

UNIVERSITA' DEL SALENTO

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E  
NATURALI

Corso di Laurea in Fisica

# STELLE DI NEUTRONI

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
GIAMPAOLO CO'

Presentata da:  
MICHELE MAZZAMURRO

Anno Accademico 2010-2011

# Indice

<b>1</b>	<b>Stelle di neutroni</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equazioni di stato della materia neutronica</b>	<b>7</b>
2.1	Introduzione al problema . . . . .	7
2.2	Interazione a due corpi . . . . .	8
2.3	L'interazione a tre corpi . . . . .	9
2.4	Proprietà della materia nucleare . . . . .	10
2.5	Equazioni di stato . . . . .	12
2.6	Teorie a multicorpi . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Integrazione numerica delle equazioni di Tolmann-Oppenheimer-Volkoff</b>	<b>18</b>
3.1	Introduzione al problema . . . . .	18
3.2	Algoritmo risolutivo . . . . .	21
3.3	Risultati . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Listati</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>

# Capitolo 1

## Stelle di neutroni

Bombardando il berillio con particelle alfa, W.Bothe e H.Becker, scoprirono l'esistenza di una nuova particella, dotata di una massa simile alla massa del protone e priva di carica: il neutrone. Pochi anni dopo, W.Baade e F.Zwicky ipotizzarono che lo stato finale dell'evoluzione di stelle molto massive potesse essere quello di oggetti stellari composti prevalentemente da neutroni ([Baa34]). In quegli anni si andavano sviluppando le teorie sia dell'evoluzione stellare e sia della fisica nucleare e si era arrivati anche a ritenere che le stelle neutroniche potessero formarsi come residuo dell'esplosione di supernovae. Nei decenni seguenti con l'accumularsi di notevoli quantità di dati provenienti dalle osservazioni astronomiche, si aggiunsero ulteriori conoscenze per lo sviluppo della teoria evolutiva stellare. L'astrofisico Franco Pacini in una nota pubblicata su Nature mostrava la possibilità che le stelle neutroniche potessero emettere intensa radiazione a bassa frequenza (domini radio) e che avessero elevatissime velocità angolari e intensissimi campi magnetici, conclusioni ottenute teoricamente a cui conducevano i principi dell'elettromagnetismo, quello di conservazione del momento angolare ed i fenomeni osservati nella Nebulosa Granchio. Verso la fine degli anni sessanta si osservò un oggetto astronomico che subito si propose come possibile stella di neutroni e venne chiamata Pulsar. La prima Pulsar è stata individuata da radioastronomi dell'università di Cambridge il 28 Novembre 1967 e denominata Pulsar (Pulsating radio source) per la caratteristica di emettere periodicamente radioonde sottoforma di brevi impulsi. Per questa scoperta e per le deduzioni che ne seguirono ad Antony Hewish fu assegnato il premio Nobel per la fisica. Da osservazioni successive è stato scoperto che la durata degli impulsi emessi vanno da qualche secondo ai millisecondi con un periodo di ricorrenza che presenta due fondamentali caratteristiche:

1. gli impulsi emessi hanno una durata molto breve (da 10 a 50 ms).

2. un periodo di ricorrenza che ha le seguenti proprietà: un valore relativamente piccolo (dal secondo ai millisecondi) e un'estrema regolarità.

Dalle caratteristiche del periodo di ricorrenza se ne deduce che le dimensioni delle Pulsar sono estremamente ridotte, poichè a tali periodi corrispondono notevoli velocità di rotazione tali da superare la velocità angolare limite per cui esiste ancora equilibrio tra forza gravitazionale e forza centrifuga tra le parti costituenti il sistema, per qualsiasi oggetto astrofisico fino ad allora conosciuto. Inoltre dalla circostanza che fra le Pulsar identificate vi siano due stelle, la NP0532 identificata con una delle componenti della binaria della Nebulosa del Granchio e la CP0808 identificata con una stella della costellazione della Vela ed il fatto che in seguito altre Pulsar sono state osservate al centro di nebulose, da questa serie di dati sperimentali si deduce che le stelle di neutroni siano Pulsar, quindi si desume che le Pulsar siano stelle di neutroni di dimensioni inferiori a quelle delle altre stelle ed in rapida rotazione e circondate da un intenso campo magnetico.

Inoltre da misure astronomiche recenti le stelle di neutroni risultano avere delle masse di  $\approx 1.4, 1.5 M_{Sun}$ . La figura 1.1 a fine capitolo mostra le masse, in masse solari, di alcune Pulsar osservate.

Le stelle di neutroni sono modellizzate con una struttura a strati: superficie, crosta esterna, crosta interna, core di materia nucleare, core esotico. Di questa struttura a strati noi considereremo principalmente la parte centrale dell'astro, ossia il core di materia neutronica, che determina la quasi totalità della massa ( $\approx 99\%$ ). Un ruolo fondamentale nella modellizzazione delle osservabili fisiche delle Pulsar è svolto dall'equazione di stato con cui si legano la densità e la pressione di una stella.

Il primo tentativo di modellizzare questi oggetti fu fatto da Oppenheimer e Volkoff [Opp39] utilizzando come modello un gas di neutroni non interagenti, gas di Fermi, ottenendo quindi una relazione tra pressione e densità, come avviene per il gas di elettroni in una nana bianca. Questo modello prevede che le stelle di neutroni abbiano massa massima di ( $\approx 0.7 M_{sun}$ ) in contrasto con le osservazioni. Per ottenere masse maggiori, non basta considerare solo il principio di esclusione di Pauli, come avviene nel caso delle nane bianche, ma bisogna tener conto anche dell'interazione tra nucleoni.

Per la descrizione delle proprietà fisiche del core di materia neutronica vengono utilizzate equazioni di stato che includono l'interazione tra i neutroni.

Per una stella che non si trovi in una condizione di particolare instabilità dovuta ad eventuali trasformazioni in atto nella sua composizione, quindi che si trova in una fase stabile della sua vita, è possibile descrivere il suo stato attraverso le seguenti equazioni differenziali che esprimono l'equilibrio

idrostatico della stella. Si ipotizza la simmetria sferica del sistema. Le grandezze massa, densità e pressione,  $m(r)$ ,  $\varrho(r)$ ,  $P(r)$ , funzioni della distanza dal centro della stella,  $r$ , sono legate nel seguente modo:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho(r) \quad (1.1)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G_N \frac{m(r)\varrho(r)}{r^2} \quad (1.2)$$

Indichiamo con  $G_N$  la costante di gravitazione universale. Se indichiamo con  $R$  il raggio della stella, la massa contenuta nella sfera di raggio  $r < R$  è definita:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr' \quad (1.3)$$

la (1.1) esprime la conservazione della massa, con la condizione di normalizzazione per la densità:

$$M = \int \varrho(r) d^3r = 4\pi \int_0^R \varrho(r) r^2 dr \quad (1.4)$$

la (1.2) rappresenta l'equilibrio tra la forza gravitazionale e la forza dovuta alla pressione creata dal moto termico del gas che tenderebbe all'espansione del sistema. Inoltre considerando due superfici sferiche concentriche interne alla stella, situate rispettivamente a distanza  $r$  e  $r+dr$  dal centro, la pressione esercitata dal gas su tali superfici deve soddisfare la condizione:

$$P(r + dr) < P(r) \quad (1.5)$$

Il raggio della stella è definito come il raggio in cui la pressione si annulla:

$$P(R) = 0. \quad (1.6)$$

Nelle stelle della sequenza principale la pressione è prodotta dal calore generato da reazioni nucleari. Nelle stelle di neutroni il meccanismo è diverso, la pressione è generata dal principio di Pauli. Inoltre bisogna tener conto dell'intenso campo gravitazionale che viene generato da una tale quantità di materia concentrata in un così piccolo spazio, queste considerazioni hanno portato a riscrivere la (1.2) con termini correttivi, che si basano sulla teoria della relatività generale di Einstein. Queste equazioni, che prendono il nome di equazioni di Tolmann-Oppenheimer-Volkoff, vedi [Tol34], [Opp39], sono qui riportate:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \left\{ \left(1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{c^2 m(r)}\right) \left(1 - \frac{2G_N m(r)}{rc^2}\right)^{-1} \right\} \quad (1.7)$$

con  $G_N$  costante di gravitazione universale, e  $c$  velocità della luce. Dove i termini correttivi

$$C_1(r) = 1 + \frac{P(r)}{c^2 \varrho(r)} \quad (1.8)$$

$$C_2(r) = 1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{c^2 m(r)} \quad (1.9)$$

$$C_3(r) = 1 - \frac{2G_N m(r)}{rc^2} \quad (1.10)$$

sono determinati dalle correzioni apportate dalla relatività generale al campo gravitazionale. Inoltre si sottolinea che nelle TOV,  $\varrho(r)$ , indica la densità di materia ed energia, dato che secondo la relatività generale il campo gravitazionale è generato non solo dalla materia ma da una qualunque distribuzione di energia e momento.

Nel seguito questi sistemi di equazioni differenziali saranno risolti numericamente tramite l'algoritmo di Eulero, fissandone i valori iniziali di pressione e densità, ed utilizzando una equazione di stato per materia neutronica che include l'interazione tra i neutroni. In questo modo è possibile ottenere densità, energia di legame per nucleone e pressione al variare della distanza dal centro della stella e per un dato valore di densità centrale.

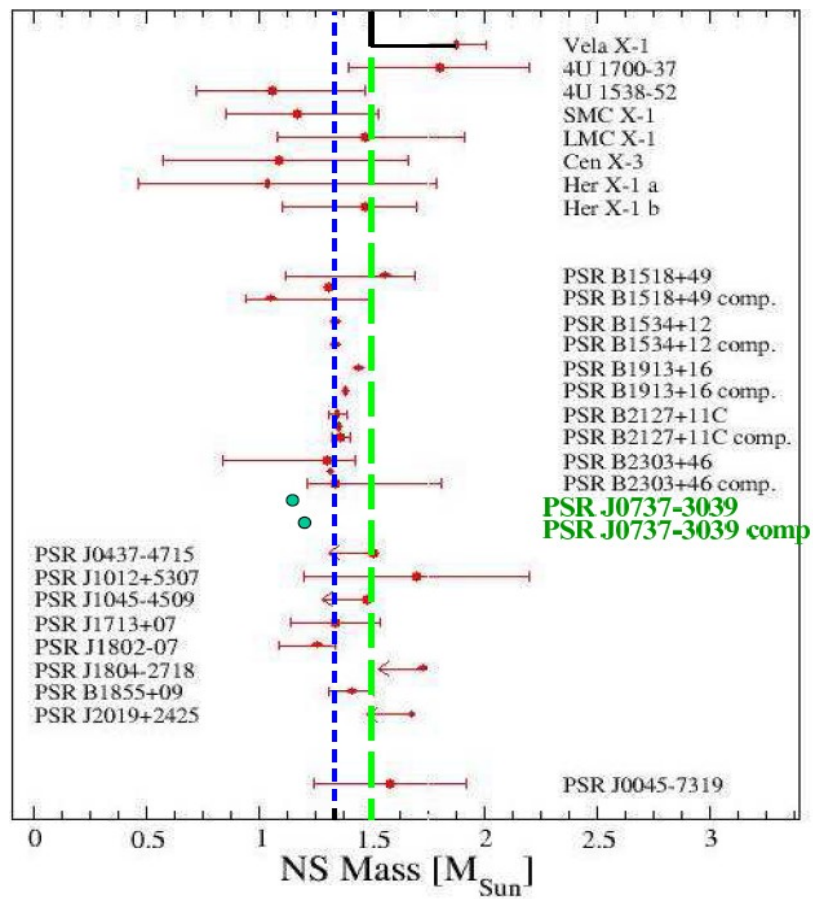


Figura 1.1: Masse misurate di alcune Pulsar

## Capitolo 2

# Equazioni di stato della materia neutronica

### 2.1 Introduzione al problema

Come è stato detto in precedenza, il modello di gas di Fermi di neutroni, utilizzato da Oppenheimer nella modellizzazione del core della stella, non è in accordo con le masse osservate e obbliga ad includere nel modello l'interazione tra i neutroni, per ottenere equazioni di stato che meglio riproducano i dati astronomici delle masse osservate.

In questo capitolo si mostra come viene fissata l'interazione a due corpi e il perchè sia necessario introdurre l'interazione a tre corpi per riprodurre il dato sperimentale dell'energia di legame del trizio. Successivamente si mostra come sono fissate le proprietà della materia nucleare e come alcune di esse si legano alla materia nucleare simmetrica (materia costituita da un ugual numero di protoni e neutroni). Inoltre si accenna alla risoluzione del problema multicorpi per materia nucleare. Si descriverà come dalle proprietà della materia nucleare simmetrica sia possibile ottenere informazioni sulla materia neutronica pura. Inoltre si mostrano i risultati delle tecniche Montecarlo con cui è stata parametrizzata l'equazione di stato. Infine vengono messi a confronto i grafici dell'energia di legame per nucleone in funzione della densità di materia nucleare simmetrica e neutronica ed anche i grafici della pressione e della derivata della pressione rispetto alla densità per materia neutronica.



## 2.2 Interazione a due corpi

L'hamiltoniana che descrive un sistema di due nucleoni interagenti si scrive:

$$H = \sum_{i=1,2} -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m_n} + V(1,2) \quad (2.1)$$

dove  $V(1,2)$  è il potenziale che descrive l'interazione nucleone-nucleone.

Informazioni sulla natura dell'interazione nucleone-nucleone si ottengono da esperienze di diffusione elastica di neutroni su neutroni e protoni su neutroni, e dal deutone unico sistema legato di due nucleoni.

Sono state sviluppate varie tecniche per costruire interazioni nucleone-nucleone. Qualsiasi siano le ipotesi di partenza, tutti i modelli di interazione devono soddisfare i seguenti requisiti per non violare simmetrie di base.

1. Hermitianità.
2. Invarianza per scambio di coordinate

$$V(1,2) = V(2,1)$$

3. Invarianza traslazionale, ovvero interazione dipendente dalla distanza relativa dei due nucleoni.
4. Invarianza galileana. L'interazione dipende dal momento relativo dei due nucleoni.
5. Invarianza per riflessioni spaziali, sotto parità

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = V(-\mathbf{r}, -\mathbf{p})$$

6. Invarianza per inversione temporale

$$V(\mathbf{p}, -\boldsymbol{\sigma}) = V(\mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})$$

7. Invarianza per rotazioni spaziali
8. Invarianza per rotazioni dell'isospin

Questi vincoli portano alla costruzione di potenziali d'interazione nucleone-nucleone che possono essere espressi come somma di termini del tipo:

$$\begin{aligned}
V(1, 2) = & V_1(\mathbf{r}_{12}) + V_2(\mathbf{r}_{12})\boldsymbol{\tau}(1)\boldsymbol{\tau}(2) \\
& + V_3(\mathbf{r}_{12})\boldsymbol{\sigma}(1)\boldsymbol{\sigma}(2) + V_4(\mathbf{r}_{12})\boldsymbol{\sigma}(1)\boldsymbol{\sigma}(2)\boldsymbol{\tau}(1)\boldsymbol{\tau}(2) \\
& + V_5(\mathbf{r}_{12})S_{12}(\mathbf{r}_{12}) + V_6(\mathbf{r}_{12})S_{12}(\mathbf{r}_{12}) \\
& + V_7(\mathbf{r}_{12})\mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{S}_{12} + V_8(\mathbf{r}_{12})[\mathbf{L}_{12} \cdot \mathbf{S}_{12}][\boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2)] \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$  rispettivamente gli operatori legati allo spin e all'isospin del nucleone con  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}(1) + \boldsymbol{\sigma}(2)$  e  $\mathbf{L}_{12}$ , lo spin e il momento angolare totale del sistema nucleone-nucleone. Il termine tensoriale è definito come

$$S_{12}(\mathbf{r}_{12}) = \frac{3}{r_{12}}[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \mathbf{r}_{12}][\boldsymbol{\sigma}(2) \cdot \mathbf{r}_{12}] - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \tag{2.3}$$

Per i potenziali del tipo  $V_i(r_{12})$  le loro parametrizzazioni sono effettuate riproducendo i 4000 dati sperimentali, ottenuti dalla diffusione elastica di n-n, n-p, fino ad energie di 300 MeV nel centro di massa. Le tecniche utilizzate per definire analiticamente questi potenziali si dividono in tre categorie:

1. I potenziali  $V_i(r_{12})$  sono puramente fenomenologici ed utilizzano funzioni di Yukawa per distanze relative fino a 2 fm, e funzioni tipo Saxon-Woods per la parte più a corto raggio.
2. L'interazione è descritta dallo scambio di singoli mesoni tra i nucleoni.
3. Teoria della perturbazione chirale, ispirata alla Quantum Chromo Dynamics (QCD).

Questi potenziali ottenuti con le differenti tecniche sono in ottimo accordo con i dati sperimentali delle esperienze di diffusione nucleone-nucleone.

## 2.3 L'interazione a tre corpi

Il sistema più semplice su cui verificare la correttezza dell'espressione analitica del potenziale d'interazione nucleone-nucleone è il trizio in cui è assente l'interazione elettrostatica tra i protoni del nucleo, essendo costituito da due neutroni ed un protone, l'interazione tra i nucleoni è dovuta quindi esclusivamente all'interazione forte. L'interazione a due corpi non riproduce l'energia di legame del trizio. Le evidenze sperimentali dimostrano che i nucleoni non sono entità elementari e quindi possano interagire attraverso interazioni a

molticorpi, di qui l'esigenza d'introdurre un termine fenomenologico per l'interazione a tre corpi all'interno del potenziale, che porta a scrivere per il sistema la seguente hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1,A} -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + \sum_{i<j=1,A} V(i,j) + \sum_{i<j<k=1,A} V(i,j,k) \quad (2.4)$$

I risultati numerici basati su questa espressione della hamiltoniana sono in eccellente accordo con i valori sperimentali dell'energia di legame del trizio ed una volta fissata l'interazione viene utilizzata per altri sistemi a pochi corpi, e di nuclei leggeri fino al  $^{12}\text{C}$ , ottenendo ottimi risultati, quindi viene presa come base per ogni calcolo per sistemi a molticorpi di materia nucleare.

## 2.4 Proprietà della materia nucleare

Non si hanno dati sperimentali per pura materia neutronica, quindi per ottenere informazioni su di essa dobbiamo ricavarle dalla materia nucleare. Si definisce materia simmetrica un sistema composto da un numero infinito di nucleoni, nel quale l'interazione elettromagnetica è stata spenta. Nel caso in cui si considera un numero uguale di neutroni e protoni, si parla di materia nucleare simmetrica. La materia neutronica è materia asimmetrica costituita di soli neutroni. Per materia nucleare simmetrica vi sono a disposizione dati sperimentali. Come vedremo è possibile ricavare l'energia di legame per nucleone di materia neutronica, dalla misura dell'energia di simmetria e dalla conoscenza dell'energia di legame per nucleone di materia nucleare simmetrica. Inoltre la materia nucleare simmetrica ci permette di confrontare i risultati dei modelli teorici con i dati empirici.

I parametri che fissano le proprietà della materia nucleare sono estrapolati da dati sperimentali di nuclei finiti. Da processi di diffusione elastica di elettroni su nuclei e da esperimenti di diffusione di vari tipi di particelle, (neutroni, protoni, particelle alfa), su nuclei bersaglio medio pesanti, la densità di carica e quindi di materia è uniformemente distribuita al centro del nucleo, per un intervallo di  $A$  molto ampio. Se si ipotizza il nucleo come una sfera di densità costante di raggio  $R$ , possiamo scrivere per la densità  $n$ , le seguenti espressioni:

$$n = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (2.5)$$

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (2.6)$$

Date le (2.5, 2.6), si ha che per  $r_0 = 1.1 \pm 0.1$  fm, ottenuto dai dati di diffusione elastica di elettroni su nuclei, si ha:  $n_0 = 0.16 \pm 0.01$  fm<sup>-3</sup>.

Il secondo parametro fondamentale si ricava dalla formula semi-empirica delle masse, che permette di ottenere l'energia di legame per nucleone:

$$\frac{B(A, Z)}{A} = \left( a_v + a_s A^{-\frac{1}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{4}{3}}} + a_I \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} + \delta \right) \quad (2.7)$$

e calcolandola per materia nucleare simmetrica (materia nucleare con ugual numero di protoni e neutroni: N=Z, A=2Z), e trascurando tutti i termini tranne il termine di volume si ottiene:  $a_v = -16.5 \pm 0.5$  MeV. Questo valore si ottiene da un fit delle energie di legame di circa 2000 nuclei.

Questi due valori:

$$n_0 = 0.16 \pm 0.01 \text{ fm}^{-3}$$

$$\varepsilon_0 = -16.5 \pm 0.5 \text{ MeV}$$

definiscono il valore del minimo per l'energia di legame per nucleone di materia nucleare simmetrica. Sviluppando in serie di potenze di Taylor  $\varepsilon = \frac{B(A, Z)}{A}$  attorno al punto di saturazione si ottiene:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_0 + (n - n_0)^2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} \right)_{n=n_0} = \frac{1}{2} \frac{K_0}{9} \frac{(n - n_0)^2}{n_0^2} \quad (2.8)$$

dove è stato considerato il fatto che la derivata prima dell'energia è nulla essendo in un punto di minimo e definendo il modulo di compressione come:

$$K_0 = 9n_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2} = 9 \frac{\partial P}{\partial n} \quad (2.9)$$

Il valore sperimentale del modulo di compressione è ottenuto dalla posizione della risonanza gigante di monopolo,  $0^+$ , nei nuclei pesanti. Oggi sono accettati valori dai 200 ai 250 MeV. Altro parametro sperimentale è dato dall'energia di simmetria definendo il parametro di asimmetria:

$$\eta = \frac{N - Z}{A} \quad (2.10)$$

Questo parametro ci permette di definire la materia nucleare simmetrica, dove N=Z, e quindi  $\eta = 0$ , e la materia neutronica, Z=0, A=N, dove  $\eta = 1$ . La densità d'energia per nucleone di materia asimmetrica può essere sviluppata in serie di potenze pari di  $\eta$  ottenendo:

$$\varepsilon(n, \eta) = \varepsilon(n, 0) + S_2(n)\eta^2 + S_4(n)\eta^4 + S_6(n)\eta^6 + \dots \quad (2.11)$$

Per le proprietà di simmetria delle forze nucleari rispetto all'isospin, l'interazione tra n-n è identica a quella tra p-p, e ciò implica l'annullarsi dei termini dispari dello sviluppo. Definiamo l'energia di simmetria come:

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} = S_2(n) \quad (2.12)$$

se fossero nulli tutti i termini dello sviluppo superiori al secondo, per ogni valore della densità, l'energia per particella di materia nucleare asimmetrica si potrebbe scrivere come:

$$\varepsilon(n, \eta) = \varepsilon(n, 0) + \varepsilon_{sym}(n) \eta^2 \quad (2.13)$$

quindi si può scrivere l'energia di simmetria come la differenza tra l'energia per nucleone di materia neutronica ( $\eta = 1$ ), e quella di materia nucleare simmetrica ( $\eta = 0$ ):

$$\varepsilon_{sym}(n) = \varepsilon(n, 1) - \varepsilon(n, 0) \quad (2.14)$$

Il valore sperimentale dell'energia di simmetria è ricavato dalla posizione della risonanza gigante di dipolo isovettoriale,  $1^-$ , nei nuclei medio-pesanti attestata attorno ai 30 MeV.

## 2.5 Equazioni di stato

La base empirica per ogni equazione di stato per materia nucleare è:

1. Punto di saturazione:  $n_0 = 0.16 fm^{-3}$  e  $\varepsilon_0 = -16.5 \pm 0.5$  MeV
2. Modulo di compressione:  $K_0 \approx 220$  MeV
3. Energia di simmetria:  $\varepsilon_{sym} \approx 30$  MeV

Inoltre è necessario che la velocità del suono non superi quella della luce, condizione di causalità:

$$\frac{s}{c} = \left( \frac{dP}{d\varepsilon} \right) \leq 1 \quad (2.15)$$

## 2.6 Teorie a molticorpi

Per ottenere l'equazione di stato è necessario risolvere l'equazione di Schrödinger per il sistema a molticorpi:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2.16)$$

dove  $H$  e  $|\psi\rangle$  dipendono dalle  $3A$  coordinate spaziali e da spin e isospin. L'energia del nucleo è calcolata come:

$$\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = E \quad (2.17)$$

per ogni configurazione di spin e isospin, che per un nucleo costituito da  $A$  nucleoni è pari a:

$$N_{conf} = 2^A \frac{A!}{Z!(A-Z)!} \quad (2.18)$$

che implica la risoluzione di  $N_{conf}$  integrali nelle  $3A$  variabili spaziali. Ora,  $N_{conf}$ , risulta essere dell'ordine del numero di Avogadro già per nuclei leggeri, di qui si vede la necessità principale per le teorie a molti corpi di affrontare il problema del calcolo dell'energia in maniera differente. Il problema è stato affrontato con tecniche differenti. Grazie all'enorme incremento delle capacità di calcolo numerico è stato possibile risolvere il problema utilizzando una metodologia Monte Carlo. Una volta scelta l'interazione nucleone-nucleone, i risultati ottenuti con questa tecnica sono molto simili a quelli ottenuti con tecniche approssimate, ma ben consolidate ed affermate, come la teoria di Brueckner o la teoria Correlated Basis Function.

Ora si presenterà l'equazione di stato per la materia neutronica, si veda [Gan10] ottenuta attraverso il metodo di diffusione da campo ausiliario Monte Carlo (AFDMC) per materia in  $\beta$ -equilibrio, che permette di calcolare lo stato fondamentale dell'energia di materia simmetrica e materia neutronica. Questo metodo è basato su una classe di hamiltoniane non relativistiche che usa un potenziale nucleare che include l'interazione a due corpi secondo lo schema Argonne V18, si veda [Wir95], e l'interazione molti corpi attraverso termini che dipendono dalla densità di nucleoni del sistema, i risultati ottenuti da AFDMC sono stati fittati dalle seguenti espressioni analitiche per materia nucleare simmetrica (Symmetric Nuclear Matter) e materia neutronica pura (Pure Neutron Matter). I valori dell'energia di legame per nucleone di SNM sono ben riprodotti dalla seguente espressione analitica per valori di densità maggiori di  $\sim 0.08 \text{ fm}^{-3}$ :

$$\varepsilon_{SNM}(n) = \varepsilon_0 + a(n - n_0)^2 + b(n - n_0)^3 e^{\gamma(n - n_0)} \quad (2.19)$$

ed in funzione della frazione di protoni  $x_p = \frac{n_p}{n}$ :

$$\varepsilon(n, x_p) = \varepsilon_0 + a(n - n_0)^2 + b(n - n_0)^3 e^{\gamma(n - n_0)} + C_s \left( \frac{n}{n_0} \right)^{\gamma_s} (1 - 2x_p)^2 \quad (2.20)$$

dove i parametri hanno i seguenti valori:

1.  $\varepsilon_0 = -16.0 \text{ MeV}$
2.  $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$
3.  $a = 520.0 \text{ MeV fm}^6$
4.  $b = -1297.4 \text{ MeV fm}^9$
5.  $\gamma = -2.213 \text{ fm}^{-3}$
6.  $C_s = 31.3 \text{ MeV}$
7.  $\gamma_s = 0.64$

I parametri  $C_s = 31.3 \text{ MeV}$ ,  $\gamma_s = 0.64$  sono ricavati fittando  $\varepsilon(n, x_p = 0)$  con i risultati ottenuti dal metodo AFDMC per materia neutronica.

Di seguito si riportano i grafici dell'energia di legame per nucleone per SNM e PNM ed anche quelli della pressione e della derivata della pressione rispetto alla densità per PNM, funzioni della densità di nucleoni su fermi cubo, poichè le rispettive espressioni analitiche sono inserite all'interno dell'algoritmo di Eulero per la risoluzione delle TOV. Si nota dalla figura (2.1) che l'EOS di SNM prevede legame per il valore di densità  $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  dove l'energia vale  $\varepsilon_0 = -16.0 \text{ MeV}$ . Invece da quanto si vede per PNM, l'energia non è mai negativa quindi il sistema non è legato, nelle stelle di neutroni la materia è legata dall'attrazione gravitazionale.

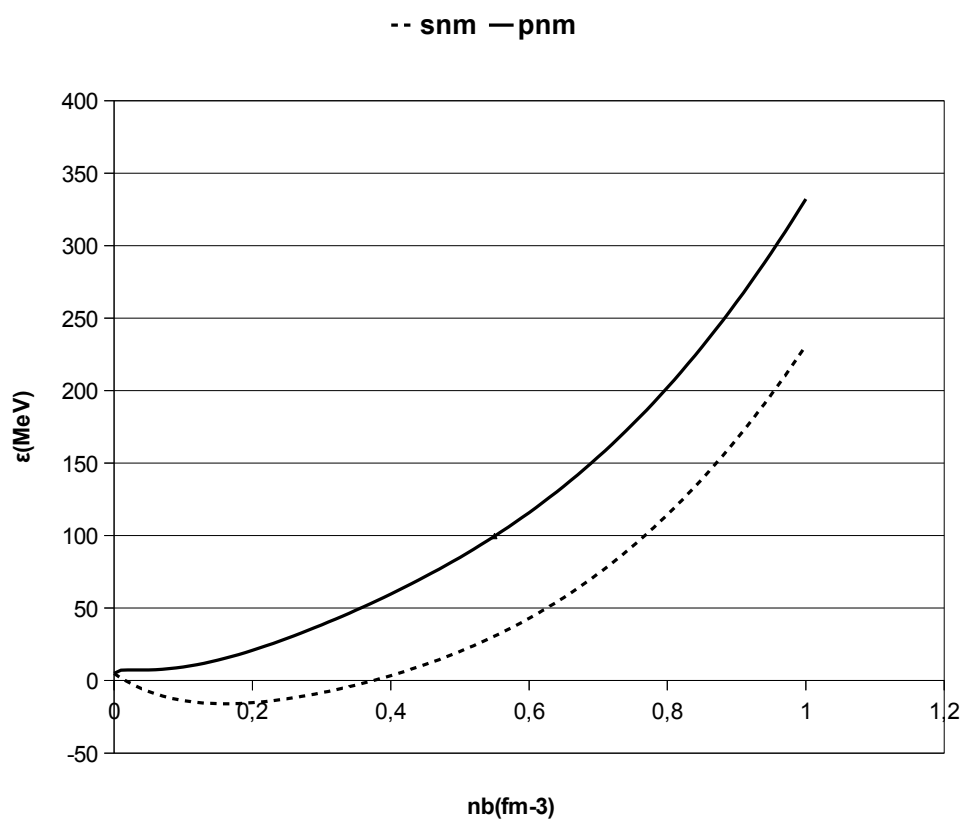


Figura 2.1: Energia di legame per nucleone, in MeV di materia nucleare simmetrica (SNM) e materia neutronica (PNM), in funzione della densità del sistema in  $\text{fm}^{-3}$ .



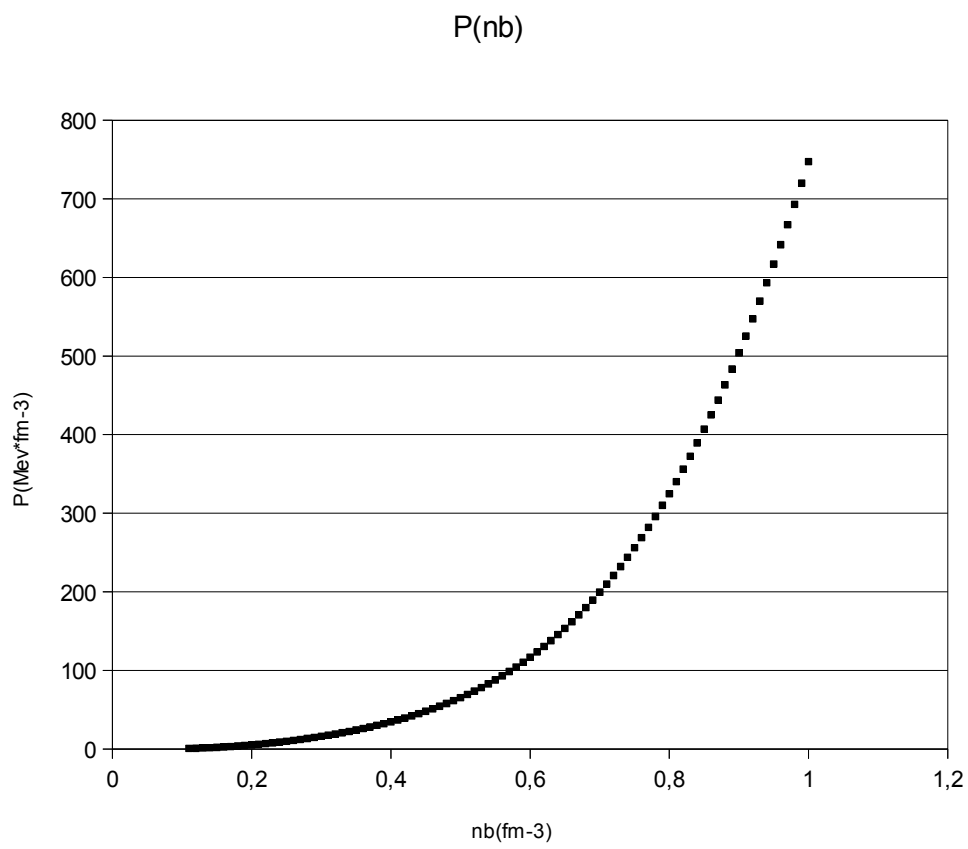


Figura 2.2: Pressione in funzione della densità di nucleoni per PNM:  $P = n^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n}$ .

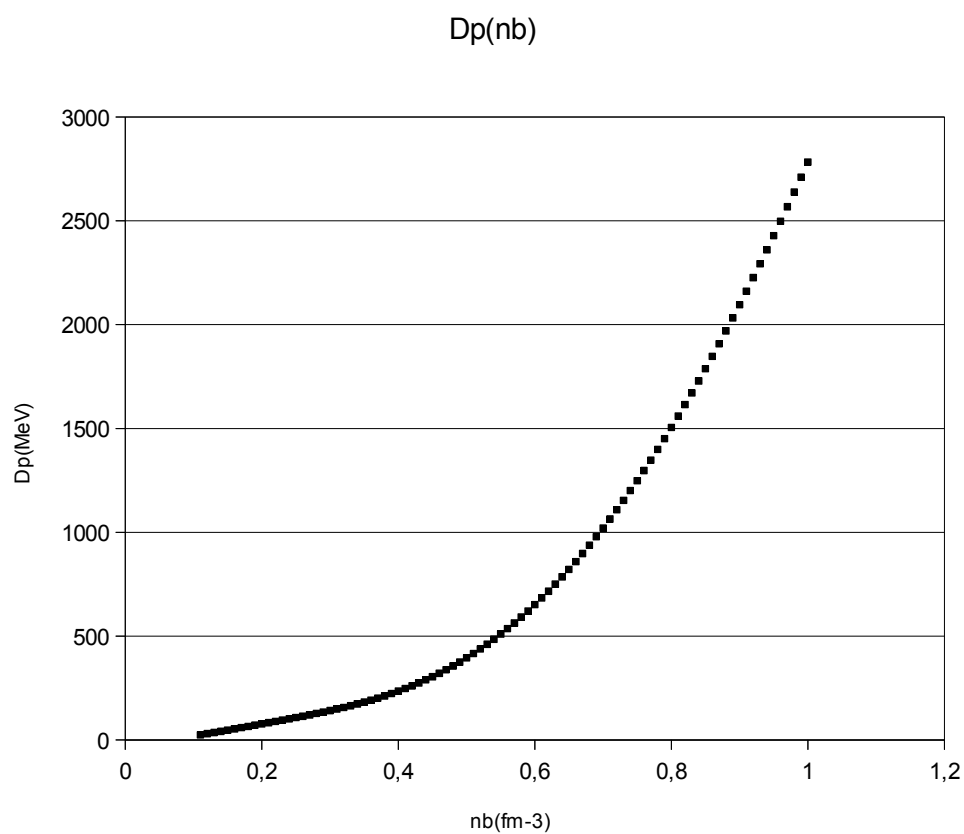


Figura 2.3: Derivata della pressione rispetto alla densità, in funzione della densità per PNM:  $\frac{dP}{dn} = 2n \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} + n^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n^2}$

## Capitolo 3

# Integrazione numerica delle equazioni di Tolmann-Oppenheimer-Volkoff

### 3.1 Introduzione al problema

Le equazioni TOV rappresentano un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nelle tre funzioni incognite  $P(r), m(r), \rho(r)$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G_N \frac{\rho(r)m(r)}{r^2} \left\{ \left(1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{c^2 m(r)}\right) \left(1 - \frac{2G_N m(r)}{rc^2}\right)^{-1} \right\} \quad (3.1)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r)r^2, \quad (3.2)$$

dove  $G_N$  è la costante di gravitazione universale di Newton e  $c$  la velocità della luce. Si sottolinea, inoltre, che il simbolo  $\rho(r)$  nelle TOV indica la densità di materia-energia:  $\rho(r) = \rho^*(r) + E(r) = n_b(r)(m_n + \varepsilon(r))$ , dove  $\rho^*(r)$  indica la densità di massa e  $E(r)$  la densità d'energia mentre con  $m_n$  si indica la massa del neutrone. Non si conoscono soluzioni analitiche generali di queste equazioni. Per ottenere soluzioni numeriche è conveniente scrivere la prima equazione in termini di dipendenza della densità di massa, dalla distanza dal centro della stella,  $\rho^*(r)$ . Per questa ragione si usa la seguente relazione:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho^*} \frac{d\rho^*}{dr} \quad (3.3)$$

e si riscrive la prima delle equazioni TOV come:

$$\frac{d\rho^*}{dr} = -G_N \frac{\rho m}{r^2} \left\{ \left(1 + \frac{P}{c^2 \rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{c^2 m}\right) \left(1 - \frac{2G_N m}{rc^2}\right)^{-1} \right\} \left(\frac{dP}{d\rho^*}\right)^{-1} \quad (3.4)$$

Per poter risolvere il sistema bisogna avere informazioni dall'esterno su almeno una delle funzioni incognite da definire. Abbiamo visto in precedenza che modelli di struttura della stella di neutroni forniscono l'energia di legame per nucleone in funzione della densità. Dalla EOS si ottiene  $P(n_b)$  nel seguente modo:

$$E = n_b \varepsilon(n_b) \quad (3.5)$$

dove con  $n_b$  si indica la densità barionica. Da questa si può ricavare la pressione dalla seguente relazione, dove con,  $V$ , si indica il volume:

$$P = -\frac{\partial(EV)}{\partial V} = -V \frac{\partial E}{\partial V} - E = -\frac{1}{n_b} \frac{\partial E}{\left(\frac{\partial 1}{\partial n_b}\right)} - E \quad (3.6)$$

$$= -\frac{1}{n_b} \partial E \left( \frac{-\partial n_b}{n_b^2} \right)^{-1} - E = n_b \frac{\partial E}{\partial n_b} - E \quad (3.7)$$

e dalla relazione precedente per la densità d'energia si ha:

$$\frac{\partial E}{\partial n_b} = \frac{\partial n_b \varepsilon}{\partial n_b} = n_b \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} + \varepsilon \quad (3.8)$$

da cui si ottiene la relazione per la pressione:

$$P = n_b \left( n_b \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} + \varepsilon \right) - n_b \varepsilon = n_b^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} \quad (3.9)$$

Per i calcoli si utilizzerà l'equazione di stato (2.20) dove  $x_p = 0$ . In questi calcoli si risolve l'equazione di Schrödinger a multicorpi senza alcuna approssimazione utilizzando tecniche Monte Carlo [Gan10] dove l'interazione usata è il potenziale Argonne V18 a cui è stato aggiunto un termine dipendente dalla densità per simulare l'effetto dell'interazione a tre corpi. Il risultato di questo calcolo è ben parametrizzato dall'espressione:

$$\varepsilon = e_0 + ad^2 + bd^3 e^{\gamma d} + c_s \left( \frac{n_b}{n_0} \right)^{\gamma_s} \quad (3.10)$$

$$d = n_b - n_0 \quad (3.11)$$

dove i parametri hanno i seguenti valori:

1.  $e_0 = -16.0 \text{ MeV}$
2.  $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$
3.  $a = 520.0 \text{ MeV fm}^6$

$$4. \quad b = -1297.4 \text{ MeV fm}^9$$

$$5. \quad \gamma = -2.213 \text{ fm}^{-3}$$

$$6. \quad C_s = 31.3 \text{ MeV}$$

$$7. \quad \gamma_s = 0.64$$

Da questa relazione e dall'espressione per la pressione vista precedentemente, eq.(3.8,3.9), si può ricavare la derivata della pressione rispetto alla densità, ricordando che la densità di massa è legata alla densità di numero come:  $\rho^* = m_n n_b$  dove  $m_n$  è la massa del neutrone. Quindi da:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} = 2ad + bd^2(3 + \gamma d)e^{\gamma d} + \frac{c_s \gamma_s}{n_0} \left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{\gamma_s - 1} \quad (3.12)$$

si ottiene:

$$P = n_b^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} = n_b^2 \left( 2ad + bd^2(3 + \gamma d)e^{\gamma d} + \frac{c_s \gamma_s}{n_0} \left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{\gamma_s - 1} \right) \quad (3.13)$$

e dalla relazione:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_b^2} = 2a + bd((d\gamma)^2 + 6d\gamma + 6)e^{\gamma d} + \frac{c_s \gamma_s (\gamma_s - 1)}{n_0^2} \left(\frac{n_b}{n_0}\right)^{\gamma_s - 2} \quad (3.14)$$

e le equazioni (3.14,3.12) permettono di calcolare:

$$\frac{\partial P}{\partial n_b} = 2n_b \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b} + n_b^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_b^2} \quad (3.15)$$

Per risolvere le TOV è necessario fissare le condizioni iniziali del problema. Nell'elaborazione numerica del sistema sono stati inseriti i valori numerici delle rispettive grandezze della scala nucleare, opportunamente trasformate secondo i rispettivi fattori di conversione alla scala astronomica delle dimensioni fisiche stimate per le stelle di neutroni. Si riportano di seguito i fattori di conversione utilizzati nell'elaborazione:

$$1 \text{ fm}^{-3} = 10^{-54} [\text{km}^{-3}] \quad (3.16)$$

$$1 \text{ MeV} = 1.602177 \cdot 10^{-19} [\text{kg}] [\text{km}^2] [\text{s}^{-2}] \quad (3.17)$$

e ricordando il valore della massa del neutrone:

$$m_n = 939.6 [\text{MeV}] c^{-2} = 1.67482 \cdot 10^{-27} [\text{kg}] \quad (3.18)$$

si possono ottenere i valori delle condizioni iniziali, opportunamente trasformati nelle unità del S.I., e per le dimensioni stimate di una stella di neutroni.

## 3.2 Algoritmo risolutivo

La risoluzione delle TOV è stata effettuata tramite un algoritmo di Eulero esplicito, applicato al nostro sistema di equazioni, dove è stato indicato con  $F(r_n, \rho_n(r_n), M_n(r_n), P_n(\rho_n^*), \frac{dP}{d\rho^*}|_{\rho_n^*})$  l'espressione della prima equazione TOV calcolata al passo  $(r_n, \rho_n^*)$ .

Calcolo della densità in  $r_{n+1}$ :

$$\rho_{n+1}^* = \rho_n^* + F(r_n, \rho_n(r_n), M_n(r_n), P_n(\rho_n^*), \frac{dP}{d\rho^*}|_{\rho_n^*})dr \quad (3.19)$$

Calcolo della massa contenuta nella sfera di raggio  $r_{n+1}$ :

$$M_{n+1} = M_n + (4\pi\rho_n(r_n)r_n^2)dr \quad (3.20)$$

Calcolo del raggio all'ordine  $r_{n+1}$ :

$$r_{n+1} = r_n + dr = r_0 + ndr \quad (3.21)$$

e con  $dr$  è indicato il passo d'integrazione:

$$dr = \frac{r_{max} - r_0}{n} \quad (3.22)$$

Dove  $r_0 = 0$  e  $r_{max} \approx 10 \text{ km}$ . Questo algoritmo è stato utilizzato non fissando il valore di  $n$ , numero totale passi, ma utilizzandolo come un parametro libero e fissando il passo d'integrazione al valore:  $dr = 0.1 \text{ km}$ , in questo modo il valore del raggio della stella,  $r_{max} = R$ , e della sua massa totale vengono determinati da quel valore di  $r$  corrispondente alla condizione di uscita dall'algoritmo, ottenuta al verificarsi di almeno una delle seguenti condizioni: la densità, la pressione o la derivata della pressione rispetto alla densità sono nulle. Il valore di  $dr$  è stato dettato sia dalla scala delle grandezze fisiche in gioco, e sia da motivi numerici, ossia per ottenere soluzioni con un numero sufficiente di valori nella regione fisica delle soluzioni:  $0 \leq P \leq P_0$ . Inoltre è stato fattorizzato un fattore comune  $10^{27}$  nelle due equazioni, dovuto al cambiamento di unità di misura nel passaggio da grandezze della scala nucleare alla scala delle stelle di neutroni. L'algoritmo di Eulero è stato utilizzato anche per risolvere il problema newtoniano, ottenuto imponendo nelle TOV il limite  $c \rightarrow \infty$ , che trasforma la (1.7) nella (1.2) e permette il calcolo della densità in  $r_{n+1}$ :

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \left( \frac{-G_N \rho_n M_n}{r_n^2} \right) dr \quad (3.23)$$

e il calcolo della massa contenuta nella sfera di raggio  $r_{n+1}$ :

$$M_{n+1} = M_n + (4\pi\rho_n r_n^2)dr \quad (3.24)$$

con incremento del raggio all'ordine  $r_{n+1}$ :

$$r_{n+1} = r_0 + ndr \quad (3.25)$$

In questo caso  $\rho$  indica la sola densità di materia.

### 3.3 Risultati

Si riportano di seguito i risultati ottenuti per le funzioni  $n_b(r) = \frac{\rho^*(r)}{m_n}, \varepsilon(r), P(r)$ , per diversi valori di densità centrale che è stata definita nel seguito con  $nb_0$ . Tutte le figure seguenti si riferiscono ai risultati dell'integrazione numerica delle TOV fissando la densità centrale per i seguenti valori:  $nb_0 = 0.16, 0.4, 0.8, 1.0 \text{ fm}^{-3}$ .

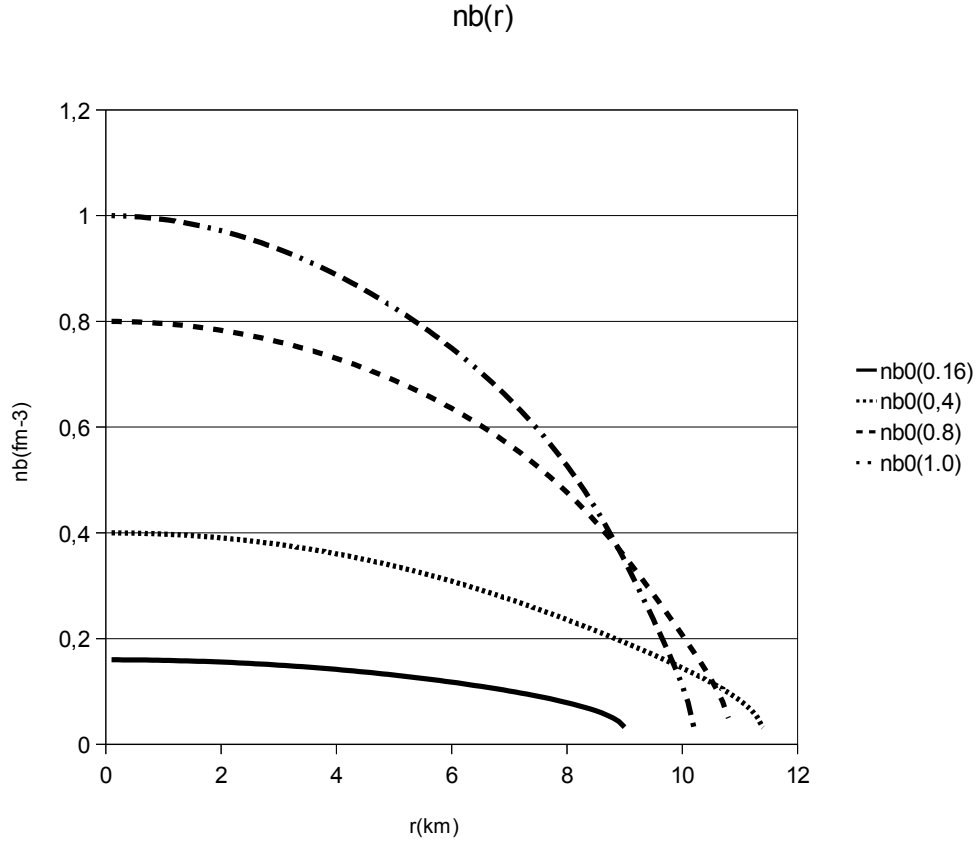


Figura 3.1: Densità barionica in funzione della distanza dal centro della stella.

Nella figura 3.1 si presenta l'andamento della densità barionica  $n_b(r)$  in funzione della distanza dal centro della stella. Le varie curve rappresentano i risultati ottenuti imponendo diversi valori della densità centrale  $n_{b0}$ . La curva continua rappresenta la soluzione calcolata per il valore della densità nel punto di minimo della materia nucleare simmetrica,  $0.16 \text{ fm}^{-3}$ , come si può vedere dalla figura 2.1. Le altre curve sono state ottenute per valori maggiori di questo. Possiamo notare come le varie densità diminuiscano all'aumentare della distanza dal centro della stella. Per mettere meglio in evidenza il comportamento di queste curve si sono calcolate numericamente le derivate di  $n_b(r)$  e sono presentate nella figura 3.2.



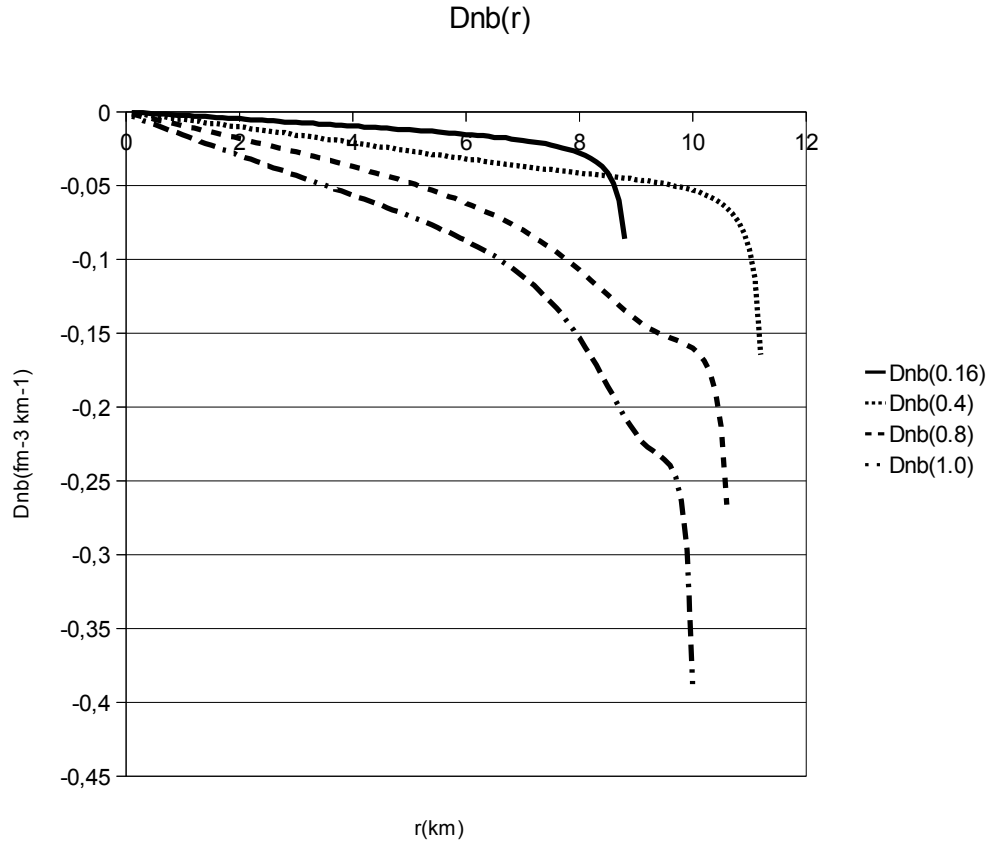


Figura 3.2: Funzione derivata per diversi valori di densità centrale:  $\frac{dn_b(r)}{dr}$

Si può notare come le curve  $n_b(r)$  hanno derivata negativa che varia linearmente al variare di  $r$  nella parte centrale della stella, quindi la funzione  $n_b(r)$  decresce in maniera parabolica in tale regione per poi variare bruscamente in prossimità di  $R$ . All'aumentare della densità centrale le funzioni derivate  $Dn_b(r, n_{b0}) = \frac{dn_b(r)}{dr}$  diventano sempre più negative per un fissato valore di  $r$ , quindi le relative funzioni densità decrescono più rapidamente al variare di  $r$ .

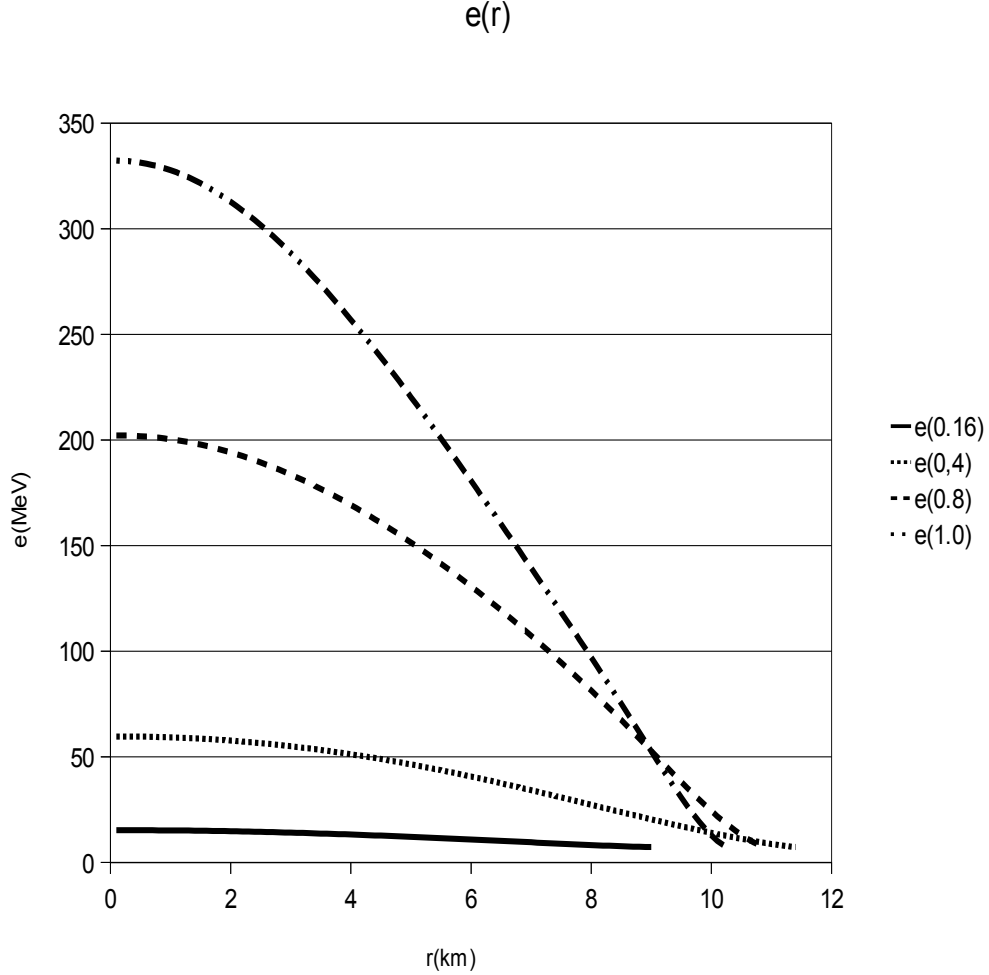


Figura 3.3: Energia di legame per nucleone in funzione della distanza dal centro della stella.

Nella figura 3.3 si mostrano gli andamenti dell'energia di legame per nucleone all'interno della stella al variare della distanza dal centro. Dal seguente grafico si evince come all'aumentare di  $nb_0$  aumenti rapidamente l'energia di legame al centro della stella come impone l'EOS utilizzata riportata precedentemente in figura 2.20. Tutte le curve presentano una variazione di concavità quando ci si avvicina ad  $R$ , inoltre le curve tendono ad un valore finale dell'energia di legame che oscilla tra  $\approx 7-8$  MeV. Per mettere meglio in evidenza il comportamento di queste curve si sono calcolate numericamente le derivate di  $\varepsilon(r)$  e sono presentate nella figura 3.4.

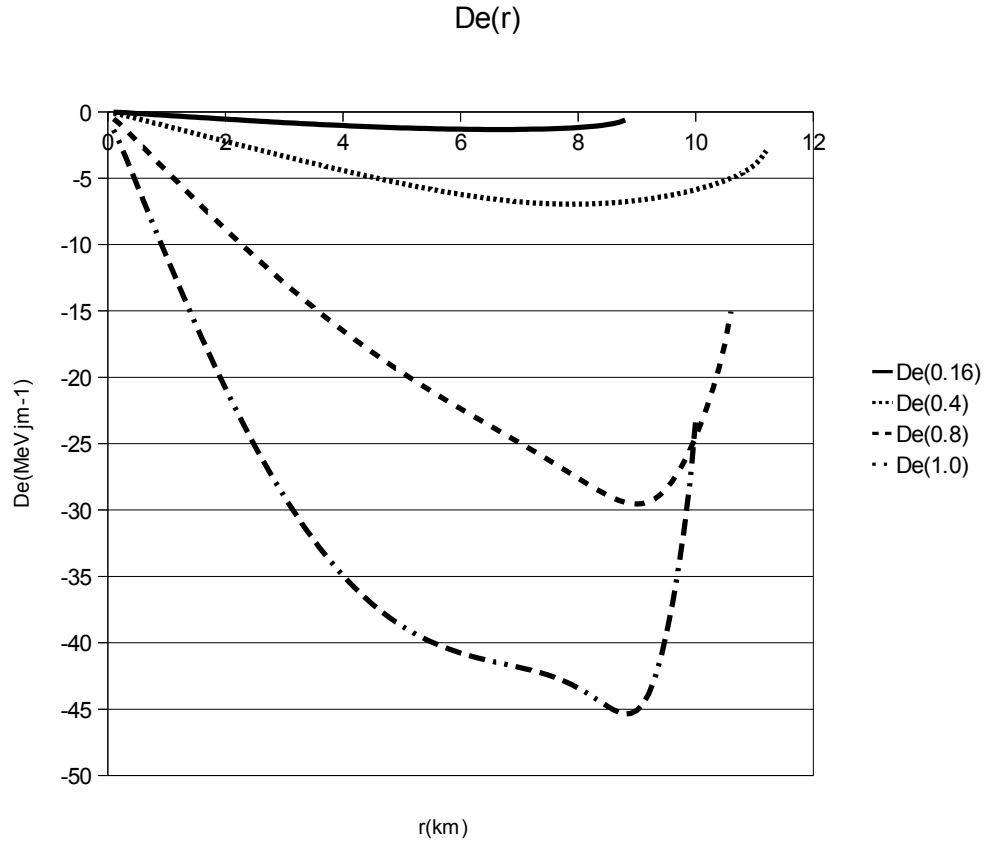


Figura 3.4: Funzione derivata  $\frac{d\varepsilon(r)}{dr}$

Dalla figura 3.4 si evince come all'aumentare di  $nb_0$  le curve dell'energia di legame per nucleone decrescano sempre più velocemente al variare di  $r$ , dato che le relative funzioni derivata diventano sempre più negative per un fissato valore di  $r$ , inoltre le funzioni derivata decrescono linearmente fino a circa  $R$  il che implica per la  $\varepsilon(r)$  una decrescita parabolica fino al punto di flesso. Le funzioni derivata presentano degli scostamenti dalla linearità per valori elevati di densità centrale ed in prossimità del punto di flesso.

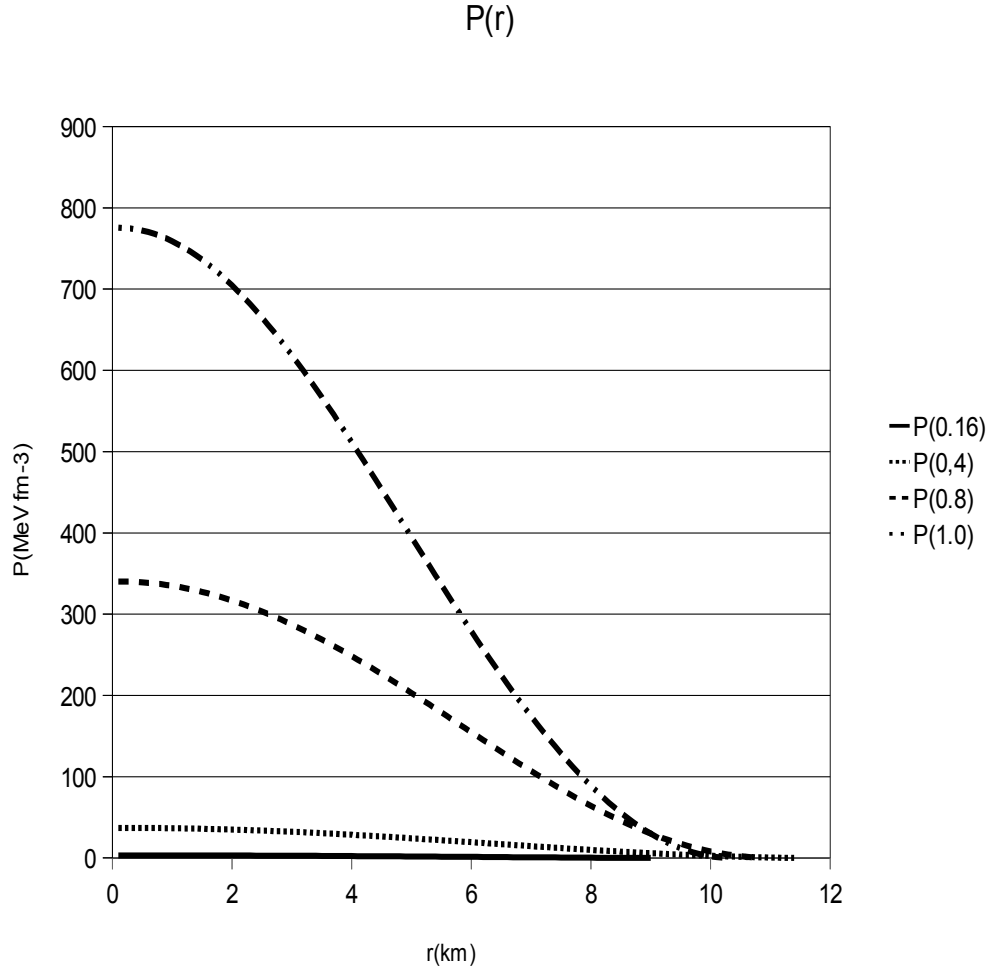


Figura 3.5: Pressione in funzione della distanza dal centro della stella.

In questa figura 3.5, come nella precedente per l'energia di legame per nucleone, si nota una grande variazione del valore centrale della pressione all'aumentare della densità centrale, causato dalla EOS utilizzata nelle TOV. Anche in questo caso all'aumentare della densità le curve hanno pendenza che diventa sempre più negativa con un punto di flesso a circa  $\frac{R}{2}$ .

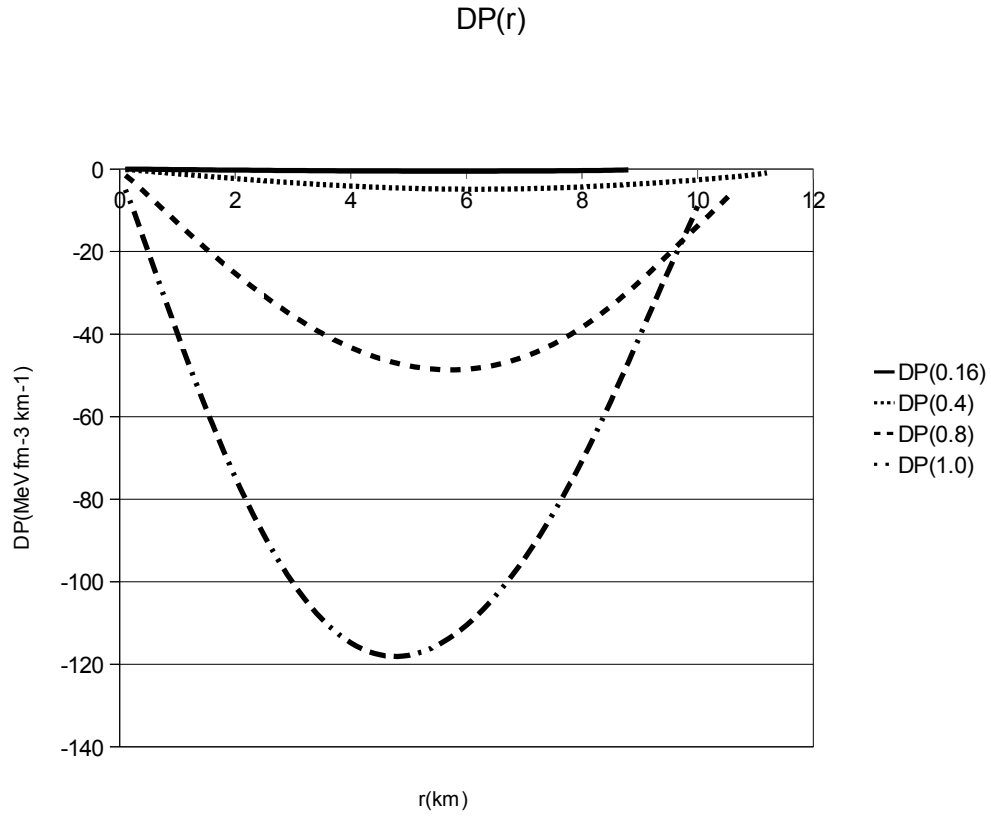


Figura 3.6: Funzione derivata  $\frac{dP(r)}{dr}$

Nella figura 3.6, si mostrano le funzioni derivata della pressione rispetto al raggio per differenti valori della densità centrale. Si può notare come le curve  $P(r)$  hanno derivata negativa che varia linearmente al variare di  $r$  fino al punto di flesso, quindi la funzione  $P(r)$  decresce in maniera parabolica in tale intervallo. All'aumentare della densità centrale e per un fissato valore di  $r$ , le funzioni derivata  $DP(r, n_{b0}) = \frac{dP(r)}{dr}$  diventano sempre più negative, quindi le rispettive funzioni per la pressione decrescono più velocemente al crescere della densità centrale.

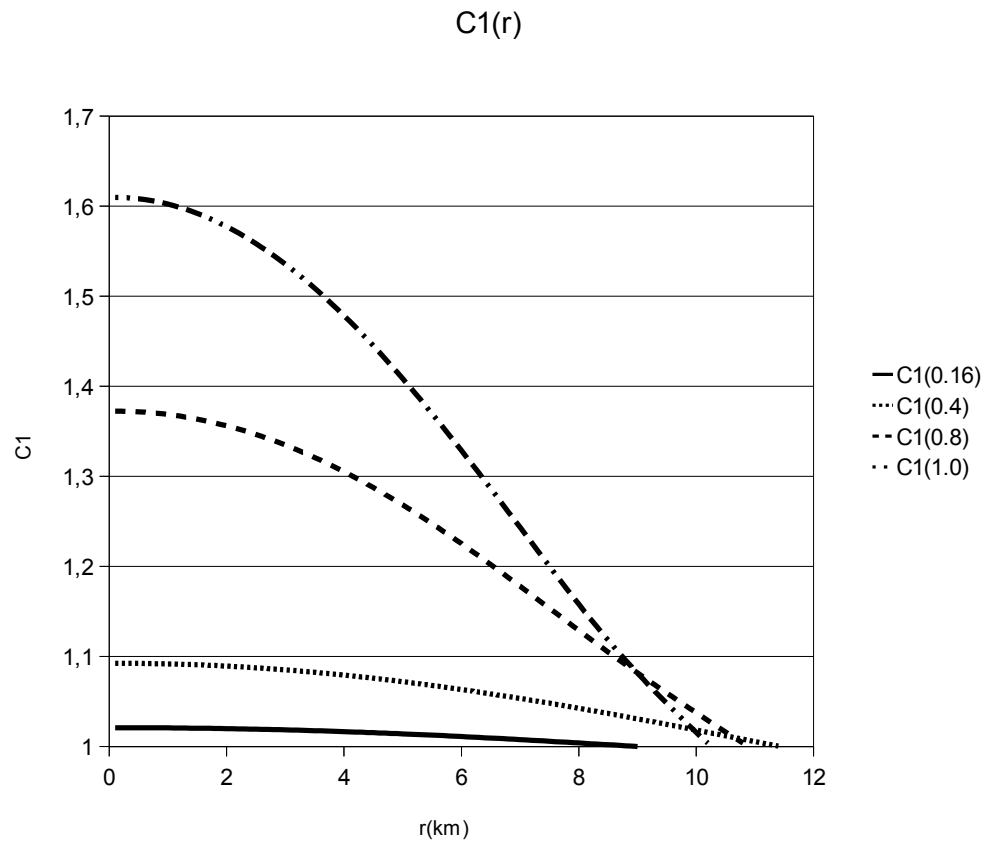


Figura 3.7: Primo termine correttivo in funzione della distanza dal centro della stella.

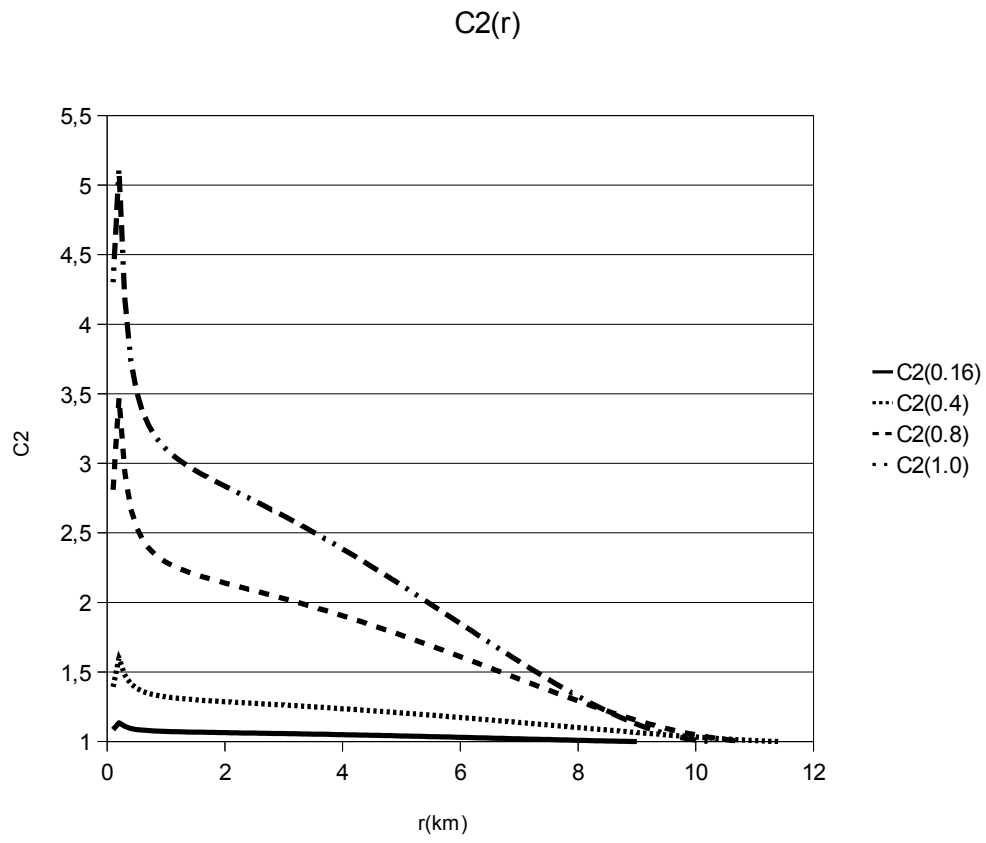


Figura 3.8: Secondo termine correttivo in funzione della distanza dal centro della stella.

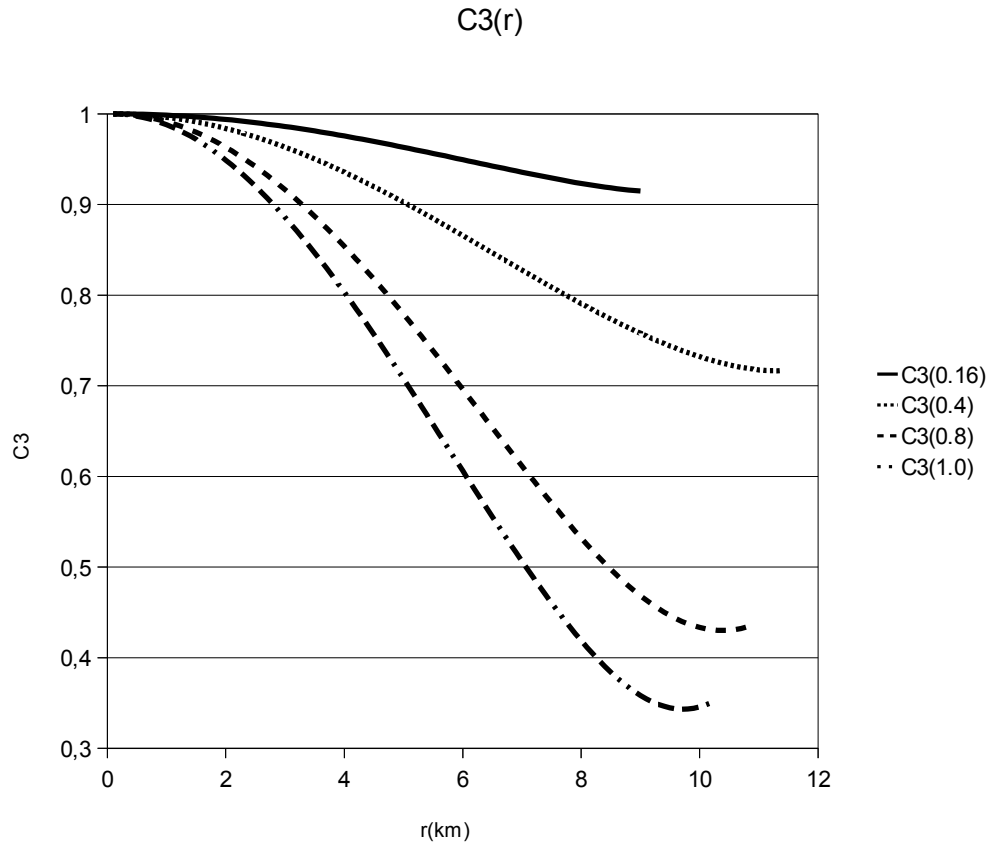


Figura 3.9: Terzo termine correttivo in funzione della distanza dal centro della stella.



Nelle figure 3.7, 3.8, 3.9 si riportano gli andamenti dei termini correttivi al variare della distanza dal centro della stella:

$$C_1(r) = 1 + \frac{P(r)}{c^2 \rho(r)} \quad (3.26)$$

$$C_2(r) = 1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{c^2 M(r)} \quad (3.27)$$

$$C_3(r) = 1 - \frac{2G_N M(r)}{rc^2} \quad (3.28)$$

Dalla figura 3.7 si nota come il termine di equazione 3.26 abbia un valore massimo al centro della stella e come questo massimo cresce all'aumentare della densità centrale, mentre per valori prossimi alla densità di saturazione, questo termine correttivo si mantenga costante e pari ad uno. I grafici partono tutti da un massimo centrale per poi decrescere più rapidamente all'aumentare della densità centrale, con andamento lineare nella parte centrale e per  $r$  che tende ad  $R$  le curve tendono ad uno con variazione di concavità. Questo comportamento è dovuto alla circostanza che quando  $r$  tende a  $R_{max}$ ,  $P(r)$  tende a zero più velocemente di  $n_b(r)$ .

Dalla figura 3.8, si nota anche per il termine 3.27 un valore maggiore per valori di densità elevati, con un brusco incremento verticale per piccoli valori di  $r$  formante una cuspidi sempre più pronunciata all'aumentare della densità con successiva decrescita prima anch'essa verticale poi lineare con pendenza inferiore. La presenza della cuspidi nei grafici è dovuta al peso maggiore della potenza di  $r$  all'aumentare di  $r$  rispetto al decremento di pressione e densità in prossimità del centro della stella, mentre per valori di  $r$  che tendono a  $R_{max}$  prevale l'ordine d'infinitesimo della pressione. Tutti i grafici tendono ad uno per  $r$  che tende ad  $R_{max}$ .

Dalla figura 3.9, si nota che il termine correttivo 3.28 assume un peso maggiore per i valori elevati della densità centrale e lo fa per i valori di  $r$  tendenti ad  $R_{max}$ . Le curve partono tutte dall'unità per poi decrescere linearmente per valori centrali di  $r$  e presentano una variazione di concavità quando  $r$  tende ad  $R$ . Il valore finale assunto in  $R_{max}$  decresce all'aumentare della densità centrale tendendo per  $nb_0 > 1.0 \text{ fm}^{-3}$  al valore 0.34. Inoltre poichè questo termine è inserito come  $C_3^{-1}$  nelle TOV esso assume un peso maggiore rispetto agli altri termini correttivi i quali per  $r$  che tende ad  $R_{max}$  tendono ad uno.

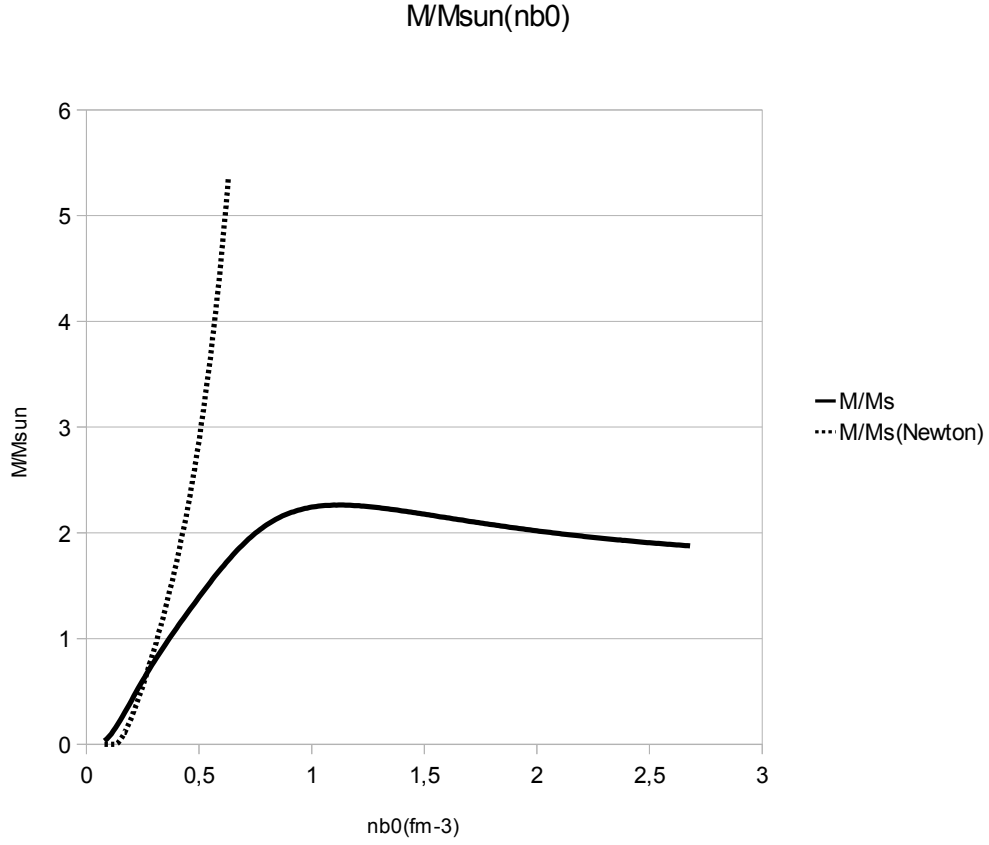


Figura 3.10: Confronto tra gli andamenti delle masse finali dell'astro, al variare della densità centrale, tra il caso newtoniano e quello relativistico.

Nella figura 3.10 si mostrano i risultati dell'integrazione numerica della massa totale della stella al variare della densità centrale per il caso delle equazioni newtoniane e per le TOV. Da questa figura si evince come le correzioni relativistiche permettono di ottenere valori di masse confrontabili con quelle osservate, in maniera diversa dal modello newtoniano, nel quale la massa finale cresce senza limiti in maniera parabolica all'aumentare della densità centrale, mentre le TOV raggiungono un massimo di  $M \approx 2.2 M_{Sun}$  per il valore di  $nb_0 \approx 1.2 \text{ fm}^{-3}$ , per poi decrescere leggermente, andando verso un valore limite per  $nb_0 > 1.2 \text{ fm}^{-3}$  di  $M \approx 1.8 M_{Sun}$ .

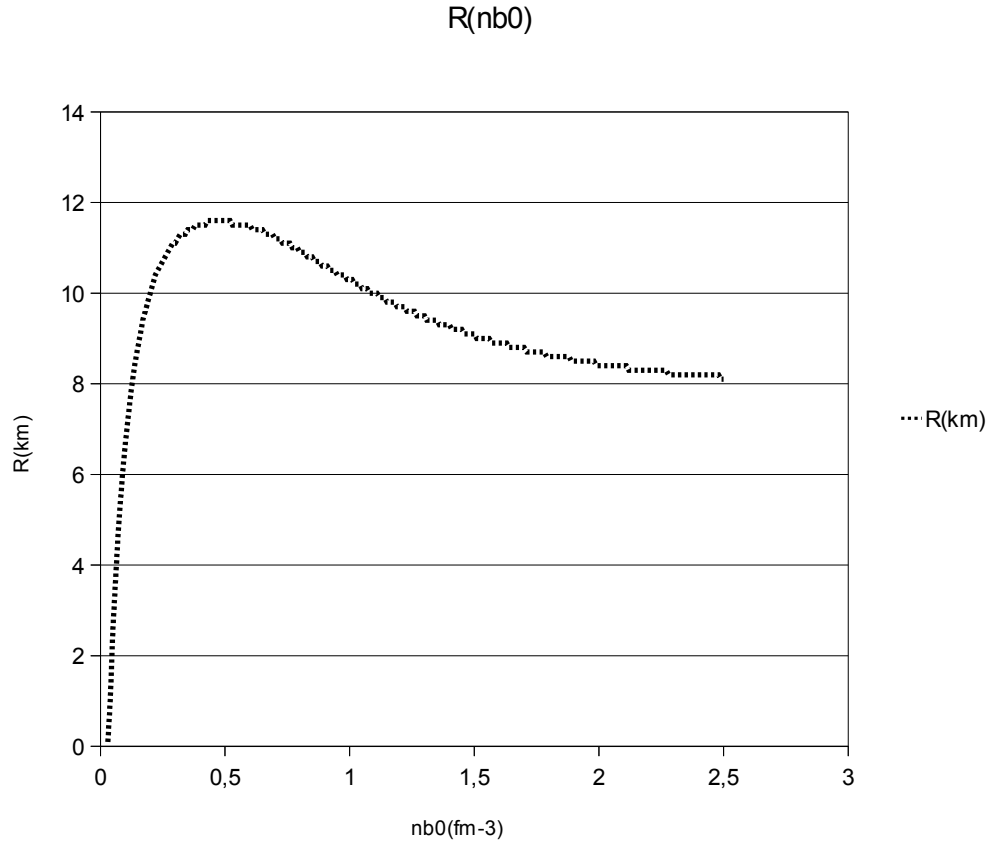


Figura 3.11: Raggio finale della stella al variare della densità centrale.

Nel grafico di figura 3.11 si mostrano i risultati ottenuti dall'integrazione numerica delle TOV per il raggio della stella al variare della densità centrale. Il grafico di questa figura evidenzia come il raggio aumenti velocemente all'aumentare della densità centrale raggiungendo un massimo di  $R_{Max} = 11.6 \text{ km}$  per  $nb_0 \approx 0.6 \text{ fm}^{-3}$ . Per valori di densità maggiori si ha una leggera decrescita di  $R$  che tende ad un valore limite di  $\approx 8 \text{ km}$ .

# Capitolo 4

## Conclusioni

In questo lavoro si sono risolte numericamente le equazioni di Tolmann-Oppenheimer-Volkoff fissandone i valori iniziali ed utilizzando una equazione di stato per materia neutronica ottenuta dalla tecnica a molticorpi di diffusione da campo ausiliario Montecarlo (AFDMC). Le integrazioni numeriche sono state eseguite tramite l'algoritmo di Eulero. In questo modo è stato possibile ottenere numericamente le funzioni densità, energia di legame per nucleone e pressione al variare della distanza dal centro della stella per differenti valori di densità centrale. Inoltre si sono calcolate le masse totali delle stelle neutroniche dalle integrazioni delle equazioni nel caso Newtoniano e nel caso relativistico (TOV) e sono stati confrontati i relativi risultati.

Dall'analisi dei risultati riportati se ne deduce quanto segue:

- Solo le equazioni relativistiche prevedono un limite massimo per la massa della stella.
- Il valore del raggio di circa 10 km è in accordo con quelli misurati per delle stelle di neutroni.
- Il valore massimo delle masse calcolate è più grande rispetto ai valori conosciuti provenienti dalle osservazioni astronomiche. Si possono formulare due ipotesi:
  1. Potrebbero esserci stelle di neutroni con masse maggiori, ma non sono state ancora osservate.
  2. L'alternativa più discussa nella comunità scientifica è quella che la stella potrebbe non essere costituita solo da neutroni. Nella struttura a strati della stella potrebbe esserci all'interno un core

di materia differente contenente iperoni o si ipotizza lo stato di deconfinamento dei quark. Questo cambia EOS e quindi cambia anche la massa massima della stella.

# Appendice A

## Listati

I procedimenti descritti nei capitoli precedenti sono eseguiti dai seguenti listati scritti in linguaggio FORTRAN, il seguente listato implementa i calcoli per risolvere le TOV:

```
program star5
implicit real*8(a-h,o-z)
real:: mass=0,mass1=0,r,dr,nb0,d,Dp,rho,rho0
real,parameter::pi=3.1415,g=-2.213,a=520,b=-1297.4,Gn=0.667
real,parameter::rzero=0.16,ez=-16.0,cs=31.3,gs=0.64,c=299792
real,parameter::mn=1.675,cp=1.602,dim=10**8
integer::max=500
parameter(nmax=360)
real,dimension(0:nmax)::anb0,aR,aM

r=0
dr=0.1
nb0=0.03
rho0=nb0*mn
dnb=0.01

open(unit=33,file='otv.txt',status='new')

! inizio ciclo esterno

do i=0,nmax

!c calcolo condizioni iniziali
```

```

    anb0(i)=nb0
    rho0=nb0*mn
    d=nb0-rzero;
    rat=(nb0/rzero)**gs

    e0=ez+a*d**2+b*exp(g*d)*d**3+cs*rat
    mass1=(4/3)*pi*(rho0)*(1+e0/939.6)*dr**3

! ciclo esterno
    do j=0,max

        r=r+dr

!c calcolo densità d'energia

        d=nb0-rzero
        rat=(nb0/rzero)**gs
        e0=ez+a*d**2+b*exp(g*d)*d**3+cs*rat

!c calcolo pressione

        Cor=(cs*gs/rzero)*(nb0/rzero)**(gs-1)
        P=(nb0**2)*(2*a*d+b*(d**2)*exp(g*d)*(3+g*d)+Cor)

!c calcolo derivata della pressione

        D1=2*nb0*(2*a*d+(b*(d**2)*exp(g*d)*(3+g*d))+Cor)
        D2=((nb0**2)*((2*a+b*exp(g*d)*((g**2)*(d**3)+6*g*(d**2)+6*d))))
        Cor_1=((nb0**2)*((cs*gs*(gs-1)/(rzero**2))*(nb0/rzero)**(gs-2)))

        DP=D1+D2+Cor_1

!c calcolo eq.TOV

        grav=-((Gn*(rho0)*(1+e0/939.6)*mass1)/r**2);
        cor_rel1=(1+(dim*cp*P)/(rho0*(1+e0/939.6)*c**2));
        cor_rel2=(1+((4*dim*pi*(r**3)*cp*P)/(mass1*c**2)));
        cor_rel3=(1-(2*dim*Gn*mass1/(r*c**2)));
        effe=grav*((cor_rel1*cor_rel2)/cor_rel3);

```

```

!c calcolo massa e densità tramite alg. di Eulero

      mass=mass1+4*pi*((r**2)*rho0*(1+e0/939.6))*dr;
      rho=rho0+((effe/(Dp*(cp/mn))))*dr;

      mass1=mass;
      rho0=rho
      nb0=rho/mn;

      if((nb0.le.0.0).or.(P.le.0).or.(Dp.le.0))then

      aR(i)=r;
      aM(i)=mass1/(2000);

      r=0;
      mass=0;
      mass1=0;
      nb0=0;
      rho0=0;
      rho=0;

      exit
      end if

      end do

      nb0=anb0(i)+dnb

      write(6,"(4(f15.4))") anb0(i),aR(i),aM(i)
      write(33,"(4(f15.4))")  anb0(i),aR(i),aM(i)

!      write(6,"(4(f15.4))") anb0(i),aR(i),e0,P
!      write(33,"(4(f15.4))")  anb0(i),aR(i),e0,P

      end do

      end star5

```



Il seguente listato implementa le equazioni nel caso Newtoniano:

```
program star5
implicit real*8(a-h,o-z)
real:: mass=0,mass1=0,r,dr,nb0,d,Dp,e0,rat
real,parameter::pi=3.1415,g=-2.213,a=520,b=-1297.4
real,parameter::rzero=0.16,ez=-16.0,cs=31.3,gs=0.64,Gn=0.667
real,parameter::mn=1.675,cp=1.602
parameter(max=1000)
parameter(nmax=175)
dimension anb0(0:nmax),aR(0:nmax),aM(0:nmax)

r=0
dr=0.1
nb0=0.06
dnb=0.01

open(unit=31,file='mass.txt',status='new')

! inizio del ciclo esterno che fissa la densità centrale

do i=0,nmax

anb0(i)=nb0
rho0=nb0*mn

! inizio del ciclo interno

do j=0,max

r=r+dr

!c calcolo densità d'energia

d=nb0-rzero

rat=(nb0/rzero)**gs
e0=ez+a*d**2+b*exp(g*d)*d**3+cs*rat

!c calcolo pressione
```

```

Cor=(cs*gs/rzero)*(nb0/rzero)**(gs-1)
P=(nb0**2)*(2*a*d+(b*(d**2)*exp(g*d)*(3+g*d))+Cor)

!c calcolo derivata della pressione

D1=2*nb0*(2*a*d+b*(d**2)*exp(g*d)*(3+g*d)+Cor)
D2=((nb0**2)*((2*a+b*exp(g*d)*((g**2)*(d**3)+6*g*(d**2)+6*d))))
Cor_1=((nb0**2)*((cs*gs*(gs-1)/(rzero**2))*(nb0/rzero)**(gs-2)))
DP=D1+D2+Cor_1

! calcolo massa e densità tramite alg. di Eulero

grav=-((Gn*rho0*mass1)/r**2)
mass=mass1+4*pi*((r**2)*rho0)*dr
rho=rho0+((grav/(Dp*(cp/mn))))*dr

mass1=mass
rho0=rho
nb0=rho/mn

!c condizione di uscita dal ciclo interno che determina massa e raggio finale
!c della stella per il valore di densità fissato

if((nb0.le.0).or.(P.le.0).or.(Dp.le.0))then

aR(i)=r
aM(i)=mass1/(2000)

r=0
mass=0
mass1=0

exit

end if

end do

nb0=anb0(i)+dnb

```

```
write(6,"(3(f15.4))")anb0(i),aR(i),aM(i)
write(31,"(3(f15.4))" ) anb0(i),aR(i),aM(i)

end do

end star5
```

# Bibliografia

- [Baa34] W. Baade e F. Zwicky, Phys. Rev. 46 (1934)76
- [Co07] G. Co', *Note di Astrofisica Nucleare*, Università del Salento, Lecce, non pubblicato (2007).
- [Gan10] S. Gandolfi, A. Yu. Illarionov, S. Fantoni, J. C. Miller, F. Pederiva, K. E. Schmidt, Mont. Not. Royal Astron. Soc. 404 (2010) L35
- [Opp39] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, Phys. Rev. 55 (1939) 364.
- [Tol34] R. C. Tolmann, Proc. Nat. Acc. Sci. USA 20 (1934) 3.
- [Wir95] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks e R. Schiavilla, Phys. Rev. C (51) (1995) 38