



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”
Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Correlazioni e distribuzione di materia nucleare

Relatore:
Prof. Giampaolo CO’

Laureanda:
Lorella MOCKA

Anno Accademico 2023/2024

Sommario

L'obiettivo principale di questa tesi è verificare se le correlazioni a lungo raggio abbiano un effetto differente sulle densità di neutroni e protoni nei nuclei. Per indagare tale questione, sono stati impiegati due approcci teorici complementari: l'Independent Particle Model (IPM) e la Random-Phase Approximation (RPA). Il primo, punto di partenza per la maggior parte dei modelli nucleari, viene presentato mediante il calcolo Hartree–Fock, che ne fornisce la base teorica. Successivamente, viene introdotta la RPA, che permette di includere gli effetti dei moti collettivi, trascurati dall'IPM.

Nel lavoro sono presentate le formule necessarie per il calcolo delle densità nucleari in entrambi i casi, con particolare riferimento ai nuclei sferici a doppia shell chiusa. Infine, l'approccio teorico è applicato allo studio dei nuclei doppio magici ^{208}Pb e ^{48}Ca , per i quali vengono analizzati le distribuzioni di neutroni e protoni e l'impatto delle correlazioni a lungo raggio.

Indice

1	Introduzione	1
2	Modello a particelle indipendenti	3
2.1	Modello a campo medio	4
2.2	Teoria di Hartree-Fock	5
2.3	Distribuzioni di materia e di carica	11
2.4	Limiti del modello	12
3	Teoria RPA	14
3.1	Metodo delle equazioni del moto	15
3.2	Approssimazione Tamm-Dancoff	15
3.3	Random-Phase Approximation	17
4	Distribuzione di materia RPA	20
4.1	Stato fondamentale in RPA	20
4.2	Densità	22
4.3	Normalizzazione delle densità	23
5	Risultati	25
5.1	Input per il calcolo RPA	25
5.2	Livelli energetici	27
5.3	Densità puntiformi e di carica	29
5.3.1	Piombo	29
5.3.2	Calcio	31
5.4	Analisi dei contributi multipolari nelle LRC	34
5.4.1	Piombo	35
5.4.2	Calcio	37
6	Conclusioni	39
A	Sezione d'urto e densità di carica	41
B	Esempio di calcolo dei livelli energetici nell'IPM	43

C Sigle usate nel testo

45

Introduzione

Determinare come la materia si distribuisce all'interno del nucleo atomico è essenziale per comprenderne la struttura. Mentre la distribuzione dei protoni è nota con buona precisione grazie agli esperimenti di diffusione di elettroni, quella dei neutroni è meno accessibile. I dati sperimentali, ottenuti principalmente attraverso lo scattering adronico, risentono infatti delle incertezze legate alla modellizzazione dell'interazione forte [Cen10].

Un significativo progresso è stato raggiunto nel 2012 grazie al Parity Radius Experiment (PREX), condotto presso il JLAB [Abr12]. Questo esperimento, sfruttando la violazione di parità nella diffusione elastica di elettroni polarizzati, ha permesso di misurare il valore della neutron skin del ^{208}Pb . La neutron skin è definita come:

$$r_{ns} = \langle r^2 \rangle_n^{1/2} - \langle r^2 \rangle_p^{1/2} , \quad (1.1)$$

dove $\langle r^2 \rangle_n^{1/2}$ è il raggio quadratico medio della distribuzione dei neutroni e $\langle r^2 \rangle_p^{1/2}$ il raggio quadratico medio della distribuzione dei protoni. In particolare, la neutron skin si riferisce alla regione esterna di nuclei come il ^{208}Pb , in cui la densità di neutroni risulta maggiore rispetto a quella dei protoni.

Oltre a essere un tema centrale per la fisica nucleare, la neutron skin riveste un ruolo chiave anche in astrofisica. La neutron skin è infatti legata alla derivata dell'energia di simmetria rispetto la densità, grandezza direttamente proporzionale alla pressione della materia nucleare, con importanti implicazioni nelle stelle di neutroni (si veda a proposito [Bro00], [Cen10], [Ind23]).

L'esperimento PREX oltre ad essere ripetuto nel 2020, portando così a una maggiore precisione nella misura dello spessore della neutron skin del piombo [Adh21], ha portato a un esperimento analogo sulla neutron skin del nucleo di

^{48}Ca , l'esperimento CREX, [Adh22]). Questo esperimento ha permesso di ottenere dati sulla neutron skin del calcio, ampliando così il panorama di studio per nuclei più leggeri.

I risultati ottenuti forniscono nuove informazioni sulla distribuzione dei neutroni nei nuclei, ma sottolineano anche la necessità di approfondire la nostra conoscenza della struttura nucleare, che non può prescindere da una migliore comprensione del ruolo dei neutroni. L'attuale descrizione della distribuzione di materia nei nuclei si basa principalmente sui modelli a particelle indipendenti (Independent Particle Model, IPM), che considerano i nucleoni come entità non interagenti immerse in un campo medio. L'IPM, grazie all'uso di potenziali fenomenologici, riproduce con buona accuratezza i dati sperimentali riguardanti la densità, che tuttavia riguardano quasi esclusivamente i protoni.

L'assenza di interazione tra i nucleoni impedisce all'IPM di descrivere fenomeni collettivi, come ad esempio l'eccitazione delle risonanze giganti. Anche nello stato fondamentale ci sono fenomeni collettivi che sono trascurati nell'IPM. Questi fenomeni, che prendono il nome di correlazioni a lungo raggio (Long Range Correlations, LRC), sono essenzialmente dovuti all'accoppiamento dello stato fondamentale dell'IPM con le eccitazioni collettive del nucleo. Un metodo per descrivere queste correlazioni è quello di considerare le eccitazioni collettive descritte dalla teoria Random Phase Approximation (RPA).

L'obiettivo di questo lavoro è quello di analizzare l'effetto delle correlazioni sulle densità di neutroni e protoni, mettendo in evidenza le differenze che potrebbero emergere tra i due casi.

Dopo aver fornito una panoramica dell'IPM e dell'RPA, presenteremo i risultati dello studio svolto sui nuclei di ^{208}Pb e ^{48}Ca .

Modello a particelle indipendenti

Un modello nucleare efficace dovrebbe possedere determinate caratteristiche, ben riassunte in questa citazione di Preston [Pre75]:

"Da un modello nucleare, deve essere possibile, in modo sistematico e senza calcoli eccessivamente lunghi, prevedere varie proprietà osservabili dei nuclidi. Il test dell'utilità o del realismo di qualsiasi modello è rappresentato dalla misura in cui le sue previsioni sono confermate dall'esperimento."

Il modello a particelle indipendenti (IPM) è un ottimo esempio di questo approccio; nonostante la sua semplicità, rappresenta infatti un punto di partenza cruciale nella teoria a molti corpi ed è alla base del modello a shell. L'assunto fondamentale alla base dell'IPM è che i nucleoni all'interno del nucleo possano essere considerati come particelle indipendenti immerse in un campo medio, campo che rappresenta l'effetto delle interazioni tra nucleoni.

Il modello a campo medio viene ulteriormente perfezionato dalla teoria di Hartree-Fock, che oltre a fornire un fondamento teorico, ne migliora la descrizione introducendo un metodo iterativo per calcolare il potenziale medio. Per una migliore comprensione del modello IPM, partirò quindi da una descrizione del modello a campo medio per poi completarla con la teoria di Hartree-Fock.

2.1 Modello a campo medio

Assumendo che l'interazione tra nucleoni sia soltanto un'interazione a due corpi, l'equazione di Schrödinger che descrive il nucleo può essere scritta come segue:

$$\hat{H}\Psi = \left\{ \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 \right) + \sum_{i<j}^A \hat{V}(i, j) \right\} \Psi(1, \dots, A) = E\Psi(1, \dots, A) . \quad (2.1)$$

L'indice i rappresenta le coordinate dell' i -esimo nucleone di massa m_i . Il primo termine dell'hamiltoniana \hat{H} è il termine cinetico, con ∇^2 operatore Laplaciano, e il secondo termine è il contributo dovuto alle interazioni tra particelle.

Sommando e sottraendo dall'equazione (2.1) un generico termine di potenziale medio $\hat{U}(i)$ che agisce sulla singola particella, possiamo riscrivere l'equazione (2.1) come segue

$$\hat{H}\Psi = \left\{ \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \hat{U}(i) \right) + \sum_{i<j}^A \hat{V}(i, j) - \sum_{i=1}^A \hat{U}(i) \right\} \Psi = E\Psi . \quad (2.2)$$

Osservato che nell'equazione compaiono termini di singola particella, possiamo pensare all'hamiltoniana totale del sistema come la somma di due contributi:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_R . \quad (2.3)$$

Esplicitandone i termini, si ha

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i = \sum_{i=1}^A \left(-\frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \hat{U}(i) \right) , \quad (2.4)$$

ossia il termine \hat{H}_0 può essere scritto come somma di $\hat{h}(i)$, hamiltoniane di singola particella, mentre il secondo termine, detto di interazione residua, è

$$\hat{V}_R = \sum_{i<j}^A \hat{V}(i, j) - \sum_{i=1}^A \hat{U}(i) . \quad (2.5)$$

L'idea alla base del modello a campo medio è quella di considerare trascurabile l'interazione residua, riducendo così il problema alla ricerca della soluzione dell'hamiltoniana \hat{H}_0 . Essendo i termini indipendenti, la soluzione dell'equazio-

ne (2.4) sarà il prodotto delle funzioni di singola particella ϕ_i , autofunzioni di $\hat{h}(i)$:

$$\hat{h}(i) |\phi_i\rangle = \epsilon_i |\phi_i\rangle . \quad (2.6)$$

La soluzione sarà quindi

$$|\Phi\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \cdots |\phi_A\rangle . \quad (2.7)$$

Inoltre, essendo i nucleoni particelle fermioniche, bisogna richiedere che la funzione d'onda totale Φ_k sia antisimmetrica per lo scambio di due particelle. La soluzione sarà quindi espressa da un determinante di Slater

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det\{|\phi_i\rangle\} . \quad (2.8)$$

Una possibile ipotesi è che il potenziale medio $\hat{U}(i)$ sia un potenziale centrale. L'approssimazione a potenziale centrale nel caso nucleare, storicamente, ha le sue origini nell'osservazione dell'esistenza dei numeri magici e della struttura a shell.

Scegliendo un potenziale centrale in (2.4), diventa conveniente esprimere le funzioni di singola particella come prodotto della sua parte radiale, dipendente da $r \equiv |\mathbf{r}|$, la distanza della particella dal centro delle coordinate, per i termini dipendenti dalle coordinate angolari θ e φ delle coordinate polari sferiche:

$$\phi_{nljm}(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) \sum_{m_l m_s} \left\langle lm_l \frac{1}{2} m_s \middle| jm \right\rangle Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \chi_{m_s} , \quad (2.9)$$

dove χ_{m_s} rappresenta lo spinore di Pauli, Y_{lm_l} l'armonica sferica e il simbolo $\langle \rangle$ indica il coefficiente di Clebsch-Gordan.

2.2 Teoria di Hartree-Fock

Nel modello a campo medio i nucleoni sono descritti come indipendenti uno dall'altro e immersi in un potenziale medio. Il passo successivo è quello di ottenere un potenziale a singola particella a partire dalla somma delle interazioni a due corpi. Vedremo che grazie al metodo di Hartree-Fock questo è possibile. Il principio alla base del metodo è quello variazionale, con il quale è possibile risolvere in maniera approssimata l'equazione di Schrödinger.

Il principio variazionale afferma l'equivalenza tra la soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad , \quad (2.10)$$

e la minimizzazione del funzionale d'energia

$$\delta E[\Psi] = 0 \quad , \quad (2.11)$$

dove

$$E[\Psi] = \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad . \quad (2.12)$$

Questa affermazione è vera se la ricerca del minimo dell'energia è fatta considerando l'intero spazio di Hilbert. In realtà, la ricerca della funzione $|\Psi\rangle$ che minimizza il funzionale, è solitamente fatta in un sottospazio definito da un insieme di funzioni d'onda di prova matematicamente semplici. Se tra le funzioni di prova non è presente l'esatta autofunzione, la funzione che minimizza il funzionale d'energia (2.11) sarà un'approssimazione della soluzione. Si può inoltre dimostrare, si veda ad esempio [Mes61], che per ogni $|\Psi\rangle$ è vera la disuguaglianza

$$E[\Psi] \geq E_0 \quad , \quad (2.13)$$

dove E_0 è l'autovalore di \hat{H} corrispondente all'energia dello stato fondamentale e $E[\Psi]$ è il valore dell'energia ottenuta con $|\Psi\rangle$. Il segno di uguaglianza è valido solo nel caso in cui Ψ sia autostato di \hat{H} .

Il metodo di Hartree-Fock consiste nell'utilizzo di determinanti di Slater come funzioni di prova e nella minimizzazione dell'energia, secondo il principio variazionale.

$$E^{HF} = \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle \quad (2.14)$$

Per la trattazione verrà usata la rappresentazione dei numeri di occupazione (ONR) spesso adottata nell'ambito della teoria a molti corpi [Fet71].

Gli stati di singola particella occupati verranno caratterizzati dalle lettere i , j e quelli vuoti dalle lettere m , n . Gli stati non specificati saranno caratterizzati dalle lettere greche. Il determinante di Slater, che descrive lo stato fondamentale

2. Modello a particelle indipendenti

di A fermioni, assume in ONR la forma:

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{i=1}^A \hat{a}_i^\dagger |0\rangle, \quad (2.15)$$

dove $|0\rangle$ rappresenta lo stato vuoto (*vacuum state*) e gli operatori \hat{a}_i^\dagger e \hat{a}_i , gli operatori di creazione e distruzione, rispettivamente.

=====

L'hamiltoniana di un sistema fermionico a molti corpi, considerando solo interazioni a due corpi, è data in seconda quantizzazione da:

$$\hat{H} = \sum_{\nu\nu'} T_{\nu\nu'} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_{\nu'} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \bar{V}_{\nu\mu,\nu'\mu'} \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_{\mu'} \hat{a}_{\nu'}, \quad (2.16)$$

dove $\bar{V}_{\nu\mu,\nu'\mu'}$ è l'elemento di matrice antisimmetrizzato del potenziale:

$$\bar{V}_{\nu\mu,\nu'\mu'} = V_{\nu\mu\nu'\mu'} - V_{\nu\mu\mu'\nu'}. \quad (2.17)$$

Inoltre il termine di energia cinetica $T_{\nu\nu'}$ e quello di interazione $V_{\nu\mu\nu'\mu'}$ sono legati alle funzioni di singola particella da:

$$\begin{aligned} T_{\nu\nu'} &= \langle \nu | \hat{T} | \nu' \rangle = \int d^3\mathbf{r} \phi_\nu^* \hat{T} \phi_{\nu'}(\mathbf{r}), \\ V_{\nu\mu\nu'\mu'} &= \langle \nu\mu | \hat{V} | \nu'\mu' \rangle = \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \phi_\nu^*(\mathbf{r}) \phi_\mu^*(\mathbf{r}') \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_{\nu'}(\mathbf{r}) \phi_{\mu'}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Un'espressione del tutto equivalente a (2.16) e particolarmente utile per separare il contributo del campo medio dalle interazioni residue è [Co22]:

$$\hat{H} = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} \hat{a}_{\nu}^\dagger \hat{a}_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \hat{\mathbb{N}} [\hat{a}_{\nu}^\dagger \hat{a}_{\mu}^\dagger \hat{a}_{\mu'} \hat{a}_{\nu'}], \quad (2.19)$$

dove $\hat{\mathbb{N}}$ indica l'operatore prodotto normale ordinato. Questa forma è ottenuta riorganizzando i termini dell'hamiltoniana iniziale senza introdurre ulteriori approssimazioni. L'hamiltoniana viene espressa in una base in cui il termine di singola particella:

$$\hat{h}_{\nu\nu'} = \hat{T}_{\nu\nu'} + \sum_i \bar{V}_{\nu i \nu' i}, \quad (2.20)$$

è diagonalizzato. Quindi il termine ϵ_ν in (2.19) rappresenta un autovalore dell'hamiltoniana di particella singola. La nuova espressione permette di evidenziare il termine di interazione residua, \hat{V}_{res} , che è quello dipendente da \hat{N} . Dato che, per definizione, il valore di aspettazione di una sequenza di operatori di creazione e distruzione normalmente ordinati rispetto ad uno stato fondamentale determinante di Slater è nullo, se calcoliamo il valore di aspettazione dell'hamiltoniana (2.19) nello stato fondamentale otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | \hat{H} | \Phi_0 \rangle &= \sum_\nu \epsilon_\nu \langle \Phi_0 | \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\nu | \Phi_0 \rangle - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij} \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu\mu'\nu\nu'} \bar{V}_{\nu\mu\nu'\mu'} \langle \Phi_0 | \hat{N} [\hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_{\mu'} \hat{a}_{\nu'}] | \Phi_0 \rangle \\ &= \sum_i \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij} = E_0 . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nel calcolo dell'energia dello stato fondamentale rispetto ad uno stato descritto come determinante di Slater, il termine di interazione residua è trascurato. Si sottolinea così ancora una volta l'ipotesi caratteristica del modello a particelle indipendenti.

Per affrontare il calcolo HF, si usa l'hamiltoniana (2.19) per cercare il minimo di E^{HF} nel sottospazio di Hilbert formato da tutti i possibili determinanti di Slater. Nel selezionare l'insieme di funzioni d'onda a singola particella che formano il determinante di Slater, bisogna imporre come ulteriore condizione la loro ortonormalità affinché possano formare una base. La ricerca del minimo che rispetti la condizione imposta può essere svolta con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\delta \left[E(\Phi) - \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle i|j \rangle \right] = \delta \frac{\langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} - \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta \langle i|j \rangle = 0 , \quad (2.22)$$

dove λ_{ij} sono i moltiplicatori di Lagrange e $|i\rangle$ rappresenta uno degli stati di singola particella che formano il determinante di Slater $|\Phi\rangle$.

Sostituendo l'espressione di \hat{H} ottenuta precedentemente, si ottiene:

$$\sum_i \delta(\langle i | \hat{T} | i \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{ij} [\delta \langle ij | \hat{V} | ij \rangle - \delta \langle ij | \hat{V} | ji \rangle] - \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta \langle i|j \rangle = 0 . \quad (2.23)$$

2. Modello a particelle indipendenti

Per il termine di variazione sui bra e ket, si consideri che gli indici i e j sono muti. Si può quindi utilizzare la relazione:

$$\sum_{ij} \delta \langle ij | = \sum_{ij} [\langle (\delta i) j | + \langle i (\delta j) |] = 2 \sum_{ij} \langle (\delta i) j | . \quad (2.24)$$

che consente di riscrivere la (2.23) come

$$\sum_i \langle (\delta i) | \hat{T} | i \rangle + \sum_{ij} [\langle (\delta i) j | \hat{V} | ij \rangle - \langle (\delta i) j | \hat{V} | ji \rangle] - \sum_{ij} \lambda_{ij} \langle (\delta i) | j \rangle = 0 . \quad (2.25)$$

Poiché le variazioni $\langle (\delta i) |$ sono indipendenti tra loro, ogni termine della sommatoria con indice i deve essere nullo, il che porta alla condizione

$$\langle (\delta i) | \hat{T} | i \rangle + \sum_j [\langle (\delta i) j | \hat{V} | j \rangle - \langle (\delta i) j | \hat{V} | ji \rangle] - \sum_j \lambda_{ij} \langle (\delta i) | j \rangle = 0 . \quad (2.26)$$

Semplificando il termine $\langle (\delta i) |$, si ottiene

$$\hat{T} | i \rangle + \sum_j [\langle j | \hat{V} | j \rangle | i \rangle - \langle j | \hat{V} | i \rangle | j \rangle] - \sum_j \lambda_{ij} | j \rangle = 0 . \quad (2.27)$$

I moltiplicatori di Lagrange λ_{ij} possono essere considerati come l'elemento di matrice dell'hamiltoniana di singola particella \hat{h} :

$$\lambda_{ij} = \langle i | \hat{h} | j \rangle . \quad (2.28)$$

Ci si pone ora nella base in cui la matrice \hat{h} è diagonale, con gli autovalori ϵ_i che rappresentano gli autovalori dell'hamiltoniana di singola particella :

$$\langle \tilde{i} | \hat{h} | \tilde{j} \rangle = \epsilon_i \delta_{ij} . \quad (2.29)$$

La relazione che lega le due basi è:

$$|\tilde{k}\rangle = \sum_{k'} \hat{U}_{kk'} |k'\rangle , \quad (2.30)$$

2. Modello a particelle indipendenti

dove \hat{U} è la matrice di trasformazione unitaria che soddisfa:

$$\sum_{kk'} \hat{U}_{kk'}^\dagger \hat{U}_{k'k} = \hat{\mathbb{I}} \quad \text{e} \quad |\det(\hat{U})| = 1. \quad (2.31)$$

Poiché la trasformazione tra le basi è unitaria, il modulo del determinante di Slater rimane invariato. Per questo motivo, il funzionale dell'energia, che dipende dal modulo del determinante, è invariante sotto trasformazioni unitarie, quindi cambiando di base anche la variazione sul funzionale rimarrà invariata. Nella nuova base, l'equazione (2.27) diventa:

$$\hat{h} |\tilde{i}\rangle = \hat{T} |\tilde{i}\rangle + \sum_{\tilde{j}} \left[\hat{V} |\tilde{j}\rangle - \langle \tilde{j} | \hat{V} |\tilde{j}\rangle |\tilde{i}\rangle \right] = \sum_{\tilde{i}} \epsilon_{\tilde{i}}. \quad (2.32)$$

Possiamo infine esprimere l'equazione nella rappresentazione delle coordinate e, per semplificare la notazione, fare a meno del simbolo di tilde. Si ottengono così le equazioni di Hartree-Fock:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi_i(\mathbf{r}) + \hat{U}(\mathbf{r}) \right\} \varphi_i(\mathbf{r}) - \int d\mathbf{r}' \hat{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_i(\mathbf{r}') = \epsilon_i \varphi_i(\mathbf{r}), \quad (2.33)$$

dove

$$\hat{U}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^A \int d\mathbf{r}' \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_j^*(\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}'), \quad (2.34)$$

è il termine di campo medio, o di Hartree, e

$$\hat{W}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{V}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j=1}^A \varphi_j^*(\mathbf{r}') \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (2.35)$$

il potenziale non locale, detto di Fock-Dirac. Si osserva che, a differenza dell'equazione (2.4) ottenuta prima nell'ipotesi di campo medio, qui compare anche il termine di Fock-Dirac, che è una conseguenza della statistica fermionica e viene detto termine di scambio.

La soluzione delle equazioni di Hartree-Fock si basa su un processo iterativo, in cui si parte da un insieme iniziale di funzioni di singola particella di prova che permette di calcolare i potenziali. Utilizzando questi potenziali si risolve l'equazione (2.33) e si ottiene un nuovo insieme di funzioni di singola particella, con cui il calcolo viene ripetuto fino al raggiungimento della convergenza.

Dal punto di vista pratico, sin dalle prime applicazioni del metodo di Hartree-Fock nella descrizione dello stato fondamentale dei nuclei, è emersa l'esigenza di includere nella forza nucleone-nucleone anche un termine dipendente esplicitamente dalla densità del sistema nucleare. Dal punto di vista formale l'equazione di Hartree-Fock (2.33) non subisce modifiche. Tuttavia, l'aggiunta del termine dipendente dalla densità consente di ottenere delle interazioni effettive tra nucleoni, in grado di riprodurre i valori empirici delle energie di legame di migliaia di nuclei (si veda ad esempio la compilazione in [Amedee]). Le ragioni fisiche per cui sia necessaria la presenza di questa dipendenza dalla densità sono ancora oggetto di studio.

2.3 Distribuzioni di materia e di carica

Siamo ora interessati all'utilizzo delle equazioni HF nel calcolo della densità di materia di un nucleo. Introduciamo l'operatore densità puntiforme per un sistema di A particelle:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.36)$$

Il valore di aspettazione può essere calcolato come

$$\rho(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_A \Psi^*(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_A) \left[\sum_{i=1}^A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] \Psi(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_A). \quad (2.37)$$

Sostituendo a Ψ i determinanti di Slater utilizzati nel modello IPM, si ottiene

$$\rho^{IPM}(\mathbf{r}) = \sum_{i < \epsilon_f} \varphi_i^*(\mathbf{r}) \varphi_i(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

Le informazioni riguardanti la forma e la densità dei nuclei sperimentalmente vengono ricavati dallo scattering elastico di elettroni da nuclei [Pov04]. La ragione di questa scelta è di carattere pratico: gli elettroni sono, secondo l'attuale stato della conoscenza, particelle puntiformi, prive di struttura interna. Ciò è particolarmente vantaggioso negli esperimenti di scattering, poiché l'interazione riflette le proprietà del bersaglio, senza influenze significative del proiettile. Inoltre, l'interazione tra elettroni e nucleoni è di tipo elettromagnetico ed è un'interazione

ben compresa rispetto alla forza nucleare. Pertanto, per confrontare i risultati della teoria HF con quelli sperimentali, è necessario calcolare la densità di carica. Questo passaggio avviene tramite una convoluzione della densità puntiforme con il fattore di forma elettromagnetico del nucleone, che contiene informazioni sulla distribuzione di carica del nucleone. Gli esperimenti non forniscono direttamente la densità di carica ma la sezione d'urto. La relazione tra sezione d'urto e distribuzione di carica è presentata nell'appendice [A](#).

2.4 Limiti del modello

Il modello a particelle indipendenti permette di ricavare le proprietà principali dello stato fondamentale dei nuclei, come l'energia di legame le distribuzioni di carica e di materia. Lo stesso modello non descrive altrettanto bene gli stati eccitati del nucleo.

Nel modello a particelle indipendenti lo stato complessivo dei nucleoni può essere descritto da un singolo determinante di Slater. In particolare, lo stato fondamentale corrisponde al determinante di Slater in cui tutte le particelle occupano livelli energetici al di sotto del livello di Fermi. Dall'ipotesi IPM segue che i livelli energetici superiori possono essere costruiti a partire dal determinante di Slater dello stato fondamentale, promuovendo delle particelle a un livello energetico superiore [Co23]. Considerando uno stato di A particelle in cui N particelle sono state promosse, il formalismo ONR consente di descrivere il procedimento come segue

$$|\Phi_N\rangle = \hat{a}_{p_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{p_N}^\dagger \hat{a}_{h_1} \cdots \hat{a}_{h_N} |\Phi_0\rangle \quad , \quad N < A. \quad (2.39)$$

Qui, gli operatori di distruzione e costruzione formalizzano l'operazione in questo modo: l'operatore di distruzione \hat{a} rimuove la particella sotto al livello di Fermi creando uno stato buco, mentre l'operatore di creazione \hat{a}^\dagger porta una particella al di sopra del livello di Fermi, generando uno stato particella. Lo stato $|\Phi_N\rangle$ è un determinante di Slater ed è autostato dell'hamiltoniana IPM:

$$\hat{H}_0 |\Phi_N\rangle = E_N |\Phi_N\rangle . \quad (2.40)$$

L'energia di eccitazione del sistema sarà data dalla somma delle differenze di

energia di singola particella tra gli stati di buca e gli stati di particella

$$\omega^{\text{IPM}} = \sum_p \epsilon_p - \sum_h \epsilon_h \quad .$$

La configurazione particella-buca tipica dell'IPM, non fornisce tuttavia risultati soddisfacenti. Anche considerando, ad esempio, nuclei relativamente semplici nella loro struttura, i doppio magici a simmetria sferica come ^{208}Pb e ^{16}O , il modello a particelle indipendenti non riesce a descrivere i primi livelli energetici eccitati [Pre75, Co23], si veda l'appendice B. Segue da questo che nella comprensione di nuclei eccitati, gli effetti dovuti a moti collettivi, generati dall'interazione residua tra i nucleoni non possono essere trascurati.

3

Teoria RPA

Abbiamo visto come il modello a particelle indipendenti trascuri l'interazione residua, limitandosi a una descrizione approssimativa del nucleo. Per migliorare la comprensione del nucleo, sono state sviluppate diverse teorie che possano tenere conto delle correlazioni tra nucleoni. Con il termine correlazione si intendono gli effetti delle interazioni tra i nucleoni che non vengono presi in considerazione dall'IPM. Le correlazioni si classificano in due categorie principali: quelle a corto raggio, legate alla repulsione nucleone-nucleone a distanze molto piccole e alla struttura interna dei nucleoni, e quelle a lungo raggio, associate ai moti collettivi del nucleo e derivanti da fluttuazioni su larga scala nel sistema. La teoria *Random-Phase Approximation*, o RPA, ha lo scopo di trattare le correlazioni a lungo raggio. Un passaggio intermedio utile per comprendere l'RPA è l'approssimazione di Tamm-Dancoff (TDA), che rappresenta un primo approccio di come poter descrivere gli stati eccitati del nucleo.

Esistono diversi modi per ottenere le equazioni RPA. Il metodo scelto per presentarle è il cosiddetto metodo delle equazioni del moto [Row68], che ha il vantaggio di offrire una chiara interpretazione fisica delle approssimazioni. Il capitolo non ha l'obiettivo di sviluppare in dettaglio i calcoli, per i quali si rimanda ai riferimenti principali, [Rin80, Co23]. Nelle prossime sezioni verranno quindi presentate le equazioni alla base delle approssimazioni note come TDA ed RPA, sottolineandone l'approccio che le caratterizza e le differenze con l'IPM.

3.1 Metodo delle equazioni del moto

L'idea alla base del metodo è quella di esprimere le equazioni del moto non in termini di operatori, ma come valori di aspettazione degli operatori nello stato fondamentale. Si consideri l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H} |\Psi_\nu\rangle = E_\nu |\Psi_\nu\rangle \quad (3.1)$$

dove il ket $|\Psi_\nu\rangle$ rappresenta un generico stato eccitato del sistema. Definiamo ora l'operatore \hat{Q}_ν^\dagger come

$$\hat{Q}_\nu^\dagger |\Psi_0\rangle = |\Psi_\nu\rangle \quad , \quad \hat{Q}_\nu |\Psi_0\rangle = 0 \quad , \quad (3.2)$$

dove il ket $|\Psi_0\rangle$ rappresenta lo stato fondamentale. Dall'azione dell'operatore \hat{Q}_ν segue anche la definizione dello stato fondamentale. È possibile legare lo stato eccitato (3.2) all'hamiltoniana del sistema e a un generico operatore \hat{O} con l'espressione [Rin80, Co22]:

$$\langle \Psi_0 | [\hat{O}, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^\dagger]] | \Psi_0 \rangle = (E_\nu - E_0) \langle \Psi_0 | [\hat{O}, \hat{Q}_\nu^\dagger] | \Psi_0 \rangle . \quad (3.3)$$

La scelta dell'espressione dell'operatore \hat{Q}_ν^\dagger definisce le diverse approssimazioni usate per descrivere gli stati eccitati del sistema.

3.2 Approssimazione Tamm-Dancoff

La scelta dell'operatore \hat{Q}_ν^\dagger nell'approssimazione TDA consiste in una combinazione lineare di eccitazioni particella-buca. L'operatore \hat{Q}_ν^\dagger è definito come

$$\hat{Q}_\nu^\dagger = \sum_{ph} X_{ph}^\nu \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_h \quad , \quad (3.4)$$

dove X_{ph}^ν è un numero e gli operatori $\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_h$ rappresentano l'operazione di rimuovere una particella dal livello h e posizionarla nel livello p , sopra al livello di Fermi. L'equazione sopra è stata scritta seguendo la convenzione di indicare gli stati buca con le lettere h, i, j, k e gli stati particella con m, n, p, q, r . La definizione dell'operatore nell'equazione (3.4) soddisfa la relazione con lo stato fondamentale

richiesta in (3.2) quando lo stato fondamentale è il determinante di Slater del IPM, infatti si ha

$$\hat{Q}_\nu |\Phi_0\rangle = \sum_{ph} X_{ph}^{*\nu} \hat{a}_h^\dagger \hat{a}_p |\Phi_0\rangle = 0, \quad (3.5)$$

dove il ket $|\Phi_0\rangle$ è lo stato fondamentale come definito sopra e il risultato nullo segue dal fatto che tutti gli stati particella siano vuoti (si osservino gli indici negli operatori di creazione e di distruzione). La variazione infinitesimale dell'operatore $\hat{Q}_\nu |\Phi_0\rangle$ è:

$$\delta \hat{Q}_\nu = \sum_{ph} \hat{a}_h^\dagger \hat{a}_p \delta X_{ph}^{*\nu}. \quad (3.6)$$

Sostituendo in (3.2) l'espressione (3.4) e il conseguente $\delta \hat{Q}_\nu$ a \hat{O} si ottiene l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | \left[\sum_{ph} \hat{a}_h^\dagger \hat{a}_p \delta X_{ph}^{*\nu}, [\hat{H}, \sum_{p'h'} X_{p'h'}^\nu \hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_{h'}] \right] | \Phi_0 \rangle \\ = (E_\nu - E_0) \langle \Phi_0 | \left[\sum_{mi} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m \delta X_{mi}^{*\nu}, \sum_{nj} X_{nj}^\nu \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j \right] | \Phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'equazione sopra è una somma di termini indipendenti, essendo le variazioni $\delta X_{ph}^{*\nu}$ indipendenti una dall'altra. Inoltre, avendo $\delta X_{ph}^{*\nu} \neq 0$, si può semplificare il termine ottenendo per il singolo termine della sommatoria caratterizzato da p, h l'equazione:

$$\langle \Phi_0 | \left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \sum_{p'h'} X_{p'h'}^\nu \hat{a}_{p'}^\dagger \hat{a}_{h'}] \right] | \Phi_0 \rangle = (E_\nu - E_0) \sum_{nj} X_{nj}^\nu \langle \Phi_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | \Phi_0 \rangle. \quad (3.8)$$

Espandiamo il commutatore al secondo membro:

$$\langle \Phi_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j | \Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0 | \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m | \Phi_0 \rangle. \quad (3.9)$$

Per il primo termine si può sfruttare il teorema di Wick :

$$\langle \Phi_0 | \overbrace{\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j} | \Phi_0 \rangle = \delta_{ij} \delta_{mn}. \quad (3.10)$$

Il secondo termine invece si annulla per via di

$$\hat{a}_m | \Phi_0 \rangle = 0. \quad (3.11)$$

Inserendo i risultati appena ottenuti, l'equazione (3.8) diventa :

$$\langle \Phi_0 | \left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \sum_{p'h'} X_{p'h'}^\nu \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{h'}] \right] | \Phi_0 \rangle = (E_\nu - E_0) X_{mi}^\nu. \quad (3.12)$$

Per quanto riguarda l'hamiltoniana presente a primo membro si può usare l'hamiltoniana nella forma già presentata durante il calcolo HF, cioè:

$$\hat{H} = \sum_\nu \epsilon_\nu \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\nu + \frac{1}{4} \sum_{\mu\nu\mu'\nu'} \bar{V}_{\nu\mu\nu'\mu'} \mathbb{N}[\hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_{\mu'} \hat{a}_{\nu'}] - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij}. \quad (3.13)$$

A questo punto, si può procedere con il calcolo del doppio commutatore. I passaggi, che non verranno esplicitati di seguito (per i dettagli si veda [Co22, Co23]), conducono alle equazioni TDA:

$$\sum_{nj} X_{nj}^\nu [(\epsilon_n - \epsilon_j) \delta_{mn} \delta_{ij} + \bar{V}_{mjn}] = (E_\nu - E_0) X_{mi}^\nu, \quad (3.14)$$

dove

$$\bar{V}_{mjn} \equiv \langle mj | V | in \rangle - \langle mj | V | ni \rangle. \quad (3.15)$$

Si ottiene quindi un sistema omogeneo di equazioni, le cui incognite sono X_{mi}^ν .

3.3 Random-Phase Approximation

Le previsioni del modello TDA non sono soddisfacenti se comparate ai dati sperimentali. Oltre a una limitazione di tipo pragmatico, il modello presenta criticità dal punto di vista teorico. Le equazioni del moto, (3.3), dovrebbero essere valide per un qualsiasi operatore \hat{O} . Scelto l'operatore \hat{Q}_ν^\dagger come da TDA, l'equazione del moto risulta soddisfatta per $\delta\hat{Q}_\nu$. Tuttavia, se si sostituisce ad \hat{O} l'operatore $\delta\hat{Q}_\nu^\dagger$, l'equazione del moto non è più soddisfatta. Tali limiti, sia sperimentali che teorici, hanno motivato l'introduzione di formalismi più avanzati, come il modello RPA.

La generalizzazione dell'operatore \hat{Q}_ν nelle equazioni RPA è il seguente

$$\hat{Q}_\nu^\dagger = \sum_{ph} X_{ph}^\nu \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_h - \sum_{ph} Y_{ph}^\nu \hat{a}_h^\dagger \hat{a}_p, \quad (3.16)$$

dove sia X_{ph} , sia Y_{ph} sono numeri reali. Lo stato fondamentale RPA è definito, analogamente alla TDA, dalla condizione:

$$\hat{Q}_\nu |\nu_0\rangle = 0, \quad (3.17)$$

dove $|\nu_0\rangle$ non è lo stato fondamentale del modello a particelle indipendenti. Si può infatti facilmente verificare che

$$\hat{Q}_\nu |\Phi_0\rangle = \sum_{ph} X_{ph}^{*\nu} \hat{a}_h^\dagger \hat{a}_p |\Phi_0\rangle - \sum_{ph} Y_{ph}^{*\nu} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_h |\Phi_0\rangle \neq 0. \quad (3.18)$$

Analogamente a quanto fatto nella TDA, l'operatore appena definito e la sua variazione infinitesima $\delta\hat{Q}_\nu$ si sostituiscono nell'equazione (3.3) e si ottiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{mi} \delta X_{mi}^\nu \langle \nu_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^+]] | \nu_0 \rangle - \sum_{mi} \delta Y_{mi}^\nu \langle \nu_0 | [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^+]] | \nu_0 \rangle \\ &= (E_\nu - E_0) \left\{ \sum_{mi} \delta X_{mi}^\nu \langle \nu_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{Q}_\nu^+] | \nu_0 \rangle - \sum_{mi} \delta Y_{mi}^\nu \langle \nu_0 | [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, \hat{Q}_\nu^+] | \nu_0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A differenza di prima, la variazione è di due tipi: $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ e $\hat{a} \hat{a}^\dagger$. Inoltre come prima, i termini della sommatoria sono indipendenti tra loro. L'equazione (3.19) si può quindi riscrivere come un sistema di due equazioni del tipo:

$$\begin{aligned} \langle \nu_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^+]] | \nu_0 \rangle &= (E_\nu - E_0) \langle \nu_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{Q}_\nu^+] | \nu_0 \rangle \\ \langle \nu_0 | [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^+]] | \nu_0 \rangle &= (E_\nu - E_0) \langle \nu_0 | [\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i, \hat{Q}_\nu^+] | \nu_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il calcolo dei valori di aspettazione sullo stato $|\nu_0\rangle$ è, a questo punto del ragionamento, impossibile, in quanto non conosciamo ancora la sua struttura in funzione degli stati di singola particella. Lo stato fondamentale, come vedremo in seguito, sarà noto una volta risolte le equazioni RPA. Per sviluppare ulteriormente le equazioni (3.20), senza esplicitare lo stato, si usa l'approssimazione nota come *Quasi-Boson Approximation*, (QBA). In questa approssimazione, si considera che i valori di aspettazione dei commutatori calcolati nello stato RPA siano simili a quelli calcolati nello stato fondamentale HF, ossia si ha

$$\langle \nu_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | \nu_0 \rangle \approx \langle \Phi_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j] | \Phi_0 \rangle = \delta_{ij} \delta_{mn}. \quad (3.21)$$

Considerando il primo termine dell'equazione 3.20 e applicando la QBA, si ha ad esempio:

$$\langle \nu_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^+]] | \nu_0 \rangle \approx \langle \Phi_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \hat{Q}_\nu^+]] | \Phi_0 \rangle . \quad (3.22)$$

Nell'approssimazione fatta gli operatori rispettano le relazioni di commutazione bosoniche, da cui il nome.

Dalle equazioni (3.20), tenendo conto dell'ipotesi QBA, si giunge alle equazioni RPA, che in forma compatta possono essere riportate come segue:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = (E_\nu - E_0) \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & -\mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} , \quad (3.23)$$

dove X^ν e Y^ν sono vettori e A e B matrici quadrate. Gli elementi delle due matrici nella QBA sono

$$\begin{aligned} A_{minj} &= \langle \Phi_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_j]] | \Phi_0 \rangle = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \bar{V}_{mjn} , \\ B_{minj} &= - \langle \Phi_0 | [\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_m, [\hat{H}, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_n]] | \Phi_0 \rangle = \bar{V}_{mnij} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ponendo Y^ν a zero si riottengono le equazioni TDA. Sono pertanto una misura delle correlazioni nello stato fondamentale. Si osserva inoltre che l'elemento di matrice A_{minj} è lo stesso ottenuto nelle TDA (3.14).

Distribuzione di materia RPA

Nei capitoli precedenti abbiamo sottolineato come si sia resa necessaria l'introduzione di modelli teorici più avanzati per via della limitatezza dell'IPM nel prevedere, ad esempio, gli stati eccitati del nucleo. In questo contesto, sono state presentate le equazioni della teoria RPA, note anche come equazioni secolari, che si rivelano particolarmente utili per la loro capacità di descrivere le correlazioni a lungo raggio e le eccitazioni collettive nei sistemi quantistici.

Oltre al suo utilizzo per lo studio delle transizioni di stato e delle vibrazioni nucleari, l'RPA trova applicazione anche nella descrizione delle proprietà del nucleo nel suo stato fondamentale come la densità nucleare, offrendo in questo modo un'ulteriore base per il confronto con altri modelli, come l'IPM.

In questo capitolo si affronterà il problema delle correlazioni nello stato fondamentale, fornendo un'espressione analitica per lo stato fondamentale nell'ambito della RPA. Questo passo permette di completare la formulazione della teoria e gettare le basi per un'analisi più dettagliata della densità nucleare. Infine, verrà derivata un'espressione per la densità, particolarmente rilevante per il confronto con i risultati dell'IPM e per applicazioni nel calcolo delle distribuzioni di densità nucleare nei nuclei doppio magici.

4.1 Stato fondamentale in RPA

Lo stato fondamentale nel RPA viene definito dalla condizione:

$$\hat{Q}_\nu |\nu_0\rangle = 0. \quad (4.1)$$

L'esatta soluzione dell'equazione risulta alquanto complicata. Tuttavia utilizzando l'approssimazione quasi-bosonica è possibile esprimere lo stato fondamentale RPA in funzione dello stato fondamentale HF [Row10]. Si può dimostrare che:

$$|\nu_0\rangle = \mathcal{N}_0 e^{\hat{S}} |\Phi_0\rangle, \quad (4.2)$$

dove \mathcal{N} è una costante di normalizzazione e l'operatore \hat{S} è definito come

$$\hat{S} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu, minj} s_{\nu, minj} \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_j. \quad (4.3)$$

In questa espressione, ν denota le combinazioni di momento angolare e parità, mentre $s_{\nu, minj}$ rappresenta i coefficienti associati. Gli indici m, n si riferiscono a stati di particella, mentre i, j indicano stati di buca. La somma si estende su tutte le possibili coppie buca-particella e su tutti i valori permessi di ν .

Utilizzando la relazione (4.3) è possibile ricavare un'espressione molto utile per il calcolo del valore atteso di operatori. Nel linguaggio della seconda quantizzazione, un generico operatore a un corpo $\hat{\mathcal{O}}$ si può scrivere

$$\hat{\mathcal{O}} = \sum_{\mu\mu'} \langle \mu | \mathcal{O} | \mu' \rangle \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_{\mu'} = \sum_{\mu\mu'} \mathcal{O}_{\mu\mu'} \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_{\mu'}. \quad (4.4)$$

Il valore atteso nello stato fondamentale dell'operatore $\hat{\mathcal{O}}$ RPA è [Co22]:

$$\langle \nu_0 | \hat{\mathcal{O}} | \nu_0 \rangle = \sum_h \mathcal{O}_{hh} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_\nu \sum_p |Y_{ph}^\nu|^2 \right] + \sum_p \mathcal{O}_{pp} \left[\frac{1}{2} \sum_\nu \sum_h |Y_{ph}^\nu|^2 \right], \quad (4.5)$$

dove gli indici delle sommatorie scorrono sugli stati p e h , rispettivamente stati particella e stati buca. Si osserva come la presenza di Y_{ph}^ν modifichi il risultato rispetto al valore di aspettazione nello stato fondamentale IPM, il cui valore è dato dalla somma dei valori di aspettazione di singola particella dell'operatore. L'equazione sopra mostra il contributo delle correlazioni nello stato fondamentale.

4.2 Densità

Siamo interessati ora al valore di aspettazione della densità puntiforme $\hat{\rho}$ (2.36) che in seconda quantizzazione diventa

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{\mu\mu'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\mu) \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_{\mu'} , \quad (4.6)$$

Per descrivere la densità, possiamo scegliere una base sferica accoppiata in momento angolare, in cui le funzioni d'onda di singola particella, come visto in (2.9), sono espresse da:

$$\phi_{nljm}(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) \sum_{m_l m_s} \left\langle lm_l \frac{1}{2} m_s \middle| jm \right\rangle Y_{lm_l}(\theta, \varphi) \chi_{m_s} . \quad (4.7)$$

Questa scelta risulta molto comoda nel caso di nuclei a doppio guscio chiuso (*doubly closed-shell*). Nei nuclei a doppio guscio chiuso, infatti, la distribuzione dei nucleoni è isotropa e priva di momenti angolari preferenziali. A questo proposito, è possibile riformulare le equazioni RPA considerando l'accoppiamento con il momento angolare, utile nel caso di nuclei sferici (per un approfondimento si rimanda a [Row10]).

Usando l'espressione (4.7) per le funzioni di singola particella e tenendo conto delle equazioni RPA accoppiate al momento angolare, l'espressione della densità nelle rappresentazione delle coordinate, valida per nuclei a doppio guscio chiuso, può essere scritta come [Ang01]:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho^{LRC}(r) = & \sum_{(nlj)_h} (2j_h + 1) (R_{(nlj)_h}(r))^2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2j_h + 1} \sum_p \sum_{J,N} (2J + 1) |Y_{ph}(J, N)|^2 \right] \\ & + \sum_{(nlj)_p} (2j_p + 1) (R_{(nlj)_p}(r))^2 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2j_p + 1} \sum_h \sum_{J,N} (2J + 1) |Y_{ph}(J, N)|^2 \right] , \end{aligned} \quad (4.8)$$

dove con l'indice J e N si è indicato l' N -esimo stato con momento angolare J .

4.3 Normalizzazione delle densità

Riprendiamo l'equazione della densità IPM già presentata nella sezione (2.3) e riformuliamola, adattandola al sistema di coordinate sferiche. La densità IPM con le funzioni d'onda (4.7) porta all'espressione

$$\rho^{IPM}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{(nlj)_h} (2j_h + 1) |R_{(nlj)_h}(r)|^2. \quad (4.9)$$

Vogliamo ora verificare che sia la densità trovata nel caso IPM che la densità (4.8), siano correttamente normalizzate al numero totale A di nucleoni:

$$\int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = A. \quad (4.10)$$

Inseriamo la densità IPM nell'integrale di normalizzazione e passiamo alle coordinate sferiche per verificarne la correttezza:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \rho^{IPM}(\mathbf{r}) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dr r^2 \left(\frac{1}{4\pi} \sum_{(nlj)_h} (2j_h + 1) |R_{(nlj)_h}(r)|^2 \right) \\ &= 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr r^2 \sum_{(nlj)_h} (2j_h + 1) |R_{(nlj)_h}(r)|^2 \\ &= \sum_{(nlj)_h} (2j_h + 1) \int_0^\infty dr r^2 |R_{(nlj)_h}(r)|^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nella seconda uguaglianza è stata sfruttata la dipendenza puramente radiale dell'argomento. La normalizzazione delle funzioni d'onda di singola particella implica anche la normalizzazione della componente radiale, espressa dalla relazione:

$$\int_0^\infty dr r^2 |R_{(nlj)_h}(r)|^2 = 1. \quad (4.12)$$

Per cui possiamo riscrivere l'equazione (4.13) come

$$\int d^3\mathbf{r} \rho^{IPM}(\mathbf{r}) = \sum_{(nlj)_h} (2j_h + 1) = A. \quad (4.13)$$

L'indice h scorre su tutti i possibili stati buca e, poiché il sistema è composto da A particelle, il numero di stati buca, e quindi di termini nella sommatoria, è pari a A . Verifichiamo ora che anche la densità ottenuta nella teoria RPA sia correttamente normalizzata. Si ha

$$\int d^3\mathbf{r} \rho^{LRC}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho^{LRC}(r). \quad (4.14)$$

Sostituendo la (4.8) nell'equazione sopra e considerando la normalizzazione della parte radiale, l'equazione sopra può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \rho^{LRC}(\mathbf{r}) = & \sum_{(nlj)h} (2j_h + 1) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2j_h + 1} \sum_p \sum_{J,N} (2J + 1) |Y_{ph}(J, N)|^2 \right] \\ & + \sum_{(nlj)p} (2j_p + 1) \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2j_p + 1} \sum_h \sum_{J,N} (2J + 1) |Y_{ph}(J, N)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Espandendo le parentesi e riorganizzando gli indici, possiamo semplificare l'espressione ottenendo:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \rho^{LRC}(\mathbf{r}) = & \sum_{(nlj)h} (2j_h + 1) - \left[\frac{1}{2} \sum_{(nlj)ph} \sum_{J,N} (2J + 1) |Y_{ph}(J, N)|^2 \right] \\ & + \left[\frac{1}{2} \sum_{(nlj)ph} \sum_{J,N} (2J + 1) |Y_{ph}(J, N)|^2 \right] = \sum_{(nlj)h} (2j_h + 1) = A. \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'ultima uguaglianza segue dal risultato in (4.13). Abbiamo così verificato la corretta normalizzazione delle espressioni trovate per la densità.

Risultati

Dopo aver introdotto il modello a particelle indipendenti e la Random Phase Approximation, ci concentriamo ora sulla loro applicazione, esaminando in particolare l'effetto delle correlazioni a lungo raggio sulle distribuzioni di protoni e neutroni. A tal fine, studieremo i nuclei ^{208}Pb e ^{48}Ca .

5.1 Input per il calcolo RPA

L'input del calcolo RPA si basa su due elementi: gli stati di singola particella e l'interazione residua. Nel presente studio sono state scelte due differenti interazioni conosciute come Jülich, o JU, e D1S, le cui caratteristiche vengono presentate di seguito insieme ai dettagli sugli input specifici scelti per i nuclei considerati.

Nel caso della D1S si tratta di un'interazione a rango finito attiva in tutti i canali centrali, ossia include i contributi del canale scalare, dipendente dallo spin, dall'isospin e dal termine spin-isospin. Include inoltre una parte dipendente dalla densità nucleare. La parametrizzazione utilizzata è la quella data in appendice nell'articolo [Ber91]. I valori dei parametri di questa interazione sono stati scelti per riprodurre, eseguendo calcoli HF, energie di legame e raggi di carica di oltre un migliaio di nuclei. La parametrizzazione D1S è quella utilizzata per produrre i risultati della base dati Amedee, [Amedee].

Con l'interazione D1S si costruisce lo spazio delle configurazioni degli stati di singola particella eseguendo un calcolo HF. Gli stati eccitati sono ottenuti eseguendo un calcolo RPA e usando la stessa interazione D1S.

L'interazione JU è invece un'interazione di contatto, data da [Ang01]:

$$V_{LM}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C_0[f_0(r_1) + f'_0(r_1) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + g_0 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + g'_0(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)]\delta^3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (5.1)$$

dove C_0 , f_0 , f'_0 , g_0 e g'_0 sono parametri. Questa interazione viene utilizzata nel calcolo RPA ma l'insieme delle funzioni di singola particella è un dato di input che non deriva dall'interazione, differenziandola in maniera sostanziale dalla D1S. Per riprodurre i dati empirici, si è mostrata la necessità di imporre, nel canale scalare f_0 e di isospin f'_0 dell'equazione (5.1), una dipendenza dalla densità del tipo

$$f(r) = f^{ex} + (f^{in} - f^{ex}) \frac{1}{1 + \exp[\alpha(r - R_f)]}. \quad (5.2)$$

Entrambe le interazioni sono state utilizzate sia per il ^{208}Pb che per il ^{48}Ca . Vengono riportati in tabella 5.1 i valori dei parametri scelti nella equazione (5.1). La costante α in (5.2) è stata fissata a 0.5 fm^{-1} per il piombo e a 0.166 fm^{-1} nel calcio.

	f_0	f'_0	g_0	g'_0
V_{LM}	-918	600	180	360

Tabella 5.1: Parametri dell'interazione JU. Le unità sono MeV fm^3 .

Rimane da definire il valore della costante C_0 e questo verrà discusso nel prossimo paragrafo.

Nel caso dell'interazione JU, l'insieme delle funzioni di singola particella utilizzate per ^{208}Pb è stato ottenuto usando un campo medio della forma Wood-Saxon, con i parametri dati in Ref. [Rin78]. Questa parametrizzazione è stata scelta per riprodurre al meglio le energie di particella singola attorno alla superficie di Fermi, e i raggi di carica.

Per il ^{48}Ca è stato utilizzato il set di funzioni di singola particella ottenuto da un calcolo HF con l'interazione D1S. Con queste funzioni di singola particella sono stati effettuati i calcoli RPA con le due interazioni, D1S e JU.

5.2 Livelli energetici

Il primo passaggio svolto è stato il calcolo RPA dei livelli energetici dei due nuclei ^{208}Pb e ^{48}Ca . Nel caso dell'interazione JU, il valore della costante C_0 in (5.1) è stato scelto in modo da riprodurre il livello energetico del multipolo 3^- misurato sperimentalmente. La scelta nel riprodurre in entrambi i nuclei questo stato, nonostante non rappresenti per il calcio lo stato eccitato più basso, è motivata dalla sua natura altamente collettiva, che si presume essere ben descritta dalla teoria RPA. Lo stato 3^- è inoltre considerato caratteristico dei nuclei doppio magici, in cui la teoria RPA dovrebbe essere particolarmente efficace. I risultati ottenuti per entrambe le interazioni sono riportati nella tabella 5.2, dove i dati sperimentali per i livelli energetici provengono dal database [NuDat].

	Sperimentale (MeV)]	JU (MeV)	D1S (MeV)
^{208}Pb	2.614	2.607	3.213
^{48}Ca	4.507	4.524	5.111

Tabella 5.2: Valori dell'energia del primo stato eccitato del multipolo 3^- per i diversi nuclei. A sinistra i valori sperimentali, al centro e a destra i valori ottenuti dal calcolo RPA usando le due diverse interazioni.

Per entrambe le interazioni sono stati calcolati per quanto riguarda il piombo i multipoli fino al 7 di entrambe le parità, mentre per il ^{48}Ca tutti i multipoli fino al 3 e inoltre il 4^+ . Nella scelta dei multipoli si è tenuto conto dei dati osservati sperimentalmente entro una soglia energetica di 4.5 MeV. I primi livelli energetici ottenuti sono presentati in figura 5.1 per il ^{208}Pb e in 5.2 per il ^{48}Ca .

Nello schema sono riportati sia i primi livelli energetici misurati sperimentalmente e che quelli calcolati. Si osservi come i risultati ottenuti con l'interazione JU per il ^{208}Pb sono in ottimo accordo con i dati sperimentali: l'input del piombo con l'interazione JU è infatti fenomenologico, ossia costruito in modo da descrivere lo spettro energetico osservato empiricamente. La stessa interazione JU nel caso ^{48}Ca non fornisce risultati convincenti. Bisogna infatti tener conto che le funzioni d'onda e le energie di singola particella, input del calcolo, sono ottenute dal calcolo HF e non sono quindi ottimizzate per il calcolo degli stati eccitati. Si osserva comunque un buon risultato per il calcio ^{48}Ca con l'interazione D1S.

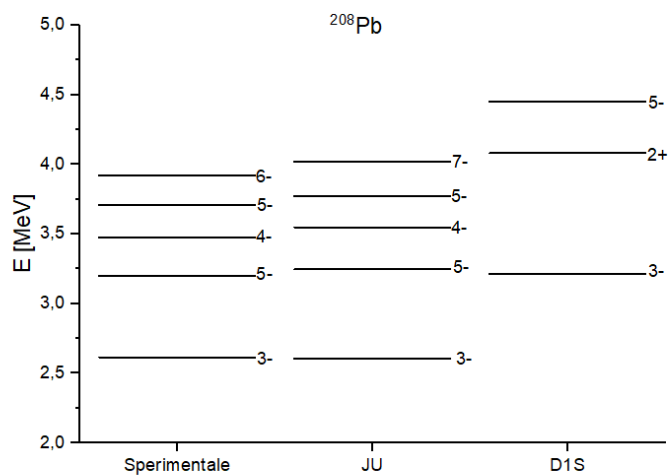


Figura 5.1: Spettro di eccitazione del ^{208}Pb . I valori sperimentali sono presi dalla compilazione di Ref. [NuDat].

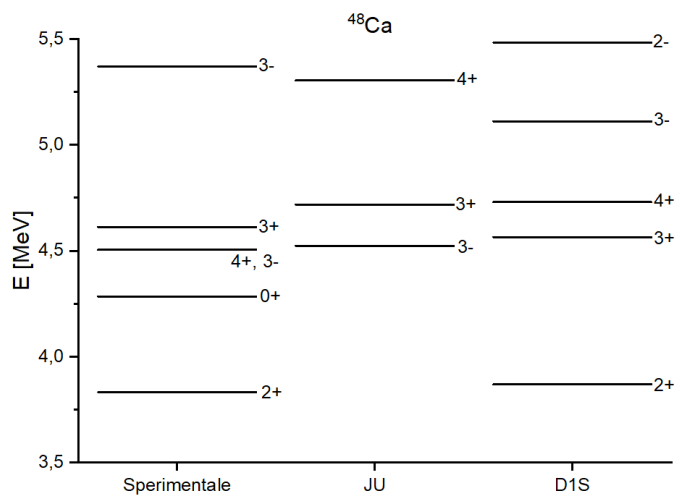


Figura 5.2: Spettro di eccitazione del ^{48}Ca . I valori sperimentali sono presi dalla compilazione di Ref. [NuDat].

5.3 Densità puntiformi e di carica

Utilizzando i dati ottenuti dal calcolo RPA, ossia le energie e le relative X e Y delle equazioni RPA (3.23), e applicando le formule per il calcolo della densità puntiforme, abbiamo ricavato i valori delle distribuzioni di neutroni e protoni sia nel modello IPM che includendo le correlazioni. Presentiamo ora i risultati per ^{208}Pb , seguiti da quelli per ^{48}Ca .

5.3.1 Piombo

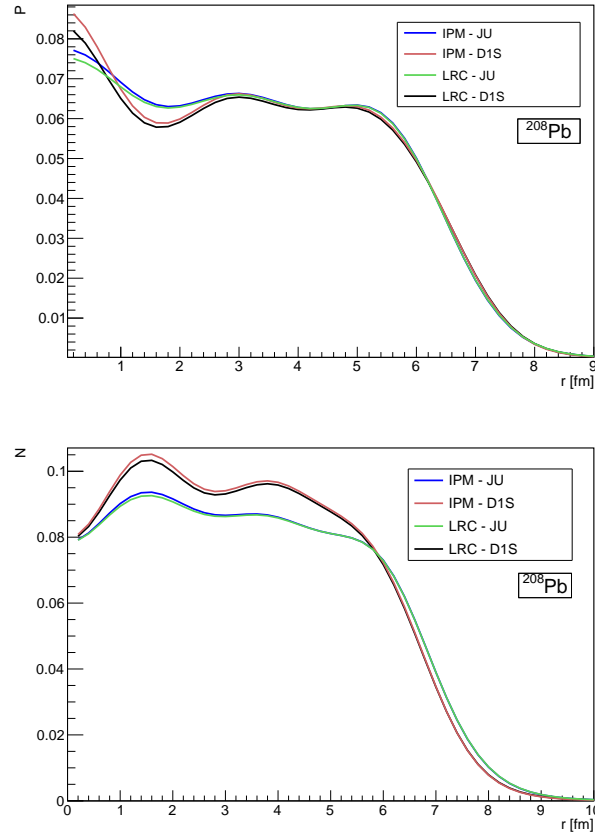


Figura 5.3: Densità puntiformi, in unità fm^{-3} , ottenute per il piombo. In alto sono messe a confronto le densità dei protoni, mentre in basso quelle ottenute dei neutroni.

Le distribuzioni di protoni e neutroni ottenute per ^{208}Pb sono riportate in figura 5.3. Osservando i risultati, si nota che le distribuzioni dei protoni nella regione più esterna sono molto simili tra loro, indipendentemente dall'interazione e dall'inclusione delle correlazioni. Le maggiori differenze emergono invece nella regione interna, dove il calcolo LRC porta a valori di densità inferiori rispetto all'IPM, a parità di interazione. Tuttavia, questo non incide significativamente sulla superficie, poiché la densità è normalizzata tramite l'integrale $\rho(r)r^2$.

Inoltre, si osserva che i risultati ottenuti con l'interazione D1S mostrano maggiori oscillazioni rispetto a quelli con l'interazione JU, sia per la distribuzione dei protoni che per quella dei neutroni. Per questi ultimi, la densità in superficie risulta leggermente diversa a seconda dell'interazione utilizzata, mentre nella regione interna si conferma l'effetto del calcolo LRC, che riduce i valori della densità rispetto all'IPM.

Per avere un confronto quantitativo, in tabella 5.3 sono riportati i valori dei raggi quadratici medi di protoni e neutroni ottenuti. Osservando la differenza tra il risultato IPM e quello LRC, si nota che, sia con l'interazione JU che con la D1S, l'effetto delle correlazioni è più marcato nel caso dei neutroni.

Inoltre, con l'interazione D1S, il calcolo LRC modifica in misura maggiore i risultati IPM, in particolare per i raggi dei protoni e dei neutroni.

^{208}Pb	IPM-JU	LRC-JU	IPM-D1S	LRC-D1S
Protoni	5.413	5.421	5.426	5.482
Neutroni	5.721	5.733	5.548	5.633

Tabella 5.3: Raggi quadratici medi di protoni e neutroni del ^{208}Pb , espressi in fm.

Per verificare la consistenza dei risultati ottenuti, abbiamo confrontato con i dati sperimentali. Dai raggi di protoni e neutroni, abbiamo calcolato lo spessore della neutron skin, r_{ns} consentendo un confronto diretto con i risultati dell'esperimento PREX (si veda la tabella 5.4).

Partendo dalle distribuzioni di protoni abbiamo calcolato le densità di carica per poterle confrontare con quelle ottenute dai dati sperimentali di diffusione elastica di elettroni. Le distribuzioni puntiformi, ottenute come somma delle distribuzioni di neutroni e protoni, sono state convolute con il fattore di forma elettromagnetico del protone, consentendo di ottenere la densità di carica ρ_c

che è stata confrontata con i dati sperimentali della compilazione [Vri87], come mostrato in figura 5.4.

^{208}Pb	IPM-JU	LRC-JU	IPM-D1S	LRC-D1S	Sperimentali
r_{ns}	0.308	0.312	0.122	0.148	0.283 ± 0.071

Tabella 5.4: Tabella dei valori ottenuti della neutron skin espressi in fm. Per le misure sperimentali si è fatto riferimento a [Adh21].

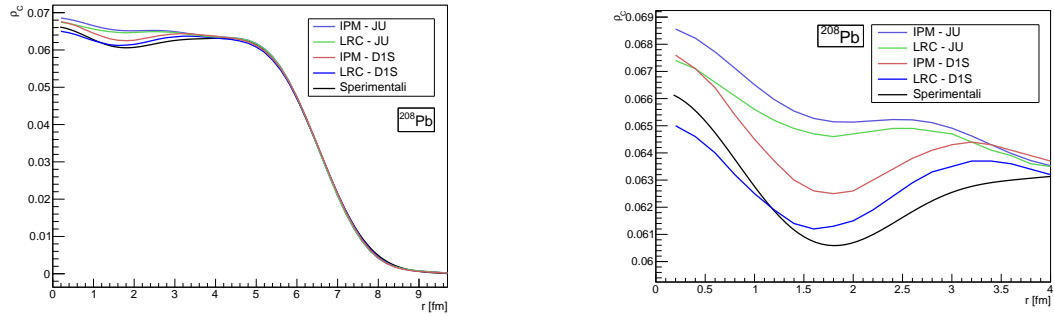


Figura 5.4: Densità di carica ρ_c , in fm^{-3} , per il ^{208}Pb . Le densità sperimentali sono prese da [Vri87]. A sinistra i dati fino a 10 fm, a destra gli stessi risultati fino a 4 fm.

L'interazione JU fornisce valori della neutron skin compatibili con quelli misurati sia nel calcolo IPM che in quello LRC, a differenza della D1S, che ne sottostima lo spessore. Dall'analisi dei raggi di protoni e neutroni (tabella 5.3) e delle loro distribuzioni (figura 5.3), sembra che questa differenza sia legata al raggio e alla distribuzione dei neutroni. Infatti, mentre i raggi dei protoni risultano molto simili indipendentemente dall'interazione utilizzata e le loro distribuzioni mostrano differenze minime in superficie, per i neutroni si osservano variazioni più significative. In aggiunta, osservando il confronto tra le densità di carica in figura 5.4, si nota come tutte le interazioni riproducano bene i dati empirici sulla superficie del nucleo. Le principali differenze si osservano nell'intervallo fino ai 2 fm, in cui il calcolo LRC con l'interazione D1S sembra dare il risultato migliore.

5.3.2 Calcio

Esaminiamo ora i risultati ottenuti per il nucleo di ^{48}Ca . Le densità puntiformi di protoni e neutroni vengono mostrate in figura 5.5, mentre in tabella 5.5 sono

riportati i raggi quadratici medi di protoni e neutroni.

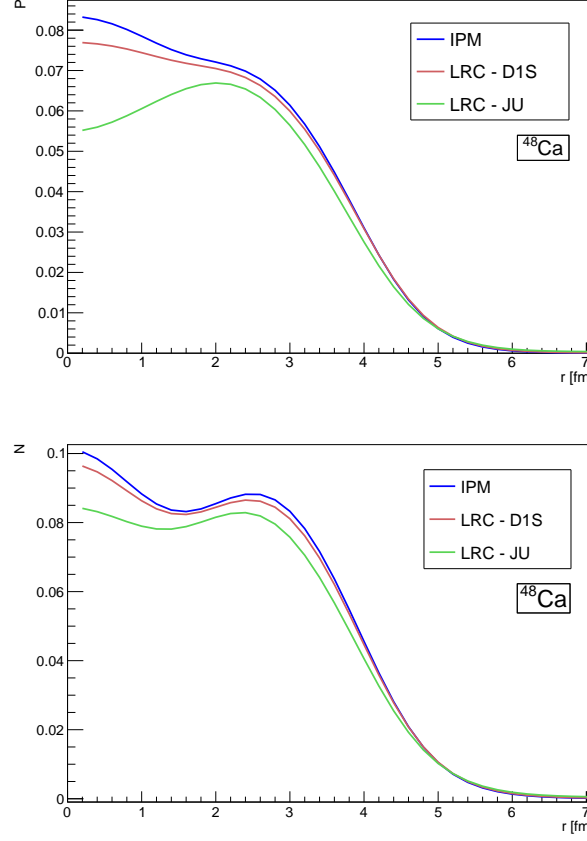


Figura 5.5: Confronto tra le densità puntiformi di protoni e neutroni, in fm^{-3} , ottenute per il ^{48}Ca . In alto sono mostrate le densità dei protoni e in basso le densità ottenute per i neutroni. La curva dell'interazione IPM è solo una, avendo modificato solo l'interazione per l'RPA .

Dalle distribuzioni mostrate in figura 5.5 emerge chiaramente che le correlazioni abbassano le curve di densità, con un effetto più marcato per l'interazione JU. In particolare, per i protoni, la JU fornisce un risultato discordante rispetto agli altri casi: mentre l'IPM e l'interazione D1S portano a una densità decrescente nella regione interna del nucleo, la JU mostra invece un andamento crescente vicino al centro del nucleo. Inoltre, la differenza tra i risultati ottenuti con l'interazione JU risulta più evidente anche in superficie.

A conferma di ciò, i raggi riportati in tabella 5.5 mostrano variazioni più significative rispetto al caso del piombo. Come evidenziato anche dal grafico,

l'aggiunta delle correlazioni ha avuto un impatto maggiore nell'interazione JU, dove si osserva, tra l'altro, una densità dei neutroni inferiore a quella dei protoni.

Infine, confrontando i raggi ottenuti con il calcolo IPM e quelli con il calcolo LRC, si nota un comportamento interessante: per l'interazione D1S, le correlazioni hanno un impatto maggiore sui neutroni, in linea con quanto osservato per il piombo in entrambe le interazioni. Tuttavia, nel caso dell'interazione JU, non avviene lo stesso.

^{48}Ca	IPM	LRC-JU	LRC-D1S
Protoni	3.440	4.542	3.606
Neutroni	3.586	4.540	3.788

Tabella 5.5: Risultati dei raggi quadratici medi di protoni e neutroni del ^{48}Ca , espressi in fermi.

Ripetendo come per il piombo il calcolo della neutron skin r_{ns} , il cui risultato è riportato in tabella 5.6, si ottiene per l'interazione JU un risultato negativo evidentemente in contrasto con le evidenze sperimentali di una neutron skin del ^{48}Ca così come l'interazione D1S nel calcolo LRC porta a un risultato troppo alto della neutron skin. Lo spessore ottenuto dal calcolo IPM dà invece un risultato compatibile con quello sperimentale.

^{48}Ca	IPM	LRC-JU	LRC-D1S	Sperimentali
r_{ns}	0.146	-0.002	0.182	$0.121 \pm 0.026 \pm 0.024$

Tabella 5.6: Tabella dei valori ottenuti della neutron skin del ^{48}Ca . I valori sono espressi in fm e per le misure sperimentali si è fatto riferimento a [Adh22].

Passiamo ora ai risultati ottenuti per la densità di carica. Come nel caso del piombo, la densità puntiforme totale è stata convoluta per ottenere la densità di carica, consentendo così un confronto con i dati sperimentali, come mostrato nella stessa figura.

Anche in questo caso, l'interazione JU non ha fornito un buon risultato, con discrepanze particolarmente evidenti nella regione interna. Il miglior accordo con i dati sperimentali è stato ottenuto con l'IPM, mentre l'interazione D1S nel calcolo LRC ha prodotto valori più bassi nella regione interna.

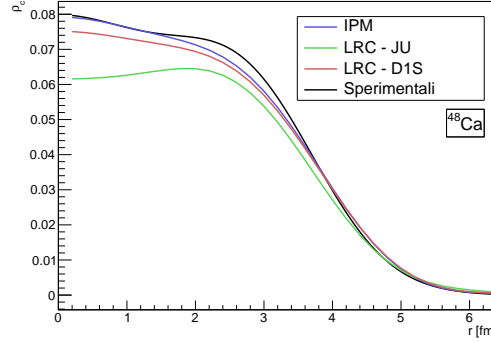


Figura 5.6: Confronto tra le densità di carica calcolate e quelle sperimentali da Ref. [Vri87] per il ^{48}Ca .

5.4 Analisi dei contributi multipolari nelle LRC

Si è visto come l'introduzione delle correlazioni a lungo raggio sia giustificata dall'incapacità dell'IPM nel descrivere alcune importanti proprietà nucleari. In particolare, l'IPM non riesce a descrivere le eccitazioni collettive del nucleo, poiché i livelli energetici eccitati descritti dall'IPM, come mostrato in appendice B, derivano unicamente da eccitazioni di singola particella. L'introduzione dell'interazione residua nel calcolo RPA modifica in maniera rilevante i risultati dell'IPM nel caso delle eccitazioni collettive. Da un punto di vista numerico queste eccitazioni collettive sono caratterizzate dai valori delle ampiezze X_ν^{ph} che rappresentano il contributo delle diverse configurazioni particella-buca allo stato eccitato. Quando si osservano valori simili di X_ν^{ph} per diverse configurazioni, si può dedurre che lo stato abbia una natura collettiva, segno di un marcato mescolamento delle configurazioni di particella-buca. Lo studio dei multipoli è quindi utile per identificare i contributi principali delle eccitazioni collettive, evidenziando i fattori che distinguono e caratterizzano il risultato LRC rispetto a quello IPM. Le densità LRC sono state calcolate nuovamente escludendo però dal calcolo un multipolo. Per evidenziarne le differenze nelle distribuzioni, rispetto al calcolo IPM, si è calcolato

$$\Delta\rho = \rho^{IPM} - \rho^{LRC}, \quad (5.3)$$

dove con ρ si è indicata la distribuzione puntiforme.

5.4.1 Piombo

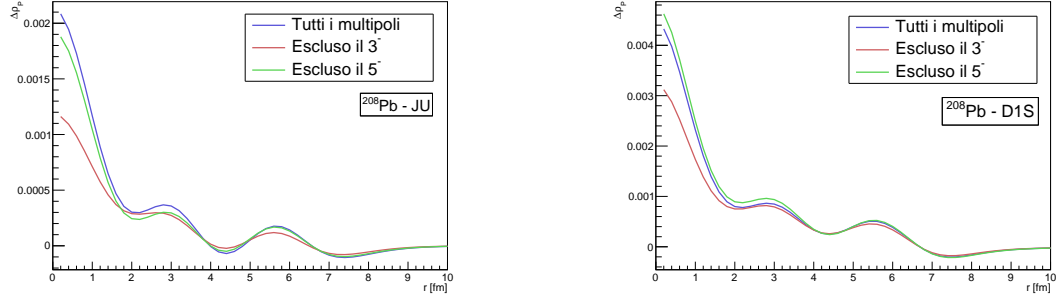


Figura 5.7: Differenza tra le densità dei protoni ottenute dal calcolo IPM e quelle ottenute dal calcolo LRC, $\Delta\rho_P$. A sinistra si osserva il risultato ottenuto con l'interazione JU e a destra quello ottenuto dall'interazione D1S. A diverso colore corrisponde una diversa densità LRC in $\Delta\rho_P$, ottenuta considerando tutti i multipoli o escludendone uno. Le unità sono fm^{-3} .

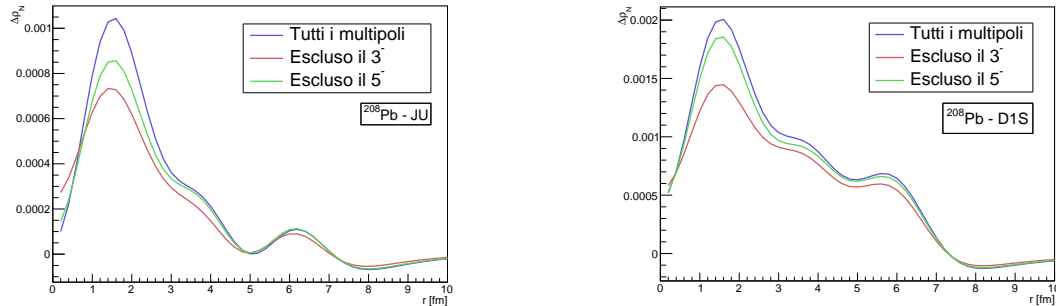


Figura 5.8: Differenza tra le densità dei neutroni ottenute dal calcolo IPM e quelle ottenute dal calcolo LRC, $\Delta\rho_N$. A diverso colore corrisponde una diversa densità LRC in $\Delta\rho_N$, ottenuta considerando tutti i multipoli o escludendone uno. Le unità sono fm^{-3} .

Nel caso del ^{208}Pb , i multipoli 3^- e 5^- , i più collettivi, sono stati esclusi dal calcolo delle densità. I risultati ottenuti per $\Delta\rho$ di protoni e neutroni sono riportati rispettivamente in figura 5.7 e figura 5.8.

Si osserva innanzitutto che, sia per i neutroni che per i protoni e per entrambe le interazioni, il multipolo 3^- risulta essere il più significativo nel calcolo delle correlazioni a lungo raggio, confermandone la natura altamente collettiva.

Un aspetto interessante emerge dal confronto tra l'effetto delle correlazioni su protoni e neutroni in figura 5.8. Mentre per i protoni il picco di $\Delta\rho$ si trova in

corrispondenza di $r = 0$, per i neutroni esso appare spostato a circa 2 fm. Inoltre, l'impatto delle correlazioni nei neutroni si estende su un intervallo di raggio più ampio rispetto ai protoni.

Per poter evidenziare ulteriormente gli effetti delle LRC vengono riportati nella tabella 5.8 e nella tabella 5.7 rispettivamente, le differenze tra i raggi di neutroni e protoni e le differenze tra i valori della neutron skin ottenuti dal calcolo LRC e da quello IPM, ossia:

$$\Delta r = |r^{LRC} - r^{IPM}|. \quad (5.4)$$

Anche in questo caso il calcolo è stato ripetuto per i valori delle LRC ottenuti escludendo un multipolo. Dai dati in 5.8 e 5.7, oltre alla maggiore rilevanza dello stato 3^- , mostrino come l'effetto delle correlazioni sia maggiore con l'interazione D1S. Inoltre guardando alla differenza dei raggi, le correlazioni hanno avuto un impatto lievemente maggiore sul raggio dei neutroni per entrambe le interazioni.

^{208}Pb		Tutti i multipoli	Escluso il 3^-	Escluso il 5^-
Δr_P	JU	0.008	0.006	0.007
	D1S	0.059	0.049	0.052
		Tutti i multipoli	Escluso il 3^-	Escluso il 5^-
Δr_N	JU	0.013	0.009	0.012
	D1S	0.086	0.069	0.078

Tabella 5.7: Valori assoluti delle differenze tra i raggi ottenuti da calcoli IPM e LRC per il nucleo ^{208}Pb . In alto è indicata con Δr_P la differenza tra i raggi dei protoni e in basso con Δr_N quella dei neutroni. I valori sono espressi in fm.

^{208}Pb		Tutti i multipoli	Escluso il 3^-	Escluso il 5^-
Δr_{ns}	JU	0.005	0.003	0.004
	D1S	0.026	0.020	0.025

Tabella 5.8: Nella tabella sono inseriti i risultati della differenza tra i valori delle neutron skin ottenute con l'IPM e con LRC per il nucleo di ^{208}Pb . I valori sono espressi in fm.

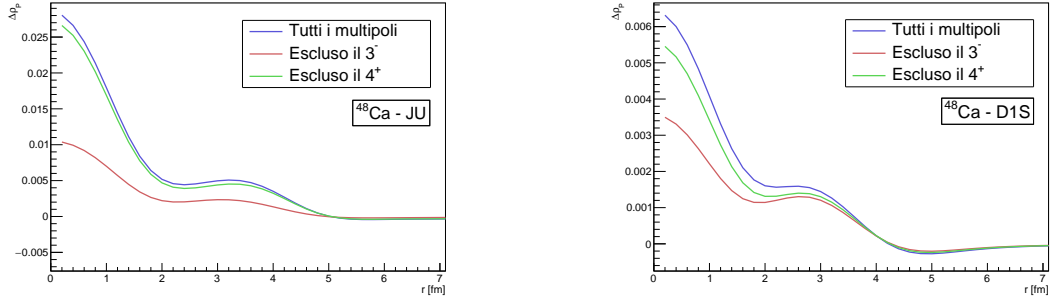


Figura 5.9: Come Fig. 5.7 per il ^{48}Ca .

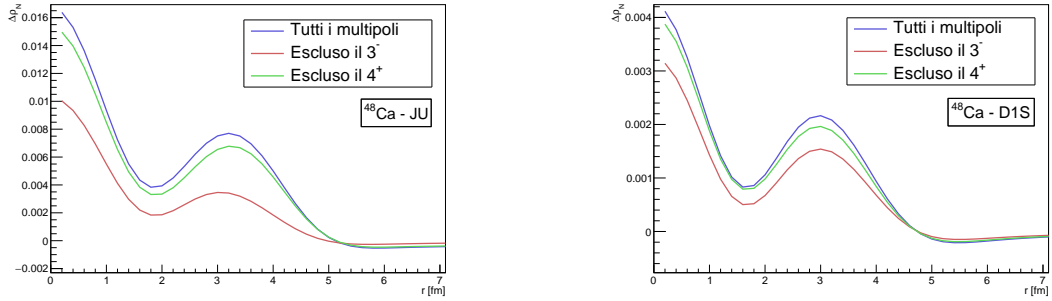


Figura 5.10: Come Fig. 5.8 per il ^{48}Ca .

5.4.2 Calcio

Per quanto riguarda il ^{48}Ca i multipoli esclusi sono stati il 3^- e il 4^+ . In figura 5.9 e in figura 5.10, è mostrata la differenza tra le densità IPM e le densità LRC rispettivamente per i protoni e per i neutroni.

Anche in questo caso viene confermata l'importanza del ruolo che il multipolo 3^- gioca nelle correlazioni a lungo raggio. Confrontando i risultati di protoni e neutroni, si nota come, per quanto l'impatto delle correlazioni sia maggiore al centro del nucleo, nel caso dei neutroni le correlazioni rivestono un ruolo maggiore in una zona più estesa, si osservi l'intervallo tra i 2 e i 4 fm. Analogamente a quanto fatto per il piombo, si riportano i valori della differenza dei raggi di protoni e neutroni in tabelle 5.9 e la differenza tra le neutron skin in 5.10.

Interessante osservare come nel caso del ^{48}Ca , l'interazione JU sembri dare un risultato anomalo: in particolare guardando al risultato in tabella 5.10 per il multipolo 4^+ , la differenza aumenta anziché diminuire, come ci si aspetterebbe. Questo risultato potrebbe indicare che il contributo del multipolo 4^+ bilanci altri

effetti delle correlazioni e che quindi la sua esclusione ne distorce il calcolo e, più in generale, che l'interazione JU o equivalentemente i parametri scelti non siano adatti a descrivere il nucleo di ^{48}Ca . Emerge inoltre che l'effetto delle LRC risulta maggiore per l'interazione JU che per la D1S.

^{48}Ca		Tutti i multipoli	Escluso il 3^-	Escluso il 4^+
Δr_P	JU	1.101	0.485	1.017
	D1S	0.165	0.133	0.147
		Tutti i multipoli	Escluso il 3^-	Escluso il 4^+
Δr_N	JU	0.953	0.410	0.866
	D1S	0.202	0.144	0.184

Tabella 5.9: Differenza tra il raggio ottenuto dal calcolo IPM e da quello LRC per il nucleo ^{48}Ca . In alto si è indicato con Δr_P la differenza tra i raggi dei protoni e in basso con Δr_N quella dei neutroni. I valori sono espressi in fm.

^{48}Ca		Tutti i multipoli	Escluso il 3^-	Escluso il 4^+
Δr_{ns}	JU	0.148	0.075	0.151
	D1S	0.036	0.014	0.037

Tabella 5.10: Nella tabella sono inseriti i risultati della differenza tra i valori delle neutron skin ottenute con l'IPM e con LRC per il ^{48}Ca . I valori, di cui si sono considerati i valori assoluti, sono espressi in fm.

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi era quello di analizzare l'effetto delle correlazioni a lungo raggio sulle densità di neutroni e protoni, confrontando due approcci teorici: l'Independent Particle Model (IPM) e la Random-Phase Approximation (RPA). Lo studio si è focalizzato sui nuclei doppio magici ^{208}Pb e ^{48}Ca , anche alla luce dei recenti risultati sperimentali ottenuti dall'esperimento PREX.

I risultati ottenuti mostrano una differenza non particolarmente significativa sugli effetti che l'inclusione delle correlazioni ha sulle distribuzioni di neutroni e protoni. Ad esempio, analizzando la differenza tra i raggi quadratici medi calcolati con IPM e RPA, si osserva che nel ^{208}Pb l'impatto delle correlazioni risulta leggermente più pronunciato per i neutroni rispetto ai protoni. In particolare, utilizzando l'interazione JU, la differenza di raggio passa da 0,008 fm per i protoni a 0.013 fm per i neutroni, mentre con la D1S tali valori variano rispettivamente da 0.059 fm a 0.086 fm. Nel ^{48}Ca , invece, il comportamento si inverte per l'interazione JU, suggerendo che l'effetto delle correlazioni possa dipendere sia dal tipo di interazione che dalla struttura specifica del nucleo considerato.

Un'analisi sulla differenza tra le distribuzioni ottenute dal calcolo IPM e quelle ottenute dal calcolo RPA, ha mostrato che, per il ^{208}Pb , l'effetto delle correlazioni sui protoni sia maggiore in corrispondenza del centro del nucleo, mentre per i neutroni appare spostata. Nel caso del ^{48}Ca , l'effetto delle correlazioni sulle distribuzioni risulta più marcato per i neutroni su una regione più ampia rispetto ai neutroni, ma come visto non ha un impatto particolarmente rilevante sui raggi e nel caso della JU, rimangono più rilevanti gli effetti su raggio di protoni.

Il confronto con i dati sperimentali evidenzia inoltre l'importanza della scelta degli input del calcolo. Per il ^{208}Pb , l'interazione JU risulta in grado di riprodur-

re in maniera più coerente la neutron skin, sia nell'IPM che nella RPA, mentre l'interazione D1S sembra non essere compatibile per questo aspetto; al contrario, per la densità di carica la D1S fornisce risultati migliori. Nel ^{48}Ca , invece, l'interazione JU non produce risultati soddisfacenti, sia per lo spettro energetico che per la distribuzione, ottenendo inoltre un risultato negativo. Questo sottolinea come la scelta dei parametri e delle funzioni di singola particella (spesso di natura fenomenologica) giochi un ruolo cruciale nel riprodurre i dati sperimentali. Si pensi ad esempio al risultato dello spettro dell'interazione JU per il piombo, confrontato con quello del calcio: nel primo caso sia l'interazione che le funzioni di singola particella scelte sono ottimizzate per riprodurre lo spettro, nel secondo no.

In conclusione, il confronto tra IPM e RPA ha mostrato che, sebbene l'inclusione delle correlazioni a lungo raggio non produca variazioni drastiche nelle distribuzioni di neutroni e protoni, gli effetti risultano leggermente diversi tra i due. In particolare, nel ^{208}Pb , le correlazioni influenzano maggiormente i neutroni rispetto ai protoni, mentre nel ^{48}Ca il comportamento dipende dall'interazione scelta. Questi risultati sottolineano l'importanza di includere le correlazioni a lungo raggio per una descrizione più accurata della struttura nucleare e per indagare aspetti meno noti, come il comportamento dei neutroni nella materia nucleare. Tali aspetti sono cruciali per comprendere ciò che avviene nel nucleo e migliorare l'interpretazione dei dati sperimentali.

A

Sezione d'urto e densità di carica

In questa appendice vedremo come la diffusione elastica di elettroni su nuclei, permetta di ottenere informazioni importanti riguardo la distribuzione e la densità di carica dei nuclei. Gli esperimenti di scattering elettronico vengono tipicamente condotti utilizzando elettroni con energie dell'ordine delle centinaia di MeV, il che implica che gli elettroni vengano trattati come particelle relativistiche.

Consideriamo l'ipotesi che il moto degli elettroni possa essere descritto da onde piane, soluzione dell'equazione di Dirac, e ipotizziamo inoltre che i termini dipendenti dalla massa degli elettroni possano essere trascurati. In questo caso, la sezione d'urto di un proiettile puntiforme che agisce elettromagneticamente su un bersaglio infinitamente pesante privo di spin, può essere descritto dalla sezione d'urto di Mott. La formula è riportata di seguito [Pov04]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* &= \frac{4\alpha^2(\hbar c)^2 E'^2}{|\mathbf{q}c|^4} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

dove α è la costante di struttura fine, $\beta = v/c$ rappresenta la velocità dell'elettrone in unità della velocità della luce, E' è l'energia dell'elettrone diffuso. Con \mathbf{q} viene indicato il momento trasferito e con θ l'angolo di scattering. Si è inoltre evidenziato la relazione con la sezione d'urto di Rutherford che invece trascura gli effetti dovuti allo spin dell'elettrone.

Negli esperimenti di scattering, tuttavia, la sezione d'urto misurata differisce da quella di Mott, tranne che per valori molto piccoli del momento trasferito $|\mathbf{q}|$. In generale, si osserva una sezione d'urto minore.

La ragione di questa discrepanza risiede nella natura spazialmente estesa dei nuclei: per valori elevati di $|\mathbf{q}|$, corrispondenti a maggior potere risolutivo, l'elettrone non percepisce più la carica totale del nucleo come concentrata in un punto, ma è sensibile alla sua distribuzione spaziale.

Sperimentalmente, la sezione d'urto osservata è:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{sperimentale}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}^* \cdot |F(\mathbf{q})|^2. \quad (\text{A.2})$$

Il termine $|F(\mathbf{q})|$ è detto fattore di forma. Nell'approssimazione considerata di onde piane, $|F(\mathbf{q})|$ corrisponde alla trasformata di Fourier della densità di carica, espressa come:

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad (\text{A.3})$$

In particolare, con $\rho(\mathbf{r})$ si è indicata la densità di carica normalizzata al numero di protoni Z . Nell'ipotesi di una distribuzione a simmetria sferica, l'equazione sopra può essere integrata sull'angolo solido ottenendo

$$F(\mathbf{q}) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) j_0(qr/\hbar) r^2 dr, \quad (\text{A.4})$$

dove con j_0 si è indicata la funzione di Bessel sferica di ordine zero. Dall'espressione sopra si ricava quindi che la densità di carica si può ottenere, da un punto di vista teorico, facendo l'antitrasformata del fattore di forma. Si ottiene dunque nell'ipotesi di simmetria sferica:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3q = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty F(\mathbf{q}) j_0(qr/\hbar) q^2 dq. \quad (\text{A.5})$$

Da un punto di vista pratico, l'uso dell'antitrasformata comporta delle difficoltà. I valori che si possono ottenere del fattore di forma sono limitate ad un intervallo di $|\mathbf{q}|$. Questa limitazione comporta delle incertezze sul calcolo dell'antitrasformata che si aggiungono a quelle intrinseche dei dati sperimentali. Risulta più efficiente, in termini di propagazione delle incertezze, un approccio diretto. Si parte dall'ipotizzare una forma analitica della densità ρ , contenente dei parametri liberi. Da (A.4), si ottiene il fattore di forma teorico e i valori dei parametri sono ricavati da un fit tra il fattore di forma teorico con i dati sperimentali.

B

Esempio di calcolo dei livelli energetici nell'IPM

L'obiettivo dell'appendice è mostrare l'applicazione dell'approccio IPM nella determinazione degli stati eccitati nell'esempio del nucleo di ^{208}Pb . Nello stato $|\Phi_N\rangle$ l'energia di eccitazione del sistema è dato da

$$\omega_N^{IPM} = \sum_p \epsilon_p - \sum_h \epsilon_h. \quad (\text{B.1})$$

Consideriamo il caso in cui un nucleone venga promosso al di sopra del livello di Fermi. L'energia di singola particella degli stati buca e degli stati particella può essere determinato applicando il teorema di Koopmans. Si considerano nuclei con un nucleone in più o in meno rispetto al ^{208}Pb ; calcolando la differenza tra le energie di legame si ottengono le energie di singola particella. I nuclei da considerare nel nostro esempio sono ^{207}Pb e ^{209}Pb , ^{207}Tl e ^{209}Bi . Dal momento angolare misurato sperimentalmente dei nuclei pari-dispari appena elencati, si ricavano invece i numeri quantici.

I livelli energetici che si ottengono per neutroni e protoni, sono riassunti nella tabella [B.1](#).

Protoni		Neutroni	
$1h_{9/2}$	-3.798MeV	$2g_{9/2}$	-3.936MeV
Livello di Fermi (ε_F)			
$3s_{1/2}$	-8.007MeV	$3p_{1/2}$	-7.367MeV

Tabella B.1: Livelli energetici vicino al livello di Fermi

Stiamo considerando le transizioni in cui venga promosso un nucleone e che coinvolgono il passaggio dai livelli $3s_{1/2}$ a $1h_{9/2}$ nel caso di un protone e da $3p_{1/2}$ a $2g_{9/2}$ per il neutrone.

L'energia di eccitazione per la transizione dei protoni è di 4.209 MeV, mentre per i neutroni è di 3.431 MeV. Per entrambe le transizioni, la parità è negativa, poiché dipende dal momento angolare orbitale, e cambia segno quando la differenza tra i momenti angolari iniziale e finale è dispari. Per quanto riguarda il momento angolare totale, i possibili valori di J per i protoni sono 4 e 5, mentre per i neutroni i valori di J sono 8 e 9.

Quello che invece si osserva sperimentalmente è che il primo stato eccitato del ^{208}Pb ha energia di eccitazione, momento e parità pari a

$$\omega_{\text{per}} = 2.614 \text{ MeV} \quad , \quad J^\pi = 3^- . \quad (\text{B.2})$$

Abbiamo così mostrato, grazie all'esempio del ^{208}Pb , l'inadeguatezza dell'IPM nella descrizione degli stati eccitati.

C

Sigle usate nel testo

Sigla	Significato
HF	Hartree-Fock
IPM	Independent Particle Model
LRC	Long-Range Correlation
ONR	Occupation Number Representation
RPA	Random Phase Approximation
TDA	Tamm-Dancoff Approximation
QBA	Quasi-Boson Approximation
JU	Jülich

Tabella C.1: Tabella delle sigle nel testo.

Bibliografia

- [Abr12] S. Abrahamyan et al.: *Measurement of the Neutron Radius of ^{208}Pb through Parity Violation in Electron Scattering*, Physical Review Letters, 108 (2012) 112502.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.112502>
- [Adh21] P. Adhikari et al.: *Accurate Determination of the Neutron Skin Thickness of ^{208}Pb through Parity-Violation in Electron Scatterings*, Physical Review Letters, 126 (2021) 172502.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.172502>
- [Adh22] D. Adhikari et al.: *Precision Determination of the Neutral Weak Form Factor of ^{48}Ca* , Physical Review Letters, 129 (2022) 042501.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.042501>
- [Amedee] S. Hilaire, M. Girod: *Hartree-Fock-Bogoliubov Results Based on the Gogny Force AMEDEV Database*. Available online:
http://www-phynu.cea.fr/HFB-Gogny_eng.htm
- [Ang01] M. Anguiano, G. Co': *Correlations and charge distributions of medium heavy nuclei*. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 (2001) 2109.
<https://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/27/10/311>
- [Ber91] J. F. Berger, M. Girod, and D. Gogny: *Time-dependent quantum collective dynamics applied to nuclear fission*, Computer Physics Communications, 63 (1991) 365.
[https://doi.org/10.1016/0010-4655\(91\)90263-K](https://doi.org/10.1016/0010-4655(91)90263-K)

- [Bro00] B. A. Brown: *Neutron Radii and the Neutron Equation of State*, Physical Review Letters, 85 (2000) 5296.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.5296>
- [Cen10] M. Centelles, X. Roca-Maza, X. Viñas, M. Warda: *Origin of the neutron skin thickness of ^{208}Pb in nuclear mean-field models*, Physical Review C, 82 (2010) 054314.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevC.82.054314>
- [Co22] G. Co': *Concepts in Quantum Many Body Theories*
<https://www.dmf.unisalento.it/~gpco/FISMAT/many2223.pdf>
- [Co23] G. Co': *Introducing the Random Phase Approximation Theory*, Universe 9 (2023) 141.
- [Vri87] H. De Vries, C. W. De Jager, C. De Vries, Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering, Atomic Data and Nuclear Data Tables 36 (1987) 495.
- [Fet71] A. Fetter, J. D. Walecka: *Quantum theory of many-particle systems*, McGraw-Hill, New York (1971).
- [Ind23] L. Indino: *Dai nuclei alla materia nucleare*, Tesi di Laurea Triennale, Relatore: Prof. Giampaolo Co', Università del Salento, Anno Accademico 2023/2024.
- [Mes61] A. Messiah: *Quantum mechanics*, Volume 2, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1961).
- [NuDat] National Nuclear Data Center: *NuDat 3 Database*. Available online:
<https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>.
- [Pov04] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche: *Particles and nuclei* Springer, Berlin, (2004).
- [Pre75] M. A. Preston, R. K. Bhaduri; *Structure of the nucleus*, Addison-Wesley Reading, MA, (1975).

- [Rin78] G.A. Rinker and J.Speth: *Nuclear polarization in muonic $^{204,206,207,208}\text{Pb}$* , Nucl. Phys. A 306, (1978) 360. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(78\)90166-1](https://doi.org/10.1016/0375-9474(78)90166-1)
- [Rin80] P. Ring, P. Schuck: *The nuclear many-body problem* Springer, Berlin, (1980).
- [Row10] D.J. Rowe: *Nuclear Collective Motion: Models and Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2010).
- [Row68] D.J. Rowe: *Equations-of-Motion Method and the Extended Shell Model*, Rev. Mod. Phys. 40, (1968) 153.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.40.153>
- [San65] E.A. Sanderson: *Nuclear ground states in the random phase approximation*, Physics Letters, 19 (1965) 141.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0031916365907511>