



UNIVERSITÀ DEL SALENTO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA

“ENNIO DE GIORGI”

Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Risonanze giganti nei nuclei

Laureanda:

Letizia MELELEO

Relatore:

Prof. Giampaolo CO’

Anno Accademico 2019/2020

"Nella vita non bisogna mai rassegnarsi, arrendersi alla mediocrità, bensì uscire da quella "zona grigia" in cui tutto è abitudine e rassegnazione passiva".
Rita Levi Montalcini.

Indice

Introduzione	3
1 Risonanze giganti	5
1.1 La Risonanza Gigante di Dipolo (GDR)	6
1.2 GDR e raggi cosmici	9
2 Regole di somma	11
2.1 Definizione	11
2.2 Regole di somma e sezione d'urto	12
2.3 L'operatore di dipolo elettrico	13
2.4 Carica effettiva	13
2.5 Regola di somma di Thomas Reiche Khun	14
3 Dati Sperimentali	17
3.1 Completezza dei dati sperimentali	17
3.2 Verifica delle parametrizzazioni	26
3.2.1 Fit ai dati	26
3.2.2 Altre parametrizzazioni della sezione d'urto	28
3.3 Applicazione a nuclei non studiati sperimentalmente	32
Conclusioni	35
A Appendice	37
B Acronimi	41
Ringraziamenti	45

Introduzione

Il nucleo atomico è un complicato sistema quantistico nel quale agiscono tre delle quattro interazioni fondamentali, l'elettromagnetica, le nucleari forte e debole, e che mostra vari tipi di eccitazioni. Alcune eccitazioni sono piuttosto irregolari e sono persino considerate la manifestazione del movimento caotico. D'altra parte, però, i nuclei mostrano molte caratteristiche regolari nello spettro di eccitazione. Dallo studio di queste regolarità è possibile ricavare delle informazioni sui meccanismi di eccitazione e sul ruolo delle interazioni coinvolte.

Il nucleo è un sistema a molti corpi che mostra molti più tipi di modi collettivi rispetto ad altri sistemi quantistici in fisica. Innanzitutto esistono due diversi costituenti nucleari, che danno luogo a stati isoscalari e isovettoriali, a seconda che protoni e neutroni vibrino in fase o fuori fase. Inoltre, si distingue tra modi di superficie e risonanze che si concentrano maggiormente all'interno del nucleo, questi ultimi detti modi di volume. Infine, abbiamo il grado di libertà di rotazione che dà origine a eccitazioni di rotazione collettive.

Il lavoro di questa tesi si concentra sulla risonanza gigante di dipolo (GDR). Si tratta di una eccitazione isovettoriale ed è il tipo di eccitazione che domina quando un fotone con energie di qualche decina di MeV viene assorbito da un nucleo. La GDR è stata ampiamente studiata in molti nuclei.

Nella prima parte del Capitolo 1 presenteremo le caratteristiche delle risonanze giganti (GR), in generale, e, in particolare, quelle della GDR.

Oggi l'interesse per questa risonanza è stato ravvivato dagli esperimenti sui raggi cosmici di altissime energie.

Nella seconda parte del Capitolo 1, mostreremo come l'impatto tra nuclei di energie tra i 10^{15} e i 10^{20} eV che collidono con i fotoni della radiazione cosmica di fondo, vengano eccitati nella regione delle risonanze giganti, e quindi frantumati. Dato questo interesse per la GDR, in questa tesi studiamo la completezza dei dati sperimentali disponibili. Si tratta di due tipi di completezza: uno riguarda la quantità di dati per singolo nucleo misurato, e l'altro riguarda la quantità del numero dei nuclei per i quali questi dati sono noti. Per valutare la completezza dei dati per ogni nucleo, stimiamo quanto i dati soddisfino le regole di somma.

Nel Capitolo 2 definiamo le regole di somma e ne calcoliamo il valore teorico sotto alcune approssimazioni. Il risultato può essere espresso in modo semplice in termini del numero di protoni Z e neutroni N che costituiscono il nucleo.

Nell'ultima parte della tesi, Capitolo 3, presenteremo i risultati quantitativi del nostro studio. Prima valuteremo quanto i dati più completi a disposizione, quelli di Ahrens et al. [Ahr75] relativi ai nuclei ^{12}C , ^{16}O , ^{40}Ca e ^{208}Pb , soddisfino le regole di somma. In un secondo passo, valuteremo come alcune parametrizzazioni delle sezioni d'urto presentate in letteratura riescano a riprodurre questi dati sperimentali, e soprattutto soddisfino le regole di somma. Infine, valuteremo l'affidabilità di queste parametrizzazioni se usate per studiare nuclei in cui le sezioni d'urto di foto-assorbimento non sono state misurate.

Capitolo 1

Risonanze giganti

In fisica nucleare, i modi collettivi erano già noti quando fu identificata la GDR. Lo studio sistematico di questo modo di eccitazione è stato reso possibile dallo sviluppo di uno strumento con il quale si potevano produrre fotoni di energia di qualche decina di MeV. Ci vollero quasi venticinque anni prima che un altro tipo di eccitazione collettiva - la *risonanza gigante isoscalare di quadrupolo* - fosse identificata in esperimenti di diffusione anelastica di elettroni e protoni. Successivamente, quest'ultima risonanza è stata sistematicamente studiata con fasci di particelle α . È più recente la scoperta delle risonanze di Gamow-Teller, che sono le modalità di spin-isospin più collettive.

Una presentazione dettagliata dei vari tipi di risonanze giganti è fornita nei libri [Spe91] e [Har01].

Il fenomeno delle GDR fu osservato per la prima volta nel 1947 da G. C. Baldwin and G. S. Klaiber [Bal47] durante esperimenti di fotoassorbimento: fotoni di energie dell'ordine delle decine di MeV venivano fatti collidere con nuclei di Uranio. Si osservò che tali nuclei si trovavano prima in uno stato eccitato e successivamente subivano un processo di fissione.

Subito dopo il lavoro di Baldwin e Klaiber si scoprì che queste risonanze sono una caratteristica generale in tutti i nuclei. L'energia del centroide e l'ampiezza della risonanza cambiano in modo abbastanza regolare (eccetto per i nuclei più leggeri) con il numero di massa A .

Negli anni successivi si svolsero esperimenti simili usando tecniche di foto-assorbimento e si notò che la sezione d'urto di tali stati era molto grande, cioè si sviluppava lungo un continuo di energie e con probabilità molto alta.

In realtà, però, la prima indicazione di questo fenomeno era già stata osservata nel 1937 da Bothe e Gentner [Bot37]. Bothe e Gentner studiarono, utilizzando una sorgente di fotoni da 17 MeV, la produzione di radioattività in molti bersagli. Poiché le sezioni d'urto sperimentali in alcuni casi erano due ordini di grandezza superiori delle previsioni teoriche, conclusero che esisteva un assorbimento di risonanza in quei nuclei.

Negli anni successivi alla scoperta vennero proposti due modelli semiclassici che spiegavano tali risonanze: quello proposto da Goldhaber e Teller nel 1948 [Gol48] e quello proposto da Steinwedel e Jensen nel 1950 [Ste50]. Il primo modello descriveva la GDR come il moto di due sfere incompressibili di protoni e neutroni che vibrano in opposizione di fase.

Invece nel caso di Steinwedel e Jensen il nucleo nel complesso era una goccia sferica incompressibile, mentre singolarmente protoni e neutroni non lo erano: la risonanza veniva spiegata come un moto di protoni e neutroni all'interno di tale struttura rigida. In questo caso il volume totale era conservato, ma non quello individuale delle due sfere di protoni e neutroni che vibrano in opposizione di fase. In ogni caso l'elevata energia di queste risonanze viene spiegata, in entrambi i modelli, dal fatto che tutti i protoni e tutti i neutroni vibrano in opposizione di fase.

L'interesse di queste oscillazioni è rimasto elevato fin dalla loro scoperta in quanto sono molto utili per capire la struttura dei nuclei e la loro risposta a sollecitazioni esterne.

1.1 La Risonanza Gigante di Dipolo (GDR)

Esistono diversi tipi di GR e la loro classificazione viene effettuata in base all'ordine di multipolo ed ai numeri quantici di spin S ed isospin T .

Detti \mathbf{L} e π , rispettivamente, il momento angolare trasportato dal fotone e la parità della radiazione emessa, il suo ordine di multipolo è definito come 2^L . L'emissione di radiazione multipolare, tuttavia, è soggetta a regole di selezione che tengono conto delle restrizioni imposte dalle leggi di conservazione della parità e del momento angolare.

Il momento angolare L del multipolo del fotone, si accoppia con il **su**o spin 1 e produce un momento angolare totale:

$$J = L \quad \text{o} \quad J = L \pm 1.$$

Quindi la parità della radiazione emessa vale sempre $(-1)^L$, e, in termini di J si ha $(-1)^J$ parità naturale, per le transizioni elettriche, oppure $(-1)^{J\pm 1}$, parità non naturale, per le transizioni magnetiche.

Supponiamo che un nucleo, in uno stato di momento angolare totale \mathbf{J}_i e parità π_i , assorba un γ e passi in uno stato di momento angolare totale \mathbf{J}_f e parità π_f . Dalle leggi di conservazione segue:

$$|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f \qquad \pi = \pi_i \cdot \pi_f$$

Trattazioni dettagliate del processo di foto-assorbimento si trovano in [Bla52] [Eis70].

Nel formalismo dell'isospin viene introdotta la distinzione tra i nucleoni sulla base dell'autovalore della componente t_3 dell'operatore di isospin \mathbf{t} . Usiamo la convenzione in cui assume valore $t_3 = +\frac{1}{2}$ per i protoni e $t_3 = -\frac{1}{2}$ per i neutroni. In un nucleo, costituito

da Z protoni ed N neutroni, la proiezione dell'operatore di isospin totale $\mathbf{T} = \sum_{i=1}^A \mathbf{t}_i$, lungo l'asse di quantizzazione, ha autovalore $T_3 = \frac{Z-N}{2}$.

Gli stati di eccitazione corrispondenti a moti collettivi in cui neutroni e protoni si muovono in fase sono indicati come risonanze isoscalari ($\Delta T = 0$), mentre quelli in cui neutroni e protoni si muovono in opposizione di fase sono indicati come risonanze isovettoriali ($\Delta T = 1$).

Secondo questa classificazione, la GDR è definita come un moto collettivo del tipo $J^\pi = 1^-$, quindi di tipo elettrico, e $\Delta T = 1$, puramente isovettoriale.

Bisogna specificare che la classificazione di isovettoriale, non è un'evidenza sperimentale, ma viene indotta da descrizioni modellistiche e anche da teorie più microscopiche. Per teoria microscopica intendiamo qui una teoria che descrive le proprietà del nucleo considerandolo come un sistema di nucleoni che interagiscono tra loro. Il modello non prende in considerazione nucleoni ma simula il comportamento del nucleo in analogia con sistemi fisici macroscopici. Nell'ambito di una descrizione macroscopica, la GDR può essere interpretata come un'oscillazione collettiva di tutti i protoni rispetto a tutti i neutroni con una configurazione spaziale di tipo dipolare.

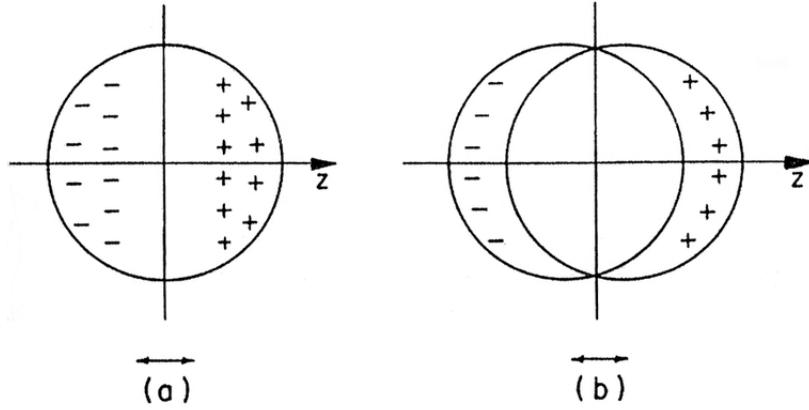


Figura 1.1: Rappresentazione schematica di oscillazioni dipolari in un nucleo, secondo i modelli di (a) Steinwedel – Jensen e (b) Goldhaber – Teller

I modelli di Goldhaber – Teller e Steinwedel– Jensen sono di tipo idrodinamico [Eis70]. Nella versione di Steinwedel– Jensen i neutroni ed i protoni sono trattati come fluidi comprimibili che oscillano in opposizione di fase all'interno del nucleo la cui superficie esterna rimane invariata. In questo caso, la forza di richiamo è proporzionale al coefficiente di volume nella formula di Bethe – Weizsacker per la massa nucleare e l'energia dell'oscillazione varia come $A^{-1/3}$. Nella versione di Goldhaber – Teller i fluidi di neutroni e protoni si comportano come due sfere rigide interpenetranti che oscillano in opposizione di fase pro-

vocando una deformazione del nucleo. In questo caso la forza di richiamo è proporzionale al coefficiente di superficie e l'energia dell'oscillazione varia come $A^{-1/6}$.

La moderna descrizione degli stati eccitati utilizza teorie che permettono una visione unificata di eccitazioni di singola particella e collettive. Il punto di partenza di queste teorie microscopiche è la definizione dei gradi di libertà da utilizzare per la descrizione del sistema a molti corpi e la loro mutua interazione. Nel caso del nucleo atomico questi gradi di libertà sono i nucleoni che interagiscono tra loro con una interazione ricavata dallo studio dei sistemi a due corpi, deutone e processi di diffusione elastica tra nucleoni. Una volta fissati questi due punti si tratta di risolvere l'equazione di Schrödinger a molti corpi:

$$\left[\sum_{i=1}^A \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) \right] |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (1.1)$$

dove $V(i,j)$ è l'interazione tra due nucleoni. La soluzione di questa equazione senza fare alcune approssimazioni è tecnicamente un problema molto difficile da risolvere. Al momento questo problema è stato risolto soltanto per nuclei fino ad $A = 12$. Per sistemi nucleari con un maggior numero di nucleoni si utilizzano tecniche approssimate. Nella Figura 1.2 mostriamo dei risultati ottenuti con una teoria approssimata denominata Random Phase Approximation applicata al nucleo di ^{16}O .

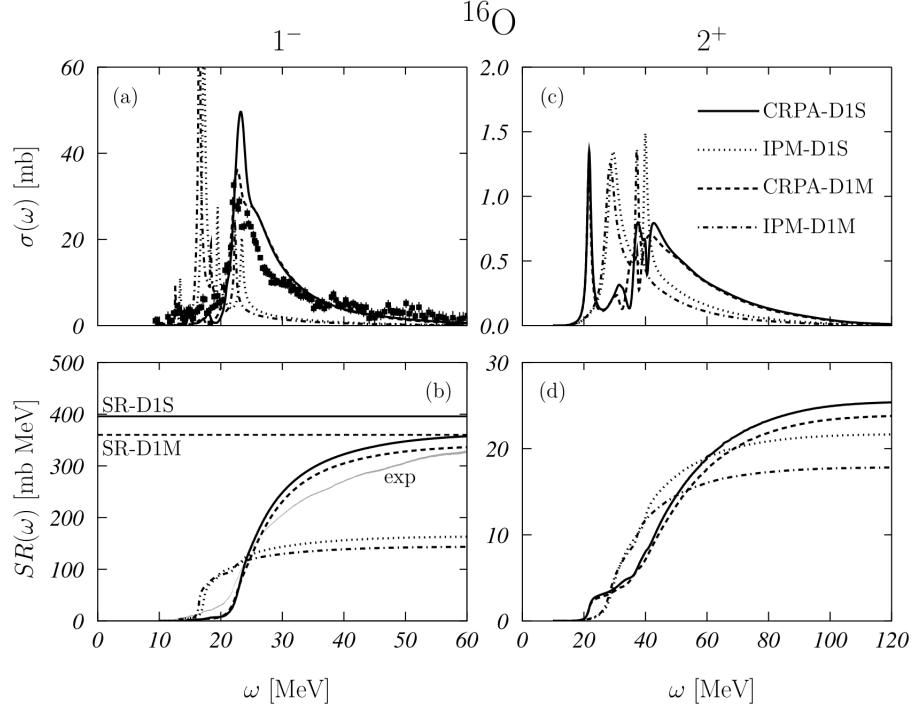


Figura 1.2: Immagine presa da [Don11]. Le linee che indicano IPM sono ottenute considerando un puro modello a particelle indipendenti. Le linee CRPA indicano risultati Continuum Random Phase Approximation, in cui si considera anche l'interazione tra nucleoni. D1S e D1M sono due diverse interazioni nucleone-nucleone. In (a) c'è l'eccitazione di dipolo elettrico confrontata con i dati sperimentali di Ahrens. In (c) la sezione d'urto per l'eccitazione di quadrupolo elettrico. La GDR, 1^- , domina sulle altre eccitazioni. Nei quadri inferiori si mostra l'andamento degli integrali delle sezioni d'urto in funzione dell'energia massima di integrazione. Per il dipolo c'è anche una stima legata a previsioni di materia nucleare (linee orizzontali).

1.2 GDR e raggi cosmici

L'interesse per le risonanze giganti, e specificamente per la GDR, si è recentemente rinnovato per lo studio della composizione dei raggi cosmici [Mor19, Mor20t]. In questo studio ci sono modelli che prevedono una composizione di raggi cosmici nella fase di accelerazione e il riscontro osservato di questa composizione. Uno dei meccanismi fisici che modificano la composizione dei raggi cosmici è dovuto alla collisione dei nuclei con i fotoni che compongono la radiazione cosmica di fondo. Un semplice calcolo permette di stimare quali sono le energie di eccitazione del nucleo.

Il fattore di Lorentz per il moto di una particella con velocità $|\mathbf{v}|$ è

$$\Gamma_L = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

con c la velocità della luce.

L'energia della particella che si muove a velocità $|\mathbf{v}|$ è data da

$$E = \Gamma_L M c^2, \quad \text{quindi, } \Gamma_L = \frac{E}{M c^2},$$

dove $M \simeq A \cdot 10^9 \text{ eV}$ è la massa a riposo del nucleo di numero di massa A .

Consideriamo raggi cosmici con energie $10^{15} \leq E \leq 10^{20} \text{ eV}$, misurate nei rivelatori terrestri della collaborazione Auger [Auger]. I fattori di Lorentz per questi nuclei assumono i valori

$$\frac{10^6}{A} \text{eV} \leq \Gamma_L \leq \frac{10^{11}}{A} \text{eV}$$

Nel sistema di riferimento terrestre le energie dei fotoni della radiazione cosmica di fondo sono

$$\omega \simeq 3 \text{ K } k_B = 3 \text{ K} \cdot 1.6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}} \simeq 2.6 \cdot 10^{-4} \text{eV}$$

dove abbiamo indicato con k_B la costante di Boltzmann. Nel sistema di riferimento a riposo del nucleo l'energia del fotone è data dalla trasformazione di Lorentz,

$$\omega_r = \omega \Gamma_L.$$

Questo significa che il nucleo, fermo, viene colpito da fotoni con energia

$$2.6 \frac{10^2}{A} \text{eV} \leq \omega_r \leq 2.6 \frac{10^7}{A} \text{eV} = 0.26 \frac{\text{keV}}{A} \leq \omega_r \leq 26 \frac{\text{MeV}}{A}$$

che sono energie tipiche da eccitazioni di GDR.

Capitolo 2

Regole di somma

In questo capitolo presentiamo le regole di somma che utilizzeremo per studiare la completezza dei dati sperimentali delle sezioni d'urto di foto-assorbimento.

2.1 Definizione

In letteratura, ad esempio in [Eis70], si indica come **regola di somma** di rango r la quantità definita come

$$\mathcal{S}_r = \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_0)^r |\langle \nu | F | 0 \rangle|^2 \quad (2.1)$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale del nucleo e E_0 la sua energia. Quindi l'energia del fotone assorbito è $\omega = E_{\nu} - E_0$ dove E_{ν} è l'energia dello stato eccitato $|\nu\rangle$. Indichiamo con F l'operatore elettromagnetico che produce la transizione dallo stato fondamentale allo stato eccitato; $\langle \nu | F | 0 \rangle$ rappresenta l'ampiezza di transizione.

Sfruttando la completezza dell'insieme degli stati eccitati $|\nu\rangle$, si può esprimere la regola di somma come:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_r &= \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_0)^r |\langle \nu | F | 0 \rangle|^2 = \langle 0 | F^+ \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_0)^r |\nu\rangle \langle \nu | F | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | F^+ (H - E_0)^r \sum_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu | F | 0 \rangle S_r = \langle 0 | F^+ (H - E_0)^r F | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

La risposta del sistema nucleare all'eccitazione da una sonda esterna, nel nostro caso il fotone assorbito, ha un limite superiore. Questo fatto prende il nome di **regola di somma**.

Dal risultato della (2.2), possiamo vedere che \mathcal{S}_r non dipende dagli stati eccitati del sistema ma solo dalle proprietà dello stato fondamentale.

Per $r = 1$ abbiamo che,

$$\mathcal{S}_1 = \langle 0 | F^+ H F | 0 \rangle - E_0 \langle 0 | F^+ F | 0 \rangle = \langle 0 | F^+ H F | 0 \rangle - \langle 0 | F^+ F H | 0 \rangle = \langle 0 | F^+ [H, F] | 0 \rangle \quad (2.3)$$

Possiamo riscrivere l'equazione precedente come

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 &= \frac{1}{2} \left(\langle 0|F^+[H, F]|0\rangle - \langle 0|[H, F^+]F|0\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle 0|F^+(HF - FH)|0\rangle - \langle 0|(HF^+ - F^+H)F|0\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle 0|F^+HF|0\rangle - \langle 0|F^+FH|0\rangle - \langle 0|HF^+F|0\rangle + \langle 0|F^+HF|0\rangle \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(2 \langle 0|F^+HF|0\rangle - 2E_0 \langle 0|F^+F|0\rangle \right)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Per operatori Hermitiani $F^+ = F$.

$$S_1 = \frac{1}{2} \langle 0|[F^+, [H, F]]|0\rangle \tag{2.5}$$

2.2 Regole di somma e sezione d'urto

La descrizione del fenomeno di foto-assorbimento implica una descrizione in cui il nucleo fa transizioni tra stati caratterizzati da un buon momento angolare. Una dettagliata derivazione della sezione d'urto si trova in [Bla52, Eis70].

La sezione d'urto di foto-assorbimento può essere espressa come [Bla52]:

$$\begin{aligned}
\sigma_J(J_f \rightarrow J_i) &= 8\pi^3 \frac{J+1}{J} \frac{1}{[(2J+1)!!]^2} \frac{1}{2J_i+1} k^{2J-2} \frac{E_f - E_i}{\hbar c} \\
&\quad \sum_M |\langle J_f M_f | F_{J,M} | J_i M_i \rangle|^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dove J_f, J_i rappresentano rispettivamente momento angolare finale e iniziale del fotone, E_f, E_i sono, rispettivamente, energia finale e iniziale del fotone, $\langle J_f M_f | F_{J,M} | J_i M_i \rangle$ è l'ampiezza di transizione dallo stato iniziale del nucleo, caratterizzato da J_i e M_i , allo stato finale J_f, M_f . Tra i due stati c'è l'operatore elettromagnetico che fa la transizione, $F_{J,M}$ (poichè sviluppato in multipoli, con momento angolare J e terza proiezione M). La regola di somma (2.1) di rango r , espressa in termini di sezione d'urto è [Eis70]:

$$S_r^J = \int_0^\infty \frac{\sigma_J(k)}{k^{2J-2}} \hbar c k^r dk \tag{2.7}$$

dove $k = \omega/\hbar c = (E_f - E_i)/\hbar c$. Per la regola di somma di rango $r = 1$, inserendo l'espressione (2.6) otteniamo

$$\begin{aligned}
S_1^J &= \sum_f 8\pi^3 \frac{J+1}{J} \frac{1}{[(2J+1)!!]^2} \frac{1}{2J_i+1} \frac{E_f - E_i}{\hbar c} \\
&\quad \sum_M |\langle J_f M_f | F_{J,M} | J_i M_i \rangle|^2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

che, per la (2.5), può essere espressa come:

$$S_1^J = 8\pi^3 \frac{J+1}{J} \frac{1}{[(2J+1)!!]^2} \frac{1}{2J_i+1} \frac{1}{\hbar c} \frac{1}{2} \langle J_i M_i | [F_{J,M}^+, [H, F_{J,M}]] | J_i M_i \rangle \quad (2.9)$$

Il caso di nostro interesse riguarda l'eccitazione di dipolo elettrico che implica $J = 1$. Poichè considereremo nuclei pari-pari $|0\rangle \equiv |J_i M_i\rangle = |00\rangle$ e quindi,

$$S_1^{J=1} = 16\pi^3 \frac{1}{9} \frac{1}{\hbar c} \frac{1}{2} \langle 00 | [F_{J,M}^+, [H, F_{J,M}]] | 00 \rangle \quad (2.10)$$

2.3 L'operatore di dipolo elettrico

Nell'approssimazione in cui le dimensioni del nucleo sono molto più piccole della lunghezza d'onda associata a quella del fotone assorbito, l'operatore di multipolo elettrico, responsabile della transizione, può essere espresso come [Eis70]:

$$F_{J,M} = \sum_a r_a^J Y_{J,M}(\theta_a, \phi_a) \quad (2.11)$$

dove $Y_{L,N}$ indica l'armonica sferica e r , θ e ϕ le tre componenti in coordinate polari sferiche del vettore \mathbf{r} . La somma è fatta su tutte le coordinate che indicano la posizione di ogni nucleone.

Nel caso del dipolo si ha $J = 1$. Definendo l'asse z nella direzione del moto del fotone, solo la componente $M = 0$ dell'armonica sferica, è diversa da 0 quindi l'operatore di dipolo elettrico può essere espresso come:

$$F_{1,0} = \mathbf{D} = \sum_a r_a Y_{1,0}(\theta_a, \phi_a) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_a r_a \cos \theta_a = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_a z_a e_a \quad (2.12)$$

Il termine e_a rappresenta la carica elettrica di ogni nucleone.

2.4 Carica effettiva

L'interazione del fotone con il nucleo produce anche una traslazione di tutto il sistema. Questo non è uno stato eccitato del nucleo. La corretta descrizione del meccanismo di foto-assorbimento richiederebbe una descrizione del nucleo in un sistema di coordinate basato sul centro di massa del nucleo.

Il modello nucleare è formulato supponendo un sistema di riferimento fisso nello spazio. C'è un metodo semplice per poter considerare l'effetto del moto del centro di massa del nucleo ed è l'introduzione di cariche effettive da associare al protone ed al neutrone.

Considerando uguali le masse di protone e neutrone, la posizione del centro di massa del nucleo è data da:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \mathbf{r}_a \quad (2.13)$$

La posizione di ogni nucleone rispetto a quella del centro di massa è

$$\boldsymbol{\rho}_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{R} = \left(1 - \frac{1}{A}\right) \mathbf{r}_a - \frac{1}{A} \sum_{a \neq j} \mathbf{r}_j \quad (2.14)$$

con l'ovvia relazione

$$\sum_{a=1}^A \boldsymbol{\rho}_a = 0 \quad (2.15)$$

Nelle coordinate del centro di massa, l'operatore di dipolo elettrico può essere espresso come:

$$\mathbf{D} = e \sum_{a=1}^Z \boldsymbol{\rho}_a = e \sum_{a=1}^Z (\mathbf{r}_a - \mathbf{R}) \quad (2.16)$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= e \left[\sum_{a=1}^Z \mathbf{r}_a - \sum_{a=1}^Z \frac{1}{A} \sum_{a=1}^A \mathbf{r}_a \right] \\ &= e \sum_{a=1}^Z \mathbf{r}_a - e \frac{Z}{A} \sum_{a=1}^A \mathbf{r}_a = e \left[\sum_{a=1}^Z \left(1 - \frac{Z}{A}\right) \mathbf{r}_a - \frac{Z}{A} \sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \right] \\ &= e \frac{N}{A} \sum_{a=1}^Z \mathbf{r}_a - e \frac{Z}{A} \sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \end{aligned} \quad (2.17)$$

Notiamo che l'operatore di dipolo elettrico assegna una carica effettiva pari a $e_a = eN/A$ per i protoni, e $e_a = -eZ/A$ per i neutroni.

2.5 Regola di somma di Thomas Reiche Khun

La regola di somma di Thomas Reiche Khun (TRK) è ottenuta calcolando il doppio commutatore dell'equazione (2.10), dove però si considera solo la parte relativa all'energia cinetica dell'hamiltoniana. Considerando il doppio commutatore e l'operatore energia cinetica otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^A \langle 0 | \left[\mathbf{D}, \left[\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m}, \mathbf{D} \right] \right] | 0 \rangle &= \sum_a e_a^2 \langle 0 | \left[\sqrt{\frac{3}{4\pi}} z_a, \left[\frac{p_{a,x}^2 + p_{a,y}^2 + p_{a,z}^2}{2m}, \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z_a \right] \right] | 0 \rangle \\ &= \frac{3}{4\pi} \frac{1}{2m} \sum_a e_a \langle 0 | \left[z_a, [p_{a,z}^2, z_a] \right] | 0 \rangle = \frac{3}{4\pi} \frac{2\hbar^2 c^2}{2mc^2} \sum_a e_a^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Questo risultato è stato ottenuto considerando che ogni \mathbf{p}_a commuta con le coordinate dei nucleoni diversi da a , che $\mathbf{p}_{a,x}$ e $\mathbf{p}_{a,y}$ commutano con z_a , e che $[p_z, z] = -i\hbar$. Per questo motivo

$$\begin{aligned} [p_z^2, z] &= p_z^2 z - z p_z^2 = p_z(p_z z) - z(p_z)(p_z) \\ &= p_z(-i\hbar + z p_z) - z p_z^2 = -i\hbar p_z + (-i\hbar + z p_z)p_z - z p_z^2 = -2i\hbar p_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

e

$$[z, [p_z^2, z]] = -2i\hbar[z, p_z] = -2i\hbar(i\hbar) = 2\hbar^2 \quad (2.20)$$

Inserendo il risultato della (2.18) nell'espressione (2.10) otteniamo

$$\begin{aligned} S^{\text{TRK}} &= \frac{8\pi^3}{3} \frac{1}{\hbar c} \frac{3}{4\pi} \frac{\hbar^2 c^2}{mc^2} \sum_{a=1}^A e_a^2 = 2\pi^2 \frac{\hbar c}{mc^2} e^2 \left[\frac{N^2}{A^2} \sum_{a=1}^Z + \frac{Z^2}{A^2} \sum_{a=1}^N \right] \\ &= 2\pi^2 \frac{\hbar c}{mc} \frac{e^2}{A^2} [N^2 Z + Z^2 N] = 2\pi \frac{\hbar c}{mc^2} e^2 \frac{NZ}{A^2} A \simeq \underbrace{\frac{NZ}{A} 6 \text{ MeV fm}^2}_{\text{TRK}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ricordiamo che la TRK è ottenuta considerando solo la parte relativa all'energia cinetica. Se si considera l'hamiltoniana totale, quindi anche i termini contenenti l'interazione nucleare, si osserva che la parte dipendente da τ , l'ISOSPIN, non commuta con l'operatore di dipolo perchè la carica effettiva è diversa per protoni e per neutroni, quindi dipende da τ_3 . La regola di somma totale, che considera l'hamiltoniana completa, nel caso di rango $r = 1$ per l'eccitazione di dipolo elettrico è solitamente scritta come

$$S_1^{J=1} = 2\pi \frac{\hbar c}{mc^2} e^2 \frac{NZ}{A^2} A (1 + \kappa) \quad (2.22)$$

Questa espressione definisce il fattore di incremento κ .

Capitolo 3

Dati Sperimentali

In questo capitolo studieremo i dati sperimentali riguardanti le sezioni d'urto di foto-assorbimento disponibili in letteratura. Il primo passo riguarda la completezza di questi dati. Per questo studio, considereremo i dati misurati da Ahrens et al. [Ahr75] nei nuclei di ^{12}C , ^{16}O , ^{40}Ca , ^{208}Pb poichè questi ultimi hanno la massima estensione energetica.

I dati della referenza [Ahr75] sono limitati ad energie di 60 - 70 MeV. Per poter verificare come le regole di somma sono soddisfatte abbiamo prodotto delle estrapolazioni con andamento lineare ed esponenziale. In questo modo si identifica il valore del fattore di incremento κ , cioè quanto questi dati violano la TRK.

Una volta definiti i valori di κ per l'insieme di dati sperimentali che consideriamo il più completo, valuteremo la completezza dei dati sperimentali disponibili in letteratura. Questi dati sono comunemente presentati usando delle funzioni che ne descrivono l'andamento con un processo di fit. L'ultimo passo consiste nell'utilizzare le parametrizzazioni disponibili in letteratura per fare previsioni sulle sezioni d'urto di foto-assorbimento di nuclei in cui non sono state misurate.

3.1 Completezza dei dati sperimentali

Il problema che ci si pone ora è quello di valutare quanta *strength* manca dall'energia massima misurata fino all'energia di produzione mesonica. Nel calcolo delle regole di somma si fa l'ipotesi che i componenti del sistema a multicompi, in questo caso i nucleoni, non perdano la loro identità. La soglia di produzione mesonica è quella in cui iniziano a modificarsi delle strutture interne al nucleone, è quindi la soglia energetica in cui l'ipotesi di partenza perde validità. Consideriamo un processo di foto-assorbimento dove la sezione d'urto misurata è totale [Ahr75]. I nuclei studiati sono: ^{12}C , ^{16}O , ^{40}Ca , ^{208}Pb . Come detto all'inizio, i dati empirici che abbiamo a disposizione arrivano ad un'energia pari a circa 60 MeV e quello che ci proponiamo è di considerare la sezione d'urto fino a $\omega_\pi = 150$ MeV. Ciò che si deve trovare è il comportamento della sezione d'urto da ω_{max} fino a ω_π , perchè questo ci indica quanta *strength* manca nei dati misurati. Per ottenere

questa informazione estrapoliamo i dati sperimentali utilizzando una funzione lineare e una funzione esponenziale. Chiamiamo *code* le parti aggiuntive ai dati sperimentali che definiamo secondo questa procedura.

Consideriamo una coda di tipo lineare,

$$\sigma_{\text{lin}}(\omega) = A_1\omega + A_2 \quad (3.1)$$

dove A_1 e A_2 sono parametri i cui valori sono da determinare. Il contributo di questo termine alla regola di somma, nell'intervallo compreso tra ω_{max} , il massimo valore dell'energia a cui è stata misurata la sezione d'urto, e $\omega_{\pi}=150$ MeV è:

$$\int_{\omega_{\text{max}}}^{\omega_{\pi}} \sigma_{\text{lin}}(\omega) d\omega = \left[\frac{1}{2} A_1 \omega^2 + A_2 \omega \right]_{\omega_{\text{max}}}^{\omega_{\pi}} \quad (3.2)$$

Consideriamo anche una coda esponenziale

$$\sigma_{\text{esp}}(\omega) = B_1 e^{-(B_2 \omega)} \quad (3.3)$$

dove B_1 e B_2 sono parametri, e il cui contributo alla regola di somma

$$\int_{\omega_{\text{max}}}^{\omega_{\pi}} \sigma_{\text{esp}}(\omega) d\omega = \left[-\frac{B_1}{B_2} e^{-B_2 \omega} \right]_{\omega_{\text{max}}}^{\omega_{\pi}} \quad (3.4)$$

Per definire i valori dei parametri abbiamo considerato i cinque-sei punti dei dati, misurati alle massime energie. Utilizzando il software Root [Root] abbiamo fatto un fit di questi dati considerando le code esponenziali e lineari.

I risultati dei fit sono presentati nelle figure 3.1-3.4, e i valori dei parametri nella tabella 3.1.

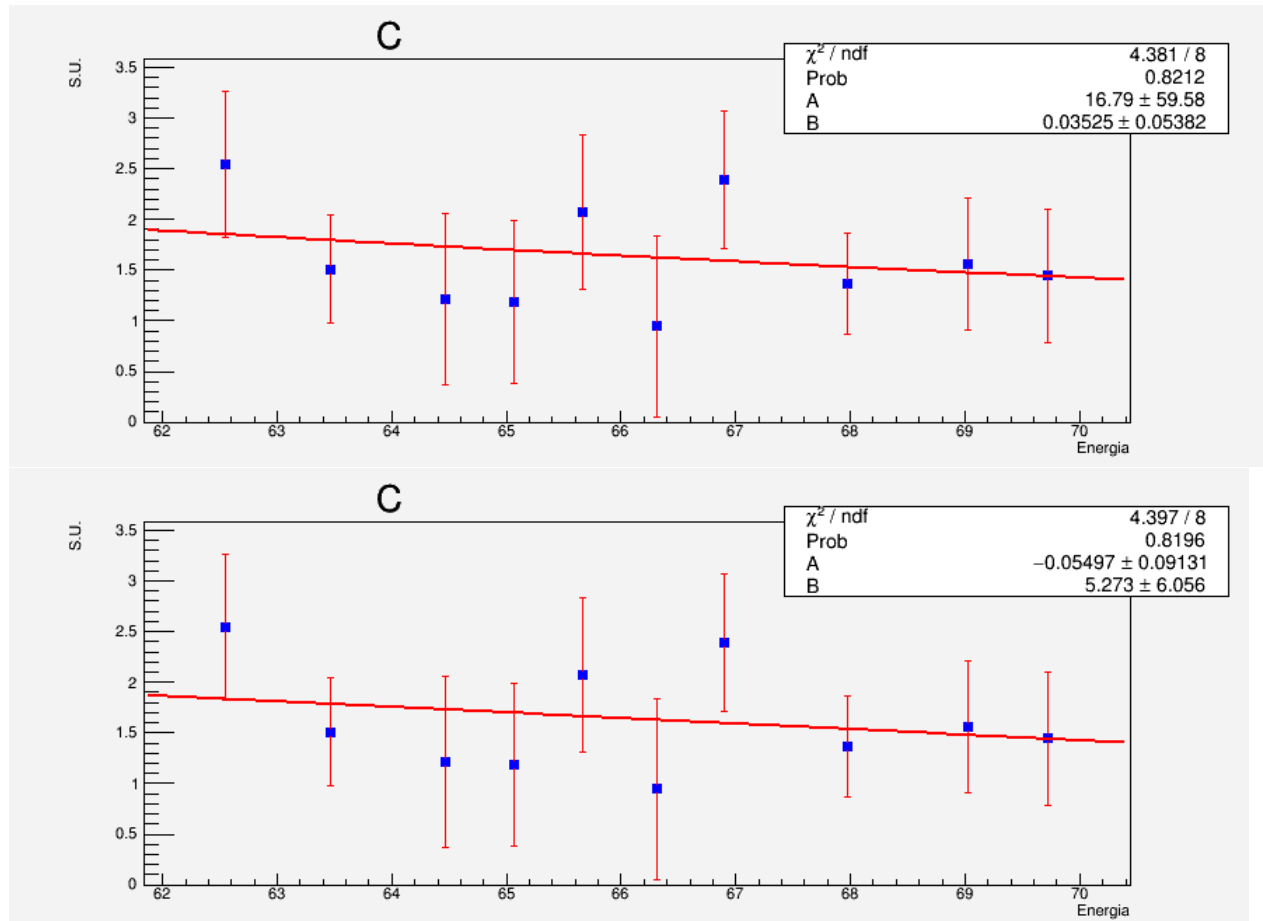
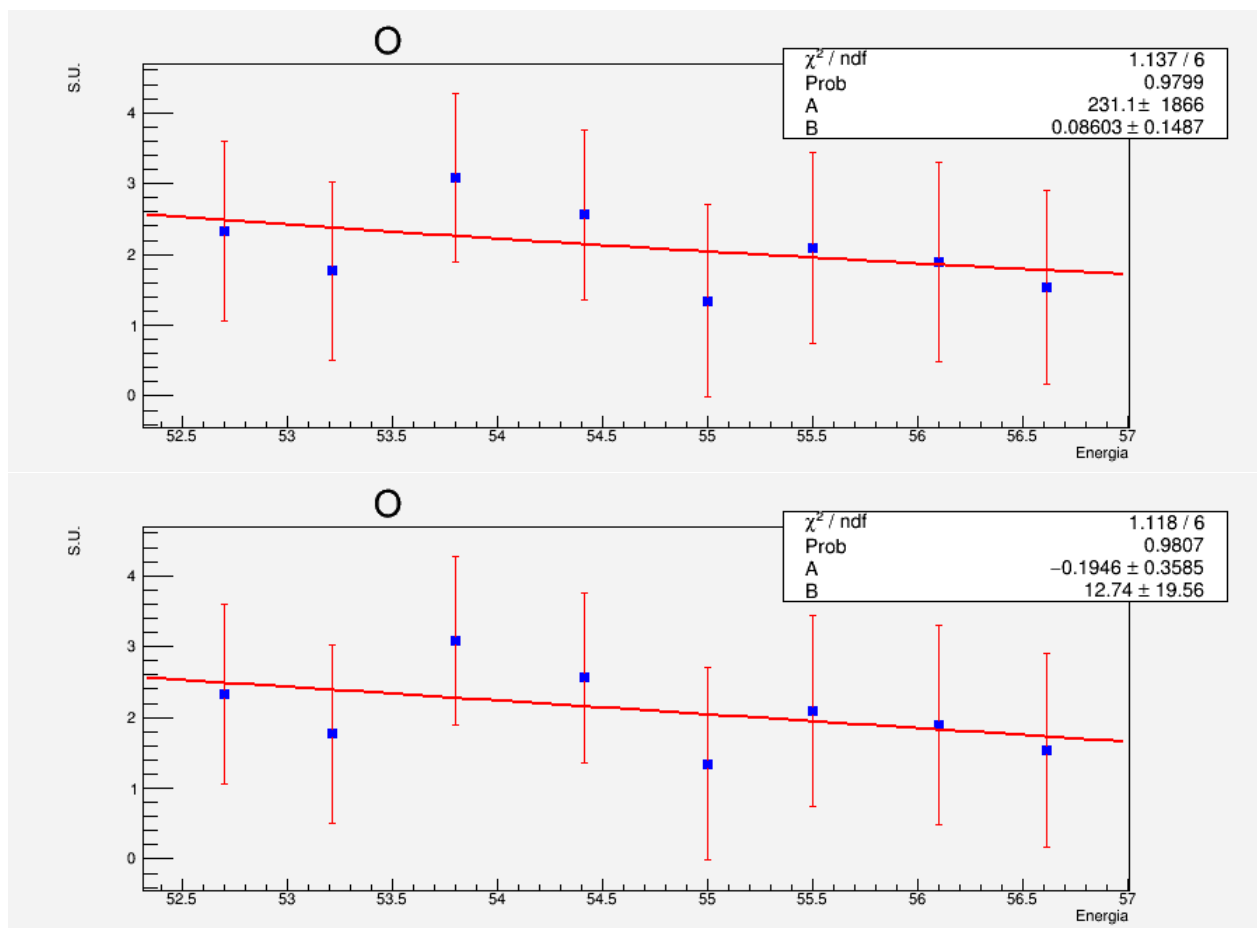
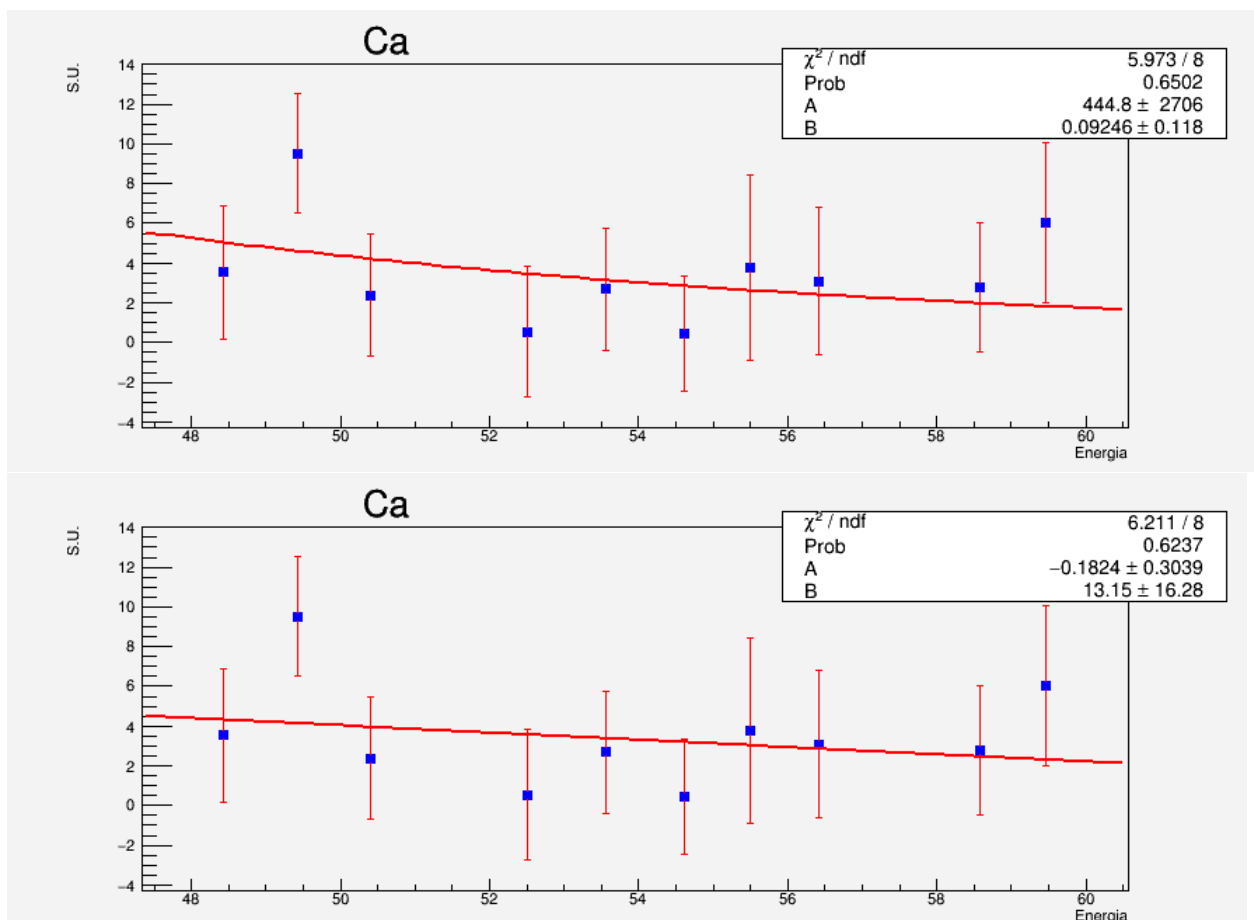
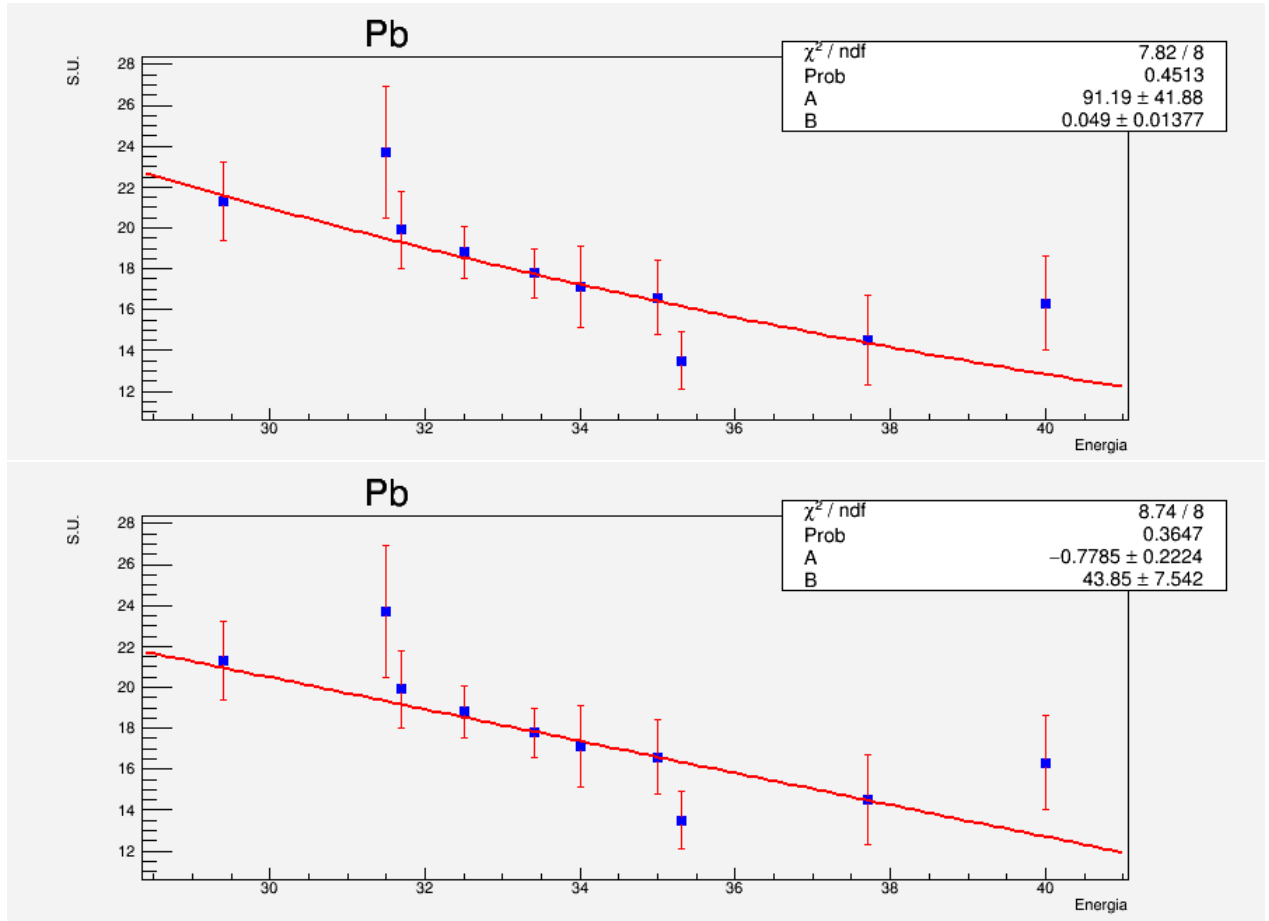


Figura 3.1: Fit dei dati sperimentali del ^{12}C . Figura superiore, fit esponenziale, figura inferiore fit lineare. In ascissa è rappresentata l'energia del fotone assorbito in MeV, in ordinata la sezione d'urto di foto-assorbimento in mb. Riquadro in alto a destra: nel caso **lineare** A è il coefficiente angolare della retta, B la sua intercetta; caso **esponenziale**: A è un fattore moltiplicativo dell'esponenziale, B è un fattore moltiplicativo di ω , come si può vedere dalla formula 3.4. *Prob*: è la probabilità che la funzione considerata riesca a fittare i dati a nostra disposizione [Ahr75]. χ^2/ndf : è il χ^2 della distribuzione diviso per il numero di gradi di libertà.

Figura 3.2: Come la Fig. 3.1 ma per ^{16}O

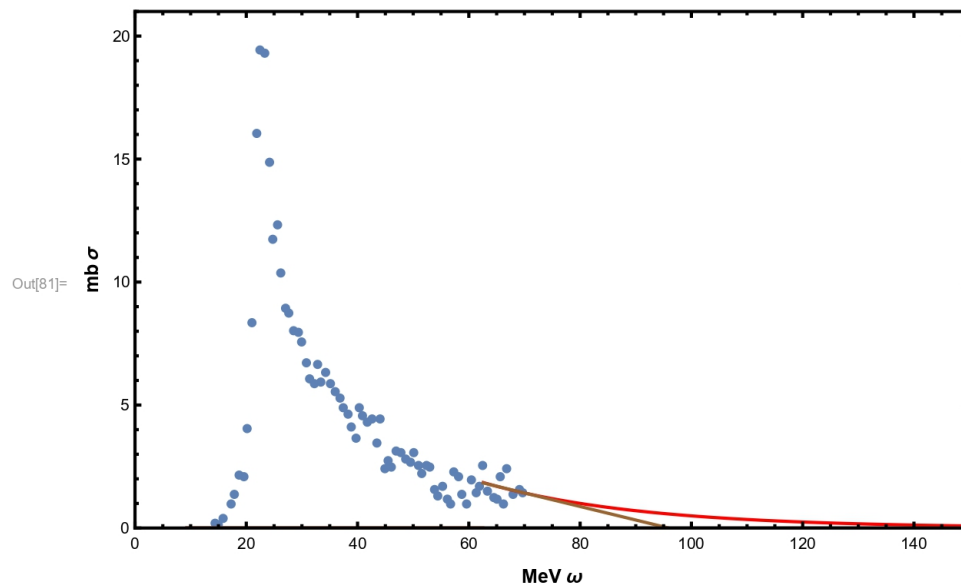
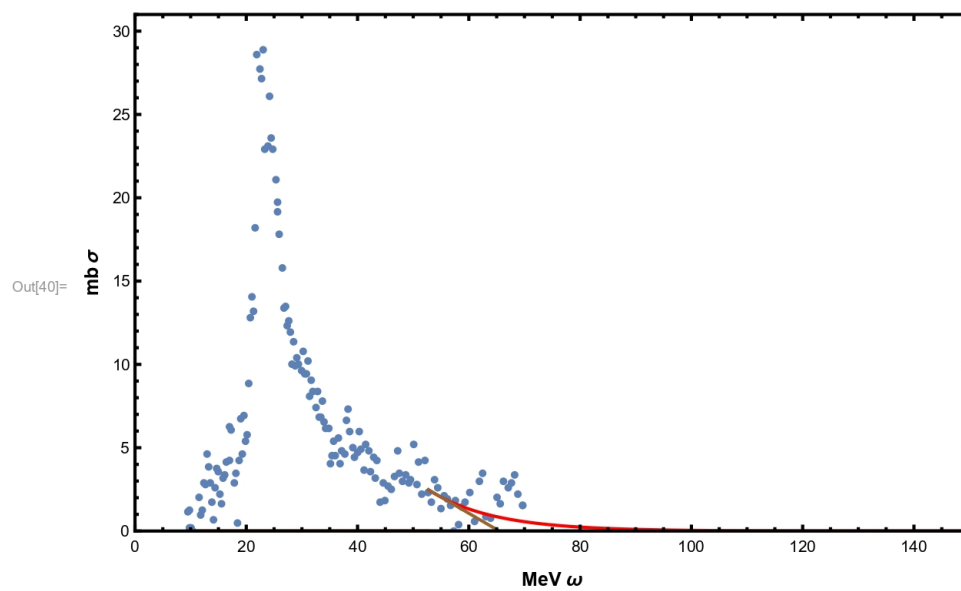
Figura 3.3: Come la Fig.3.1 ma per ^{40}Ca

Figura 3.4: Come la Fig.3.1 ma per ^{208}Pb

Nucleo	lineare		esponenziale	
	A_1 (mb/MeV)	A_2 (mb)	B_1 (mb)	B_2 (1/MeV)
^{12}C	-0.055	5.273	16.79	0.035
^{16}O	-0.194	12.74	231.1	0.086
^{40}Ca	-0.182	13.15	444.8	0.092
^{208}Pb	-0.778	43.85	91.19	0.049

Tabella 3.1: Valori dei parametri delle equazioni (3.1) e (3.3).

Per avere un quadro d'insieme di quanto fatto, presentiamo nelle figure 3.5 - 3.8 i dati sperimentali considerati e le due code.

Figura 3.5: Dati sperimentali e code esponenziale e lineare per ^{12}C .Figura 3.6: Dati sperimentali e code esponenziale e lineare per ^{16}O .

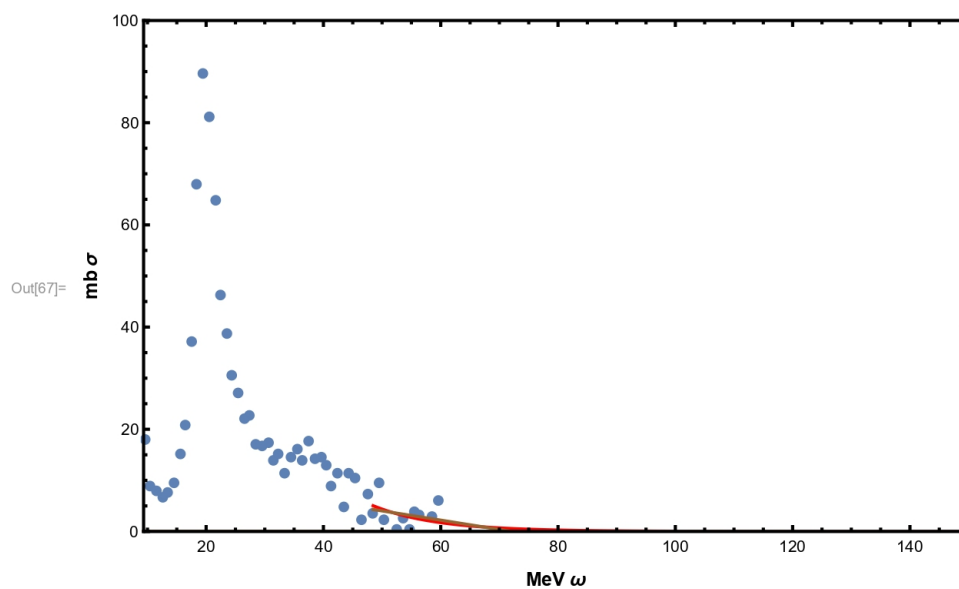


Figura 3.7: Dati sperimentali e code esponenziale e lineare per ^{40}Ca .

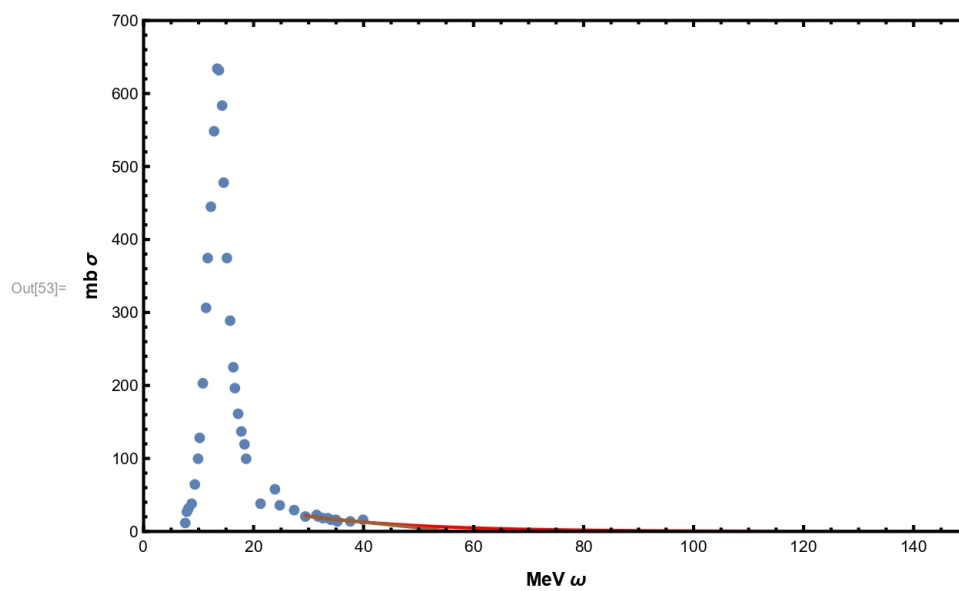


Figura 3.8: Dati sperimentali e code esponenziale e lineare per ^{208}Pb .

Nel fit lineare c'è un certo valore di

$$\omega_0 = -\frac{A_2}{A_1}$$

per cui la sezione d'urto si annulla e quindi anche l'estrapolazione è nulla. Sostituendo in questa relazione i corrispondenti valori di A_1 e A_2 , per ciascun nucleo, che troviamo nella tabella 3.1, otteniamo

Nucleo	ω_0 (MeV)
^{12}C	95.87
^{16}O	65.67
^{40}Ca	72.85
^{208}Pb	56.36

Tabella 3.2: Valori di ω_0 dei nuclei indicati per cui la sezione d'urto si annulla.

Una volta ottenuti questi valori, calcoliamo le sezioni d'urto di foto-assorbimento dei dati sperimentali integrandole attraverso la *regola dei trapezi* fino al valore di ω_0 per cui la sezione d'urto si annulla (Tabella 3.2).

Successivamente, a questi integrali vengono aggiunti i contributi delle code dati dalle equazioni (3.2) e (3.4) e presentati nella tabella 3.3.

Nucleo	Lineare		Esponenziale	
	integrale (mb MeV)	int./TRK	integrale (mb MeV)	int./TRK
^{12}C	35.388	0.196	56.226	0.312
^{16}O	3.118	1.299×10^{-2}	71.760	0.299
^{40}Ca	13.629	2.271×10^{-2}	19.536	3.256×10^{-2}
^{208}Pb	15.747	5.284×10^{-3}	302.879	0.101

Tabella 3.3: Contributi alle code considerando i dati della Tabella 3.1, le energie ω_0 della tabella 3.2 e gli integrali analitici, equazioni (3.2) e (3.4).

A questo punto nella tabella 3.4 presentiamo i risultati dei vari integrali delle sezioni d'urto ottenuti, in termini di TRK. Come si può notare, tutti gli integrali hanno valori maggiori di uno. Questo indica la presenza e l'importanza dei termini di isospin dell'interazione ed inoltre la differenza tra i vari nuclei implica che questi valori sono legati alla struttura specifica dello stato fondamentale del nucleo considerato.

Nucleo	TRK (MeV mb)	int./TRK	int.+lin	int.+ exp
^{12}C	180	1.277	1.466	1.582
^{16}O	240	1.393	1.403	1.689
^{40}Ca	600	1.454	1.472	1.482
^{208}Pb	2980	1.183	1.185	1.281

Tabella 3.4: Integrali delle sezioni d'urto espressi in termini di TRK. La colonna int./TRK indica gli integrali dei soli dati sperimentali diviso per il valore della TRK corrispondente a ciascun nucleo, le altre i valori degli integrali ottenuti aggiungendo una coda lineare (int. + lin.) e una coda esponenziale (int. + exp.).

3.2 Verifica delle parametrizzazioni

In letteratura i dati sperimentali sono presentati in termini di funzioni dell'energia del fotone con dei parametri fissati per riprodurre al meglio i dati (fit). In questo paragrafo considereremo alcune di queste parametrizzazioni. Per verificare la loro efficacia le confronteremo con i dati di Ahrens [Ahr75], e anche con risultati di fit fatti con una funzione di Lorentz.

3.2.1 Fit ai dati

In questa sessione presenteremo un fit ai dati sperimentali di Ahrens [Ahr75]. Per effettuare il fit abbiamo selezionato una funzione di Lorentz. La sezione d'urto è parametrizzata in funzione dell'energia ω del fotone assorbito come:

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{\omega^2 \Gamma^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (3.5)$$

dove $\sigma_0, \Gamma, \omega_0$ sono i parametri i cui valori sono da determinare con la procedura di fit. Questa procedura è stata attivata utilizzando il software *Root* [Root], e i risultati sono presentati nelle figure 3.9 - 3.12.

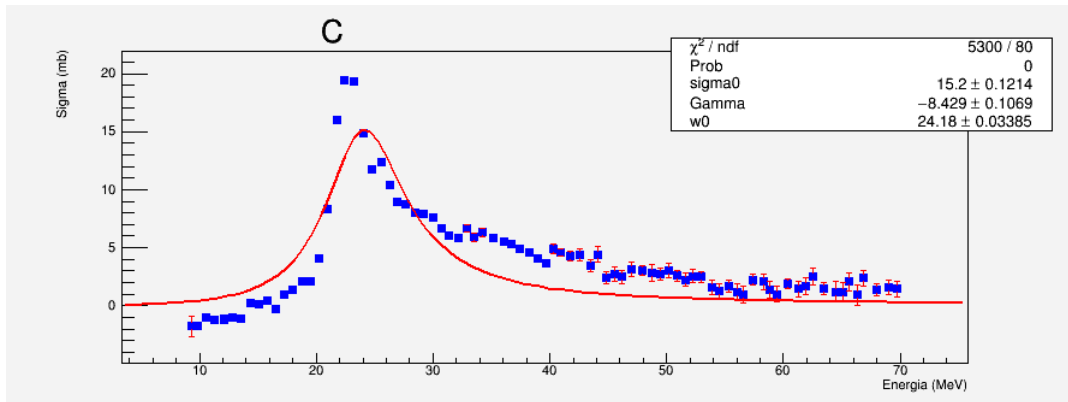


Figura 3.9: Sezione d'urto di foto-assorbimento per il ^{12}C . I dati sono quelli di Ref. [Ahr75] la linea indica la Lorentziana che riproduce al meglio i dati sperimentali.

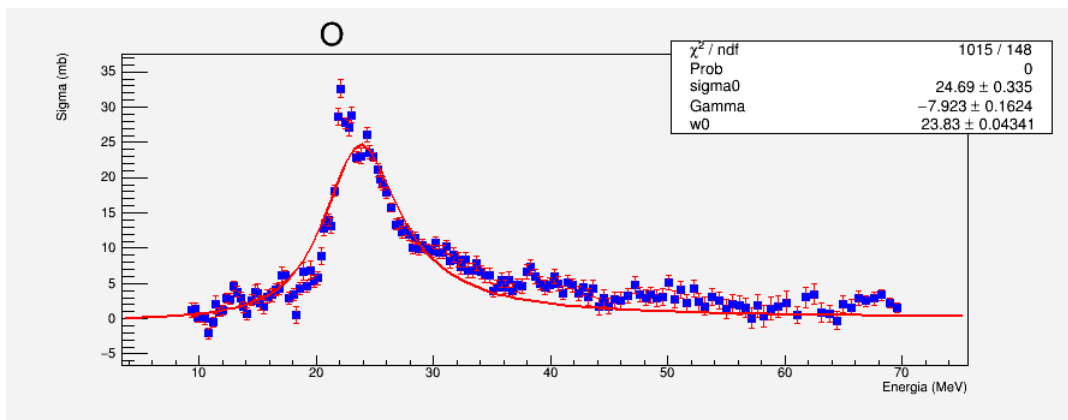


Figura 3.10: Come fig. 3.9 ma per ^{16}O .

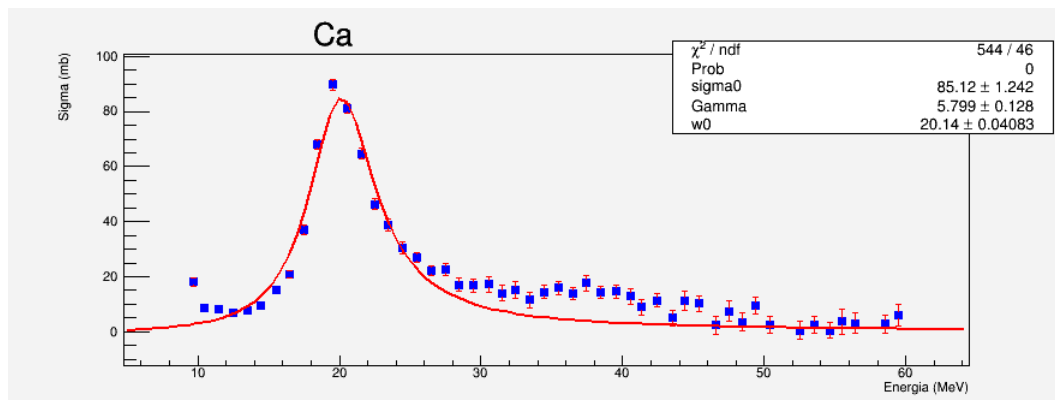
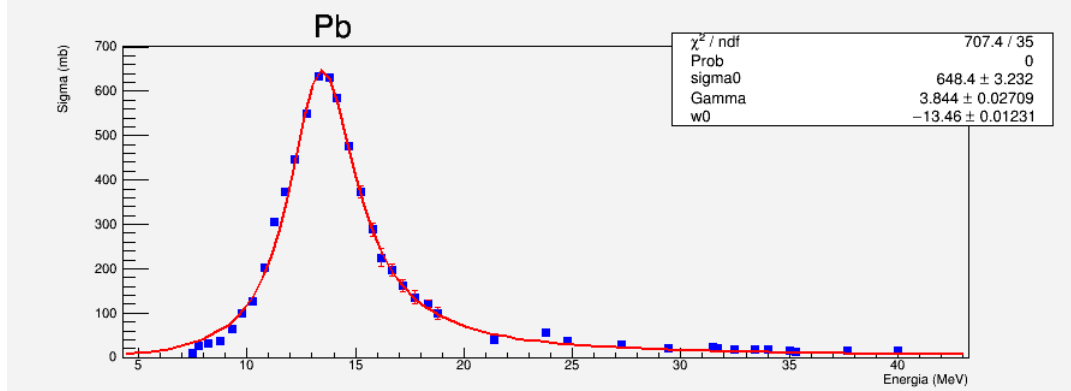


Figura 3.11: Come fig. 3.9 ma per ^{40}Ca .

Figura 3.12: Come fig. 3.9 ma per ^{208}Pb .

Nucleo	σ_0 (mb)	Γ (MeV)	ω_0 (MeV)	χ^2/ndf
^{12}C	15.20	-8.42	24.18	5300/80
^{16}O	24.69	-7.92	23.83	1015/148
^{40}Ca	85.12	5.80	20.14	544/46
^{208}Pb	648.40	3.84	-13.45	707/35

Tabella 3.5: Valori dei parametri delle lorentziane (3.5) ottenute dal fit.

Usando le funzioni di Lorentz con i parametri del fit abbiamo calcolato le regole di somma previste per queste sezioni d'urto. I risultati sono presentati nella Tabella 3.6.

3.2.2 Altre parametrizzazioni della sezione d'urto

In questa sezione presentiamo i risultati di altre 4 parametrizzazioni disponibili in letteratura.

Morejon

La prima parametrizzazione che consideriamo è presa dalla dalla tesi di Dottorato di Leonel Morejon [Mor20t]. Questa parametrizzazione, adattata da [San06], è stata utilizzata in [Mor19] per analizzare la composizione dei raggi cosmici ad alte energie. Dalle equazioni (5.1) e (5.4) di [Mor20t] si ottiene l'espressione della sezione d'urto

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (3.6)$$

con $\omega_0 = 31.2A^{-1/3} + 20.6A^{-1/6}$ MeV. L'ampiezza di transizione dipende dal numero di neutroni e protoni. Per ogni specie di nucleone q , si identificano tra i numeri magici 2, 8,

20, 28, 50, 82, 126, prima M_{low}^q e dopo M_{top}^q , il numero di protoni e neutroni del nucleo considerato. L'ampiezza, in MeV, è definita come:

$$\Gamma = 4.5 + 3.0 \left(\frac{N - M_{\text{low}}^N}{M_{\text{top}}^N - M_{\text{low}}^N} + \frac{Z - M_{\text{low}}^Z}{M_{\text{top}}^Z - M_{\text{low}}^Z} \right) \quad (3.7)$$

Il valore di σ_0 si ottiene normalizzando in modo da soddisfare la regola di somma TRK,

$$\int_0^{150 \text{ MeV}} \sigma(\omega) d\omega = 60 \frac{NZ}{A} (\text{MeV mb}) \quad (3.8)$$

Questa parametrizzazione è pensata per tutti i nuclei.

Capote

La seconda parametrizzazione che consideriamo è presa da [Cap09]. Anche in questo caso si usa una funzione di Lorentz per descrivere la sezione d'urto

$$\sigma(\omega) = \sigma_r \frac{\omega^2 \Gamma^2}{(\omega^2 - E_r^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (3.9)$$

I valori dei parametri sono fissati dalle espressioni (173) e (174) di [Cap09].

$$\begin{aligned} E_r &= a A^{-1/3} + b A^{-1/6} \text{ (MeV)} \\ \Gamma &= c E_r \text{ (MeV)} \\ \sigma_r &= d \frac{2}{\pi} \frac{1}{\Gamma} 60 \frac{NZ}{A} \text{ (mb)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a &= 27.47 \pm 0.01 \\ b &= 22.063 \pm 0.004 \\ c &= 0.0277 \pm 0.4 \times 10^{-4} \\ d &= 1.222 \pm 0.002 \end{aligned}$$

Nei nostri calcoli abbiamo usato i valori centrali dei parametri a, b, c, d . Anche questa parametrizzazione è pensata per tutti i nuclei.

Berman

La terza parametrizzazione è presa dal seguente articolo [Ber75]. La sezione d'urto è parametrizzata come somma di due funzioni di Lorentz:

$$\sigma(\omega) = \sigma_a \frac{\omega^2 \Gamma_a^2}{(\omega^2 - E_a^2)^2 + \omega^2 \Gamma_a^2} + \sigma_b \frac{\omega^2 \Gamma_b^2}{(\omega^2 - E_b^2)^2 + \omega^2 \Gamma_b^2} \quad (3.10)$$

I valori dei parametri $\sigma_{a,b}$, $\Gamma_{a,b}$, $E_{a,b}$ sono tabulati per ogni nucleo considerato. Questa parametrizzazione è limitata solo a nuclei medio-pesanti. Nel nostro caso ci limiteremo ad usare questa parametrizzazione solo per i nuclei ^{206}Pb e ^{208}Pb .

Plujko

L'ultima parametrizzazione che presentiamo è presa da [Plu18]. Anche in questo caso le sezioni d'urto sono parametrizzate come funzioni di Lorentz

$$\sigma(\omega) = 60 \frac{NZ}{A} s \frac{2}{\pi} \frac{\omega^2 \Gamma^2}{[\omega^2 - E_r^2]^2 + [\omega \Gamma]^2} \quad (\text{mb}) \quad (3.11)$$

Anche in questo caso i valori dei parametri s, Γ, E_r sono differenti per ogni nucleo considerato e sono tabulati.

Nelle Figure (3.13 - 3.16), per i nuclei studiati in Ref. [Ahr75], confrontiamo i dati sperimentali con le curve generate dalle quattro parametrizzazioni descritte sopra.

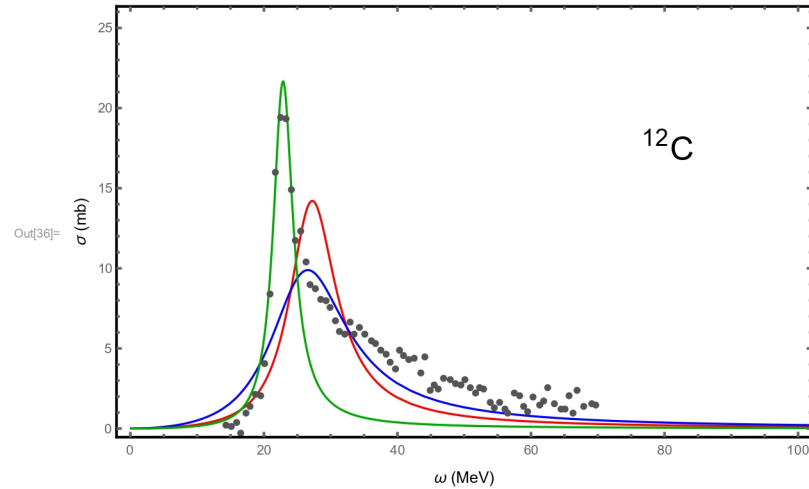


Figura 3.13: Le curve rappresentano le sezioni d'urto ottenute con le varie parametrizzazioni considerate per il nucleo ^{12}C ; **curva verde**: parametrizzazione di Morejon normalizzata alla TRK; **curva rossa**: parametrizzazione di Capote; **curva blu**: parametrizzazione di Plujko.

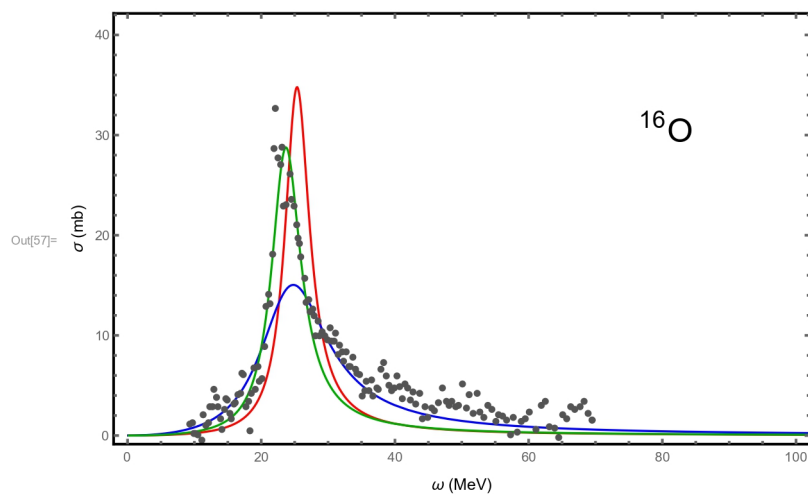


Figura 3.14: Come la Figura 3.13 ma per ^{16}O .

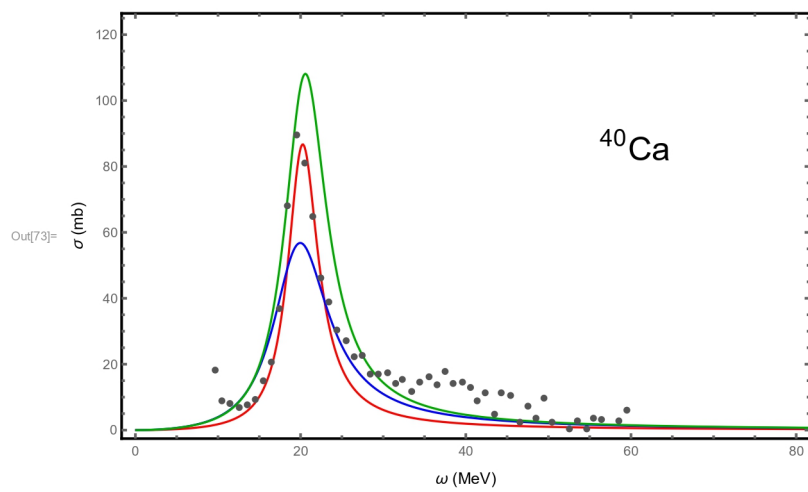


Figura 3.15: Come la Figura 3.13 per ^{40}Ca .

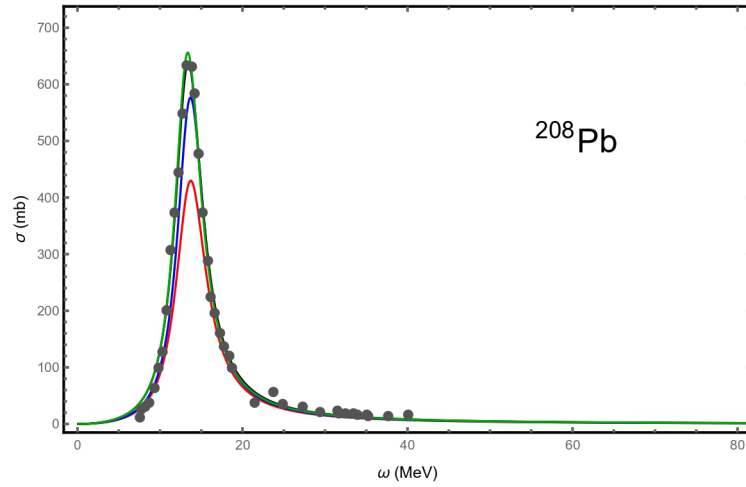


Figura 3.16: Come la Figura 3.13 per ^{208}Pb . In questa figura la linea nera rappresenta la sezione d'urto ottenuta con la parametrizzazione di Berman.

I valori degli integrali delle varie curve calcolati fino ad una energia massima di 150 MeV, sono presentati nella Tabella 3.6 come rapporto con la TRK.

Nucleo	int.	emp.	Morejon	Capote	Berman	Plujko
^{12}C	1.277	1.582	1.0	1.118	-	0.671
^{16}O	1.393	1.689	1.0	1.133	-	0.981
^{40}Ca	1.454	1.482	1.0	1.167	-	1.709
^{208}Pb	1.183	1.281	1.0	1.196	1.347	1.368

Tabella 3.6: Valori degli integrali delle sezioni d'urto, calcolati fino a 150 MeV, in termini di TRK. Nella colonna **int** ci sono i valori degli integrali dei soli dati sperimentali. Nella colonna **emp** ci sono i valori dell'integrale dei dati empirici + la coda esponenziale. Le altre colonne mostrano i risultati ottenuti dall'integrale della sezione d'urto delle diverse parametrizzazioni.

3.3 Applicazione a nuclei non studiati sperimentalmente

Nell'analisi della composizione dei raggi cosmici, si applicano le parametrizzazioni presentate nella sezione precedente per considerare nuclei di cui non è stata misurata la sezione d'urto.

Come esmpio di applicazione, consideriamo gli isotopi dei nuclei di C, O, Ca e Pb indicati nella tavola degli isotopi compilata dai laboratori di Brookhaven [Bro21]. Si tratta, molto spesso, di nuclei instabili di cui sarebbe molto difficile effettuare misure di sezioni d'urto di foto-assorbimento. D'altra parte questi nuclei possono essere presenti nei raggi cosmici come prodotti di decadimento di nuclei maggiormente stabili. Mentre le parametrizzazioni di Morejon e Capote sono state adattate per descrivere ogni nucleo, quelle di Berman e Plujko sono relative soltanto a specifici nuclei studiati sperimentalmente.

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^{12}C	1.118	-	0.671
^{13}C	1.123	-	0.868
^{14}C	1.126	-	0.333

Tabella 3.7: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi del Carbonio

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^{16}O	1.133	-	0.981
^{17}O	1.136	-	0.740
^{18}O	1.139	-	0.064

Tabella 3.8: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi dell' Ossigeno

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^{40}Ca	1.167	-	1.709
^{42}Ca	1.168	-	1.455
^{44}Ca	1.169	-	1.732
^{48}Ca	1.171	-	1.474

Tabella 3.9: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi del Calcio

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^{206}Pb	1.19630	-	1.240
^{207}Pb	1.19635	-	1.002
^{208}Pb	1.19641	1.347	1.368

Tabella 3.10: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi del Piombo

Per verificare la consistenza dei modelli abbiamo calcolato l'integrale della sezione d'urto fino a $\omega_\pi = 150$ MeV. I valori di questi integrali, espressi in termini di TRK, sono presentati in appendice. È da sottolineare che gli integrali per la parametrizzazione di Plujko nei nuclei di Carbonio e Ossigeno sono inferiori rispetto alla TRK: questo ci indica che la descrizione dei dati non è completa.

Nelle tabelle 3.7-3.10 mostriamo i risultati di quei nuclei per cui, oltre ai risultati di Capote, ci sono anche risultati di almeno un'altra parametrizzazione; manca la parametrizzazione di Morejon in quanto è normalizzata alla TRK.

I risultati degli integrali della parametrizzazione di Capote vanno da un minimo di 1.093 ad un massimo di 1.197 e, come si può notare dalla tabella 3.6, i valori degli integrali dei dati empirici risultano maggiori di quelli previsti da Capote.

Conclusioni

Quello che si è fatto in questa tesi è stato valutare la completezza dei dati sperimentali disponibili per le sezioni d'urto di foto-assorbimento. Il metodo che abbiamo utilizzato per fare ciò è stato studiare quanto questi dati effettivamente soddisfano le regole di somma di Thomas-Reiche-Kuhn (TRK).

Abbiamo considerato i dati di [Ahr75] che sono, fino ad ora, i più completi presenti in letteratura. Poichè i dati sono stati misurati fino ad energie di circa 60 MeV abbiamo aggiunto delle code con andamenti lineare ed esponenziale fino a 150 MeV, soglia di produzione pionica.

Abbiamo visto quindi che i risultati degli integrali dei dati empirici superano i valori attesi dalla TRK, questo è dovuto alla presenza e all'importanza che hanno i termini di isospin dell'interazione.

Dal momento che in letteratura i dati delle sezioni d'urto di foto-assorbimento sono presentati in termini di funzioni di Lorentz che li riproducono, abbiamo analizzato 4 differenti fonti di dati: [Mor19], [Cap09] le quali sono considerate universali, [Plu18],[Ber75] le quali, invece, sono tabulate e ogni nucleo ha i suoi parametri.

Per quanto riguarda i nuclei ^{12}C , ^{16}O , ^{40}Ca e ^{208}Pb considerate in [Ahr75], possiamo dire che gli integrali delle sezioni d'urto effettuati con le 4 parametrizzazioni utilizzate presentano aspetti diversi, e contrastanti. Le sezioni d'urto di Morejon sono normalizzate alla TRK, e quindi i valori dei loro integrali sono più piccoli di quelli ottenuti dai dati sperimentali con le code. Le sezioni d'urto di Capote [Cap09] hanno integrali maggiori della TRK, ma più piccoli di quelli empirici. L'unico risultato con la parametrizzazione di Berman [Ber75] riguarda il ^{208}Pb e fornisce un risultato leggermente superiore dei dati sperimentali. Nel caso di Plujko, gli integrali delle sezioni d'urto in ^{12}C e ^{16}O sono inferiori addirittura alla TRK. Al contrario, in ^{208}Pb , ma soprattutto nel caso di ^{40}Ca gli integrali sono notevolmente più grandi di quelli empirici.

Come ci si poteva aspettare, anche l'applicazione delle quattro parametrizzazioni al caso di nuclei differenti rispetto a quelli studiati in [Ahr75] produce dei risultati inconsistenti e contraddittori.

Quello che possiamo affermare, in conclusione, è che i dati sperimentali non sono completi. Non è affidabile un'estrapolazione di queste parametrizzazioni a nuclei in cui la sezione d'urto non è stata misurata. Perciò è evidente la necessità di una guida teorica per poter procedere ad estrapolazioni.

La figura 1.2 rappresenta un esempio delle informazioni che può fornire la teoria. L'uso di questi dati, nella prospettiva di analizzare la composizione dei raggi cosmici di alta energia, potrebbe leggermente modificare i rapporti tra i vari isotopi. Prime stime (L.Morejon, comunicazione privata) indicano che l'effetto consiste nell'aumentare la presenza di nuclei più pesanti, rispetto alle analisi che sono state fatte fino a questo momento.

Appendice A

Appendice

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^8C	1.093	-	-
^9C	1.100	-	-
^{10}C	1.107	-	-
^{11}C	1.113	-	-
^{12}C	1.118	-	0.671
^{13}C	1.123	-	0.868
^{14}C	1.126	-	0.333
^{15}C	1.130	-	-
^{16}C	1.133	-	-
^{17}C	1.136	-	-
^{18}C	1.139	-	-
^{19}C	1.141	-	-
^{20}C	1.143	-	-
^{21}C	1.145	-	-
^{22}C	1.147	-	-

Tabella A.1: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi del Carbonio

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^{12}O	1.118	-	-
^{13}O	1.123	-	-
^{14}O	1.127	-	-
^{15}O	1.130	-	-
^{16}O	1.133	-	0.985
^{17}O	1.136	-	0.740
^{18}O	1.138	-	0.064
^{19}O	1.141	-	-
^{20}O	1.143	-	-
^{21}O	1.145	-	-
^{22}O	1.147	-	-
^{23}O	1.148	-	-
^{24}O	1.150	-	-
^{25}O	1.152	-	-
^{26}O	1.153	-	-
^{27}O	1.154	-	-
^{28}O	1.155	-	-

Tabella A.2: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi dell' Ossigeno

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
^{34}Ca	1.162	-	-
^{35}Ca	1.163	-	-
^{36}Ca	1.164	-	-
^{37}Ca	1.164	-	-
^{38}Ca	1.165	-	-
^{39}Ca	1.166	-	-
^{40}Ca	1.167	-	1.709
^{41}Ca	1.167	-	-
^{42}Ca	1.168	-	1.455
^{43}Ca	1.169	-	-
^{44}Ca	1.169	-	1.732
^{45}Ca	1.170	-	-
^{46}Ca	1.171	-	-
^{47}Ca	1.171	-	-
^{48}Ca	1.171	-	1.474
^{49}Ca	1.172	-	-
^{50}Ca	1.173	-	-
^{51}Ca	1.173	-	-
^{52}Ca	1.174	-	-
^{53}Ca	1.174	-	-
^{54}Ca	1.175	-	-
^{55}Ca	1.175	-	-
^{56}Ca	1.175	-	-
^{57}Ca	1.175	-	-
^{58}Ca	1.176	-	-

Tabella A.3: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi del Calcio

Nucleo	Capote	Berman	Plujko
¹⁸² Pb	1.19484	-	-
¹⁸³ Pb	1.19491	-	-
¹⁸⁴ Pb	1.19497	-	-
¹⁸⁵ Pb	1.19504	-	-
¹⁸⁶ Pb	1.19510	-	-
¹⁸⁷ Pb	1.19517	-	-
¹⁸⁸ Pb	1.19523	-	-
¹⁸⁹ Pb	1.19529	-	-
¹⁹⁰ Pb	1.19536	-	-
¹⁹¹ Pb	1.19542	-	-
¹⁹² Pb	1.19548	-	-
¹⁹³ Pb	1.19554	-	-
¹⁹⁴ Pb	1.19560	-	-
¹⁹⁵ Pb	1.19566	-	-
¹⁹⁶ Pb	1.19572	-	-
¹⁹⁷ Pb	1.19578	-	-
¹⁹⁸ Pb	1.19584	-	-
¹⁹⁹ Pb	1.19590	-	-
²⁰⁰ Pb	1.19596	-	-
²⁰¹ Pb	1.19602	-	-
²⁰² Pb	1.19607	-	-
²⁰³ Pb	1.19613	-	-
²⁰⁴ Pb	1.19619	-	-
²⁰⁵ Pb	1.19624	-	-
²⁰⁶ Pb	1.19630	-	1.240
²⁰⁷ Pb	1.19635	-	1.002
²⁰⁸ Pb	1.19641	1.34748	1.368
²⁰⁹ Pb	1.9641	1.34748	-
²¹⁰ Pb	1.19652	-	-
²¹¹ Pb	1.19657	-	-
²¹² Pb	1.19662	-	-
²¹³ Pb	1.19668	-	-
²¹⁴ Pb	1.19673	-	-
²¹⁵ Pb	1.19678	-	-
²¹⁶ Pb	1.19683	-	-
²¹⁷ Pb	1.19689	-	-
²¹⁸ Pb	1.19694	-	-
²¹⁹ Pb	1.19699	-	-
²²⁰ Pb	1.19704	-	-

Tabella A.4: Valori di $S_1^{J=1}/\text{TRK}$ per gli isotopi del Piombo

Appendice B

Acronimi

- **GDR** *Giant Dipole Resonance* Risonanza Gigante di Dipolo
- **GR** *Giant Resonance* Risonanza Gigante
- **TRK** *Regola di somma di Thomas-Reiche-Kuhn*

Bibliografia

- [Ahr75] J. Ahrens *et al.* ; Nucl. Phys. A 251 (1975) 479.
- [Auger] <https://www.auger.org/index.php/about-us>
- [Bal47] G. C. Baldwin, G. S. Klaiber; Phys. Rev. 71 (1947) 3.
- [Bal48] G. C. Baldwin, G. S. Klaiber; Phys. Rev. 73 (1948) 1156.
- [Bla52] J. M. Blatt, V. F. Weisskopf; *Theoretical nuclear physics*, John Wiley and sons, New York (1952).
- [Ber75] B. L. Berman, S. C. Fultz; Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 713.
- [Bot37] W. Bothem, W. Genter; Z. Phys. 106 (1937) 326.
- [Bro21] Brookhaven National Laboratory, NuDat 2.8,
<https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>
- [Cap09] R. Capote *et al.*; Nuclear Data Sheets 110 (2009) 3107.
- [Don11] V. De Donno, G. Co', M. Anguiano, A. M. Lallena, Phys. Rev. C 83 (2011) 044324.
- [Eis70] J. M. Eisenberg, W. Greiner; *Excitation Mechanisms of the nucleus*, North Holland, Amsterdam (1970).
- [Gol48] M. Goldhaber, E. Teller; Phys. Rev. 74, 1046 (1948).
- [Har01] M. N. Harakeh, A. van der Woude, *Giant Resonance: Fundamental High Energy Modes of Nuclear Excitation*, Oxford Science Publication, Oxford (UK) (2001).
- [Mor19] L. Morejon, A. Fedynitch, D. Boncioli, D. Biehla, W. Wintera; Jour. Cosm. Astr. Phys. 11 (2019) 007.
- [Mor20t] L. Morejon; *New Interaction Models of Ultra-high-energy Cosmic Rays from a Nuclear Physics Approach*, tesi di dottorato, Università Humboldt Berlino, (2020).

- [Plu18] V. A. Plujko, O. M. Gorbachenko, R. Capote, P. Dimitriou; Atomic Data and Nuclear Data Tables 123-124 (2018) 1.
- [Pit71] R. Pittthan, Th. Walcher; Phys. Lett. B 36 (1971) 563.
- [Root] <https://root.cern>
- [Rin80] P. Ring, P. Schuck; *The nuclear many body problem*, Springer, Berlino (1980).
- [San06] D. Santonocito, Y. Blumenfeld; Eur. Phys. J. A 30 (2006) 183.
- [Spe91] *Electric and magnetic Giant Resonances in Nuclei*, J. Speth Ed., World Scientific, Singapore (1991).
- [Ste50] H. Steinwedel; J.H.D. Jensen, P.Jensen, Phys. Rev. 79 1019 (1950).

Ringraziamenti

"...a chi, in me, ci ha sempre creduto...GRAZIE"

Al mio relatore, prof. Giampaolo Co', vorrei dire grazie per avermi dato la possibilità di poter lavorare insieme a lui su questa tesi, mi ha accompagnata passo dopo passo e chiarito ogni mio dubbio con la sua delicata gentilezza che lo contraddistingue da tutti. Non avrei potuto fare scelta migliore!

Alla mia piccola ma grande famiglia, la mia prima vera "fan", senza la quale oggi non sarei arrivata fin qui. Dal primo giorno hanno creduto in me, anche quando tutto mi sembrava così lontano e difficile, loro non hanno mai smesso di crederci. A mio padre che da sempre mi spinge a fare di più, con la sua frase: *"...d'altronde se fosse semplice, lo farebbero tutti!"* grazie!

Questo meraviglioso, ma difficile, percorso non si sarebbe concluso in questo modo senza i miei due amici, un vero punto di riferimento, i miei "Matti e Andre". Un grazie davvero importante va proprio a voi amici miei, con cui ho condiviso ogni singolo giorno di questi 3 anni, ogni esame, ogni lezione, ogni laboratorio... non avrei potuto trovare persone migliori di voi! La Fisica senza di voi... sarebbe tutta da riscrivere!

Ad una persona speciale, va un ringraziamento speciale: il mio amico Davide. Una delle poche persone che più di tutti mi ha ascoltata, supportata e sopportata, per ogni mia paura, ogni mia ansia pre-esame, ogni mia gioia post-esame, ha avuto sempre una parola di conforto pronta a farmi superare qualsiasi ostacolo. Grazie perchè se adesso sono arrivata qui è anche un po' merito tuo. Ti voglio bene, ma adesso non ti ci abituare!

Alle mie meravigliose amiche, Federica Valentina e Giulia vorrei dedicare un enorme grazie. Chi da molti molti anni, chi da un po' meno, chi con uno spritz, chi con una cena... siete sempre state presenti e al mio fianco in ogni mio passo, giusto o sbagliato che era.

Ed infine... un piccolo *grazie*, lo vorrei dedicare a me stessa. È stata una sfida che mai avrei immaginato di superare, eppure, mia cara Letizia, ora ti ritrovi con in mano una Laurea in Fisica! E adesso ?

Adesso si chiude un meraviglioso capitolo della mia vita ma... se ne riapre un altro sempre insieme a te, mia dolce e meravigliosa *Fisica*!

Ci risentiamo tra un paio d'anni! (spero)