazione F è quella che ha una convergenza più rapida. Per la δ invece, si vede una maggiore dipendenza dei valori dell'osservabile rispetto ad N . Anche per la densità di pairing, i risultati ottenuti con l'interazione schematica non mostrano convergenza.

Nella Fig. 4.5 presentiamo i risultati ottenuti per la TBDF, in funzione della distanza relativa fra due nucleoni. Anche per questa grandezza, le curve riferite alle interazioni δ e F sono poco sensibili all'aumentare dello spazio delle configurazioni. Per l'interazione schematica invece, i valori della $\rho^{TB}(r_{12})$ variano di un fattore 6 per piccoli valori di r .

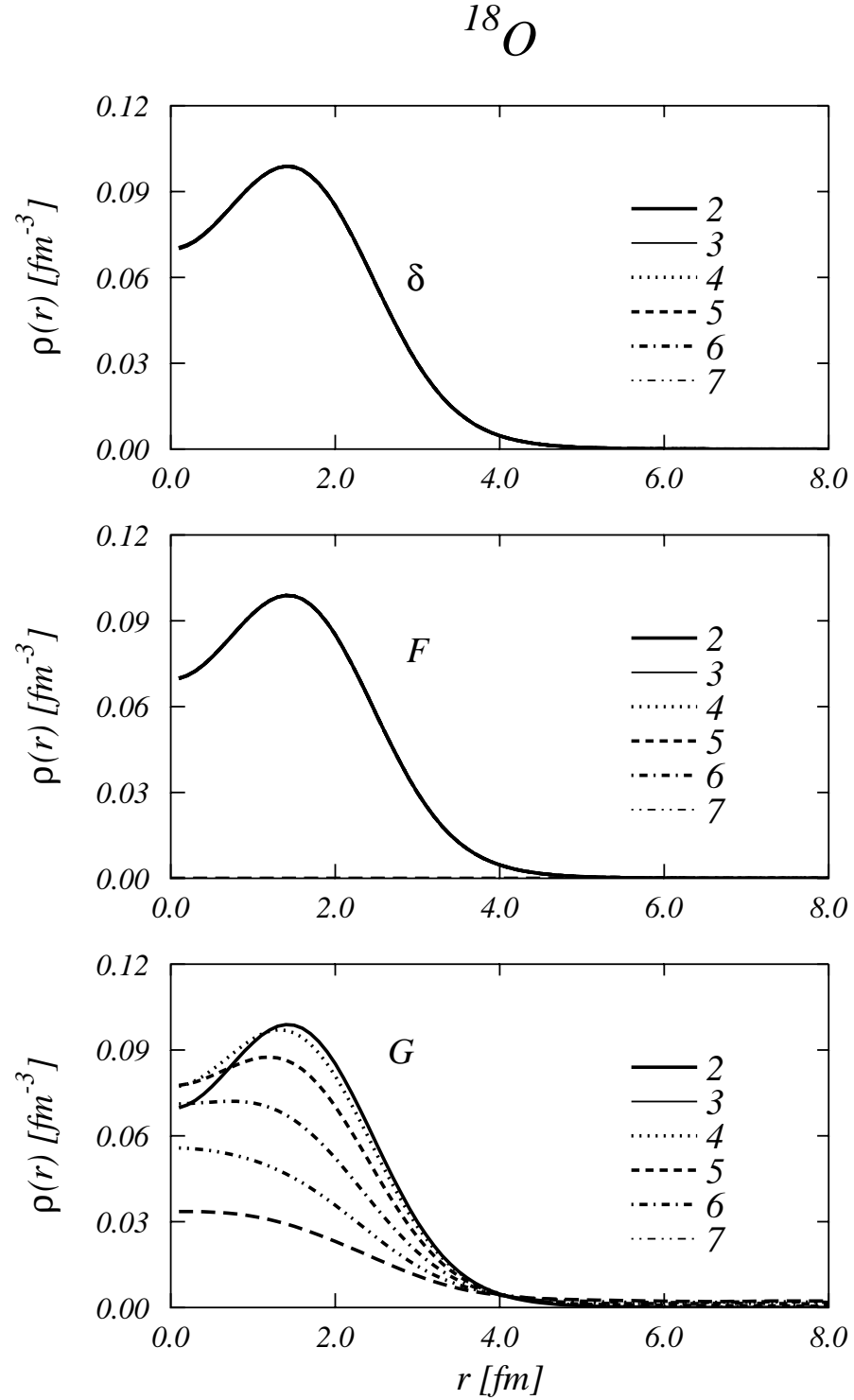


Figura 4.2: Densità di neutroni calcolate per l'interazione δ , per l'interazione F , di rango finito, e per l'interazione schematica G al variare dello spazio delle configurazioni. Le varie linee indicano i risultati ottenuti utilizzando diversi spazi delle configurazioni. I numeri nella legenda indicano il numero di shell che compongono lo spazio secondo quanto presentato nella Tab. 4.1.

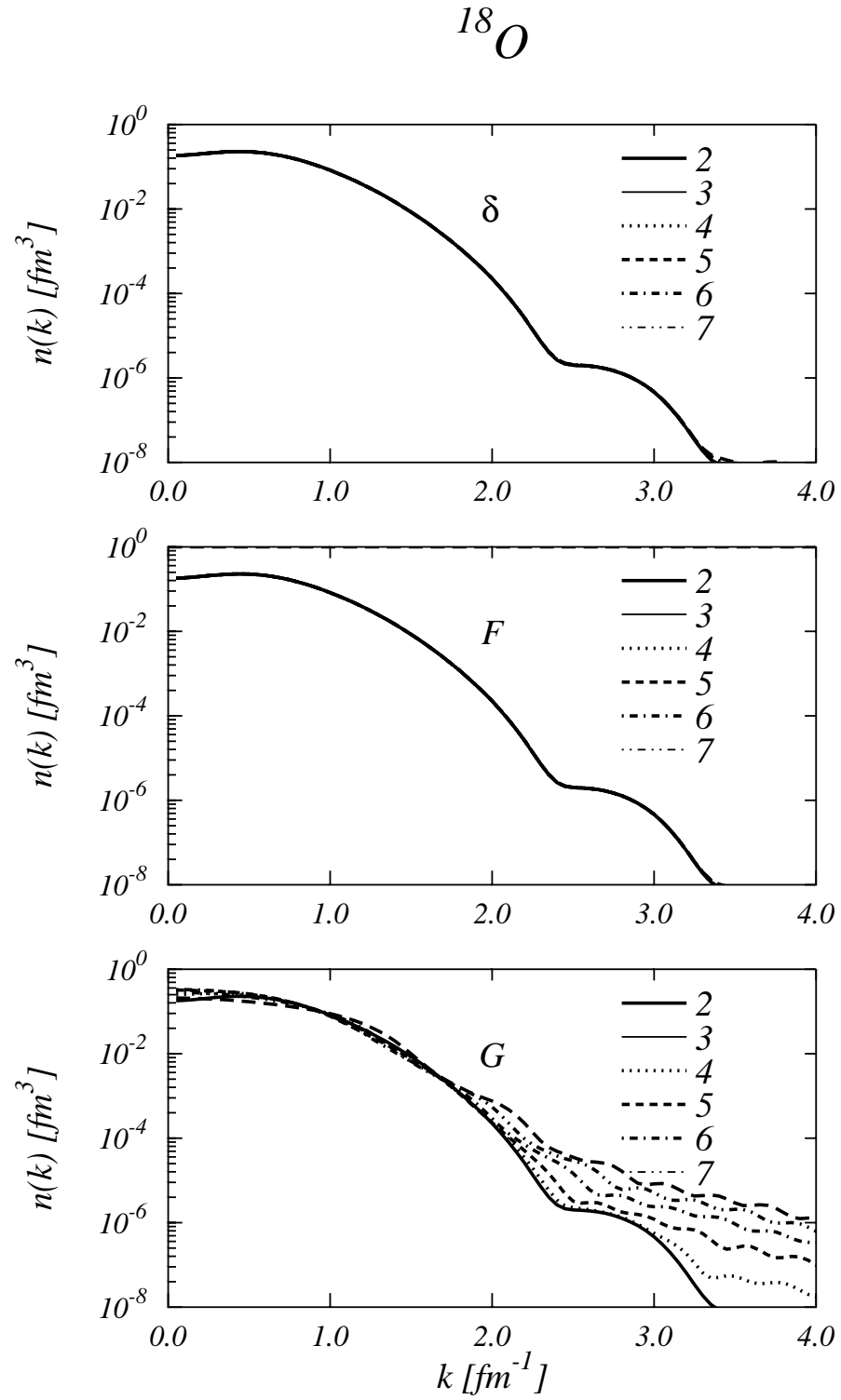


Figura 4.3: Distribuzione dei momenti calcolata per le tre interazioni in esame. Il significato delle linee è analogo a quello della Fig. 4.2.

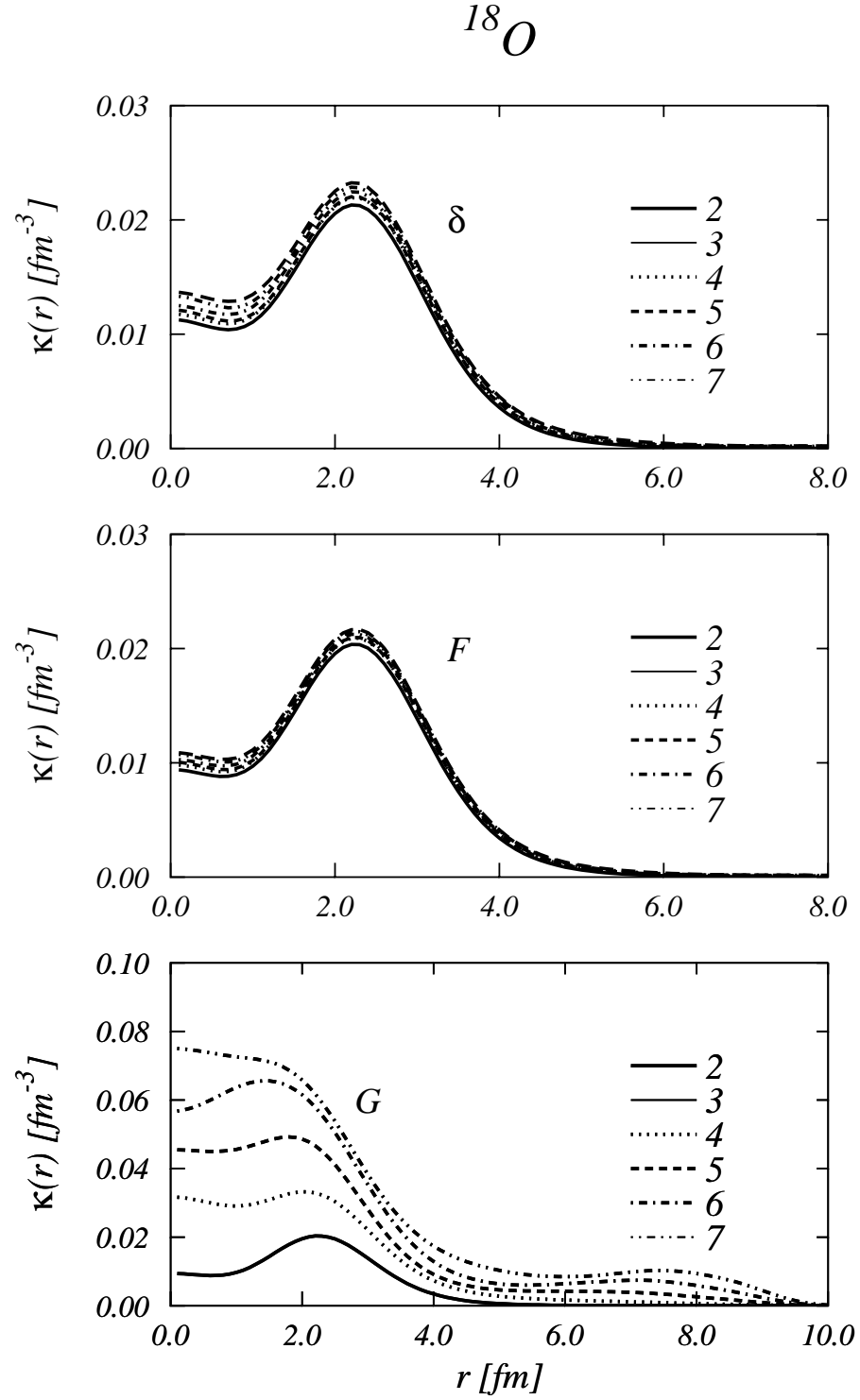


Figura 4.4: Test di convergenza delle tre interazioni sull'osservabile densità di pairing. Anche in questo caso il significato delle linee è quello indicato in Fig. 4.2.

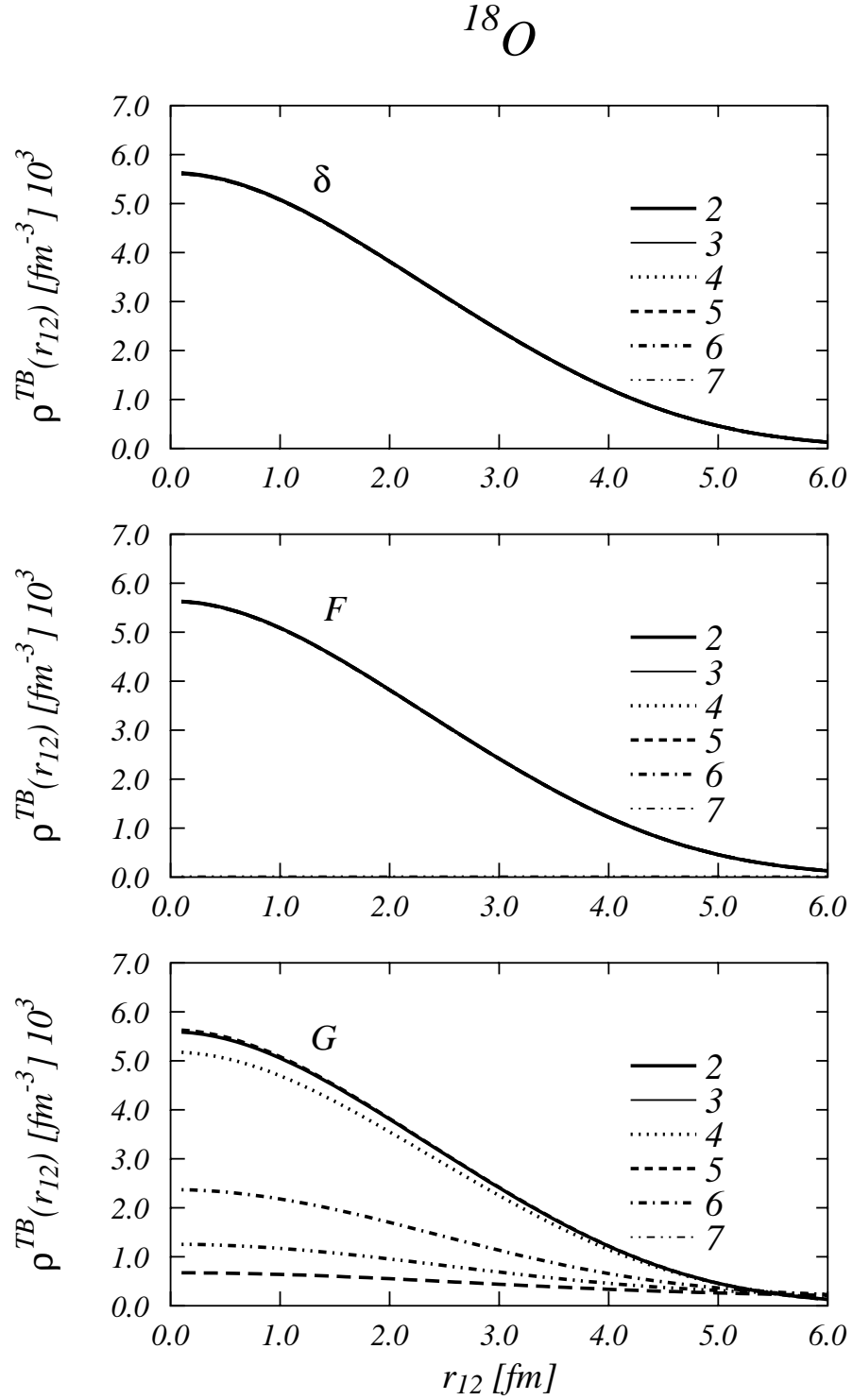


Figura 4.5: TBDF in funzione della distanza fra due nucleoni, calcolata per le interazioni δ , F e G . Tutti i valori calcolati sono stati moltiplicati per un fattore 10^3 . Il significato delle linee è analogo a quello in Fig. 4.2.

4.3 Effetti del pairing

In questo paragrafo vogliamo discutere degli effetti generali del pairing. Usiamo come nucleo esempio il ^{24}Mg .

Questo nucleo è un sistema legato di 12 protoni e 12 neutroni. In questo caso, a differenza dell' ^{18}O , sia i protoni che i neutroni sono interessati dal fenomeno del pairing. In questa discussione, utilizziamo due interazioni: l'interazione schematica G e l'interazione di rango finito F , di cui abbiamo discusso nel paragrafo precedente.

Abbiamo visto che i risultati ottenuti con G dipendono dallo spazio delle configurazioni, quindi non hanno potere predittivo. Poichè, siamo interessati a mettere in evidenza gli effetti del pairing, confrontiamo i risultati ottenuti con G , sicuramente esagerati, con quelli più realistici ottenuti con F . Gli stati di particella singola che utilizziamo sono $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$ e $1d_{5/2}$ parzialmente occupato perchè contiene solo 4 dei 6 nucleoni permessi. Lo spazio delle configurazioni di singola particella è stato generato utilizzando i parametri di Wood-Saxon fissati per l' ^{16}O .

Nelle Tab. 4.4 e 4.5 sono mostrati i valori delle energie calcolate usando G ed F rispettivamente.

G	PROTONI				NEUTRONI			
Stati	u^2	v^2	ε_{qp}	ε_{sp}	u^2	v^2	ε_{qp}	ε_{sp}
$1s_{1/2}$	0.001	0.999	-27.651	-27.604	0.001	0.999	-34.018	-33.976
$1p_{3/2}$	0.003	0.997	-14.927	-14.835	0.003	0.997	-20.601	-20.518
$1p_{1/2}$	0.007	0.993	-10.788	-10.655	0.006	0.996	-16.747	-16.634
$1d_{5/2}$	0.370	0.631	-3.126	-1.923	0.364	0.636	-8.000	-6.845
$2s_{1/2}$	0.907	0.093	1.209	0.707	0.926	0.074	-3.495	-3.926
$1d_{3/2}$	0.984	0.016	4.844	4.647	0.985	0.015	-0.109	-0.298

Tabella 4.4: La prima colonna indica gli stati di particella singola in esame. v^2 e u^2 sono le probabilità di occupazione e non occupazione per ogni stato. Le energie ε_{sp} e ε_{qp} sono calcolate con il modello a shell e con la teoria BCS rispettivamente. I risultati sono stati ottenuti utilizzando l'interazione schematica G .

F	PROTONI				NEUTRONI			
Stati	u^2	v^2	ε_{qp}	ε_{sp}	u^2	v^2	ε_{qp}	ε_{sp}
$1s_{1/2}$	0.001	0.999	-27.634	-27.604	0.001	0.999	-34.011	-33.976
$1p_{3/2}$	0.003	0.997	-14.911	-14.835	0.003	0.997	-20.603	-20.518
$1p_{1/2}$	0.003	0.997	-10.718	-10.655	0.003	0.997	-16.702	-16.634
$1d_{5/2}$	0.337	0.663	-2.783	-1.923	0.339	0.661	-7.792	-6.844
$2s_{1/2}$	0.985	0.015	0.775	0.707	0.982	0.018	-3.835	-3.926
$1d_{3/2}$	0.997	0.003	4.681	4.647	0.996	0.004	-0.244	-0.298

Tabella 4.5: Come in Tab. 4.4 per l'interazione di rango finito F .

Abbiamo inoltre calcolato i valori di λ e del gap di energia Δ per il ^{24}Mg . Nella Tab. 4.6 abbiamo presentato i risultati che abbiamo ottenuto per le due interazioni.

	PROTONI		NEUTRONI	
	λ	Δ	λ	Δ
SM	0	6.547	0	6.570
G	-1.499	7.970	-6.412	7.891
F	-1.506	7.464	-6.395	7.548
Exp		9.421		9.201

Tabella 4.6: Valori di λ e Δ in MeV per il ^{24}Mg .

I valori del gap si trovano dalla differenza di energia fra i livelli $1d_{5/2}$ e $2d_{3/2}$ calcolati con il modello a shell e con la teoria BCS. Dalla Tab. 4.6 si vede che sia per F che per G , l'effetto del pairing è quello di aumentare il valore del gap di energia rispetto a quello calcolato con il modello a strati. Si nota inoltre che il fenomeno di appaiamento è maggiormente evidente quando si utilizza l'interazione costante. I valori tabulati confermano infine, l'idea che le funzioni d'onda di particella singola per neutroni e per protoni sono diverse: questo giustifica i differenti risultati del gap per i due nucleoni anche se i livelli interessati sono gli stessi. Queste osservazioni richiedono uno studio più approfondito.

Studiamo ora le quantità $\rho(r)$, $n(k)$, $\kappa(r)$ e $\rho^{TB}(r_{12})$, per il ^{24}Mg in modo da analizzare le modifiche prodotte dall'azione del pairing. È conveniente allora, calcolare per esse, la differenza fra i risultati del modello a shell e quelli della teoria BCS.

La Fig. 4.6 mostra che la differenza dei valori della densità fra il modello di campo medio e la teoria BCS, è molto piccola, dell'ordine di 10^{-3} fm^{-3} . La variazione della densità $\Delta\rho(r)$ inoltre, è abbastanza simile per protoni e per neutroni quando si utilizza l'interazione G , mentre per l'interazione di rango finito F si nota una piccola differenza fra la densità dei due nucleoni per piccole distanze dal centro del nucleo. Si osserva inoltre che per l'interazione costante, i valori di $\Delta\rho(r)$ coprono un intervallo più ampio rispetto ai valori ottenuti utilizzando la F . Per entrambe le interazioni però, la variazione della densità presenta un massimo intorno ai 2 fm e per $r \rightarrow 0$ è decrescente.

Nella Fig. 4.7 abbiamo graficato la differenza della distribuzione dei momenti calcolata con il modello a shell e con la teoria BCS. Si vede che anche per questa quantità, le differenze sono dell'ordine di 10^{-3} . Per le due interazioni usate, $\Delta n(k)$ assume valori negativi fino a $k \approx 0.5 \text{ fm}^{-1}$ e tende a zero per valori maggiori di k . Si nota inoltre che per l'interazione costante G , le differenze fra il modello a shell e la tecnica BCS sono più marcate, in particolare per i protoni.

La Fig. 4.8 mostra le densità di pairing per protoni e neutroni del ^{24}Mg . I calcoli sono stati fatti utilizzando le interazioni G e F . È interessante notare che per entrambe le interazioni, la variazione della densità presenta un massimo intorno ai 2 fm, e che per G , $\kappa(r)$ assume valori più grandi. Per $r < 2 \text{ fm}$ le curve per le due

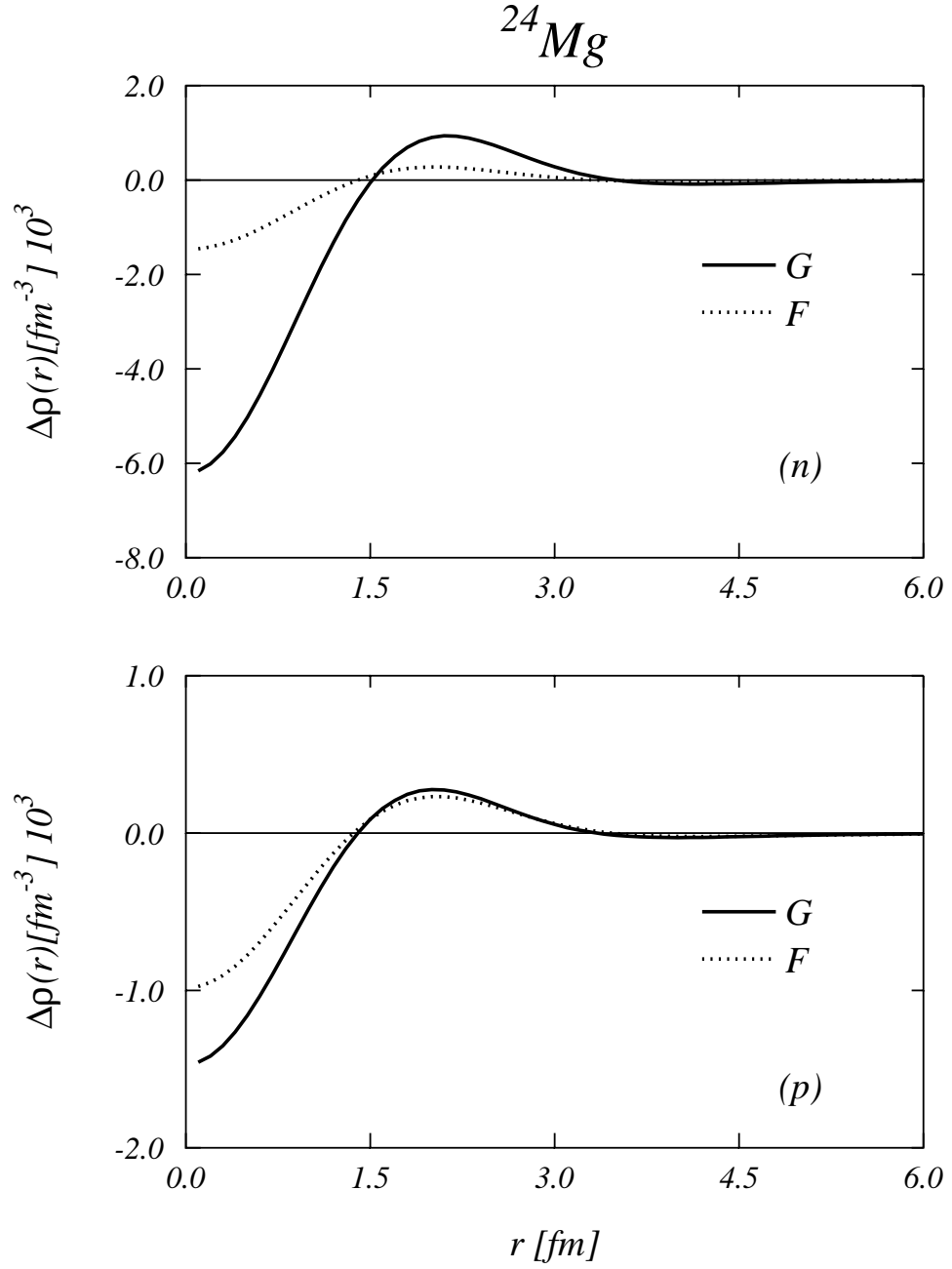


Figura 4.6: Differenza della densità di protoni e di neutroni calcolata con il modello a shell e con la teoria BCS per le due interazioni (G) e (F). I risultati sono moltiplicati per un fattore 10^3 .

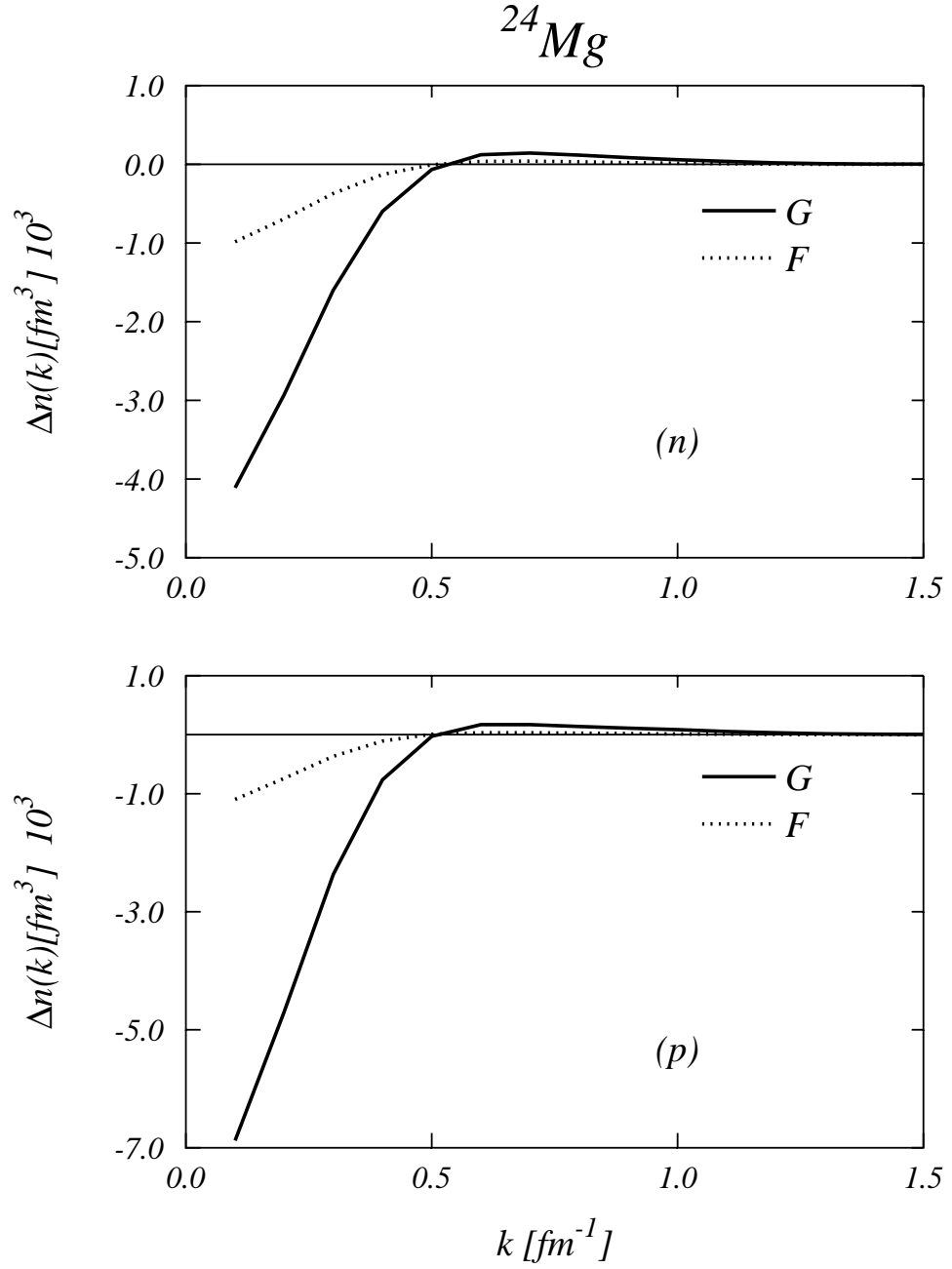


Figura 4.7: Differenza della distribuzione dei momenti, per protoni e per neutroni, calcolata con il modello a shell e con la teoria BCS per le due interazioni (G) e (F).

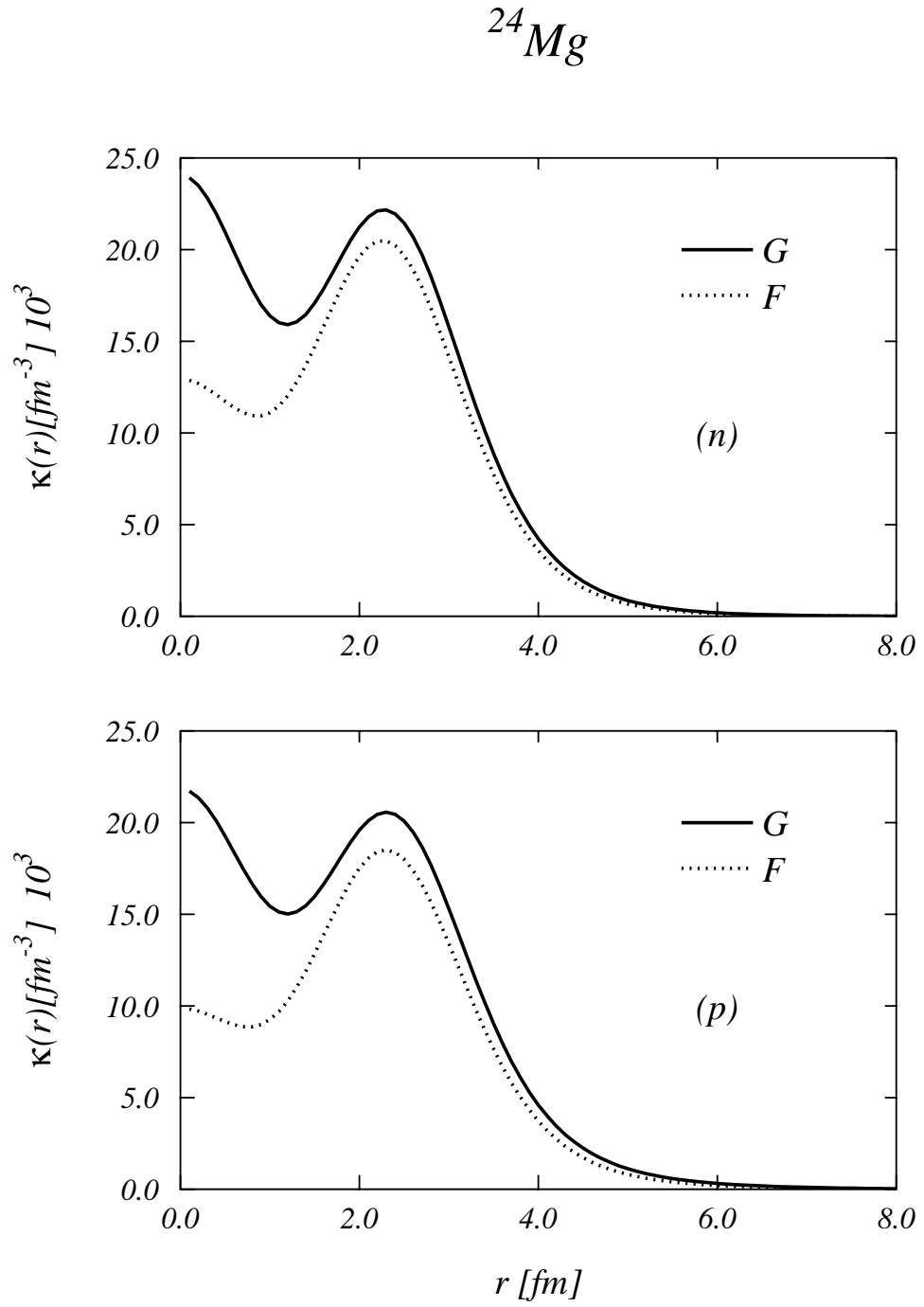


Figura 4.8: Densità di pairing di protoni e di neutroni, calcolata per le due interazioni (G) e (F). I risultati sono moltiplicati per un fattore 10^3 .

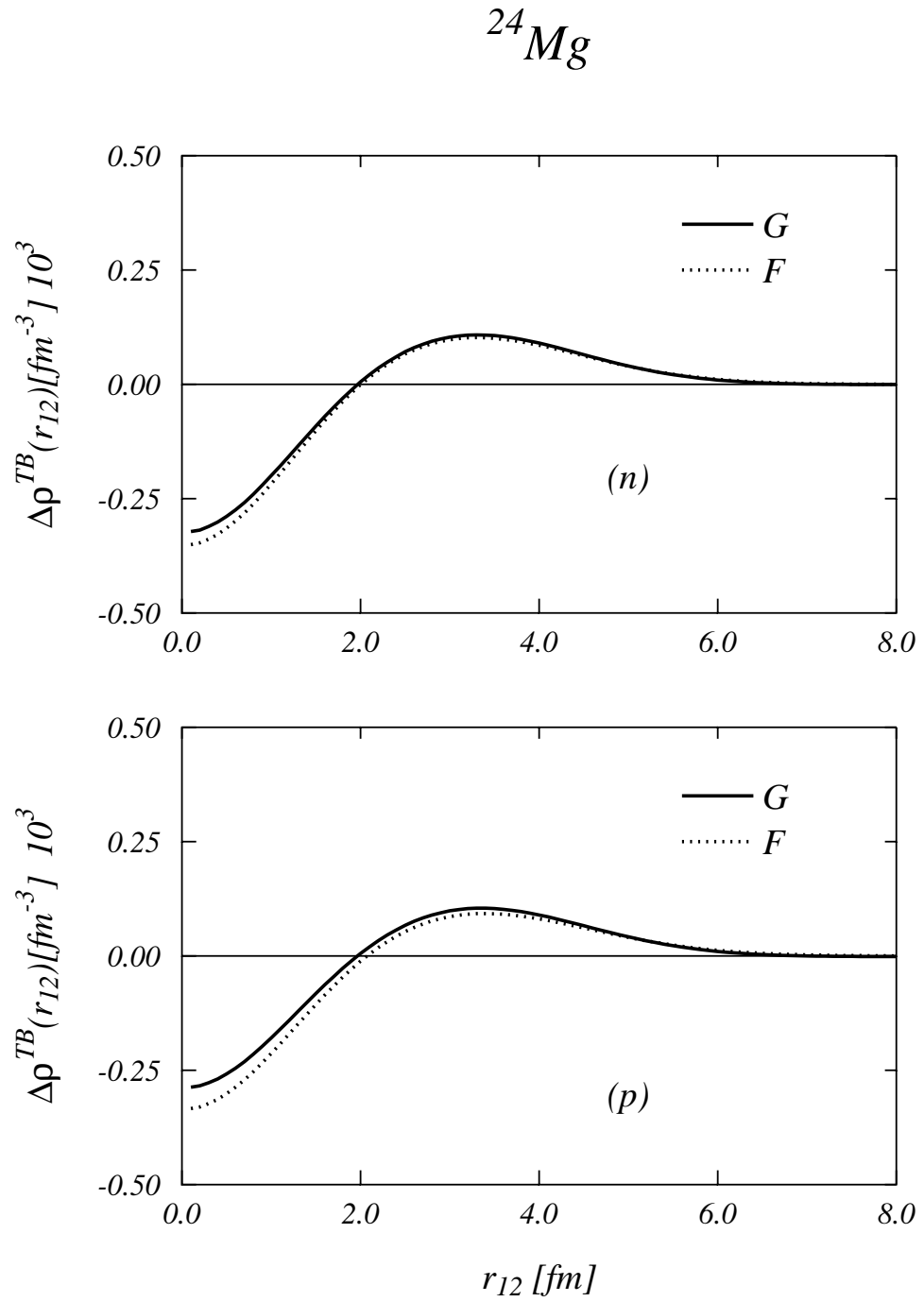


Figura 4.9: Differenze delle TBDF di protoni e neutroni calcolate con il modello a shell e con la teoria BCS per le due interazioni (G) e (F) in funzione della distanza relativa r_{12} . I risultati sono moltiplicati per un fattore 10^3 .

interazioni presentano pendenze differenti. Si osserva infine che in entrambi i casi, le densità protoniche sono minori rispetto alle densità di pairing relative ai neutroni.

La Fig. 4.9 rappresenta invece, la differenza della TBDF calcolata con il modello a shell e con la teoria BCS. Come si vede queste variazioni sono piccole, dell'ordine di 10^{-4} fm^{-3} , e sono molto simili per i due tipi di nucleoni. Le curve che rappresentano $\Delta\rho^{TB}(r_{12})$ per le due interazioni G e F presentano lo stesso andamento: per $r < 2 \text{ fm}$ le differenze sono negative, mentre per $r > 2 \text{ fm}$ assumono valori positivi che tendono a zero.

4.4 Il pairing è una correlazione a corto raggio?

In letteratura [Rin80, Eis72] si afferma spesso, che il pairing produce correlazioni a corto raggio.

Per correlazioni a corto raggio si intendono effetti che vanno al di là della descrizione di modelli a campo medio e che sono localizzati a brevi distanze internucleoniche. Le più note correlazioni sono quelle generate dal core repulsivo dell'interazione microscopica nucleone-nucleone.

I fenomeni prodotti dalle correlazioni a corto raggio rispetto a calcoli di campo medio sono [Ari07]:

- a. lieve diminuzione delle densità nucleoniche $\rho(r)$ al centro del nucleo ;
- b. innalzamento di vari ordini di grandezza della distribuzione dei momenti $n(k)$ per $k \geq 2 - 2.5 \text{ fm}$ in base alle dimensioni del nucleo;
- c. forte diminuzione della funzione di correlazione a due corpi $\rho^{TB}(r_{12})$ a piccole distanze internucleoniche.

Abbiamo verificato gli effetti del pairing sulla densità $\rho(r)$, sulla distribuzione degli impulsi $n(k)$, e sulla densità a due corpi $\rho^{TB}(r_{12})$ nell' ^{18}O utilizzando vari tipi di interazioni di rango finito che hanno tutte lo stesso termine di lungo raggio ma con diversi comportamenti a corto raggio.

Queste interazioni sono state costruite sommando tre Gaussiani:

$$V(r) = \sum_{i=1}^3 C_i e^{-\frac{r_i^2}{\mu_i^2}} \quad (4.9)$$

dove $\mu_1 = 0.447 \text{ fm}$, $\mu_2 = 0.942 \text{ fm}$, $\mu_3 = 5.00 \text{ fm}$.

I coefficienti C_i che abbiamo usato nelle diverse interazioni sono tabulati in Tab. 4.7. Essi sono stati scelti in modo che le interazioni $gt1$, $gt2$, $gt3$, $gt4$ riproducano i valori del gap mentre per le altre interazioni abbiamo soltanto aumentato la repulsione a corto raggio.

Nelle Fig. 4.10 e 4.11 abbiamo graficato sia nello spazio delle coordinate sia nello spazio degli impulsi, le interazioni che abbiamo costruito.

Per comprendere il comportamento delle interazioni (4.9) nello spazio degli impulsi, è utile ricordare che la trasformata di Fourier di una Gaussiana è ancora una

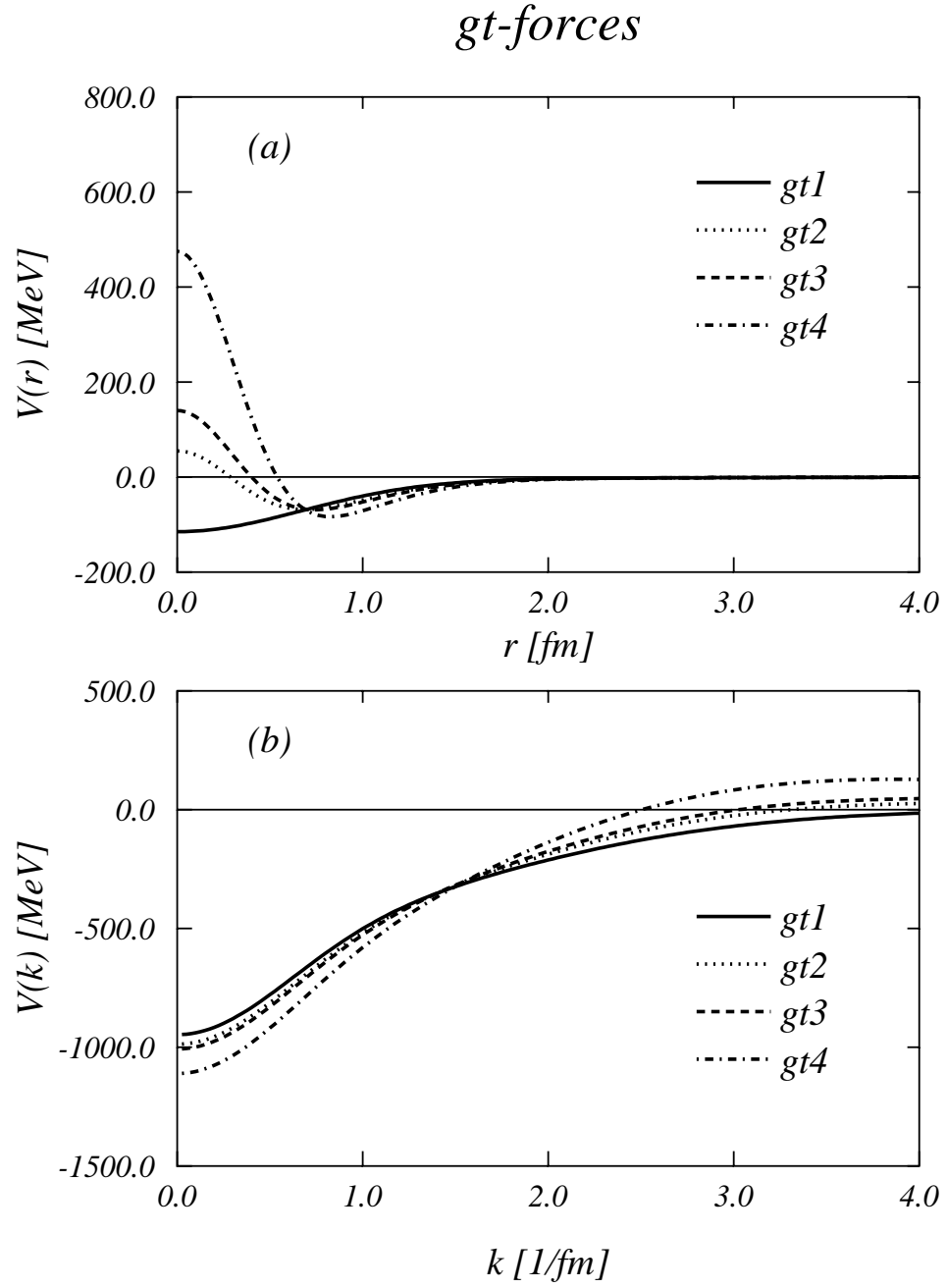


Figura 4.10: Interazioni *gt1*, *gt2*, *gt3*, *gt4*, a rango finito nello spazio delle coordinate (a) e nello spazio degli impulsi (b) .

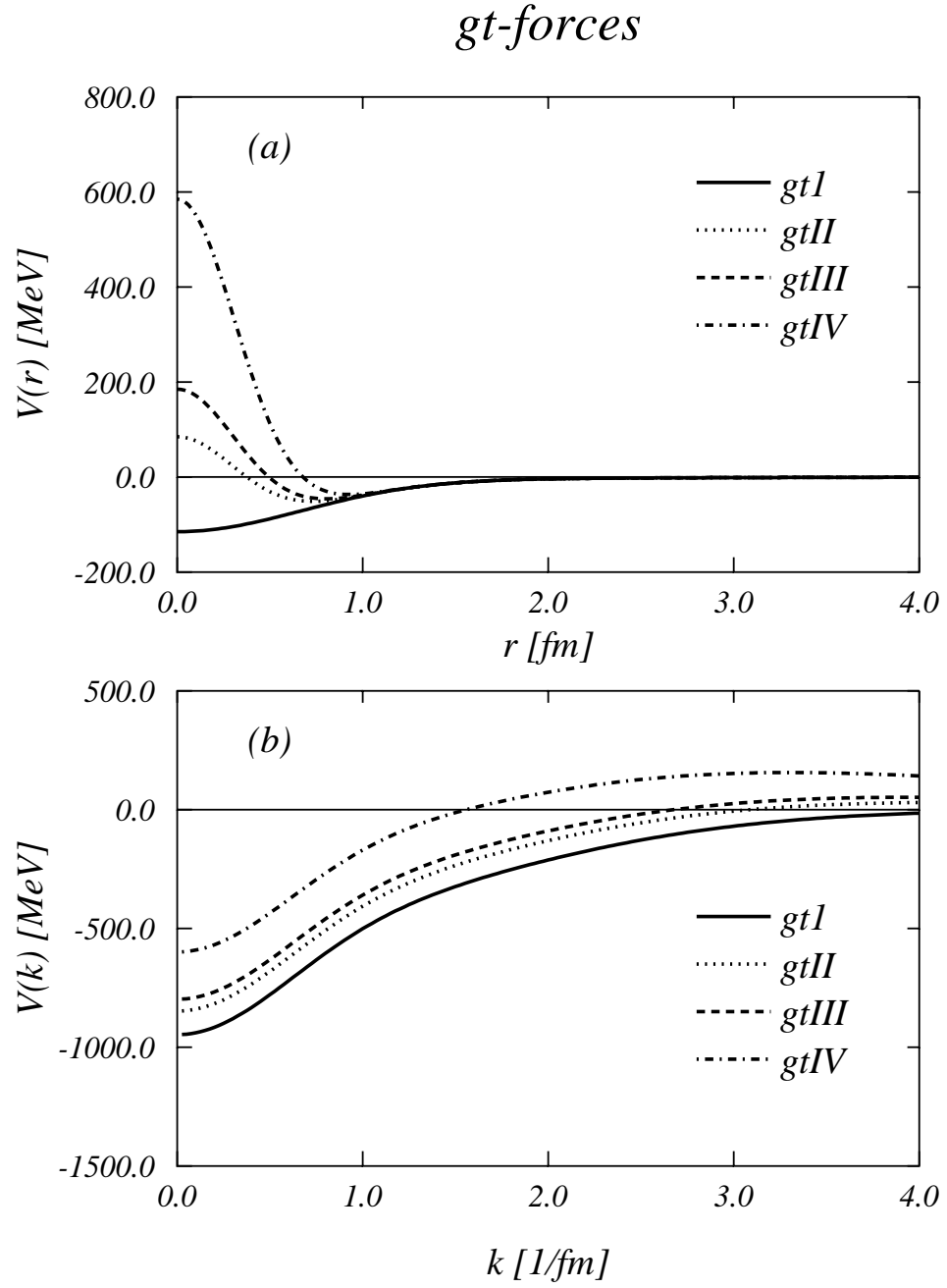


Figura 4.11: Interazioni *gtI*, *gtII*, *gtIII* e *gtIV* a rango finito nello spazio delle coordinate (a) e nello spazio degli impulsi (b).

$V(r)$	C_1	C_2	C_3
gt1	0.0	-110.0	-5.0
gt2	200.0	-140.0	-5.0
gt3	300.0	-155.0	-5.0
gt4	700.0	-220.0	-5.0
gtII	200.0	-110.0	-5.0
gtIII	300.0	-110.0	-5.0
gtIV	700.0	-110.0	-5.0

Tabella 4.7: Valori dei parametri costanti che abbiamo utilizzato per costruire le interazioni di rango finito.

Gaussiana.

$$V(k) = 4\pi \int_0^\infty dx x^2 j_0(qx) a e^{-bx^2} = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{a}{b} e^{-\frac{k^2}{4b}} \quad (4.10)$$

Questo vuol dire che la presenza di una repulsione a corto raggio nello spazio degli r ha l'effetto di uno spostamento repulsivo globale nello spazio dei k .

Questo è evidente in Fig. 4.11. Nello spazio r , tutte le interazioni hanno lo stesso andamento asintotico, ma diverso comportamento a corto raggio. Nello spazio k , le interazioni presentano forme e andamenti molto simili, che si spostano verso l'alto (sempre meno attrattive) aumentando la repulsione del core.

La Fig. 4.10 mostra andamenti più complessi. Nello spazio degli r la maggiore repulsione a corto raggio è compensata da maggiore attrazione intorno a $r = 1$ fm. Nello spazio dei momenti, questi andamenti corrispondono a maggiore repulsione ad alti k compensata da una maggiore attrazione a piccoli r .

Calcoliamo ora tutte le quantità di pairing per le interazioni $V(k)$. Lavoriamo con in nucleo dell' ^{18}O e con lo spazio di particella singola ottenuto per $N = 4$.

Nella Tab. 4.8 sono mostrati i valori di λ e del gap Δ .

$gt - forces$	λ	$< \Delta >$
gt1	-7.333	10.823
gt2	-7.333	10.818
gt3	-7.333	10.816
gt4	-7.333	10.859
gtII	-7.205	10.532
gtIII	-7.148	10.409
gtIV	-6.961	10.023

Tabella 4.8: Valori di λ e Δ in MeV calcolati per l' ^{18}O .

I valori di Δ rappresentano la differenza fra l'energia dell'ultimo livello occupato e quello successivo. Per l' ^{18}O

$$\Delta = |\varepsilon(1d_{5/2}) - \varepsilon(1p_{1/2})| \quad (4.11)$$

Dalla Tab. 4.8 si vede che i valori di λ assumono gli stessi valori per le interazioni $gt1$, $gt2$, $gt3$ e $gt4$, mentre per le interazioni $gt1$, $gtII$, $gtIII$ e $gtIV$, λ decresce all'aumentare del coefficiente C_1 (vedi Tab. 4.7). Per quanto riguarda il gap invece, si nota che per tutte le interazioni, le variazioni di Δ sono piccole e il gap si mantiene pressochè costante.

Nella Fig. 4.12 abbiamo graficato le differenze della densità di neutroni calcolata con il modello a shell e con la teoria BCS, per le interazioni che abbiamo costruito. Si vede che le differenze in questione sono molto piccole, dell'ordine di 10^{-4} fm^{-3} .

Abbiamo osservato differenze molto piccole anche per le distribuzioni dei momenti $n(k)$ e per le TBDF $\rho^{TB}(r_{12})$. Non mostriamo quì i risultati perchè non aggiungono nulla alla nostra discussione.

Più interessanti sono i risultati ottenuti per la densità di pairing mostrati nella Fig. 4.13.

Le curve si sovrappongono per le interazioni che riproducono il valore del gap Δ , ossia per $gt1$, $gt2$, $gt3$ e $gt4$, mentre per il secondo set di forze, le curve mostrano andamenti diversi. Per giustificare questo fatto basta pensare a come le interazioni sono state costruite, infatti per scrivere le funzioni $gtII$, $gtIII$ e $gtIV$ abbiamo semplicemente fatto variare i parametri delle Gaussiane (vedi Tab. 4.7) senza preoccuparci del valore del gap.

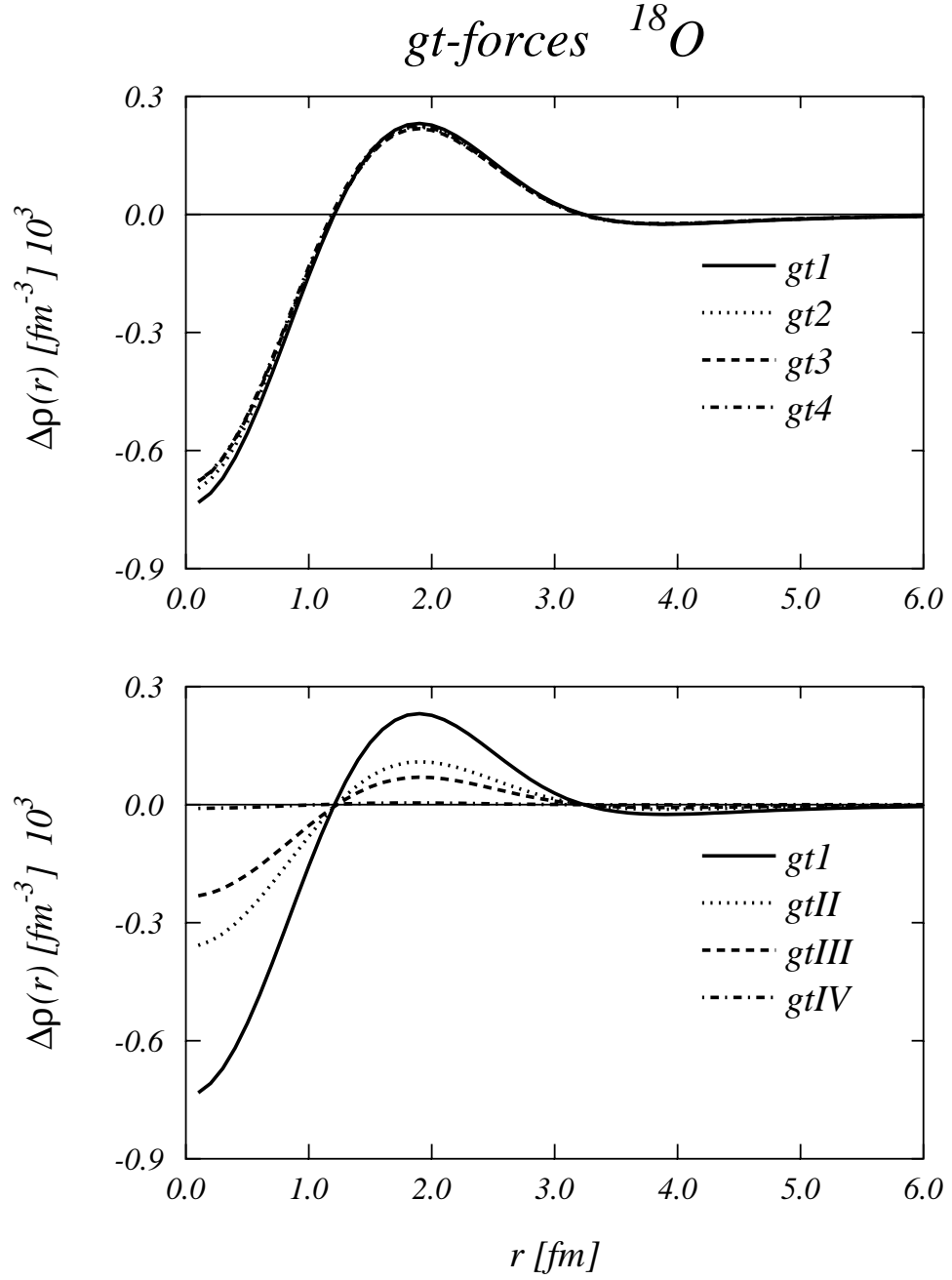


Figura 4.12: Differenze moltiplicate per un fattore 10^3 della densità di neutroni fra il modello a shell e la teoria BCS per le interazioni di rango finito *gt*.

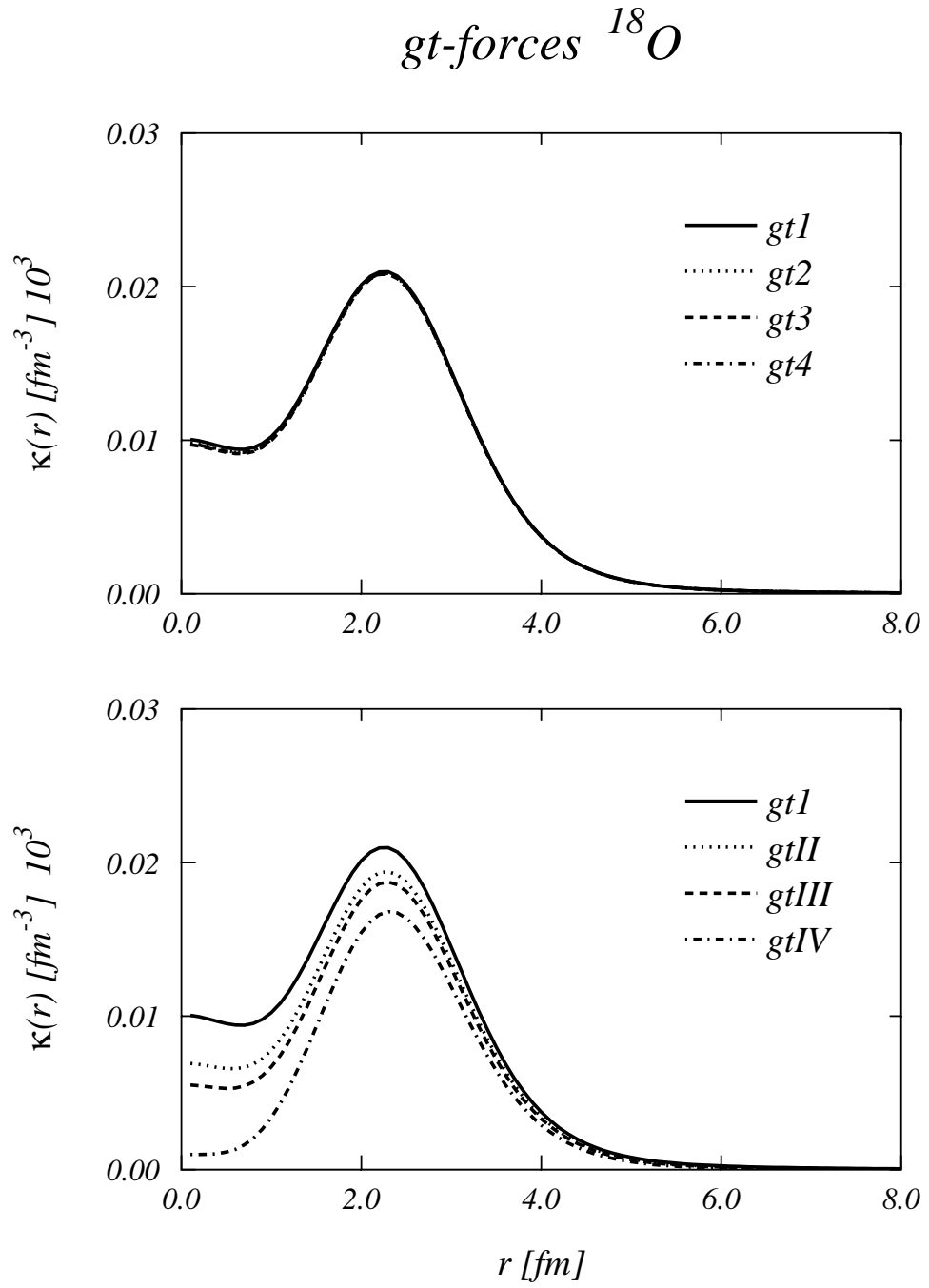


Figura 4.13: Densità di pairing calcolata per le interazioni *gt*. I risultati sono moltiplicati per un fattore 10^3 .

4.5 Risultati BCS per la catena degli isotopi del Calcio

In questo paragrafo descriviamo l'evoluzione delle proprietà del pairing nella catena isotopica del Ca .

L'idea è di calcolare le grandezze relative al fenomeno del pairing per i nuclei $^{40,42,44,46,48}Ca$, in modo da valutare il cambiamento di queste quantità, da una shell chiusa ad un'altra shell chiusa.

I nuclei in esame hanno un numero magico di protoni ($Z = 20$). Gli stati di particella singola coinvolti sono $1s_{1/2}$, $1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$, $1d_{5/2}$, $1s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$. L'effetto del pairing sulla shell chiusa dei protoni è nullo, perciò i calcoli che presentiamo sono riferiti ai neutroni.

Nei calcoli utilizziamo l'interazione a rango finito F discussa nei paragrafi precedenti.

<i>Stati</i>	<i>S.M.</i>	^{40}Ca	^{42}Ca	^{44}Ca	^{46}Ca	^{48}Ca
$1d_{3/2}$	-15.703	-15.703	-15.795	-15.805	-15.770	-15.703
$1f_{7/2}$	-9.761	-9.761	-9.065	-11.110	-10.439	-9.761
$2p_{3/2}$	-4.839	-4.839	-4.810	-4.797	-4.802	-4.839

Tabella 4.9: Energie di quasi-particella di neutroni espresse in MeV, per alcuni isotopi del Ca , per gli stati $1d_{3/2}$, $1f_{7/2}$ e $2p_{3/2}$. Le energie di particella singola senza pairing, sono ovviamente le stesse per ogni isotopo.

Nella Tab. 4.9 mostriamo i valori delle energie di quasi-particella di neutroni per gli stati attorno alla superficie di Fermi. La lista completa delle energie, e i valori di u^2 e v^2 per tutto lo spazio delle configurazioni, è presentata in Appendice E.

Il pairing non ha praticamente alcun effetto nel ^{40}Ca , che è un nucleo doppio magico. Il valore dell'energia dello stato $1f_{7/2}$ viene aumentato, mentre le energie degli altri due stati restano invariate. Questo effetto aumenta il valore di Δ tra $1d_{3/2}$ e $1f_{7/2}$.

Nel ^{44}Ca l'effetto del pairing è un abbassamento di 1.35 MeV dell'energia dello stato $1f_{7/2}$. Il valore delle altre energie rimangono invariati. Questo diminuisce il gap fra $1d_{3/2}$ e $1f_{7/2}$ e aumenta quello fra $1f_{7/2}$ e $2p_{3/2}$.

Nel ^{46}Ca l'energia dello stato $1f_{7/2}$ si abbassa di 0.68 MeV per poi ritornare al valore di modello a shell nel ^{48}Ca .

Per comprendere meglio l'evoluzione del pairing nella catena isotopica, abbiamo calcolato le quantità descritte nel Capitolo 3 per i nuclei del Calcio. Confrontando i risultati per la densità $\rho(r)$, per la distribuzione dei momenti $n(k)$ e per la TBDF $\rho^{TB}(r_{12})$, abbiamo osservato differenze dell'ordine di 10^{-3} per i nuclei in esame. Risulta interessante invece, studiare in dettaglio la densità di pairing che presentiamo in Fig. 4.14 sia in scala lineare (a), sia in scala logaritmica (b).

Il grafico in basso della Fig. 4.14 evidenzia che per i nuclei lontani dalle shell chiuse, i valori della densità $\kappa(r)$ sono più grandi, di oltre un ordine di grandezza, rispetto ai valori calcolati per i nuclei doppio magici del ^{40}Ca e del ^{48}Ca .

Il grafico (a) mostra invece, che fra gli isotopi semimagici, il ^{44}Ca presenta valori della densità di pairing maggiori, confermando che man mano che ci allontaniamo dalle shell chiuse, gli effetti del pairing sono più manifesti.

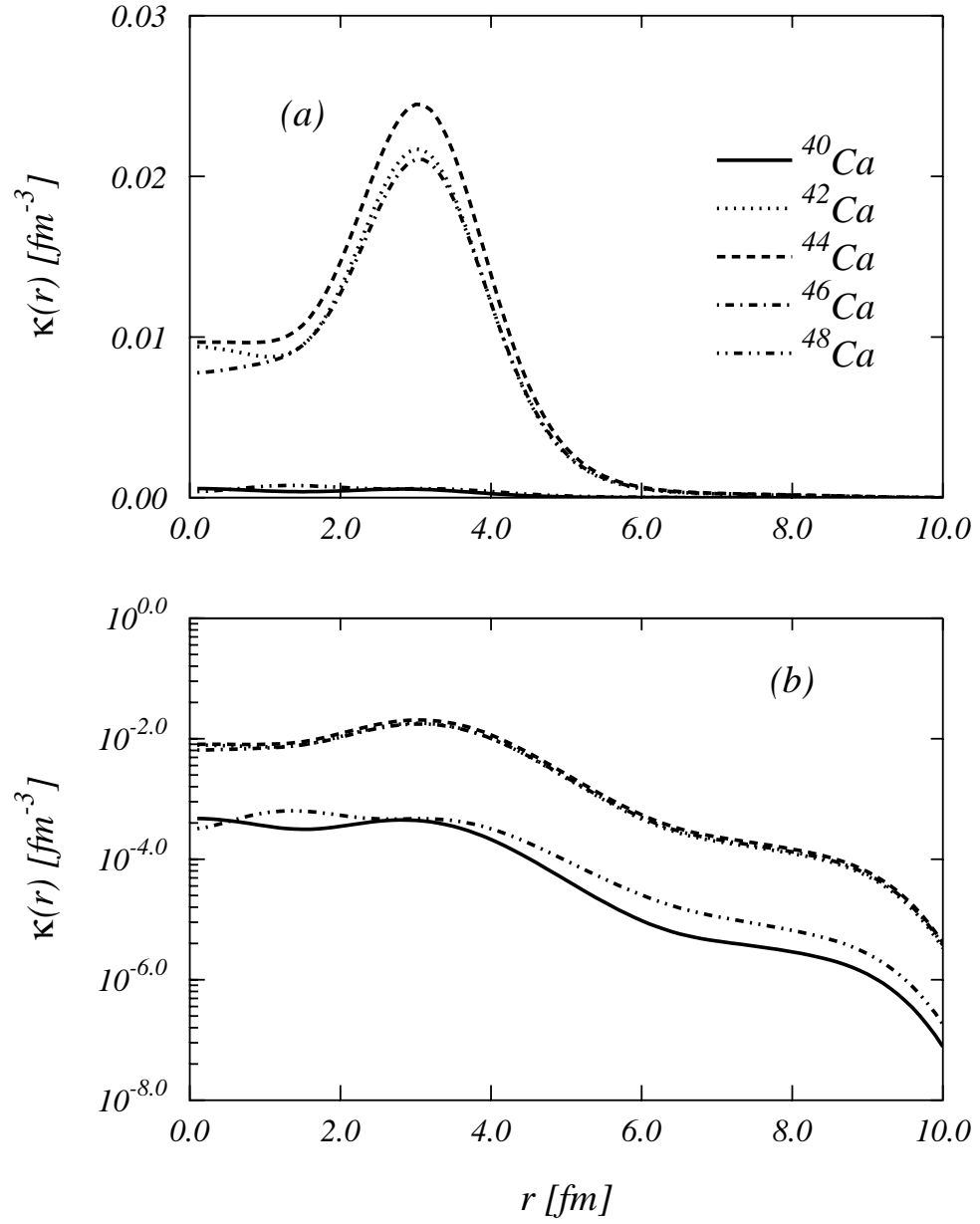


Figura 4.14: Densità di pairing per i nuclei della catena del Ca, calcolati con l'interazione F . Gli stessi risultati sono presentati sia in scala lineare (a) sia in scala logaritmica (b).

Conclusioni

L'obiettivo del presente lavoro di tesi era quello di studiare il fenomeno dell'appaiamento (o pairing) nei sistemi nucleari, con particolare attenzione rivolta al caso di nuclei semimagici.

A questo scopo abbiamo applicato la teoria BCS, generalmente utilizzata per descrivere il comportamento dei metalli in regime di superconduzione. L'aspetto fondamentale di questa teoria è la tendenza dei nucleoni a formare coppie di momento angolare totale nullo, dette *coppie di Cooper*.

Il calcolo del termine di pairing richiede la risoluzione di un set di equazioni non lineari, che abbiamo risolto numericamente con un metodo iterativo.

Abbiamo calcolato alcune quantità che caratterizzano lo stato fondamentale. In particolare abbiamo studiato la densità, la distribuzione dei momenti, la densità di pairing e la matrice di correlazione a due corpi (TBDF), discutendo di come il contributo pairing modifica queste grandezze.

Abbiamo scelto di utilizzare una base di particella singola generata da un potenziale medio a simmetria sferica e di lavorare con tre tipi di interazioni effettive di pairing. Abbiamo utilizzato un'interazione schematica G , in cui tutti gli elementi di matrice sono uguali ad una costante, un'interazione di contatto δ , fissata per riprodurre il valore del gap sperimentale dell' ^{18}O e un'interazione di rango finito F .

Abbiamo poi studiato la sensibilità dei risultati rispetto alla scelta dei parametri di input. A questo scopo abbiamo fatto un test di convergenza delle tre interazioni sul nucleo semimagico dell' ^{18}O , studiando il loro comportamento al variare dello spazio delle configurazioni. Abbiamo osservato che l'interazione F converge più rapidamente rispetto alle altre due. L'interazione δ ha invece, una convergenza più lenta, mentre G non presenta affatto convergenza.

Per valutare in dettaglio gli effetti del pairing, abbiamo approfondito lo studio del ^{24}Mg , calcolando tutte le grandezze d'interesse relativamente a neutroni e protoni. Abbiamo inoltre messo a confronto i risultati ottenuti utilizzando le due interazioni estreme, G ed F .

Abbiamo osservato che, sia per F che per G , il pairing aumenta il valore del gap di energia rispetto a quello calcolato con il modello a strati. In particolare abbiamo visto che quest'effetto è maggiormente evidente quando si utilizza l'interazione schematica.

Abbiamo inoltre verificato che il fenomeno del pairing non produce correlazioni a corto raggio, contrariamente a quanto si afferma comunemente in letteratura [Rin80, Eis72]. Per fare questo, abbiamo costruito un set di interazioni di rango finito che hanno tutte lo stesso andamento a lungo raggio ma un diverso compor-

tamento a corto raggio. Abbiamo utilizzato queste interazioni per calcolare alcune osservabili d'interesse e abbiamo osservato che il pairing non presenta gli effetti tipici che mostrano invece i fenomeni prodotti dalle correlazioni a corto raggio.

Infine, abbiamo analizzato l'evoluzione delle grandezze di pairing da una shell chiusa ad un'altra shell chiusa. In particolare abbiamo fatto i calcoli per la catena isotopica del Ca, utilizzando l'interazione di rango finito F , la più realistica delle tre considerate. I risultati che abbiamo ottenuto confermano innanzitutto che il termine del pairing non dà alcun contributo sulle shell chiuse. Infatti, per i nuclei doppio magici ^{40}Ca e ^{48}Ca l'effetto del pairing sul gap di energia è nullo. Abbiamo osservato inoltre, che per il ^{42}Ca e il ^{46}Ca , il valore del gap di energia Δ , valutato con l'aggiunta del termine di pairing, è maggiore rispetto al gap di energia calcolato con il modello a shell. Il ^{42}Ca e il ^{46}Ca hanno rispettivamente due neutroni in più e due in meno rispetto alla shell chiusa più prossima. Fatto interessante è che questa differenza fra il modello a strati e la teoria BCS si accentua maggiormente per il ^{44}Ca , che con quattro nucleoni in più e quattro in meno rispetto al ^{40}Ca e al ^{48}Ca , è il nucleo più lontano dalle shell chiuse. Per comprendere meglio il fenomeno, abbiamo studiato la densità di pairing per i nuclei in esame (Fig. 4.14).

Abbiamo osservato che per i nuclei lontani dalle shell chiuse, i valori della densità $\kappa(r)$ sono più grandi, di oltre un ordine di grandezza, rispetto ai valori calcolati per i nuclei doppio magici del ^{40}Ca e del ^{48}Ca . In particolare, fra gli isotopi semimagici, il ^{44}Ca presenta valori della densità di pairing maggiori, confermando che man mano che ci allontaniamo dalle shell chiuse, gli effetti del pairing sono più evidenti.

Questa tesi costituisce una base di partenza per lo studio sistematico di nuclei semi-magici.

In una prospettiva a breve termine è possibile applicare il formalismo della teoria BCS per studiare le proprietà dello stato fondamentale di alcuni nuclidi che talvolta, vengono considerati doppio magici. Questi sono, ad esempio, ^{90}Zn e ^{146}Gd . Sarebbe inoltre interessante ripetere lo studio che abbiamo condotto sulla catena dei nuclei del Ca, anche per la catena isotopica dello stagno, molto studiate in letteratura [San05].

In prospettive a medio termine si può pensare di utilizzare la base BCS per calcolare lo spettro di eccitazione dei nuclei sferici semi-magici, utilizzando la *Random Phase Approximation Theory*.

Dal punto di vista teorico, restano aperti alcuni problemi. Un primo punto riguarda il fatto che la BCS conserva il numero di nucleoni solo in media. È possibile applicare tecniche che permettono di estrarre dalle funzioni d'onda BCS le componenti che conservano il numero di nucleoni. Queste tecniche, dette *di proiezione*, producono una formulazione molto più complessa delle equazioni BCS.

Un altro punto poco soddisfacente della teoria è la separazione netta fra proprietà di singola particella e pairing. Sarebbe utile dal punto di vista teorico, utilizzare una sola interazione sia per il campo medio che per il pairing. Questo approccio è

noto in letteratura come Hartree-Fock-Bogolioubov ed è estremamente complicato da risolvere numericamente.

Le prospettive di lavoro, che queste pagine aprono, riguardano inoltre, la possibilità di estendere lo studio del fenomeno del pairing in uno spazio delle configurazioni continuo. Fin'ora, non esiste in letteratura, nessuna formulazione dell'equazione BCS che sviluppi questo punto.

Appendice A

Rappresentazione dei Numeri di Occupazione

A.1 Operatori di creazione e di distruzione

In teoria dei campi l'uso di operatori di creazione e distruzione è necessario per descrivere la produzione di coppie particella e antiparticella. Nell'ambito delle teorie a molti corpi della meccanica quantistica non relativistica, l'uso degli operatori di creazione non è legato alla necessità di descrivere particolari fenomeni fisici, ma risulta comunque utile.

Il punto di partenza è legato alla presenza di un'hamiltoniana di campo medio

$$H_0 = \sum_{\nu} h_{\nu} \quad (\text{A.1})$$

dove h_{ν} è un'hamiltoniana di singola particella. Autostati di H_0 sono costruiti come determinanti di Slater degli autostati $|\phi_{\nu}\rangle$ di h_{ν} .

In Rappresentazione dei Numeri di Occupazione (RNO), lo stato di singola particella

$$|\phi_{\nu}\rangle \equiv |\nu\rangle, \quad (\text{A.2})$$

può essere pensato come ottenuto dallo stato vuoto $|0\rangle$ aggiungendo una particella. Simbolicamente:

$$|\nu\rangle = a_{\nu}^+ |0\rangle, \quad (\text{A.3})$$

dove a_{ν}^+ rappresenta l'operatore che crea una particella nello stato caratterizzato dai numeri quantici ν . L'operatore di distruzione può essere ottenuto facendo l'aggiunto dell'equazione (A.3)

$$(a_{\nu}^+)^+ = a_{\nu} \quad (\text{A.4})$$

$$|\nu\rangle = a_{\nu}^+ |0\rangle \quad \langle \nu| = \langle 0| a_{\nu} \quad (\text{A.5})$$

$$\langle \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N | = \langle 0| a_{\nu_1} \dots a_{\nu_{N-1}} a_{\nu_N} \quad (\text{A.6})$$

Dato che, per definizione, nello stato vuoto non ci sono particelle, si ha che:

$$a_{\nu} |0\rangle = 0. \quad (\text{A.7})$$

In generale si ha che

$$a_{\nu_N}^+ a_{\nu_{N-1}}^+ \dots a_{\nu_1}^+ |0\rangle \equiv |\nu_N \nu_{N-1} \dots \nu_1\rangle \quad (\text{A.8})$$

rappresenta un determinante di Slater composto da N stati. L'applicazione di a_ν ad un determinante di Slater rimuove lo stato di singola particella $|\nu\rangle$, se questo è incluso, altrimenti dà risultato nullo.

Si può dimostrare che

$$a_\nu a_\nu^+ |\nu_N \dots \nu_1\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu \in S \\ |\nu_N \dots \nu_1\rangle & \text{se } \nu \notin S \end{cases} \quad S = \{\nu_N \dots \nu_1\} \quad (\text{A.9})$$

$$a_\nu^+ a_\nu |\nu_N \dots \nu_1\rangle = \begin{cases} |\nu_N \dots \nu_1\rangle & \text{se } \nu \in S \\ 0 & \text{se } \nu \notin S \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Dalle equazioni (A.9) e (A.10) si ha che:

$$(a_\nu a_\nu^+ + a_\nu^+ a_\nu) |\nu_N \dots \nu_1\rangle = |\nu_N \dots \nu_1\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Questa equazione è valida per qualsiasi vettore $|\nu_N \dots \nu_1\rangle$ dato che uno dei due addendi darà risultato nullo, mentre l'altro produrrà il vettore di partenza.

L'eq. (A.10) definisce l'operatore numero di occupazione:

$$n_\nu = a_\nu^+ a_\nu \quad (\text{A.12})$$

i cui autovalori sono 1 o 0 se lo stato a multicorpi a cui è applicato contiene o no lo stato di singola particella ν .

La relazione operatoriale data dalla (A.11) è:

$$a_\nu a_\nu^+ + a_\nu^+ a_\nu = 1 \quad (\text{A.13})$$

Le relazioni precedenti definiscono le proprietà di anticommutazione di cui godono gli operatori di creazione e di distruzione, poichè i nucleoni obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac

$$\{a_\nu, a_{\nu'}^+\} = \delta_{\nu\nu'} \quad \{a_\nu, a_{\nu'}\} = 0 \quad \{a_\nu^+, a_{\nu'}^+\} = 0, \quad (\text{A.14})$$

I tradizionali operatori della meccanica quantistica possono essere descritti nella rappresentazione dei numeri di occupazione utilizzando gli operatori di creazione e distruzione. Distinguiamo fra operatori ad uno e due corpi, che sono gli operatori che si incontrano più frequentemente nello studio di problemi a multicorpi.

Nello spazio delle coordinate, un operatore ad un corpo come ad esempio, l'energia cinetica o il momento totale di un sistema di N particelle, è dato dalla somma di N operatori che dipendono da una sola coordinata

$$O^I(x_1 \dots x_N) = \sum_{i=1}^N o^I(x_i) \quad (\text{A.15})$$

Gli elementi di matrice di quest'operatore fra stati di particella singola sono

$$O_{\nu\nu'}^I = \int d^3x \phi_\nu^*(\mathbf{x}) o^I(\mathbf{x}) \phi_{\nu'}(\mathbf{x}) \equiv \langle \nu | o^I | \nu' \rangle \quad (\text{A.16})$$

La rappresentazione di $O^I(x_1 \dots x_N)$ mediante gli operatori di creazione e distruzione è data da

$$O^I = \sum_{\nu\nu'} O_{\nu\nu'}^I a_\nu^+ a_{\nu'} \quad (\text{A.17})$$

Questa equazione mostra che l'operatore ad un corpo distrugge una particella in ν' e ne crea una nel livello ν . L'operatore può creare una coppia particella-buca.

Allo stesso modo si lavora con gli operatori a due corpi, come ad esempio il potenziale d'interazione,

$$O^{II}(x_1 \dots x_N) = \sum_{i < j} o^{II}(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} o^{II}(x_i, x_j) \quad (\text{A.18})$$

che è scritto come somma di operatori che dipendono da due coordinate. In RNO

$$O^{II} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} O_{\nu\mu\nu'\mu'}^{II} a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'}, \quad (\text{A.19})$$

dove

$$O_{\nu\mu\nu'\mu'}^{II} = \langle \nu\mu | O^{II} | \nu'\mu' \rangle = \int dx dx' \phi_\nu^*(x) \phi_\mu^*(x') o^{II}(x, x') \phi_{\nu'}(x) \phi_{\mu'}(x') \quad (\text{A.20})$$

A.2 Teorema di Wick

Il teorema di Wick permette di ottenere il valore di aspettazione del prodotto di n operatori di creazione e distruzione in maniera molto semplice.

Prima di enunciare il teorema, è utile introdurre alcune definizioni

- *Operatore di evoluzione temporale*

L'operatore di ordinamento temporale

$$T[ABC \dots], \quad (\text{A.21})$$

ordina gli operatori di creazione e distruzione in modo da avere i tempi più grandi a sinistra. Nell'effettuare questo ordinamento bisogna considerare una fase negativa per ogni scambio tra due operatori.

Se gli operatori sono indipendenti dal tempo, o se sono definiti allo stesso tempo si ha:

$$T[AB] = AB \quad (\text{A.22})$$

- *Prodotto normale ordinato N*

L'azione di questo operatore su un insieme di operatori di creazione e distruzione è quella di ordinarli in modo tale che il loro valore medio sullo stato fondamentale sia zero. Di conseguenza, l'ordinamento Normale dipende dalla definizione di stato fondamentale del sistema.

- *Contrazione di operatori*

L'operazione di contrazione tra due operatori viene definita come la differenza tra Operatore Temporale T e Prodotto Normale Ordinato N .

$$A^\alpha B^\alpha \equiv T[AB] - N[AB] \quad (\text{A.23})$$

dove abbiamo indentificato i due operatori a cui applicare l'operazione di contrazione utilizzando in apice la stessa lettera greca.

Il risultato dell'operazione di contrazione non è un operatore, ma un numero complesso. Si può dimostrare che la contrazione è il valore di aspettazione dei due operatori sullo stato fondamentale:

$$\langle \Phi_0 | AB | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | A^\alpha B^\alpha | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | N[AB] | \Phi_0 \rangle = A^\alpha B^\alpha \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \quad (\text{A.24})$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\langle \Phi_0 | N[AB] | \Phi_0 \rangle$ è nullo per definizione.

Il teorema Wick afferma che un prodotto di operatori può essere scritto come somma di Prodotti Normali Ordinati in cui tutte le possibili contrazioni sono effettuate:

$$\begin{aligned} T[ABC \dots Z] &= N[ABC \dots Z] + N[A^\alpha B^\alpha \dots Z] + [A^\alpha B C^\alpha \dots Z] \\ &+ N[A^\alpha B^\alpha C^\beta \dots Z] + N[A^\alpha B^\beta C^\alpha \dots Z] \\ &+ N[A^\alpha B^\alpha C^\beta \dots Z] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Grazie a questo teorema il calcolo del valore di aspettazione di un operatore rispetto allo stato fondamentale si riduce al calcolo dei termini in cui sono presenti solo le contrazioni.

Appendice B

Lo stato fondamentale delle quasi-particelle

Dimostriamo che lo stato $|BCS\rangle$ è lo stato fondamentale delle quasi-particelle. Per verificarlo calcoliamo

$$\begin{aligned}
 \alpha_k |BCS\rangle &= \left(u_k a_k - v_k a_{-k}^+ \right) \prod_{k'} \left(u_{k'} + v_{k'} a_{k'}^+ a_{-k'}^+ \right) |-\rangle \\
 &= \left(u_k a_k - v_k a_{-k}^+ \right) \left(u_k + v_k a_k^+ a_{-k}^+ \right) |-\rangle \\
 &= u_k^2 a_k |-\rangle + u_k v_k a_k a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle \\
 &\quad - v_k u_k a_{-k}^+ |-\rangle - v_k^2 a_{-k}^+ a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

dove abbiamo considerato solo i termini della produttoria con $k' = k$ che danno contributo non nullo. Il primo addendo dell'equazione (B.1) è nullo essendo $a_k |-\rangle = 0$.

Sfruttiamo ora le regole di anticommutazione degli operatori di particella per cui $a_k a_k^+ = (1 - a_k^+ a_k)$ e continuando con il calcolo si ha

$$\begin{aligned}
 \alpha_k |BCS\rangle &= -v_k u_k a_{-k}^+ |-\rangle + u_k v_k \left(1 - a_k^+ a_k \right) a_{-k}^+ |-\rangle \\
 &= v_k^2 a_{-k}^+ a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle = -u_k v_k a_k^+ a_k a_{-k}^+ |-\rangle \\
 &= v_k^2 a_{-k}^+ a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle = 0
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Il termine $a_k^+ a_k a_{-k}^+ |-\rangle$ è nullo per la presenza dell'operatore a_k che distrugge il nucleone nello stato $|k\rangle$ senza che esso sia stato prima creato, mentre il termine $a_{-k}^+ a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle$ si annulla per l'azione dell'operatore a_{-k}^+ che crea un nucleone nello stato $| -k\rangle$ già occupato.

Lavorando allo stesso modo otteniamo

$$\begin{aligned}
 \alpha_{-k} |BCS\rangle &= \left(u_{-k} a_{-k} - v_{-k} a_k^+ \right) \prod_{k'} \left(u_{k'} + v_{k'} a_{k'}^+ a_{-k'}^+ \right) |-\rangle \\
 &= \left(u_k a_{-k} - v_k a_{-k}^+ \right) \left(u_k + v_k a_k^+ a_{-k}^+ \right) |-\rangle \\
 &= u_k^2 a_{-k} |-\rangle + u_k v_k a_{-k} a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle \\
 &= v_k u_k a_{-k}^+ |-\rangle - v_k^2 a_{-k}^+ a_k^+ a_{-k}^+ |-\rangle = 0
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Le equazioni (B.2) e (B.3) dimostrano che effettivamente, lo stato $|BCS\rangle$ è lo stato fondamentale delle quasi-particelle.

Appendice C

L'elemento di matrice di pairing

L'elemento di matrice che vogliamo calcolare è

$$\langle j_a j_a 00 | V(1, 2) | j_b j_b 00 \rangle \quad (C.1)$$

Questa espressione indica sia gli integrali sulle coordinate radiali sia sulle variabili angolari.

Riscriviamo l'interazione in modo da poter separare le variabili \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

In generale, poiché stiamo lavorando con un potenziale centrale, possiamo scrivere

$$V(1, 2) = V_c(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V_c(\mathbf{r}_{12}) \quad , \quad (C.2)$$

dove abbiamo considerato solo il termine scalare. Possiamo esprimere l'espressione precedente in termini di trasformata di Fourier di un potenziale dipendente dall'impulso

$$V_c(\mathbf{r}_{12}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \, e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} V_c(q) \quad (C.3)$$

dove abbiamo considerato che l'interazione dipenda solo da modulo dell'impulso e quindi abbiamo,

$$V_c(q) = \int d^3r_{12} \, e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} V_c(r_{12}) \quad (C.4)$$

A questo punto sviluppiamo le due funzioni esponenziali in multipoli [Edm96]

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_1} = 4\pi \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-\ell_1}^{\ell_1} (i)^{\ell_1} j_{\ell_1}(qr_1) Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{q}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r}_1) \quad (C.5)$$

$$e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_2} = 4\pi \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} (-i)^{\ell_2} j_{\ell_2}(qr_2) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{q}) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{r}_2) \quad (C.6)$$

quindi

$$\begin{aligned} V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{(4\pi)^2}{8\pi^3} \sum_{\ell_1 \ell_2} \sum_{m_1 m_2} (i)^{\ell_1} (-i)^{\ell_2} \int dq \, q^2 V(q) j_{\ell_1}(qr_1) j_{\ell_2}(qr_2) \\ &\quad \int d\hat{q} Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{q}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{q}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r}_1) Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{r}_2) \end{aligned} \quad (C.7)$$

dove abbiamo scritto

$$\int d^3q f(\mathbf{q}) = \int dq q^2 \int d\hat{q} f(\mathbf{q}) \quad (\text{C.8})$$

per separare gli integrali radiali da quelli angolari. Integrando su \hat{q} , per l'ortogonalità delle armoniche sferiche [Edm96] abbiamo

$$\ell_1 = \ell_2 \equiv L \quad \text{e} \quad m_1 = m_2 \equiv M \quad (\text{C.9})$$

L'espressione (C.3) del potenziale diventa dunque,

$$V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{2}{\pi} \sum_L \sum_M \int dq q^2 V(q) j_L(qr_1) j_L(qr_2) Y_{LM}(\hat{r}_1) Y_{LM}^*(\hat{r}_2) \quad (\text{C.10})$$

dove j_L indica la funzione di Bessel sferica [Edm96].

Ricordiamo l'espressione generale per il prodotto scalare fra tensori di rango p [Edm96]

$$T^p \cdot U^p = \sum_m (-)^m T_m^p U_{-m}^p = (-)^p \hat{p} [T^p \otimes U^p]_0^0 \quad (\text{C.11})$$

dove

$$\hat{p} = \sqrt{2p+1} \quad (\text{C.12})$$

Otteniamo così

$$V_c(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{2}{\pi} \sum_L (-)^L \hat{L} [Y_L(\hat{r}_1) \otimes Y_L(\hat{r}_2)]_0^0 \int dq q^2 V(q) j_L(qr_1) j_L(qr_2) \quad (\text{C.13})$$

poiché le armoniche sferiche sono tensori di rango L .

L'elemento di matrice (C.1) può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \langle j_a j_a 00 | V(r) | j_b j_b 00 \rangle = & \\ \frac{2}{\pi} \sum_L (-)^L \hat{L} \langle j_a j_a 00 | [Y_L(\hat{r}_1) \otimes Y_L(\hat{r}_2)]_0^0 | j_b j_b 00 \rangle & \\ \int dr_1 r_1^2 j_L(qr_1) \int dr_2 r_2^2 j_L(qr_2) & \\ \int dq q^2 V(q) R_a(r_1) R_b(r_1) R_a(r_2) R_b(r_2) & \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

dove il termine tra bra e ket indica solo integrali sulle variabili angolari. Per questo termine possiamo utilizzare la tradizionali tecniche di calcolo che coinvolgono tensori sferici irriducibili [Edm96].

C.1 Teorema di Wigner-Eckart

L'elemento di matrice di un tensore sferico irriducibile tra due autostati di \mathbf{J}^2 e J_z può essere scritto in modo da separare la parte puramente geometrica, che è espressa

mediante un coefficiente di Clebsh-Gordan

$$\begin{aligned}\langle j_a m_a | T_q^k | j_b m_b \rangle &= (-)^{2k} \frac{\langle j_b m_b k q | j_a m_a \rangle}{\hat{j}_a} \langle j_a || T^k || j_b \rangle \\ &= (-)^{j_a+m_a} \begin{pmatrix} j_a & k & j_b \\ -m_a & q & m_b \end{pmatrix} \langle j_a || T^k || j_b \rangle\end{aligned}\quad (C.15)$$

dove

$$\hat{j} = \sqrt{2j+1} \quad (C.16)$$

L' elemento di matrice $\langle j_a || T^k || j_b \rangle$ è detto *elemento di matrice ridotto*.
Esso è indipendente da q e dai numeri quantici m_a, m_b .

Applichiamo ora il teorema di Wigner-Eckart all'elemento di matrice di pairing

$$\begin{aligned}&\langle j_a j_a 00 | [Y_L(\hat{r}_1) \otimes Y_L(\hat{r}_2)]_0^0 | j_b j_b 00 \rangle \\ &= (-)^{0-0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle j_a j_a 0 || [Y_L(\hat{r}_1) \otimes Y_L(\hat{r}_2)]^0 || j_b j_b 0 \rangle\end{aligned}\quad (C.17)$$

Calcoliamo l'elemento di matrice ridotto [Edm96]

$$\begin{aligned}&\langle j_a j_a 0 || [Y_L(\hat{r}_1) \otimes Y_L(\hat{r}_2)]^0 || j_b j_b 0 \rangle \\ &= \hat{0} \hat{0} \hat{0} \begin{Bmatrix} j_a & j_a & 0 \\ j_b & j_b & 0 \\ L & L & 0 \end{Bmatrix} \langle j_a || Y_L || j_b \rangle \langle j_a || Y_L || j_b \rangle \\ &= \frac{1}{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{L}} [\langle j_a || Y_L || j_b \rangle]^2\end{aligned}\quad (C.18)$$

dove abbiamo usato la relazione

$$\begin{Bmatrix} j_a & j_a & 0 \\ j_b & j_b & 0 \\ L & L & 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{L}} \quad (C.19)$$

Dato che [Edm96]

$$\langle l_a \frac{1}{2} j_a || Y_L || l_b \frac{1}{2} j_b \rangle = (-)^{j_a+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_a & L & j_b \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xi(l_a + l_b + L) \quad (C.20)$$

otteniamo per l'elemento di matrice ridotto

$$\begin{aligned}&\langle j_a j_a 0 || [Y_L(\hat{r}_1) \otimes Y_L(\hat{r}_2)]^0 || j_b j_b 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{L}} \left[\frac{\hat{j}_a \hat{j}_b \hat{L}}{\sqrt{4\pi}} (-)^{j_a+\frac{1}{2}} \right]^2 \begin{pmatrix} j_a & L & j_b \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 \xi(l_a + l_b + L)\end{aligned}\quad (C.21)$$

dove abbiamo definito la funzione ξ in modo che

$$\xi(L) = \begin{cases} 1 & \text{se } L \text{ è pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

In definitiva l'elemento di matrice (C.1) può essere espresso come

$$\begin{aligned} \langle j_a j_a 00 | V(r) | j_b j_b 00 \rangle &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{4\pi} \hat{j}_a \hat{j}_b \sum_L (-)^L \hat{L}^2 \mathcal{I}_L \\ &\cdot \left(\begin{matrix} j_a & L & j_b \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right)^2 \xi(l_a + l_b + L) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

dove abbiamo definito

$$\mathcal{I}_L = \frac{\int dr_1 r_1^2 j_L(qr_1) \int dr_2 r_2^2 j_L(qr_2) \int dq q^2 V(q)}{R_a(r_1) R_b(r_1) R_a(r_2) R_b(r_2)} \quad (\text{C.24})$$

Appendice D

La base di particella singola

L'equazione di Schrödinger radiale con un potenziale di tipo Wood-Saxon (4.1) si scrive

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V_0(r) + V_{so}(r) + V_c(r) \right\} R_{nlj}(r) = \varepsilon_{nlj} R_{nlj}(r) \quad (\text{D.1})$$

Risolviamo l'equazione sviluppando le autofunzioni su una base di oscillatore armonico

$$R_{nlj}(r) = \sum_{m=1}^M a_m(nlj) R_{ml}^{ho}(r) \quad (\text{D.2})$$

dove $a_m(nlj)$ sono i coefficienti dello sviluppo e le funzioni d'onda di oscillatore armonico sono date dalla relazione:

$$R_{ml}^{ho} = \sqrt{\frac{2(m+1)!}{\Gamma(n+l+\frac{1}{2}) b^3}} \left(\frac{r}{b}\right)^l L_{m-1}^{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{b}\right)^2 e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (\text{D.3})$$

dove n assume tutti i valori interi positivi. Le funzioni $L_{m-1}^{l+\frac{1}{2}}$ sono i polinomi generalizzati di Laguerre di ordine $m-1$, Γ è la funzione gamma e il parametro dell'oscillatore è

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad (\text{D.4})$$

Le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico soddisfano l'equazione

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right\} R_{nl}^{ho} = \varepsilon_{nl}^{ho} R_{nl}^{ho} \quad (\text{D.5})$$

con autovalori

$$\varepsilon_{nl}^{ho} = \left(N + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \left(2(n+l) + \ell + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{D.6})$$

Inserendo nell'equazione di Schrödinger radiale (D.3), l'espressione della funzione d'onda in termini di autofunzioni dell'oscillatore armonico si ottiene

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V_0 + V_{\text{so}} + V_c \right\} \sum_{m=1}^M a_m(nlj) R_{\text{ml}}^{ho}(r) \\
&= \varepsilon_{\text{nlj}} \sum_m^M a_m(nlj) R_{\text{nl}}^{ho}(r)
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Dalla relazione (D.5) si ottiene

$$\sum_{m=1}^M \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 - \varepsilon_{\text{ml}}^{ho} \right\} R_{\text{ml}}^{ho} a_m(nlj) = 0 \tag{D.8}$$

e sottraendola all'equazione (D.3) si ha

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \left\{ V_0 + V_{\text{so}} + V_c - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + \varepsilon_{\text{ml}}^{ho} \right\} a_m(nlj) R_{\text{ml}}^{ho} \\
&= \varepsilon_{\text{nlj}} \sum_{m=1}^M a_m(nlj) R_{\text{ml}}^{ho}(r)
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Moltiplicando infine, per $R_{\text{ml}}^{*ho}(r)$ ed integrando su r si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M a_m(nlj) \left\{ \varepsilon_{\text{ml}}^{ho} \delta_{m,m'} + \int dr r^2 R_{\text{ml}}^{ho}(r) R_{m'1}^{*ho}(r) \left[V_0 + V_{\text{so}} + V_c - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] \right\} \\
&= \varepsilon_{\text{nlj}} a_{m'}(nlj)
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Abbiamo trasformato quindi, un problema differenziale in un problema agli autovalori

$$H_{m,m'}^{nlj} a(nlj) = \varepsilon_{\text{nlj}} a(nlj) \tag{D.11}$$

con

$$H_{m,m'}^{nlj} = \varepsilon_{\text{ml}}^{ho} \delta_{m,m'} + \int dr r^2 R_{\text{ml}}^{ho}(r) R_{m'1}^{*ho}(r) \left[V_0 + V_{\text{so}} + V_c - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \right] \tag{D.12}$$

La soluzione del problema fornisce un numero di soluzioni pari al numero di coefficienti dello sviluppo. Per valori fissati di ℓ e j , il parametro m indica il numero di nodi, $(m-1)$, della funzione radiale.

L'insieme delle soluzioni è sempre discreto, anche se ε è maggiore di zero.

Appendice E

Risultati BCS per gli isotopi del Calcio

In questa Appendice presentiamo i valori delle energie di singola particella, di u^2 e v^2 per gli isotopi del Calcio.

La prima colonna delle Tabelle seguenti identifica gli stati di particella singola per il nucleo in esame, secondo la seguente codifica.

- (a) il primo numero è legato all'isospin del nucleone che occupa il livello; in particolare

1 rappresenta i protoni;

0 rappresenta i neutroni.

- (b) il secondo numero è il numero quantico principale, $n - 1$ è il numero dei nodi della funzione radiale ;

- (c) il terzo numero indica il numero quantico ℓ ;

- (d) il quarto numero è $j + \frac{1}{2}$.

La seconda e la terza colonna rappresentano le probabilità u^2 e v^2 che abbiamo definito nel Capitolo 2, mentre le ultime due colonne indicano le energie di quasi particella e le energie di singola particella nel modello a shell rispettivamente.

Risultati per il ^{40}Ca .

				ENERGIES			
				u^2	v^2	PAIRING	SHELL MODEL
0	1	0	1	0.00000	1.00000	-42.56940	-42.56934
0	1	1	2	0.00000	1.00000	-32.41907	-32.41899
0	1	1	1	0.00000	1.00000	-29.79714	-29.79704
0	1	2	3	0.00001	0.99999	-21.37199	-21.37186

0	2	0	1	0.00002	0.99998	-16.42301	-16.42282
0	1	2	2	0.00004	0.99996	-15.70377	-15.70347
0	1	3	4	0.99996	0.00004	-9.76108	-9.76126
0	2	1	2	1.00000	0.00000	-4.83894	-4.83895
0	1	3	3	1.00000	0.00000	-0.80892	-0.80893
0	2	1	1	1.00000	0.00000	-2.26263	-2.26263
0	1	4	5	1.00000	0.00000	2.03512	2.03512
0	1	4	4	1.00000	0.00000	11.15723	11.15724
0	2	2	3	1.00000	0.00000	3.84351	3.84352
0	2	2	2	1.00000	0.00000	5.67418	5.67419
0	3	0	1	1.00000	0.00000	3.25591	3.25592
0	1	5	6	1.00000	0.00000	12.89363	12.89364
0	1	5	5	1.00000	0.00000	16.69686	16.69688
0	2	3	4	1.00000	0.00000	9.21535	9.21536
0	2	3	3	1.00000	0.00000	10.29398	10.29399
0	3	1	2	1.00000	0.00000	7.16684	7.16685
0	3	1	1	1.00000	0.00000	7.77750	7.77751
0	1	6	7	1.00000	0.00000	20.29234	20.29235
0	2	4	5	1.00000	0.00000	13.82017	13.82018
0	3	2	3	1.00000	0.00000	12.60104	12.60105
0	1	6	6	1.00000	0.00000	21.46974	21.46975
0	2	4	4	1.00000	0.00000	17.24477	17.24478
0	4	0	1	1.00000	0.00000	13.18987	13.18988
0	3	2	2	1.00000	0.00000	14.85722	14.85723
0	1	7	8	1.00000	0.00000	25.96219	25.96220

Risultati per il ^{42}Ca .

ENERGIES							
				u ²	v ²	PAIRING	SHELL MODEL
0	1	0	1	0.00027	0.99973	-42.58654	-42.56934
0	1	1	2	0.00084	0.99916	-32.45588	-32.41899
0	1	1	1	0.00074	0.99926	-29.82570	-29.79704
0	1	2	3	0.00370	0.99630	-21.45339	-21.37186
0	2	0	1	0.00526	0.99474	-16.48653	-16.42282
0	1	2	2	0.00857	0.99143	-15.79535	-15.70347
0	1	3	4	0.74553	0.25447	-9.06516	-9.76126
0	2	1	2	0.99748	0.00252	-4.81076	-4.83913
0	1	3	3	0.99839	0.00161	-0.77785	-0.80901
0	2	1	1	0.99917	0.00083	-2.24948	-2.26304
0	1	4	5	0.99877	0.00123	2.06575	2.03497
0	1	4	4	0.99997	0.00003	11.15222	11.15103
0	2	2	3	0.99991	0.00009	3.84303	3.84043

0 2 2 2	0.99998	0.00002	5.66852	5.66786
0 3 0 1	0.99996	0.00004	3.25247	3.25132
0 1 5 6	0.99992	0.00008	12.89375	12.88999
0 1 5 5	1.00000	0.00000	16.67711	16.67709
0 2 3 4	0.99999	0.00001	9.20684	9.20636
0 2 3 3	0.99999	0.00001	10.28223	10.28198
0 3 1 2	0.99998	0.00002	7.15335	7.15277
0 3 1 1	0.99998	0.00002	7.76281	7.76217
0 1 6 7	1.00000	0.00000	20.27423	20.27414
0 2 4 5	0.99999	0.00001	13.80426	13.80389
0 3 2 3	0.99997	0.00003	12.58087	12.57969
0 1 6 6	1.00000	0.00000	21.44319	21.44319
0 2 4 4	0.99996	0.00004	17.23178	17.22935
0 4 0 1	0.99998	0.00002	13.17193	13.17077
0 3 2 2	0.99998	0.00002	14.83580	14.83475
0 1 7 8	1.00000	0.00000	25.93705	25.93705

Risultati per il ^{44}Ca .

				ENERGIES			
				u^2	v^2	PAIRING	SHELL MODEL
0	1	0	1	0.00032	0.99968	-42.59038	-42.56934
0	1	1	2	0.00100	0.99900	-32.46445	-32.41899
0	1	1	1	0.00086	0.99914	-29.83144	-29.79704
0	1	2	3	0.00420	0.99580	-21.47027	-21.37186
0	2	0	1	0.00537	0.99463	-16.49524	-16.42282
0	1	2	2	0.00840	0.99160	-15.80511	-15.70347
0	1	3	4	0.49748	0.50252	-11.11003	-9.76127
0	2	1	2	0.99574	0.00426	-4.79705	-4.83929
0	1	3	3	0.99764	0.00236	-0.76669	-0.80909
0	2	1	1	0.99872	0.00128	-2.24429	-2.26344
0	1	4	5	0.99821	0.00179	2.07729	2.03483
0	1	4	4	0.99996	0.00004	11.14624	11.14464
0	2	2	3	0.99987	0.00013	3.84124	3.83765
0	2	2	2	0.99997	0.00003	5.66304	5.66214
0	3	0	1	0.99994	0.00006	3.24806	3.24651
0	1	5	6	0.99989	0.00011	12.89153	12.88644
0	1	5	5	1.00000	0.00000	16.65779	16.65775
0	2	3	4	0.99998	0.00002	9.19852	9.19786
0	2	3	3	0.99999	0.00001	10.27097	10.27063
0	3	1	2	0.99998	0.00002	7.13971	7.13891
0	3	1	1	0.99997	0.00003	7.74796	7.74709

0 1 6 7	1.00000	0.00000	20.25760	20.25746
0 2 4 5	0.99999	0.00001	13.78761	13.78710
0 3 2 3	0.99996	0.00004	12.56199	12.56040
0 1 6 6	1.00000	0.00000	21.41894	21.41894
0 2 4 4	0.99994	0.00006	17.21669	17.21349
0 4 0 1	0.99997	0.00003	13.15243	13.15092
0 3 2 2	0.99997	0.00003	14.81592	14.81453
0 1 7 8	1.00000	0.00000	25.91315	25.91314

Risultati per il ^{46}Ca .

					ENERGIES			
					u ²	v ²	PAIRING	SHELL MODEL
0 1 0 1	0.00023	0.99977	-42.58457	-42.56934				
0 1 1 2	0.00070	0.99930	-32.45173	-32.41899				
0 1 1 1	0.00059	0.99941	-29.82142	-29.79704				
0 1 2 3	0.00280	0.99720	-21.44117	-21.37186				
0 2 0 1	0.00333	0.99667	-16.47202	-16.42281				
0 1 2 2	0.00503	0.99497	-15.77073	-15.70347				
0 1 3 4	0.25034	0.74966	-10.43915	-9.76127				
0 2 1 2	0.99560	0.00440	-4.80171	-4.83943				
0 1 3 3	0.99795	0.00205	-0.77515	-0.80916				
0 2 1 1	0.99882	0.00118	-2.24774	-2.26382				
0 1 4 5	0.99848	0.00152	2.06866	2.03469				
0 1 4 4	0.99997	0.00003	11.13937	11.13812				
0 2 2 3	0.99989	0.00011	3.83805	3.83515				
0 2 2 2	0.99998	0.00002	5.65768	5.65695				
0 3 0 1	0.99995	0.00005	3.24274	3.24150				
0 1 5 6	0.99991	0.00009	12.88705	12.88306				
0 1 5 5	1.00000	0.00000	16.63933	16.63930				
0 2 3 4	0.99999	0.00001	9.19002	9.18949				
0 2 3 3	0.99999	0.00001	10.25975	10.25949				
0 3 1 2	0.99998	0.00002	7.12629	7.12564				
0 3 1 1	0.99998	0.00002	7.73337	7.73268				
0 1 6 7	1.00000	0.00000	20.24224	20.24212				
0 2 4 5	0.99999	0.00001	13.77032	13.76992				
0 3 2 3	0.99997	0.00003	12.54423	12.54297				
0 1 6 6	1.00000	0.00000	21.39671	21.39671				
0 2 4 4	0.99995	0.00005	17.19978	17.19732				
0 4 0 1	0.99997	0.00003	13.13152	13.13036				
0 3 2 2	0.99998	0.00002	14.79743	14.79634				
0 1 7 8	1.00000	0.00000	25.88965	25.88964				

Risultati per il ^{48}Ca .

					ENERGIES			
					u ²	v ²	PAIRING	SHELL MODEL
0	1	0	1		0.00000	1.00000	-42.56941	-42.56934
0	1	1	2		0.00000	1.00000	-32.41909	-32.41899
0	1	1	1		0.00000	1.00000	-29.79712	-29.79704
0	1	2	3		0.00000	1.00000	-21.37201	-21.37186
0	2	0	1		0.00001	0.99999	-16.42295	-16.42281
0	1	2	2		0.00001	0.99999	-15.70361	-15.70347
0	1	3	4		0.00006	0.99994	-9.76169	-9.76127
0	2	1	2		0.99988	0.00012	-4.83921	-4.83956
0	1	3	3		0.99999	0.00001	-0.80915	-0.80922
0	2	1	1		0.99999	0.00001	-2.26410	-2.26417
0	1	4	5		1.00000	0.00000	2.03460	2.03456
0	1	4	4		1.00000	0.00000	11.13155	11.13155
0	2	2	3		1.00000	0.00000	3.83286	3.83285
0	2	2	2		1.00000	0.00000	5.65216	5.65217
0	3	0	1		1.00000	0.00000	3.23640	3.23640
0	1	5	6		1.00000	0.00000	12.87989	12.87989
0	1	5	5		1.00000	0.00000	16.62200	16.62200
0	2	3	4		1.00000	0.00000	9.18105	9.18105
0	2	3	3		1.00000	0.00000	10.24826	10.24826
0	3	1	2		1.00000	0.00000	7.11322	7.11322
0	3	1	1		1.00000	0.00000	7.71921	7.71921
0	1	6	7		1.00000	0.00000	20.22777	20.22778
0	2	4	5		1.00000	0.00000	13.75266	13.75266
0	3	2	3		1.00000	0.00000	12.52702	12.52702
0	1	6	6		1.00000	0.00000	21.37599	21.37599
0	2	4	4		1.00000	0.00000	17.18112	17.18112
0	4	0	1		1.00000	0.00000	13.10938	13.10939
0	3	2	2		1.00000	0.00000	14.77975	14.77975
0	1	7	8		1.00000	0.00000	25.86601	25.86601

Ringraziamenti

Sappiamo tutti che probabilmente, dopo le 12 fatiche di Ercole, l'altra più famosa è quella della stesura della tesi, al termine della quale, dopo centinaia di fogli scritti stracciati corretti e riscritti, c'è una pagina di cui ci eravamo dimenticati ma che, presi dall'entusiasmo e dall'euforia, faremo presto a riempire: la pagina dei Ringraziamenti.

È difficile scrivere dei ringraziamenti per molti motivi. Il primo, perchè tantissime persone hanno contribuito a formare la persona che oggi sono ed è impossibile elencarli tutti in una paginetta o poco più (ma loro lo sanno...); il secondo perchè anche con l'enorme gioia di tagliare un traguardo importante come la laurea, si ha sempre paura di perdere qualcosa, ad esempio i colleghi di questi cinque anni, i professori e l'ambiente stesso di un'esperienza che costituisce una parte di vita fondamentale.

Terzo motivo, meno serio ma non trascurabile..... a fisica si perde un po' la mano nello *scrivere bene*...

Ripercorrendo la mia strada, non posso fare a meno di pensare a quanti mi hanno fatto da ala, come quando un ciclista, impegnando ogni fibra del suo essere per vincere la vetta che lo separa dal traguardo, trova forza e sostegno dal tifo che le persone gli offrono lungo il percorso.

Ringrazio innanzitutto il professore Co', che passo dopo passo mi ha seguita, con professionalità, durante tutto il lavoro di tesi e non solo. Grazie al mio prof., perchè oltre ad essere il mio relatore, è per me un grande maestro e una guida sicura. Grazie perchè mi ha regalato la possibilità di vivere un'esperienza come quella che ho vissuto a Granada, esperienza che sicuramente resterà una delle più belle di tutta la mia vita.

Grazie professore Co', perchè oltre ad un po' di fisica, mi avete insegnato tanto.

Un grazie molto particolare lo rivolgo alla professoressa Marta che con infinita dolcezza, mi ha accolto e aiutato tantissimo. (Sono fortemente convinta che senza di lei a quest'ora starei ancora cercando di capire come raggiungere l'hotel dall'università di Granada!!). Ringrazio la professoressa per i lunghi pomeriggi che ha dedicato alla mia tesi, fra conti interminabili, fogli e libroni da consultare. Grazie di cuore professoressa!!!

Ringrazio il professore Antonio per la disponibilità che ha sempre dimostrato e per le sue lezioni, che oltre ad essere lezioni di fisica, erano per me, lezioni di spagnolo...

Grazie a Viviana (e Antonio) perchè mi ha aiutato tanto, soprattutto durante l'ultimo periodo di tesi. Grazie per i preziosi consigli e per la sua infinita disponi-

bilità.

Un sincero e doveroso grazie va a tutta la mia famiglia che mi ha permesso di raggiungere il traguardo della laurea.

Grazie alla mia mamma che ha sopportato e sostenuto ogni mia difficoltà.

Grazie al mio papà per la stima e la fiducia che, con il sorriso, mi ha sempre mostrata.

Grazie a Monia che ha condiviso con me questi cinque anni universitari, che mi è stata accanto quando le difficoltà apparivano troppo più grandi di me (e cioè sempre!). Grazie sorellina per non avermi mai fatto mancare il tuo sostegno e il tuo incoraggiamento.

Grazie a Michele perchè con il suo sorriso e la sua dolcezza, ha reso divertenti anche le giornate di studio più pesanti.

Grazie ad Anna Chiara che con il suo affetto mi ha regalato tanta forza per puntare sempre al massimo delle mie capacità.

Grazie alle mie nonne, a tutti gli zii e ai miei cugini.

Grazie ad Antonella che anche solo con uno sguardo o un sorriso ha saputo darmi tantissima forza. Grazie per le serate film, per le pause caffè, per le lunghe chiacchierate al balcone. Grazie davvero di tutto amica mia!!

Grazie a Sabrina perchè mi ha sopportato ed è stata sempre presente durante quest'ultimi anni. Grazie per i momenti di allegria che mi hai regalato, per la compagnia e il sostegno che mai mi hai fatto mancare..

Grazie alla mia grande amica Valentina, che nonostante la distanza e le mille cose da fare, ha sempre trovato spazio e tempo da dedicarmi. Grazie Vale, per i pomeriggi ricchi di sorrisi veri, che mi riempiono il cuore.

Grazie ai due Luigi che mi hanno sopportato durante tutte le lezioni della specialistica, grazie per le risate e le battute durante le lunghe giornate di studio nella 26...

Un grazie particolare a Federica e Annalisa, che non mi hanno mai fatto mancare il loro sostegno!!

...Grazie a tutti i miei "*colleghi*"... Marco, Alberto, Giovanni, Adriano, Leonardo, Costantino, Celeste, Francesca, Roberta, a Simona che con dolcezza, mi ha tenuto compagnia in F6 durante le ultime settimane di tesi. Grazie ad Alfredo che fra un caffè e l'altro, mi ha aiutato davvero tanto, grazie a Franci, Federica, Andrea e tutti gli abitanti del Fiorini...

Grazie agli amici Alessio, Salvatore, Francesca, Elisa, Federica, Gabriele, Emiliano, Chiara e tutti gli altri.

Infine, grazie a tutti quelli che non hanno creduto in me, perchè anche senza saperlo, con i loro sorrisi e le frasi false, hanno tirato fuori tutta la forza di cui sono capace.

E alla fine la paginetta si è trasformata in tre paginette....ma si sa.. l'uomo non è fatto solo di numeri..

La cosa principale che per cui, oggi, mi sento di *ringraziare tutti*, non è solo perchè ho raggiunto il mio piccolo traguardo, ma soprattutto perchè se potessi tornare indietro...beh, di sicuro mi riscriverei a fisica!!!

Bibliografia

- [Aud93] G. Audi and A. H. Wapstra, Nucl. Phys. A 565, 1 (1993)
- [Ari07] F. Arias de Saavedra, C. Bisconti, G. Co' and A. Fabrocini, Phys. Rep. 450 (2007)
- [Ber07] C. A. Bertulani, *Nuclear physics in a nutshell*, Princeton University, Princeton (2007).
- [Boe66] E. Boeker, *Hartree-Fock calculations in light Nuclei*, Nucl. Phys. A 91, 27 (1966).
- [Boh58] A. Bohr, B. R. Mottelson and D. Pines, *Possible Analogy between the Excitation Spectra of Nuclei and Those of the Superconducting Metallic State*, Phys. Rev. 110, 936 (1958).
- [Edm96] A. R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics*, Princeton University Press (1996).
- [Eis70] J. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear models*, North Holland, Amsterdam (1970).
- [Eis72] J. Eisenberg and W. Greiner, *Microscopic Theory of The Nucleus*, North Holland, Amsterdam (1972).
- [Kra88] K. S. Krane, *Introductory nuclear physics*, John Wiley, New York (1988).
- [Rin80] P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer, Berlin (1980).
- [Row70] D. J. Rowe, *Nuclear collective motion*, Methuen, London (1970).
- [Sha74] A. de Shalit and H. Feshbach, *Theoretical nuclear physics*, John Wiley, New York (1974).
- [Suh07] J. Suhonen, *From nucleons to nucleus*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007).
- [San05] N. Sandulescu, P. Schuck and X. Viñas *Nuclear pairing: Surface or bulk*, Phys. Rev. C 71, 054303 (2005) .