



UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA
“ENNIO DE GIORGI”
Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Densità di carica dei nuclei atomici

Laureando:
Vincenzo PERRONE

Relatore:
Prof. Giampaolo CO'

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione	3
1 Diffusione elastica di elettroni da nuclei	7
1.1 Sezione d'urto di Rutherford e di Mott	10
1.2 I fattori di forma nucleari	13
2 Distribuzioni di carica	17
3 Sezioni d'urto	27
3.1 Analisi delle sezioni d'urto sperimentali	27
3.2 Stima del raggio nucleare	34
4 Confronto con la teoria	37
4.1 Confronto tra densità di carica sperimentali e teoriche	37
4.2 Confronto tra sezioni d'urto sperimentali e teoriche	41
Conclusioni	49
A Calcolo della sezione d'urto geometrica	51
B Calcolo del potenziale elettrico del nucleo	53
C Derivazione classica della sezione d'urto di Rutherford	55
C.1 Derivazione classica	55
C.2 Derivazione Lagrangiana	60
D Esempi di fattore di forma	63
D.1 Fattore di forma per la distribuzione sferica di carica	65
Bibliografia	67

Introduzione

Le prime informazioni riguardo le dimensioni nucleari sono dovute a Rutherford, il quale, mediante esperimenti di diffusione di particelle α sui nuclei in esame, arrivò a determinare che il raggio dei nuclei doveva essere dell'ordine di 10^{-14} m.

Per estrarre informazioni particolareggiate con esperimenti di diffusione di adroni, è necessario considerare diversi aspetti. Innanzitutto, i proiettili stessi sono oggetti non puntiformi e la misura della sezione d'urto per il processo di diffusione in esame rifletterà, quindi, non solo la struttura del bersaglio, ma anche quella del proiettile stesso. In secondo luogo, l'interazione nucleare tra proiettile e bersaglio è molto complessa e non può essere trattata con tecniche perturbative [Pov98].

Per lo studio delle dimensioni dei nuclei atomici è maggiormente utilizzata la diffusione di elettroni, essendo particelle senza una struttura interna, e sensibili soprattutto all'interazione elettromagnetica, la quale è molto meno intensa dell'interazione forte che mantiene legato il nucleo. Il vantaggio di utilizzare elettroni invece di sonde adroniche è nel fatto che, utilizzando sonde elettroniche, si considera la sola interazione elettromagnetica dell'elettrone con il nucleo, che è trattabile con tecniche perturbative in meccanica quantistica.

Una delle difficoltà data dall'utilizzare gli elettroni come sonde è dovuta al fatto che le sezioni d'urto elettroniche sono centinaia di volte inferiori a quelle adroniche (a parità di energia cinetica della particella incidente).

È possibile stimare le energie degli elettroni per studiare le dimensioni dei nuclei utilizzando il principio di indeterminazione di Heisenberg, infatti

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (1)$$

quindi

$$E = \Delta pc \geq \frac{\hbar c}{\Delta x} \simeq \frac{200 \text{ MeV fm}}{\Delta x} \quad (2)$$

Quindi per avere un potere risolutivo Δx , ovvero la distanza minima che la sonda riesce a risolvere, dell'ordine del fm si ha bisogno di almeno 200 MeV di energia cinetica della particella incidente.

Nei processi di diffusione si hanno risultati diversi se si considera la diffusione di elettroni o neutroni, dato che gli elettroni sono sensibili al campo elettrostatico del nucleo e i neutroni sono sensibili all'interazione forte con il nucleo.

Quindi l'elettrone è sensibile solo al campo elettrostatico generato dai protoni nucleari, mentre i neutroni sono sensibili al campo di interazione forte generato da protoni e neutroni nucleari, ed è quindi evidente che i risultati riguardanti le dimensioni nucleari siano diversi nei due processi, dato che si considerano due situazioni fisiche differenti.

Si deve specificare, quindi, che estraendo informazioni del nucleo da diffusione di elettroni non si hanno informazioni riguardo la densità di materia nucleare ed in particolar modo dei neutroni, dato che, nel processo di diffusione, l'elettrone non è sensibile ad essi.

Lo scopo della presente tesi è analizzare il processo di diffusione elastica di elettroni sul nucleo, in particolar modo ricavando la distribuzione di carica nucleare e la sezione d'urto sperimentale seguendo le parametrizzazioni nell'articolo [DeV87] per dei nuclei che si sono scelti, nel dettaglio ^{16}O , ^{58}Ni , ^{62}Ni .

I nuclei sono stati selezionati in base al preciso numero di parametri liberi nella distribuzione di carica, nello specifico due parametri liberi per ^{16}O , tre parametri liberi per ^{58}Ni , più parametri liberi per ^{62}Ni , e tale lavoro non si poteva eseguire su altri nuclei nell'articolo dato che alcuni erano descritti da modelli con diverso numero di parametri tra loro.

In aggiunta nel lavoro di tesi si vuole raffrontare la sezione d'urto sperimentale con la sezione d'urto teorica, derivata da distribuzioni di carica Hartree-Fock.

Il seguente lavoro è strutturato in quattro capitoli, con ulteriori appendici di approfondimento.

Il primo capitolo è una visione d'insieme del problema fisico, in particolar modo dal punto di vista quantistico, in cui si ricavano le relazioni fondamentali riguardo la distribuzione di carica, il fattore di forma e la sezione d'urto che successivamente verranno utilizzate nella tesi.

Nella prima parte del primo capitolo si descrive il processo di diffusione elastica sul nucleo con un approccio quantistico, in particolare per il calcolo dell'elemento di matrice di transizione che descrive il processo di diffusione.

Nella seconda parte del primo capitolo si arriva al calcolo della sezione d'urto di Rutherford e di Mott, ricavando anche la relazione che esprime la sezione d'urto di diffusione su un nucleo puntiforme o di dimensioni finite, la relazione che lega il fattore di forma alla distribuzione di carica nucleare e l'espressione del fattore di forma per un sistema con densità di carica a simmetria sferica.

Il secondo capitolo fornisce dei confronti tra le distribuzioni di carica sperimentali, ottenute mediante l'ausilio di un programma FORTRAN, per i nuclei sopracitati e per diverse parametrizzazioni della densità di carica, divise in base al numero di parametri liberi utilizzati per descriverle.

Il terzo capitolo consiste nel ricavare le sezioni d'urto sperimentali dalle distribuzioni di carica del Capitolo 2 tramite un differente programma FORTRAN e nello stimare approssimativamente i raggi dei nuclei considerati tramite l'analisi del primo minimo nel grafico ottenuto.

Nel quarto capitolo si confrontano le densità di carica ricavate nel Capitolo 2 con le densità di carica teoriche Hartree-Fock ed inoltre si comparano le sezioni d'urto sperimentali ricavate nel Capitolo 3 con le sezioni d'urto teoriche calcolate con il metodo Hartree-Fock dalle distribuzioni di carica teoriche. Entrambi i confronti si svolgono per controllare che i risultati sperimentali ottenuti dai programmi FORTRAN per le densità di carica e le sezioni d'urto siano consistenti con le previsioni teoriche.

Si noti che nella tesi le grandezze vettoriali sono indicate in grassetto.

Capitolo 1

Diffusione elastica di elettroni da nuclei

Lo schema più semplice di processo d'urto in esame è presentato in Figura 1.1. Nel sistema di laboratorio un elettrone di impulso \mathbf{p} collide con un bersaglio fermo, con $\mathbf{P} = 0$.

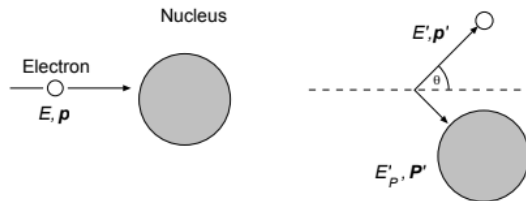


Figura 1.1: Cinematica della diffusione elastica di elettroni su nuclei

L'impulso dell'elettrone viene modificato in \mathbf{p}' , nel senso che può cambiare sia la direzione che il modulo del vettore impulso, e anche l'impulso del bersaglio viene modificato in \mathbf{P}' . L'angolo θ tra la direzione del fascio incidente e la posizione del rivelatore delle particelle del fascio che sono diffuse è detto angolo di diffusione.

Il processo di diffusione elastica è definito come la diffusione in cui la particella incidente non cede energia al centro diffusore, quindi nel processo l'energia cinetica totale è conservata.

Si considera un processo di diffusione in cui i proiettili sono gli elettroni, e per descriverlo si suppongono delle ipotesi iniziali:

- l'elettrone incontra solo il campo elettrostatico del nucleo, e si trascurano i campi magnetici prodotti dal nucleo;
- la diffusione è singola, ovvero ogni singolo elettrone colpisce un singolo nucleo e viene diffuso, quindi si esclude la diffusione multipla;

- nel bersaglio le distanze tra i centri diffusori sono tali da evitare diffusione coerente, sicuramente soddisfatta dato che $\lambda_{\text{Compton}} \ll d$, con d distanza tra i centri diffusori;
- la collisione con gli elettroni atomici è trascurata, dato che gli elettroni proiettili hanno energia cinetica di centinaia di MeV, molto più grande della massa a riposo di 0.5 MeV dell'elettrone atomico;
- il nucleo bersaglio ha spin nullo (ipotesi verificata per tutti i nuclei pari-pari).

La diffusione è descritta dalla sezione d'urto, che è una misura della probabilità che una particella sia osservata ad un angolo particolare dopo la diffusione, per la cui derivazione geometrica si rimanda all'Appendice A.

Il tasso di conteggi di reazioni dipende dalle caratteristiche del potenziale di interazione contenute nell'Hamiltoniana di interazione H_{int} . L'elemento di matrice di transizione tra lo stato iniziale ψ_i dell'elettrone e lo stato finale ψ_f è dato da

$$M_{fi} = \langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* H_{int} \psi_i dV \quad (1.1)$$

e rappresenta l'ampiezza di probabilità per la transizione in esame. Il tasso di reazioni dipende anche dal numero di stati finali disponibili, e per il principio di indeterminazione ogni particella occupa nello spazio delle fasi un volume pari a $h^3 = (2\pi\hbar)^3$.

Il legame fra il tasso di reazioni, l'elemento di matrice della transizione e la densità degli stati finali è dato dalla regola d'oro di Fermi, ed esprime il tasso di reazioni W normalizzato ad una particella del fascio ed una del bersaglio [Pov98]

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(\varepsilon_f) \quad (1.2)$$

inoltre da (A.1) e (A.3) si ha

$$W = \frac{\sigma v_a}{V} \quad (1.3)$$

con V volume spaziale occupato dal fascio di particelle, v_a velocità del fascio e σ sezione d'urto. La sezione d'urto è quindi data da

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |M_{fi}|^2 \rho(\varepsilon_f) V \quad (1.4)$$

e inserendo (1.1) in (1.4) si ottiene

$$\sigma(\varepsilon_f) = \frac{2\pi}{\hbar v} |\langle \psi_f | H_{int} | \psi_i \rangle|^2 \rho(\varepsilon_f) V = \frac{2\pi}{\hbar v} |M_{fi}|^2 \rho(\varepsilon_f) V \quad (1.5)$$

in cui $\rho(\varepsilon_f)$ è la densità degli stati finali nello spazio delle fasi, che indica quanti stati siano potenzialmente disponibili ad un dato sistema quantistico ad una data energia.

L'elemento di matrice $|\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle|^2 \equiv |M_{fi}|^2$ descrive l'ampiezza di probabilità per la transizione che si ha nel processo, con H_{int} che indica il potenziale elettrostatico generato dal nucleo, ψ_i e ψ_f sono le funzioni d'onda dello stato iniziale e finale dell'elettrone, ovvero prima e dopo l'urto.

Se vale la relazione $Z\alpha \ll 1$, con α costante di struttura fine, si può sviluppare il calcolo della sezione d'urto in approssimazione di Born, descrivendo, cioè, le funzioni d'onda dell'elettrone entrante e uscente come delle onde piane [Pov98]

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (1.6)$$

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (1.7)$$

L'operazione di interazione di una carica e in un campo elettrico, descritto dal potenziale $\phi(\mathbf{r})$, è $H_{int} = e\phi(\mathbf{r})$. Per calcolare l'elemento di matrice di interazione si ha bisogno del potenziale elettrostatico del nucleo, il quale è ricavato in appendice B.

Per cui sostituendo (B.4) in (1.1) si ha

$$\begin{aligned} M_{fi} &= \int d^3r \psi_f^*(\mathbf{r}) e\phi(\mathbf{r}) \psi_i(\mathbf{r}) = \frac{e}{V} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = \\ &= \frac{e}{V} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

dove si è definito il momento trasferito, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$.

Notando come l'ultima equazione abbia la forma della trasformata di Fourier del potenziale ϕ , usando l'identità

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \nabla^2 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

e sostituendola in (1.8), si ottiene

$$M_{fi} = \frac{e}{V} \int d^3r \left(-\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \nabla^2 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \right) \quad (1.9)$$

Dato che il termine di onda piana $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$ a cui è applicato l'operatore laplaciano in (1.9) è oscillante e non tende a 0 per $r \rightarrow \infty$, considerando una arbitrariamente piccola parte immaginaria del momento trasferito

$$\mathbf{q} = \mathbf{q} + i\varepsilon$$

e poi il limite in cui $\varepsilon \rightarrow 0$, si è nelle condizioni per applicare il teorema di Green, il quale, dati due campi scalari u e v , arbitrariamente scelti, che si annullino in modo sufficientemente rapido a grandi distanze, permette di scrivere la seguente equazione

$$\int d^3r (u\Delta v - v\Delta u) = 0$$

con $\Delta = \nabla^2$.

Si noti che si è nelle condizioni del teorema di Green anche perchè il potenziale elettrico ϕ è una funzione che si annulla per $r \rightarrow \infty$, e quindi rispetta le ipotesi del teorema.

Quindi, grazie al teorema di Green, si è in grado di applicare il laplaciano al potenziale elettrico ϕ e non più al termine di onda piana $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$, in modo da ricavare la densità di carica.

Per cui, sostituendo la legge di Gauss per il campo elettrico

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

in (1.9), grazie al teorema di Green e considerando il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$M_{fi} = -\frac{e}{V|\mathbf{q}|^2} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{V|\mathbf{q}|^2\varepsilon_0} \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{V|\mathbf{q}|^2\varepsilon_0} F(\mathbf{q}) \quad (1.10)$$

con $F(\mathbf{q})$ fattore di forma elettrico, che risulta essere la trasformata di Fourier della distribuzione di carica all'interno del nucleo

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad (1.11)$$

con normalizzazione

$$F(0) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) = Z$$

dato che la distribuzione di carica totale deve essere uguale al numero di protoni.

In linea di principio, se si riuscisse a misurare $F(\mathbf{q})$ per valori altissimi di $|\mathbf{q}|$ sarebbe possibile calcolare l'antitrasformata di Fourier e ottenere la mappatura nello spazio delle coordinate della distribuzione di carica [Pov98].

1.1 Sezione d'urto di Rutherford e di Mott

Nell'equazione della sezione d'urto (1.5), dopo aver ricavato l'elemento di matrice di interazione $|M_{fi}|^2$, si deve ora calcolare analiticamente la densità degli stati finali del processo $\rho(\varepsilon_f)$, la quale indica la disponibilità, una volta che è avvenuta la diffusione, degli stati accessibili al sistema nello spazio delle fasi

$$\rho(\varepsilon_f) = \frac{V}{(2\pi)^3} p_f^2 \frac{dp_f}{d\varepsilon_f} 4\pi \quad (1.12)$$

con p_f impulso finale della particella ed ε_f energia finale della particella. Si noti che vi è il 4π poichè si considera tutto l'angolo solido, altrimenti si deve considerare l'elemento di angolo solido $d\Omega$.

Quindi, inserendo (1.12) e (1.10) in (1.5) si ottiene la sezione d'urto differenziale per diffusione di un elettrone nell'elemento di angolo solido $d\Omega$

$$d\sigma(\varepsilon_f) = \frac{2\pi}{\hbar\nu} \left| \frac{e^2}{V|\mathbf{q}|^2\varepsilon_0} F(\mathbf{q}) \right|^2 \frac{V}{(2\pi)^3} p_f^2 \frac{dp_f}{d\varepsilon_f} V d\Omega \quad (1.13)$$

Dato che $\varepsilon \gg m$, quindi l'energia cinetica dell'elettrone è sufficientemente grande, dalla relazione relativistica tra energia ed impulso

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

si può assumere che $|\mathbf{p}| \approx \varepsilon/c$, ed utilizzando unità naturali $\hbar = v = c = 1$ si ha $\varepsilon = |\mathbf{p}|$.

Considerando che

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \alpha \approx 1/137$$

e moltiplicando e dividendo per 4π , si ricava la sezione d'urto differenziale da (1.13)

$$\frac{d\sigma(\varepsilon_f)}{d\Omega} = 2\pi \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 (4\pi)^2 \frac{1}{V^2 |\mathbf{q}|^4} \frac{V^2}{(2\pi)^3} p_f^2 \frac{dp_f}{d\varepsilon_f} |F(\mathbf{q})|^2 = \frac{4\alpha^2}{|\mathbf{q}|^4} \varepsilon_f^2 |F(\mathbf{q})|^2 \quad (1.14)$$

la quale lega la sezione d'urto con il fattore di forma $F(\mathbf{q})$.

Dato che la diffusione è elastica, se si considera il nucleo infinitamente pesante rispetto all'elettrone, l'energia cinetica dell'elettrone è globalmente conservata, mentre la direzione dell'impulso finale dell'elettrone varia.

Nel caso in esame, per il momento trasferito $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ si ha

$$\mathbf{q}^2 = \mathbf{k}_i^2 - \mathbf{k}_f^2 = \mathbf{k}_i^2 + \mathbf{k}_f^2 - 2|\mathbf{k}_i||\mathbf{k}_f|\cos\theta \quad (1.15)$$

Nel processo elastico in esame e nel regime ultrarelativistico $\varepsilon \gg m$, in cui si può trascurare la massa dell'elettrone rispetto alla sua energia cinetica, si ha $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = \varepsilon$, quindi

$$\mathbf{q}^2 = 2(1 - \cos\theta)\varepsilon^2 = 4\varepsilon^2 \sin^2(\theta/2) \quad (1.16)$$

da cui si ottiene il modulo del momento trasferito per il processo

$$|\mathbf{q}| = 2\varepsilon \sin(\theta/2) \quad (1.17)$$

Si noti che l'impulso (o momento) \mathbf{q} viene trasferito dall'elettrone al nucleo perché cambia la direzione di \mathbf{k}_i ma non il modulo.

Inserendo (1.17) in (1.14) si ottiene

$$\frac{d\sigma(\varepsilon_f)}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 \varepsilon^2}{16\varepsilon^4 \sin^4(\theta/2)} |F(\mathbf{q})|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (1.18)$$

Si noti anche che, come detto, l'interazione elettromagnetica è mediata da un fotone, che di per sè non trasporta carica elettrica e si accoppia alle cariche delle particelle interagenti, e questo si traduce nel termine e^2 nell'elemento di matrice (1.10) e in un termine e^4 nella sezione d'urto (1.18).

Nei casi in cui non è possibile applicare l'approssimazione di onda piana di Born, occorre modificare l'approccio, ed è necessario tener conto delle correzioni di ordine superiore, che corrispondono allo scambio di più fotoni [Pov98].

Dalla (1.18) si nota che si è ottenuta la sezione d'urto di Rutherford, per la cui derivazione classica si rimanda all'Appendice C, dato che le ipotesi di partenza del calcolo coincidono con quelle che si devono supporre per ottenere tale sezione d'urto.

La sezione d'urto di Rutherford non è una formula relativistica, dato che non tiene conto dello spin degli elettroni, e si nota che si è ottenuta tale sezione d'urto proprio perché nei calcoli si è considerato che l'elettrone e il nucleo su cui esso incide hanno spin nullo, il che è verificato se si considerano nuclei pari-pari, mentre l'elettrone non ha spin 0, fatto che invece è stato ipotizzato nella trattazione.

Il fatto che l'elettrone incidente abbia spin $1/2$ è equivalente ad affermare che si deve considerare una soluzione di onda piana dell'equazione di Dirac e non dell'equazione di Schrödinger, poiché l'equazione di Dirac descrive il moto libero di una particella a spin $1/2$, comportando delle modifiche nei calcoli visti in precedenza per l'elemento di matrice $|\langle\psi_f|H_{int}|\psi_i\rangle|^2$.

La diffusione relativistica di particelle di Dirac, come gli elettroni, su un nucleo puntiforme è stata considerata da Mott, e in questo caso si è considerato che l'elettrone incidente abbia uno spin sebbene il centro diffusore non ce l'avesse.

Mott sviluppa una serie di espressioni per la sezione d'urto di diffusione elastica e fornisce una formula approssimata, che soddisfa la disuguaglianza $Z\alpha \ll 1$ e che corrisponde alla sezione d'urto di Mott [Ho56]

$$\sigma_{\text{Mott}}(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{2mc^2}\right)^2 \left(\frac{1-\beta^2}{\beta^4}\right) \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)) \quad (1.19)$$

con $\beta = v/c$, con v ed m velocità e massa dell'elettrone incidente.

Nelle condizioni considerate, $\beta \approx 1$ quindi in (1.19) si ha $\beta^4 \approx 1$, e considerando l'uguaglianza trigonometrica $1 - \sin^2(\theta/2) = \cos^2(\theta/2)$ si ottiene

$$1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2) \approx \cos^2(\theta/2) \quad (1.20)$$

L'energia totale dell'elettrone è

$$E = \frac{mc^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad (1.21)$$

quindi

$$1 - \beta^2 = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \quad (1.22)$$

Sostituendo in (1.19) si ottiene

$$\sigma_{\text{Mott}}(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{2E}\right)^2 \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4\epsilon^2 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.23)$$

che è l'espressione relativistica della sezione d'urto per la diffusione di elettroni con spin sul nucleo puntiforme. L'espressione è tanto migliore quanto è migliore l'approssimazione $Z\alpha \ll 1$ [Ho56].

Il punto della questione è che, se si considera che l'elettrone incidente ha spin $1/2$, si deve correggere la sezione d'urto di Rutherford con un fattore

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{rel} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2(\theta/2)\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cos^2(\theta/2) = \sigma_{\text{Mott}} \quad (1.24)$$

che globalmente è detta sezione d'urto di Mott, in regime ultrarelativistico.

L'espressione (1.23) è corretta quando si considera la diffusione di elettroni su nucleo non puntiforme, dato che sia l'espressione della sezione d'urto di Rutherford (1.18) che la sezione d'urto di Mott (1.19) non considerano il nucleo con dimensioni finite, mentre, in approssimazione di Born, per ottenere la sezione d'urto di diffusione su un nucleo di dimensioni finite si deve moltiplicare la sezione d'urto di diffusione puntiforme di Rutherford, o Mott, per il quadrato del fattore di forma della parametrizzazione della distribuzione di carica che si sta considerando.

Se si considera la sezione d'urto di Mott (1.23) e la relazione (1.11), si ottiene l'espressione generale della (1.26) per la sezione d'urto relativistica nel caso di proiettile con spin $1/2$ e bersaglio con spin nullo ma con dimensioni finite

$$\frac{d\sigma(\varepsilon_f)}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (1.25)$$

Invece, inserendo (1.11) in (1.18) si ottiene l'espressione generale della sezione d'urto di Rutherford non relativistica con proiettile e bersaglio privi di spin ma con bersaglio di dimensioni finite

$$\frac{d\sigma(\varepsilon_f)}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (1.26)$$

Come detto, l'approssimazione di onda piana di Born consiste nel considerare l'onda incidente e diffusa come onde piane, e per nuclei pesanti, ad esempio ^{208}Pb , l'onda incidente è modificata dall'intenso campo elettromagnetico del nucleo durante la diffusione, quindi non può più essere considerata onda piana.

Dagli esperimenti di diffusione su nuclei e nucleoni, si nota che i valori ricavati dalla sezione d'urto di Mott sono in accordo con le misure sperimentali solo nel limite $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$, mentre per valori più grandi di momento trasferito $|\mathbf{q}|$ le sezioni d'urto sperimentali risultano essere più piccole. La ragione di ciò sta nel fatto che i nuclei e i nucleoni hanno estensione spaziale non nulla e il che non viene considerato nel calcolo di Mott, rendendo quindi necessaria la correzione alla sua sezione d'urto data dal quadrato del modulo del fattore di forma [Pov98].

1.2 I fattori di forma nucleari

Come visto in (1.11), (1.26) e (1.25), l'estensione spaziale di un nucleo è descritta dal fattore di forma, il cui valore assoluto è determinabile sperimentalmente dal rapporto tra

la sezione d'urto misurata e la sezione d'urto di Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (1.27)$$

Ora ci si limita al caso di sistemi con densità di carica a simmetria sferica, quindi $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$, che non hanno quindi assi di orientazione spaziale privilegiati. In questo caso, il fattore di forma dipende solo dall'impulso trasferito \mathbf{q} .

La definizione di fattore di forma è

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(r) \quad (1.28)$$

Sviluppando in multipoli il termine di onda piana $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ si ha

$$F(\mathbf{q}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \int d\Omega_r \sum_{l,\mu} i^l j_l(qr) Y_{l,\mu}^*(\Omega_q) Y_{l,\mu}(\Omega_r) \rho(r) \quad (1.29)$$

con $q = |\mathbf{q}|$, $j_l(qr)$ funzione di Bessel sferica, $Y_{l,\mu}^*(\Omega_q)$ armonica sferica in direzione di \mathbf{q} e $Y_{l,\mu}(\Omega_r)$ armonica sferica in direzione di \mathbf{r} . Se la simmetria del sistema è sferica non c'è nessuna direzione privilegiata, quindi si sceglie la direzione di quantizzazione z lungo \mathbf{q} , quindi $\Omega_q = 0$. Questa scelta implica che le armoniche sferiche di \mathbf{q} assumono il seguente valore

$$Y_{l,\mu}^*(\Omega_q) = Y_{l,\mu}^*(0,0) = \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\mu,0} \quad (1.30)$$

Sfruttando la completezza e l'ortonormalità delle armoniche sferiche

$$\int d\Omega Y_{l,\mu}^*(\Omega) Y_{l',\mu'}(\Omega) = \delta_{l,l'} \delta_{\mu,\mu'} \quad (1.31)$$

e

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (1.32)$$

ed inserendo (1.30) in (1.29), si può scrivere l'integrale sulla parte angolare come

$$\begin{aligned} \int d\Omega_r Y_{l,0}(\Omega_r) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos(\theta)) Y_{l,0}(\theta, \phi) = \\ &= \sqrt{4\pi} \int d\Omega_r Y_{0,0}^*(\Omega_r) Y_{l,0}(\Omega_r) = \sqrt{4\pi} \delta_{l,0} \end{aligned} \quad (1.33)$$

dove nell'ultimo passaggio si è moltiplicato per (1.32) e quindi diviso per $1/\sqrt{4\pi}$ per ricondursi all'espressione (1.31) dell'ortonormalità delle armoniche sferiche.

Inserendo (1.33) in (1.29) si ottiene

$$F(\mathbf{q}) = F(q) = 4\pi \sum_{l,\mu} \sqrt{4\pi} \delta_{l,0} \frac{2l+1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{\mu,0} i^l \int_0^\infty dr r^2 j_l(qr) \rho(r) =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 j_0(qr) \rho(r) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty dr r \sin(qr) \rho(r) \quad (1.34)$$

Calcolando l'antitrasformata del fattore di forma si ottiene la densità di carica

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} F(q) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 j_0(qr) F(q) \quad (1.35)$$

In linea di principio, la distribuzione di carica può essere ottenuta dalla trasformata di Fourier inversa del fattore di forma, ma nella pratica il fattore di forma può essere misurato solo in un intervallo limitato di valori dell'impulso trasferito \mathbf{q}^2 . Questa è una limitazione dovuta al fatto che l'energia di fascio disponibile è finita e che la sezione d'urto diminuisce rapidamente al crescere dell'impulso trasferito, e la ragione di ciò sta nel fatto che i nuclei ed i nucleoni hanno estensione spaziale non nulla, il che non viene considerato nel calcolo di Mott, da cui dipende la sezione d'urto (1.25) [Pov98].

La prassi usata per affrontare il problema consiste nello scegliere dipendenze funzionali delle distribuzioni di carica ρ contenenti dei parametri, i cui valori sono fissati per riprodurre al meglio i dati sperimentali.

Capitolo 2

Distribuzioni di carica

Il problema di ricavare la distribuzione di carica nucleare si affronta in modo diretto, ovvero si ipotizza la dipendenza funzionale della distribuzione di carica $\rho(r)$, e poi si modificano i parametri delle espressioni analitiche che descrivono la $\rho(r)$ per riprodurre l'andamento della sezione d'urto sperimentale di diffusione, cercando sempre di avere un fit ai dati sperimentali.

L'analisi dei dati riguardanti la diffusione di elettroni è ristretta dal fatto che il fattore di forma (1.11) può essere studiato solo su un intervallo finito di momento trasferito, e questo produce un'incertezza sulla determinazione della distribuzione di carica nucleare.

In approssimazione di onda piana di Born, la densità di carica $\rho(r)$ è l'antitrasformata di Fourier del fattore di forma $F(q)$, e per una distribuzione di carica a simmetria sferica si ha l'equazione (1.35)

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 F(q) \frac{\sin(qr)}{qr} \quad (2.1)$$

Nel passato, gli intervalli limitati di q rendevano possibile descrivere i dati sperimentali usando modelli di densità con pochi parametri, uno o due, ad esempio con una distribuzione di Fermi.

Lo sviluppo tecnologico di acceleratori e di rivelatori ha prodotto dati di migliore qualità, e ricoperto un maggiore intervallo di valori di momento trasferito q . Le espressioni analitiche sopra menzionate non sono in grado di fornire descrizioni soddisfacenti dei nuovi dati di alta qualità, perché, per avere una adeguata descrizione dei dati, bisogna aumentare il numero di parametri liberi.

Per capire questa necessità si commentano ora i risultati in Figura 2.1, in cui è illustrato l'andamento della sezione d'urto di diffusione elastica di elettroni sul nucleo di ^{40}Ca in funzione dell'angolo di diffusione e l'andamento della densità di carica $\rho(r)$ in funzione della distanza r . I dati sperimentali del ^{40}Ca per quanto riguarda il modello di Fermi a 3 parametri sono ricavati da [Si73a].

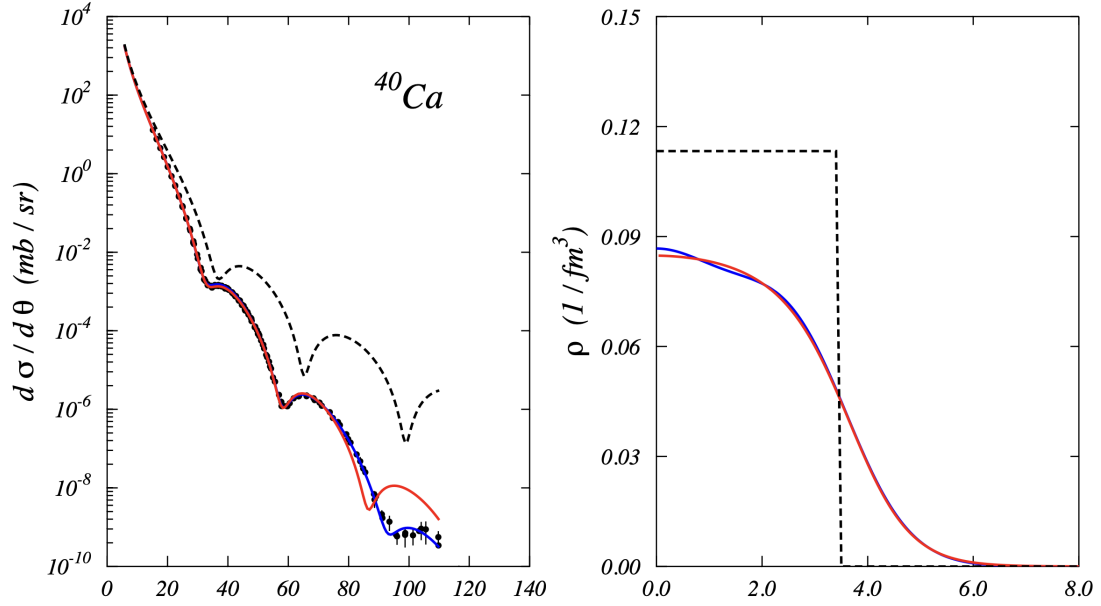


Figura 2.1: Andamento della sezione d'urto di diffusione e della densità di carica per il nucleo ^{40}Ca

I grafici in Figura 2.1 sono tutti normalizzati a $Z=20$, e il grafico tratteggiato è ciò che si ottiene se si utilizza il modello della sfera uniformemente carica, il grafico rosso rappresenta il modello di Fermi a 3 parametri e il grafico blu rappresenta i dati sperimentali.

Il modello più semplice con cui inizialmente si cerca di affrontare il problema è la sfera uniformemente carica

$$\rho(r) = \frac{Z}{\frac{4\pi R^3}{3}} \theta(R - r) \quad (2.2)$$

con unico parametro libero R e con il vincolo della normalizzazione che deve essere uguale al numero dei protoni Z . Il modello è rappresentato nella prima immagine dal grafico tratteggiato oscillante e dalla funzione gradino nella seconda immagine.

Il modello non rispecchia bene il nucleo e i dati sperimentali, quindi, per avere un fit migliore, si considera il modello di Fermi a 3 parametri per tale nucleo [Si73a], il cui andamento è illustrato nella seconda immagine in Figura 2.1, e la cui dipendenza funzionale è

$$\rho(r) = \frac{\rho_0(1 + wr^2/c^2)}{1 + e^{\frac{r-c}{z}}} \quad (2.3)$$

con parametri liberi c , z , w e con ρ_0 fissato dalla normalizzazione.

I dati empirici del ^{40}Ca sono perfettamente riprodotti dal modello di Fermi a 3 parametri, mentre non lo sono per quanto riguarda il grafico tratteggiato del modello della sfera uniformemente carica.

Si nota, quindi, che l'aumentare del numero di parametri, rispetto al singolo parametro del modello della sfera uniformemente carica, ha prodotto un risultato migliore, dato che si riescono a riprodurre perfettamente i dati sperimentali fino ad un certo valore dell'angolo (che si può legare al momento trasferito q).

Le limitazioni nell'analisi sono rimosse tramite l'uso di analisi dette indipendenti dal modello. L'idea è quella di descrivere la densità di carica facendone uno sviluppo su una base di funzioni ortonormali $P_n(r)$, e i coefficienti dello sviluppo sono modificati per riprodurre le sezioni d'urto sperimentali.

$$\rho(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(r) \quad (2.4)$$

Nelle applicazioni pratiche, il rigore matematico di questo approccio ha due carenze, ovvero non ci si aspetta che i parametri dello sviluppo abbiano un particolare significato fisico. Inoltre, nelle applicazioni pratiche, lo sviluppo in serie deve essere troncato ad un numero finito di termini.

In [DeV87] vi è una compilazione di dati riguardanti i parametri che descrivono le espressioni della densità di carica. Tale compilazione è eseguita sulla base delle seguenti espressioni analitiche, comprendenti espressioni dipendenti da parametri ed espressioni indipendenti dal modello, che sono ora ordinate in base al numero di parametri liberi che contengono.

Si noti come nelle Figure 2.2 e 2.3 sia presente il confronto delle densità di carica con il modello Fourier-Bessel, per sottolineare la differenza che si ha nella densità di carica all'aumentare del numero di parametri liberi.

Per disegnare i grafici dei modelli si sono presi come riferimento dei nuclei dall'articolo [DeV87], in base ai modelli utilizzati dagli autori per descriverli, evitando di considerare i troppo semplicistici modelli ad 1 parametro libero della Sfera uniformemente carica e del modello di Gauss uniforme, per focalizzarsi invece su modelli a più parametri per l'analisi dei nuclei considerati.

Insieme all'espressione analitica della parametrizzazione e al grafico derivante dai dati sperimentali sono inoltre riportate le referenze da cui sono tratti i dati per ogni parametrizzazione di ogni nucleo.

- 1 parametro libero

1. Sfera uniformemente carica

$$\rho(r) = \frac{Z\theta(R-r)}{\frac{4\pi R^3}{3}} \quad (2.5)$$

con parametro libero R ;

2. Modello di Gauss uniforme UG

$$\rho(r) = \rho_0 \int e^{-\frac{(r-x)^2}{g^2}} x^2 dx \quad (2.6)$$

con parametro libero g e con ρ_0 fissato dalla normalizzazione;

- 2 parametri liberi, per cui si è considerato il nucleo ^{16}O

parametrizzazione	referenza
Oscillatore armonico modificato	[Sc75]
Modello di Fermi a 2 parametri	[Si70b]

1. Oscillatore armonico modificato MHO

$$\rho(r) = \rho_0(1 + \alpha(r/a)^2)e^{-(r/a)^2} \quad (2.7)$$

con parametri liberi a , α e con ρ_0 fissato dalla normalizzazione;

2. Modello di Fermi a due parametri 2pF

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-c}{z}}} \quad (2.8)$$

con parametri liberi c , z e con ρ_0 fissato dalla normalizzazione;

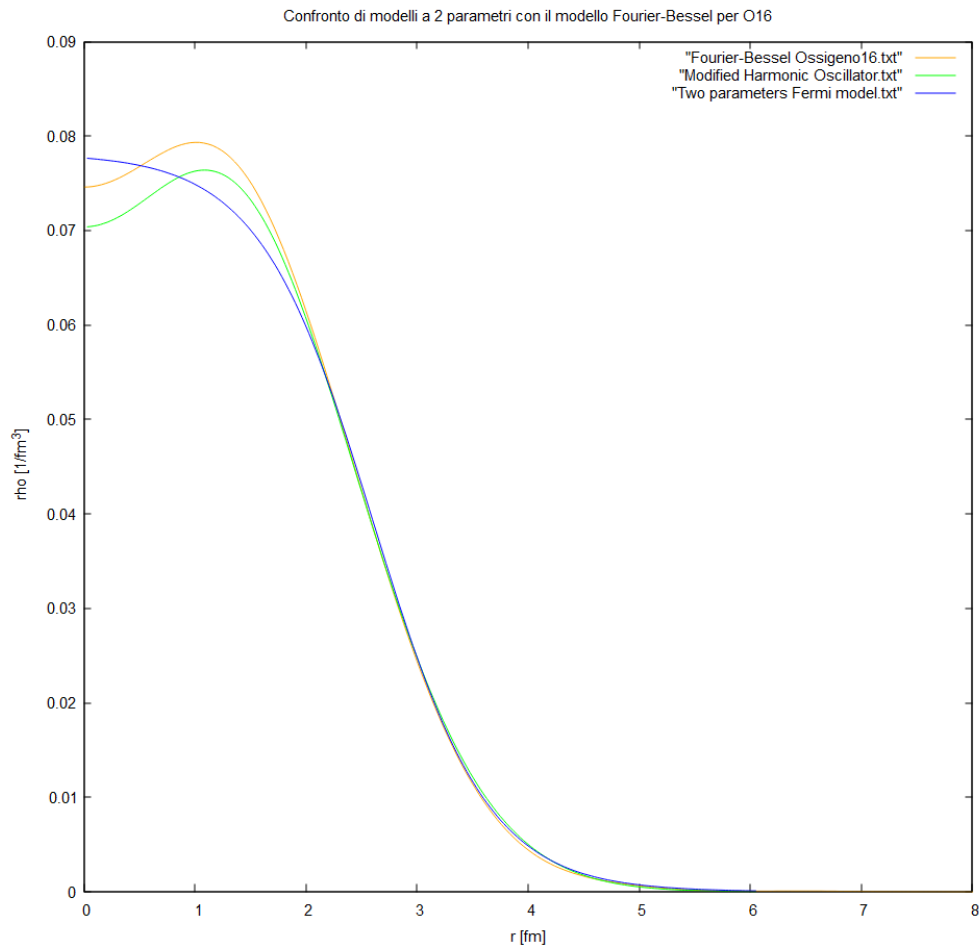


Figura 2.2: Densità di carica per modelli a due parametri per il nucleo ^{16}O , confrontati con il modello di Fourier-Bessel per lo stesso nucleo

- 3 parametri liberi, per cui si è considerato il nucleo ^{62}Ni

parametrizzazione	referenza
Modello di Fermi a 3 parametri	[Fi70]
Modello di Gauss a 3 parametri	[Wo76]

1. Modello di Fermi a tre parametri 3pF

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + w \frac{r^2}{c^2} \right) \left(1 + e^{\frac{r-c}{z}} \right) \quad (2.9)$$

con parametri liberi c , z , w e con ρ_0 fissato dalla normalizzazione;

2. Modello di Gauss a tre parametri 3pG

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + w \frac{r^2}{c^2} \right) \left(1 + e^{\frac{r^2 - c^2}{z^2}} \right) \quad (2.10)$$

con parametri liberi c , z , w e con ρ_0 fissato dalla normalizzazione;

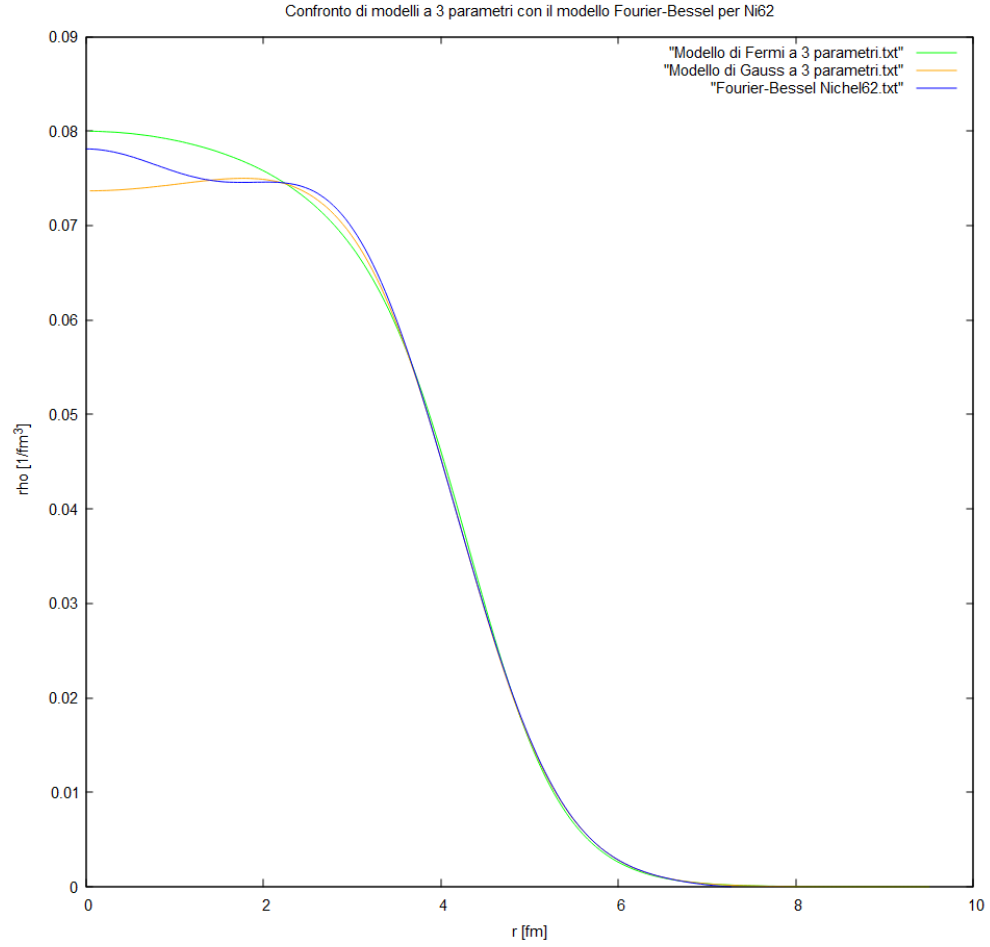


Figura 2.3: Densità di carica per modelli a tre parametri per il nucleo ^{62}Ni , confrontati con il modello di Fourier-Bessel per lo stesso nucleo

- più parametri liberi, per cui si è considerato il nucleo ^{58}Ni

parametrizzazione	referenza
Fourier-Bessel	[Be83]
Somma di Gaussiane	[Ca80b]

1. Analisi indipendente dal modello mediante un'espansione di Fourier-Bessel per la distribuzione della carica, con i coefficienti di Fourier-Bessel definiti da

$$\rho(r) = \begin{cases} \sum_{\nu} a_{\nu} j_0(\nu\pi r/R) & r \leq R, \quad 0 \leq \nu \leq 17 \\ 0 & r > R \end{cases}$$

con parametri liberi a_{ν} e con j_0 funzione di Bessel sferica. In questo caso, la distribuzione di carica ρ si assume essere nulla dopo un certo raggio di cutoff R , ed i primi N coefficienti della serie sono determinati direttamente dai dati sperimentali.

2. Analisi indipendente dal modello mediante un'espansione della distribuzione di carica come somma di gaussiane, i cui coefficienti sono definiti da

$$\rho(r) = \sum_i A_i (e^{-((r-R_i)/\gamma)^2} + e^{-((r+R_i)/\gamma)^2}) \quad (2.11)$$

con parametri liberi R_i e Q_i e con $A_i = ZeQ_i/(2\pi^{3/2}\gamma^3(1 + 2R_i^2/\gamma^2))$, con i valori di Q_i che indicano la frazione di carica che contiene la i -esima Gaussiana, con normalizzazione $\sum_i Q_i = 1$ e con γ che rappresenta la larghezza della Gaussiana.

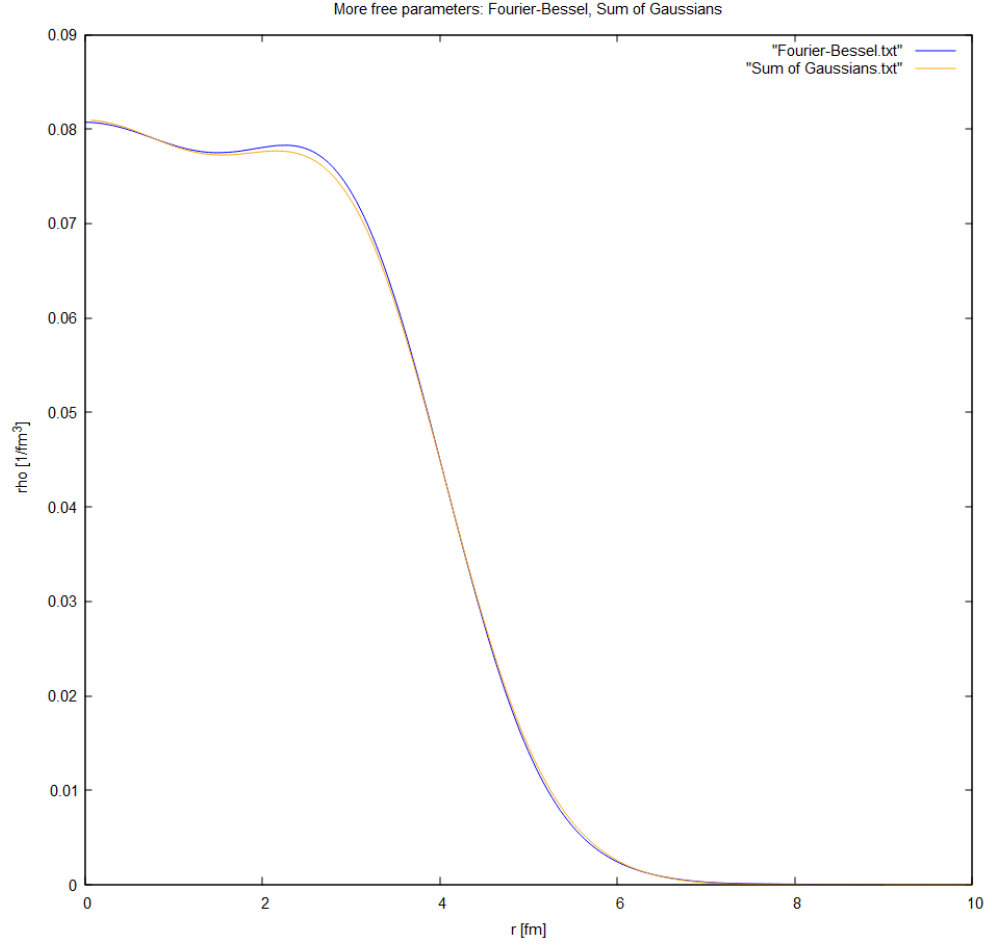


Figura 2.4: Densità di carica per modelli a più parametri per il nucleo ^{58}Ni

La normalizzazione di tutte le espressioni analitiche che descrivono la distribuzione di carica è

$$4\pi \int \rho(r)r^2 dr = Ze$$

Inoltre in [DeV87] vi è anche tabulata la radice del raggio quadratico medio del nucleo, definita da

$$\langle r^2 \rangle = \left(\frac{4\pi}{Ze} \right) \int \rho(r)r^4 dr \quad (2.12)$$

e sia la normalizzazione che il raggio quadratico medio costituiscono dei vincoli sperimentali nel calcolo della distribuzione di carica.

Dai grafici precedenti si nota inoltre che le densità di carica a più parametri liberi dei modelli Fourier-Bessel e Sum of Gaussians per il nucleo ^{58}Ni coincidono e sono quelle che meglio riproducono i dati sperimentali, confermando quindi che, grazie all'aumento del numero di parametri liberi dell'espressione analitica della densità di carica, le distribuzioni di carica sperimentali si sovrappongono sempre di più e si riesce ad avere il fit ai dati sperimentali.

Sulla base dei parametri contenuti in [DeV87], si è scritto un programma FORTRAN per calcolare le densità di carica dei nuclei, inserendo le espressioni analitiche sopracitate, e ottenendo dei valori di densità di carica al variare della distanza r per ogni nucleo, da cui se ne sono tratte alcune presenti nei grafici di cui sopra.

Nel programma FORTRAN, ogni nucleo è descritto con un modello a sè, dato che alcune tra le espressioni analitiche sono ottimali per nuclei leggeri e bassi valori di q ma non viceversa.

Capitolo 3

Sezioni d'urto

3.1 Analisi delle sezioni d'urto sperimentali

Come visto nel Capitolo 1, la sezione d'urto di diffusione elastica in regime relativistico, in cui si considera il proiettile con spin $1/2$ e il bersaglio non puntiforme, è data dalla (1.25)

$$\frac{d\sigma(\varepsilon_f)}{d\Omega} = \sigma_M |F(\mathbf{q})|^2 \quad (3.1)$$

con σ_M sezione d'urto di Mott ed $F(\mathbf{q})$ fattore di forma.

Nel presente Capitolo, considerando le densità di carica trovate nel Capitolo 2, si ricavano ora le sezioni d'urto sperimentali di diffusione elastica da elettroni tramite un programma FORTRAN, in cui si è fissata l'energia del fascio a 400 MeV e considerato un angolo iniziale di scattering $\theta_1 = 10^\circ$ e finale $\theta_2 = 120^\circ$.

Le densità di carica parametrizzate nel Capitolo 2 hanno una loro validità in termini di range di q per ogni nucleo, così come è indicato in [DeV87]. Infatti, per ogni nucleo ci sono diverse parametrizzazioni, ognuna di esse accreditata fino ad un certo valore di momento trasferito q .

Effettivamente, la parametrizzazione fornisce tutta la distribuzione di carica $\rho(r)$, per r che va da 0 a ∞ , ma ciò non significa che la densità sia tutta perfettamente definita, dato che, dopo il range di valori di q , non si è sicuri che la densità segua l'andamento dato dalla parametrizzazione, anche se si può comunque intuire il comportamento della densità di carica all'infinito.

Quindi, il lavoro nel presente Capitolo consiste nel calcolo delle sezioni d'urto dalle distribuzioni di carica trovate nel Capitolo 2, tracciando delle linee di demarcazione sui valori di q fino a cui vale un certo modello, per vedere se all'interno del range di valori di q le sezioni d'urto ottenute da diverse parametrizzazioni siano in accordo o meno.

Si noti che il programma FORTRAN usato calcola le sezioni d'urto in distorted wave born approximation (DWBA) per tener conto delle distorsioni della sezione d'urto prodotte dagli intensi campi coulombiani del nucleo.

Inoltre il programma restituisce la sezione d'urto in millibarn in funzione dell'angolo di diffusione θ , quindi il range di valori di momento trasferito q è nei grafici riportato come range di angoli di diffusione θ per cui le diverse parametrizzazioni sono accreditate. Si può infatti legare l'angolo di diffusione al momento trasferito tramite l'equazione (1.17)

$$|\mathbf{q}| = 2\varepsilon \sin(\theta/2) \quad (3.2)$$

ricavata in unità naturali $\hbar = c = 1$.

Le sezioni d'urto si calcolano per ogni nucleo che si è considerato nel Capitolo 2 in base ai parametri liberi, quindi ^{16}O per 2 parametri liberi, ^{62}Ni per 3 parametri liberi e ^{58}Ni per più parametri liberi, e i modelli parametrizzati nel Capitolo 2 sono stati utilizzati per riprodurre le sezioni d'urto sperimentali, misurate in particolari ampiezze di momento trasferito q .

Si noti che, nel caso di 2 e 3 parametri liberi si è calcolata e graficata anche la sezione d'urto derivante dal modello Fourier-Bessel per lo stesso nucleo, in modo da avere un confronto con un modello a più parametri.

Di seguito si riportano i valori di momento trasferito q per cui ogni parametrizzazione del nucleo in questione è accreditata e si graficano le sezioni d'urto in scala logaritmica e i rispettivi range di θ .

Per il nucleo ^{16}O si ha

parametrizzazione	range di q	range di θ	referenza
Oscillatore armonico modificato	0.29-0.48 fm ⁻¹	21.8°-28.2°	[Sc75]
Modello di Fermi a 2 parametri	1.05-3.97 fm ⁻¹	42.2°-88.8°	[Si70b]

Per il nucleo ^{62}Ni si ha

parametrizzazione	range di q	range di θ	referenza
Modello di Fermi a 3 parametri	0.52-2.28 fm ⁻¹	37.4°-84.2°	[Fi70]
Modello di Gauss a 3 parametri	0.51-2.22 fm ⁻¹	37°-82.9°	[Wo76]

Per il nucleo ^{58}Ni si ha

parametrizzazione	range di q	range di θ	referenza
Fourier-Bessel	0.25-2.65 fm ⁻¹	21°-72.4°	[Be83]
Somma di Gaussiane	0.58-3.80 fm ⁻¹	32°-89°	[Ca80b]

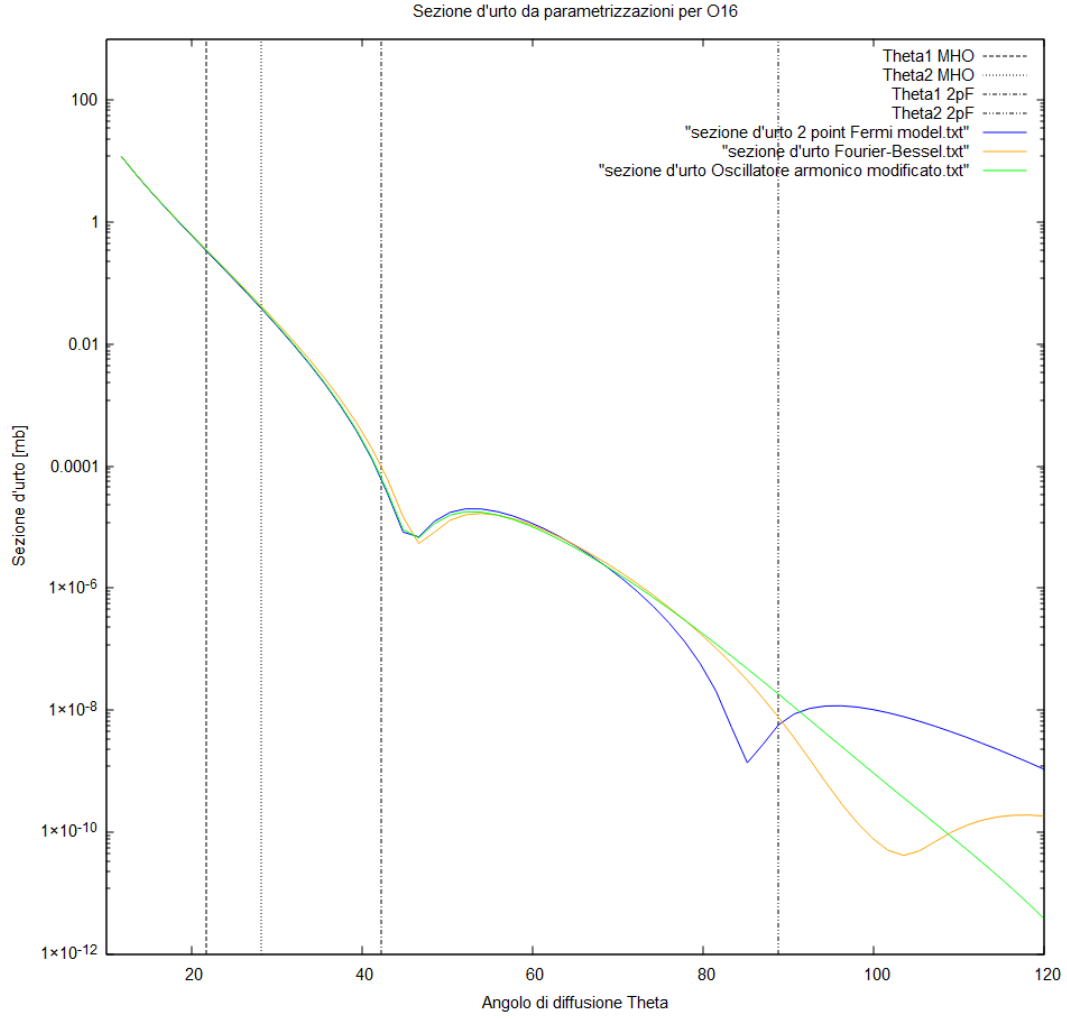


Figura 3.1: Sezioni d'urto ottenute dalle parametrizzazioni per ^{16}O . La sezione d'urto Fourier-Bessel è sovrapposta alla sezione d'urto del modello di Fermi a 2 parametri.

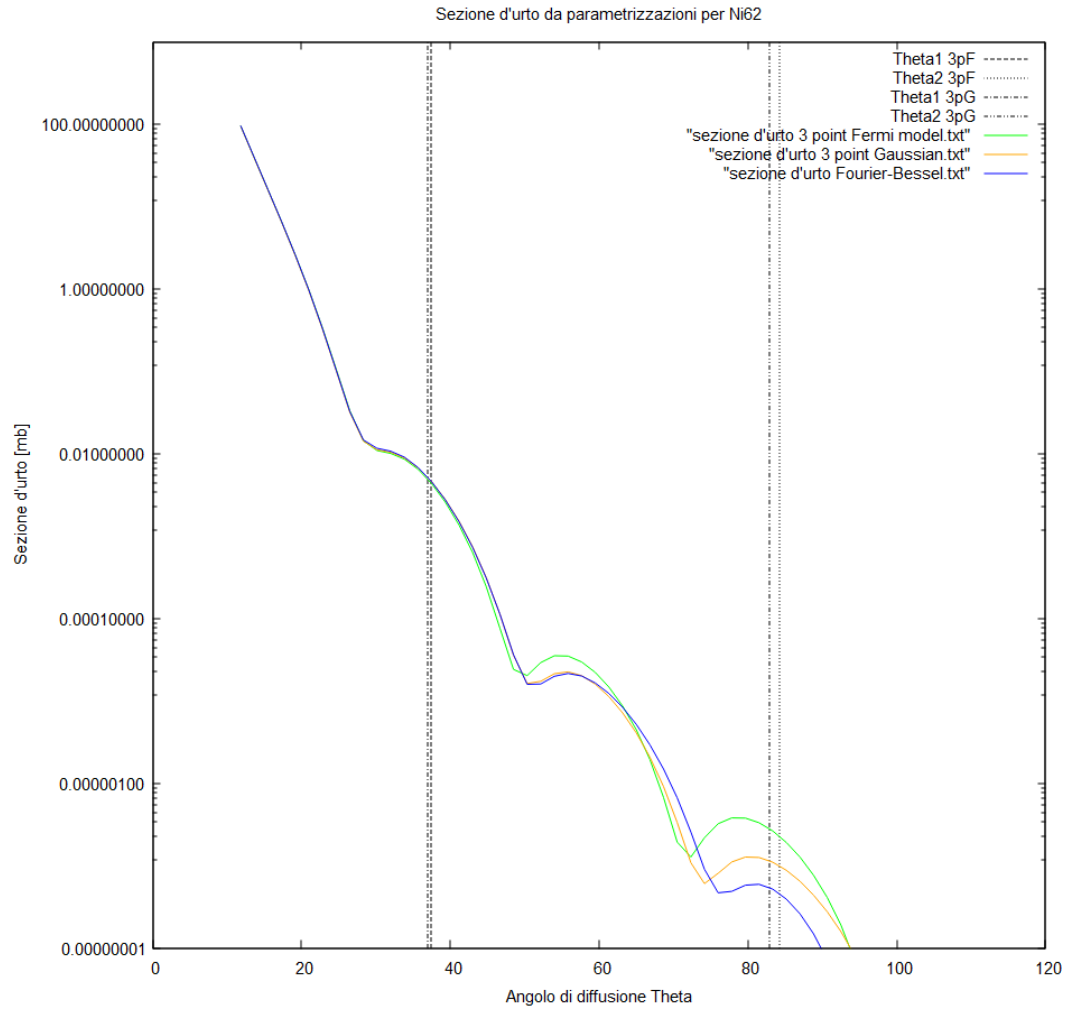


Figura 3.2: Sezioni d'urto ottenute dalle parametrizzazioni per ^{62}Ni . La sezione d'urto del modello di Fermi a 3 parametri è sovrapposta alla sezione d'urto del modello di Gauss a 3 parametri.

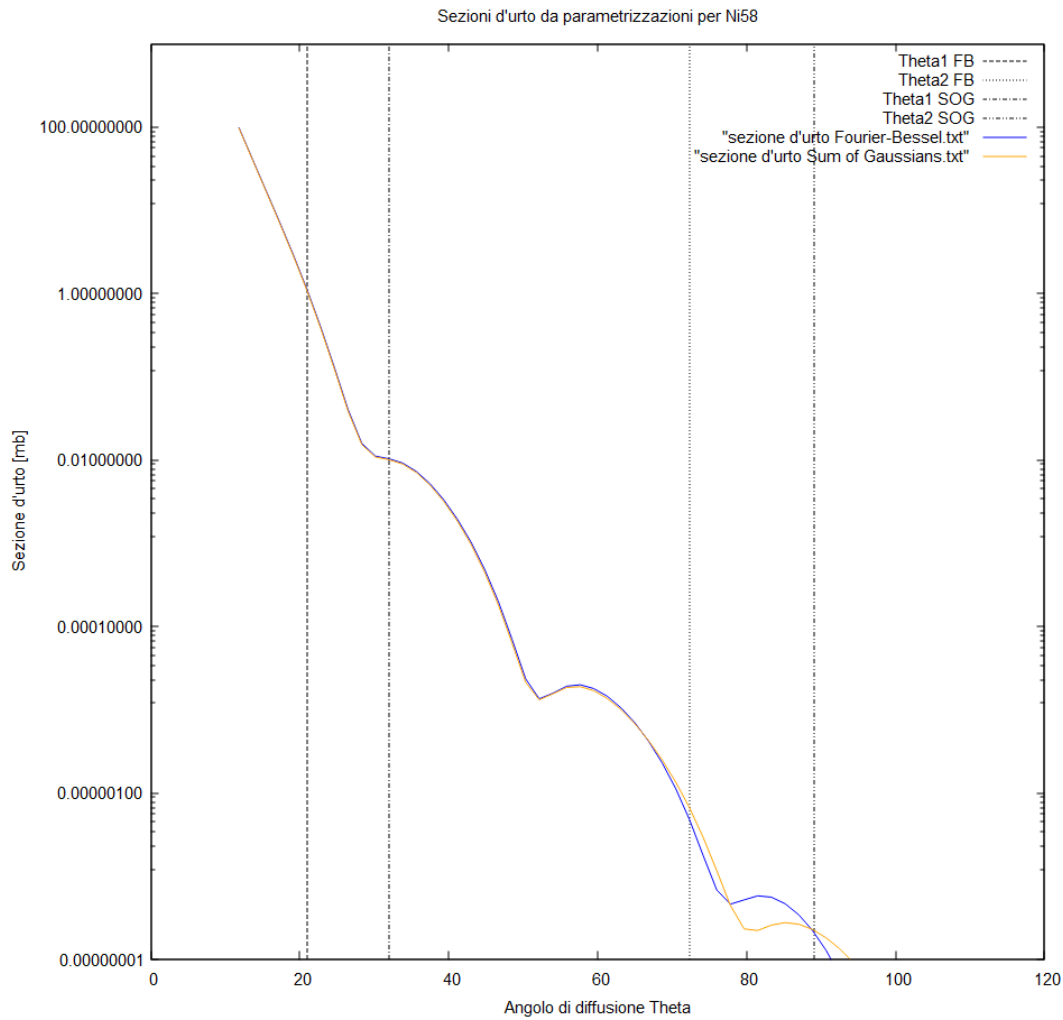


Figura 3.3: Sezioni d'urto ottenute dalle parametrizzazioni per ^{58}Ni .

Dai precedenti grafici si nota che, entro il range di valori di θ in cui le parametrizzazioni hanno validità, le sezioni d'urto sperimentali derivanti da diverse parametrizzazioni siano compatibili nucleo per nucleo, e la compatibilità tra le sezioni d'urto aumenta all'aumentare dei parametri liberi della parametrizzazione, fino a che, per il nucleo ^{58}Ni , le sezioni d'urto sono praticamente coincidenti in scala logaritmica limitatamente al range di angoli di diffusione in cui hanno validità le parametrizzazioni sperimentali.

Dato che i precedenti grafici di sezioni d'urto essenzialmente si sovrappongono in scala logaritmica per ogni nucleo, si valutano ora gli scostamenti tra le sezioni d'urto per ogni nucleo in scala lineare, per avere una stima quantitativa delle differenze nei risultati ottenuti sperimentalmente e controllare che i grafici di sezioni d'urto siano consistenti.

Lo scostamento lineare è dato da

$$\Delta\sigma(\theta) = \frac{\sigma_A(\theta) - \sigma_B(\theta)}{\sigma_A(\theta) + \sigma_B(\theta)} \quad (3.3)$$

con $\sigma(\theta)$ che indica una sezione d'urto di una specifica parametrizzazione in funzione dell'angolo di diffusione θ .

Per il nucleo ^{16}O si ha

parametrizzazioni	$\Delta\sigma$ media
MHO-2pF	$1.01 \cdot 10^{-1}$

Per il nucleo ^{62}Ni si ha

parametrizzazioni	$\Delta\sigma$ media
3pF-3pG	$1.48 \cdot 10^{-1}$

Per il nucleo ^{58}Ni si ha

parametrizzazioni	$\Delta\sigma$ media
FB-SOG	$6.7 \cdot 10^{-2}$

Dai valori ricavati di $\Delta\sigma(\theta)$ per ogni nucleo, si nota che effettivamente le sezioni d'urto sperimentali differiscono di poco anche in scala lineare.

Si nota inoltre che lo scostamento diminuisce nel caso di modelli a più parametri liberi per il nucleo ^{58}Ni , proiettando quindi lo scostamento minimo tra le densità di carica ottenute nel Capitolo 2 nelle sezioni d'urto sperimentali, mentre lo scostamento maggiore tra le densità di carica per i nuclei ^{16}O e ^{62}Ni si traduce in uno scostamento maggiore ma comunque piccolo nelle sezioni d'urto ricavate.

Si riassumono ora i risultati ottenuti di densità di carica da parametrizzazioni, sezione d'urto sperimentali e scostamento tra le parametrizzazioni per ogni nucleo, in cui si è anche graficato $\Delta\sigma(\theta)$ in funzione dell'angolo di diffusione.

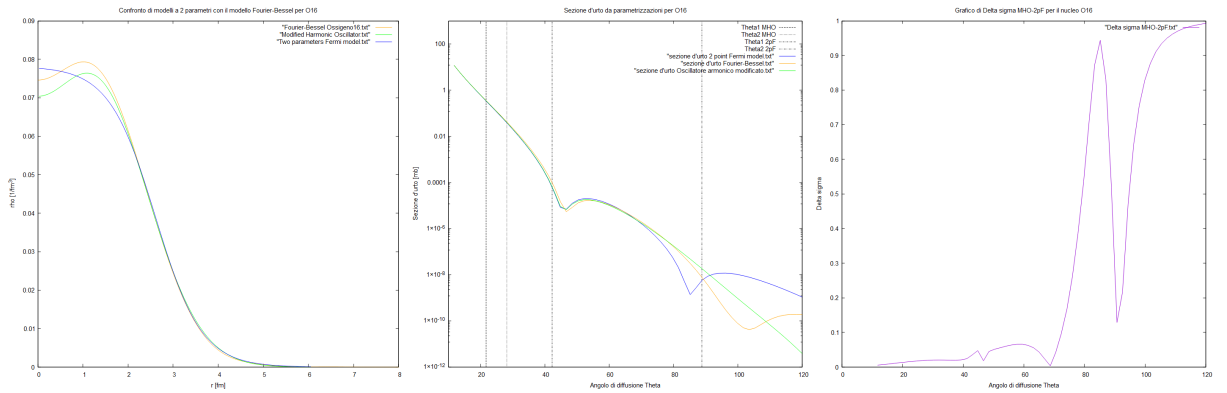


Figura 3.4: Grafico di densità di carica, sezione d'urto da parametrizzazioni e $\Delta\sigma(\theta)$ Modified Harmonic Oscillator-Two parameter Fermi model per il nucleo ^{16}O .

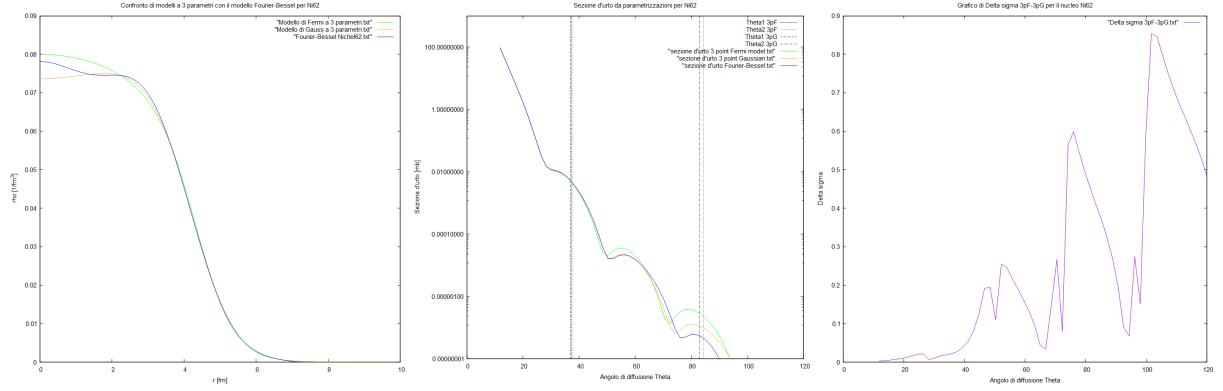


Figura 3.5: Grafico di densità di carica, sezione d'urto da parametrizzazioni e $\Delta\sigma(\theta)$ Three parameter Fermi model-Three parameter Gaussian model per il nucleo ^{62}Ni .

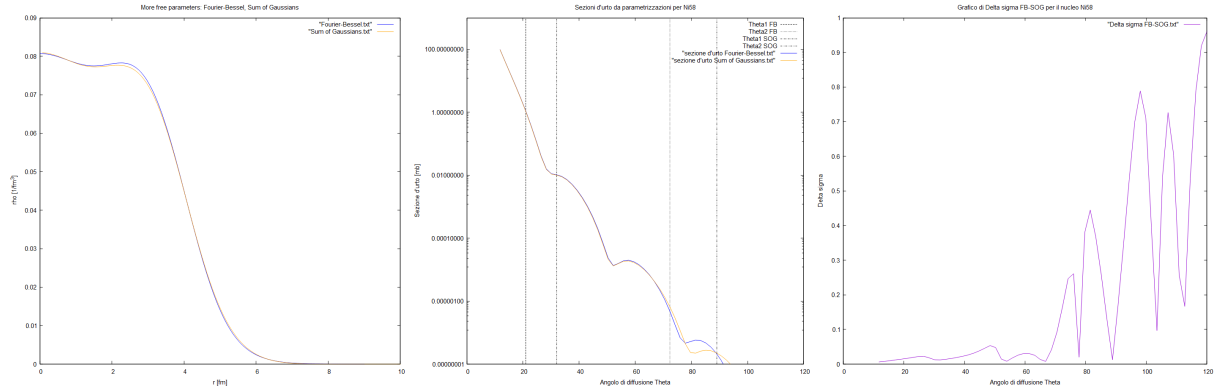


Figura 3.6: Grafico di densità di carica, sezione d'urto da parametrizzazioni e $\Delta\sigma(\theta)$ Fourier Bessel-Sum of Gaussians per il nucleo ^{58}Ni .

Dai panel riassuntivi per ogni nucleo, si nota che lo scostamento $\Delta\sigma(\theta)$ tra le parametrizzazioni è piccolo per piccoli valori dell'angolo di diffusione, per poi aumentare fino ad 1 dopo 80° , che corrisponde all'incirca alla fine del range di validità delle parametrizzazioni sperimentali dato da [DeV87].

Si conferma quindi il fatto che le parametrizzazioni di densità di carica hanno validità fino ad un certo valore di θ , mentre ciò che compare nelle sezioni d'urto per grandi valori dell'angolo di diffusione è solo una supposizione data dalla forma funzionale del modello della densità di carica, infatti è più plausibile fisicamente che la sezione d'urto sperimentale tenda a 0 più velocemente dopo un certo valore di θ rispetto al risultato ottenuto nei grafici fino al valore $\theta=120^\circ$.

Nelle figure delle sezioni d'urto in funzione dell'angolo di diffusione θ si ha che la rapida diminuzione della sezione d'urto al crescere dell'angolo di diffusione è dovuta alla

dipendenza, di tipo $1/|\mathbf{q}|^4$, dall'impulso trasferito, ed il fatto che una sezione d'urto sia più bassa, e quindi più spostata verso valori più bassi di $|\mathbf{q}|$ dimostra che il nucleo con sezione d'urto minore è più esteso del nucleo con sezione d'urto maggiore [Pov98], infatti si nota che la sezione d'urto del nucleo ^{16}O è maggiore rispetto a quella dei nuclei ^{62}Ni e ^{58}Ni , che possiedono più nucleoni e sono quindi più grandi.

Inoltre dai risultati ottenuti si nota come le sezioni d'urto e le densità di carica abbiano lo stesso andamento prospettato in Figura 2.1 per ^{40}Ca , in cui si nota una sezione d'urto con minimi caratteristici, confermando la validità dei risultati ottenuti.

3.2 Stima del raggio nucleare

I grafici di sezione d'urto da diffusione di elettroni sui nuclei hanno il tipico andamento di un pattern di diffrazione, e volendo analizzarne, considerando il nucleo come piatto e la diffrazione attraverso un foro circolare, si ha che il primo minimo di diffrazione appare in corrispondenza di

$$\theta = \arcsin \left(\frac{1.22\lambda}{D} \right) \quad (3.4)$$

con D diametro del nucleo.

Quindi dalla collocazione dei minimi nella figura della sezione d'urto è possibile avere una stima del raggio nucleare, ma si noti che si tratta comunque di una stima grezza, dato che il potenziale di scattering generato dal nucleo è un problema tridimensionale, approssimativamente collegato alla diffrazione da un disco bidimensionale [Kra91].

Il raggio nucleare si stima dalla (3.4)

$$R = \frac{1.22\lambda}{2 \sin \theta} \quad (3.5)$$

con la lunghezza d'onda λ dell'elettrone incidente data dalla relazione dell'impulso di De Broglie $p = \hbar k$

$$p = \hbar k \rightarrow \lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e E}} \quad (3.6)$$

con p impulso dell'elettrone, considerato una particella libera, $m_e=0.5 \text{ MeV}/c^2$, $E=400 \text{ MeV}$.

Dall'analisi del primo minimo di diffrazione per ognuno dei nuclei si ottengono le seguenti stime di raggi nucleari, confrontate con i valori dei raggi quadratici medi dei nuclei ricavati sperimentalmente in [DeV87], inoltre si riportano le referenze da cui si sono ricavati i dati sperimentali dei raggi quadratici medi.

Nucleo	primo minimo di diffrazione	raggio nucleare	$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	referenza
^{16}O	45°	2.8 fm	2.7 fm	[Si70b]
^{62}Ni	26°	3.2 fm	3.8 fm	[Fi70]
^{58}Ni	26°	3.2 fm	3.7 fm	[Fi70]

Confrontando i valori ottenuti con i raggi quadratici medi tabulati, si nota che i raggi nucleari ricavati dalla diffrazione sono confrontabili con i valori ricavati sperimentalmente nonostante si sia svolta un'analisi approssimativa.

Si nota inoltre che la stima peggiora quando aumenta il numero di massa del nucleo, infatti è più precisa per il nucleo ^{16}O rispetto ai due nuclei ^{62}Ni e ^{58}Ni .

Capitolo 4

Confronto con la teoria

4.1 Confronto tra densità di carica sperimentali e teoriche

Nella presente Sezione si confrontano le distribuzioni di carica ricavate e graficate nel Capitolo 2 per ogni gruppo di parametrizzazioni con le distribuzioni di carica teoriche ricavate con il metodo Hartree-Fock.

Inoltre, in ogni immagine è stata inserita la parametrizzazione Fourier-Bessel per avere un confronto con un modello a più parametri liberi. Si specifica che i confronti tra densità di carica sono effettuati sempre considerando lo stesso nucleo, così da avere dei confronti consistenti.

Per ^{16}O si ha

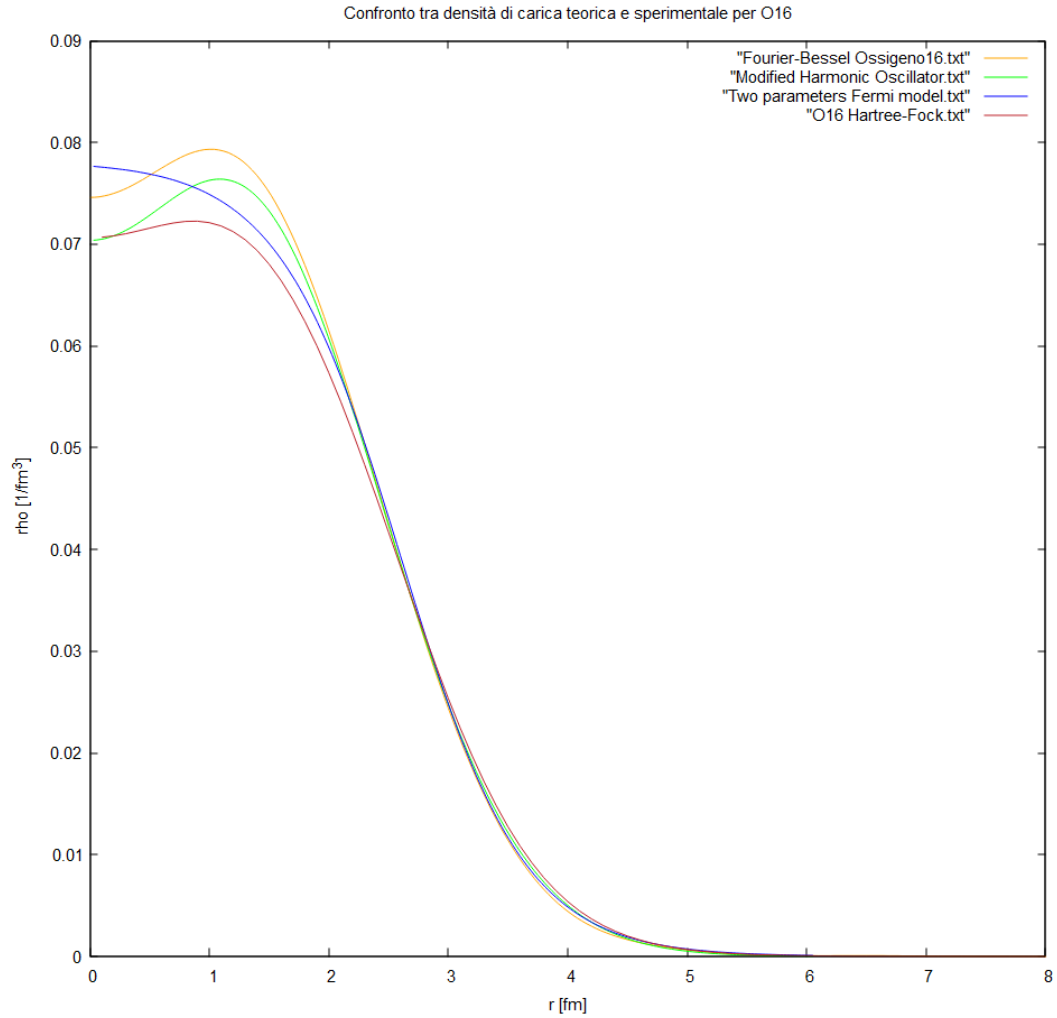


Figura 4.1: Grafico di densità di carica ricavate da parametrizzazioni e densità di carica teorica per ^{16}O .

4.1. CONFRONTO TRA DENSITÀ DI CARICA SPERIMENTALI E TEORICHE 39

Per ^{62}Ni si ha

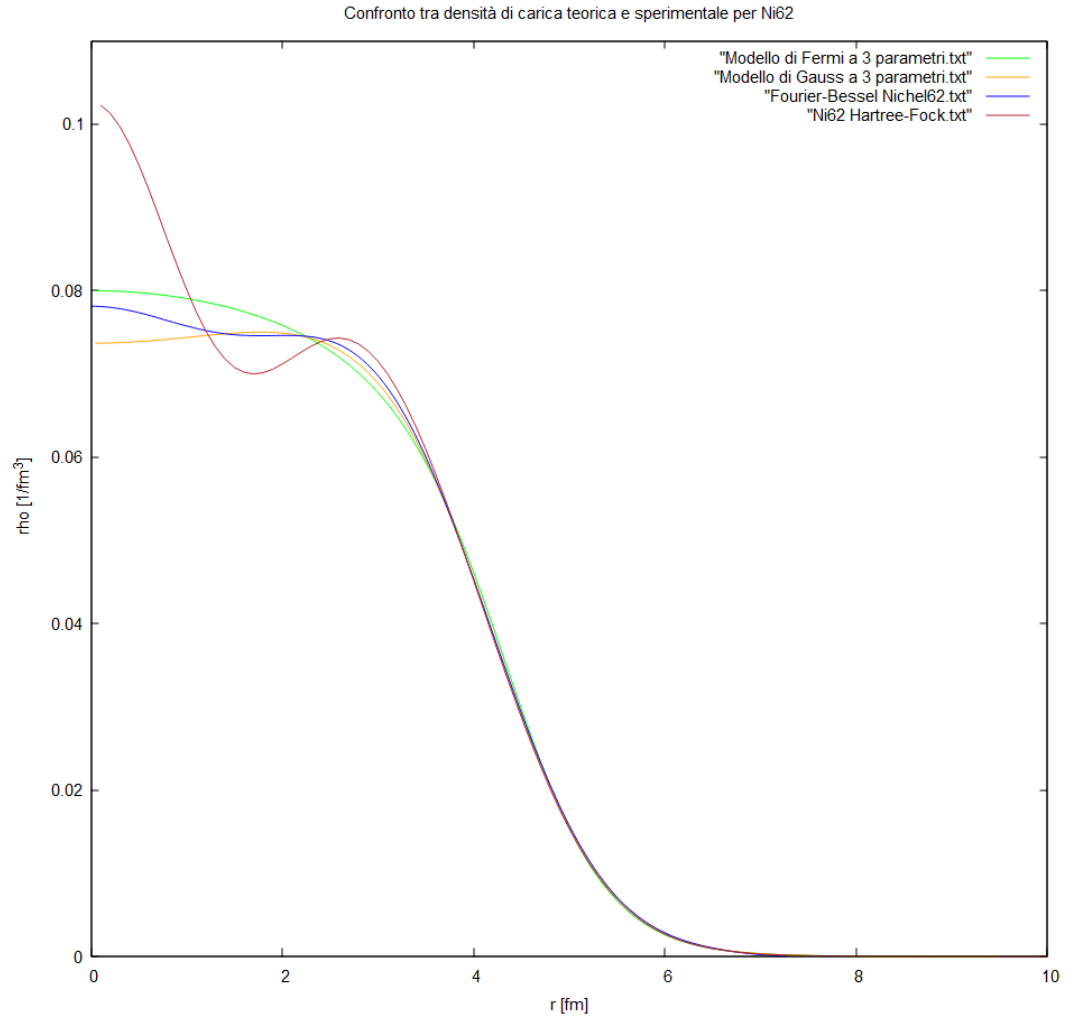


Figura 4.2: Grafico di densità di carica ricavate da parametrizzazioni e densità di carica teorica per ^{62}Ni .

Per ^{58}Ni si ha

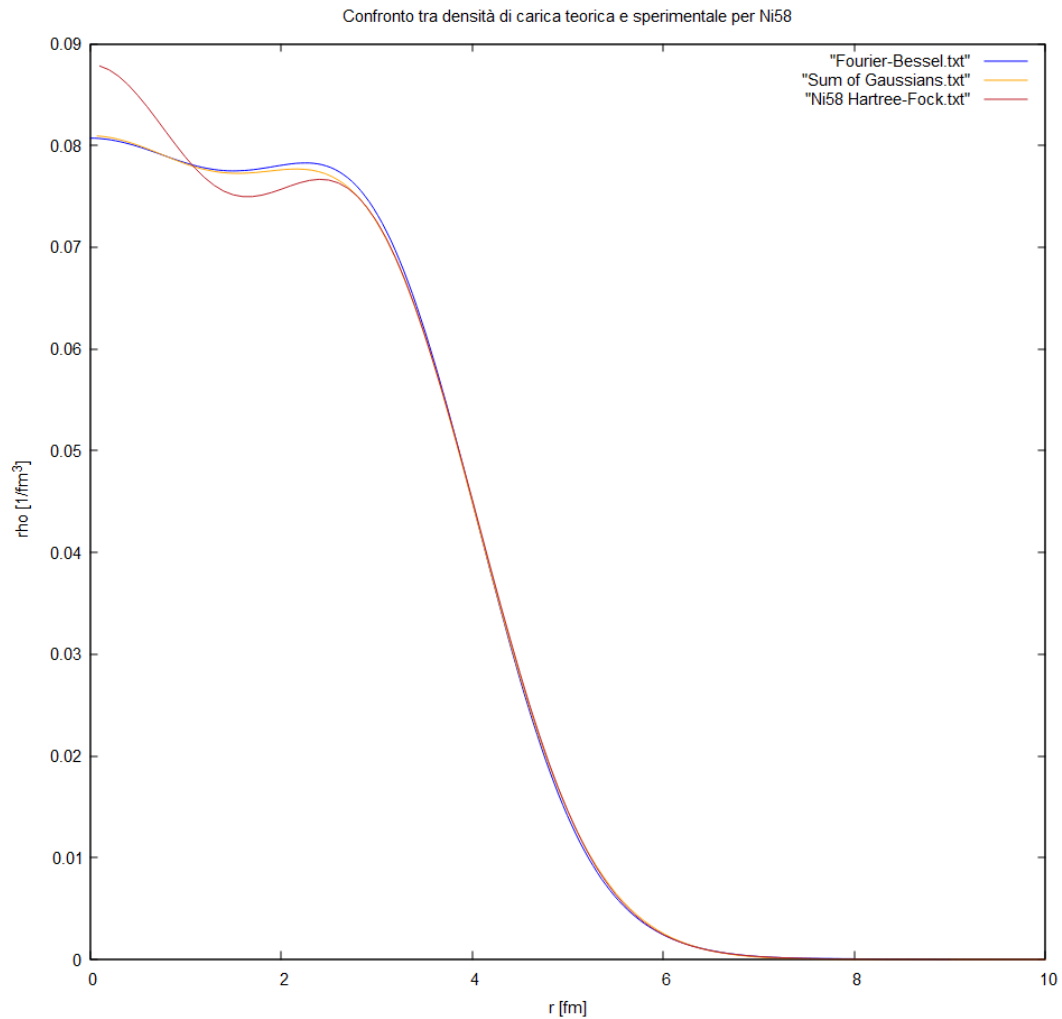


Figura 4.3: Grafico di densità di carica ricavate da parametrizzazioni e densità di carica teorica per ^{58}Ni .

Dai confronti nelle figure si nota come le distribuzioni di carica sperimentali si avvicinano sempre più a quelle teoriche quando aumenta il numero dei parametri liberi del modello, fino ad essere quasi coincidenti in scala logaritmica per quanto riguarda i modelli Fourier-Bessel e Sum of Gaussians, che sono i modelli con maggior numero di parametri liberi.

Si nota inoltre che le diverse densità di carica per ogni nucleo hanno scostamenti più considerevoli per piccoli valori di r , mentre sono confrontabili al crescere della distanza r .

Dai grafici delle distribuzioni di carica sperimentali e teoriche si deduce che i nuclei non sono sfere con una superficie definita in modo netto. Al loro interno la densità di carica è praticamente costante, mentre in superficie, ovvero da un certo valore di r in poi, la densità di carica si annulla in modo graduale ma simile per ogni parametrizzazione della densità di carica.

Inoltre, sperimentalmente si trova che la densità di carica $\rho(0)$ al centro del nucleo assume all'incirca sempre lo stesso valore sia per le distribuzioni di carica teoriche che sperimentali, anche se tale valore diminuisce leggermente al crescere del numero di massa A .

Se si tiene conto della presenza di neutroni, moltiplicando la densità di carica per il fattore A/Z si trova che la densità nucleare all'interno del nucleo è la stessa per tutti i nuclei, come dimostra anche il confronto con la densità di carica in Figura 2.1, in cui si ha approssimativamente lo stesso valore di $\rho(0)$ del ^{40}Ca che si ha nei nuclei considerati.

4.2 Confronto tra sezioni d'urto sperimentali e teoriche

Nella presente Sezione, insieme al calcolo delle sezioni d'urto di diffusione elastica dalle densità prodotte nel Capitolo 3, si determinano e graficano le sezioni d'urto di diffusione elastica calcolate con il metodo Hartree-Fock più Bardeen-Cooper-Schrieffer per ogni nucleo, così da avere un confronto tra le sezioni d'urto sperimentali e le previsioni teoriche per i nuclei che si sono considerati.

Il range di validità di θ è lo stesso considerato nei grafici di sezioni d'urto nel Capitolo 3. Si specifica inoltre che i colori dei grafici delle sezioni d'urto sono omogenei rispetto ai grafici di densità di carica ricavate nella sezione 4.1.

Per il nucleo ^{16}O si ha

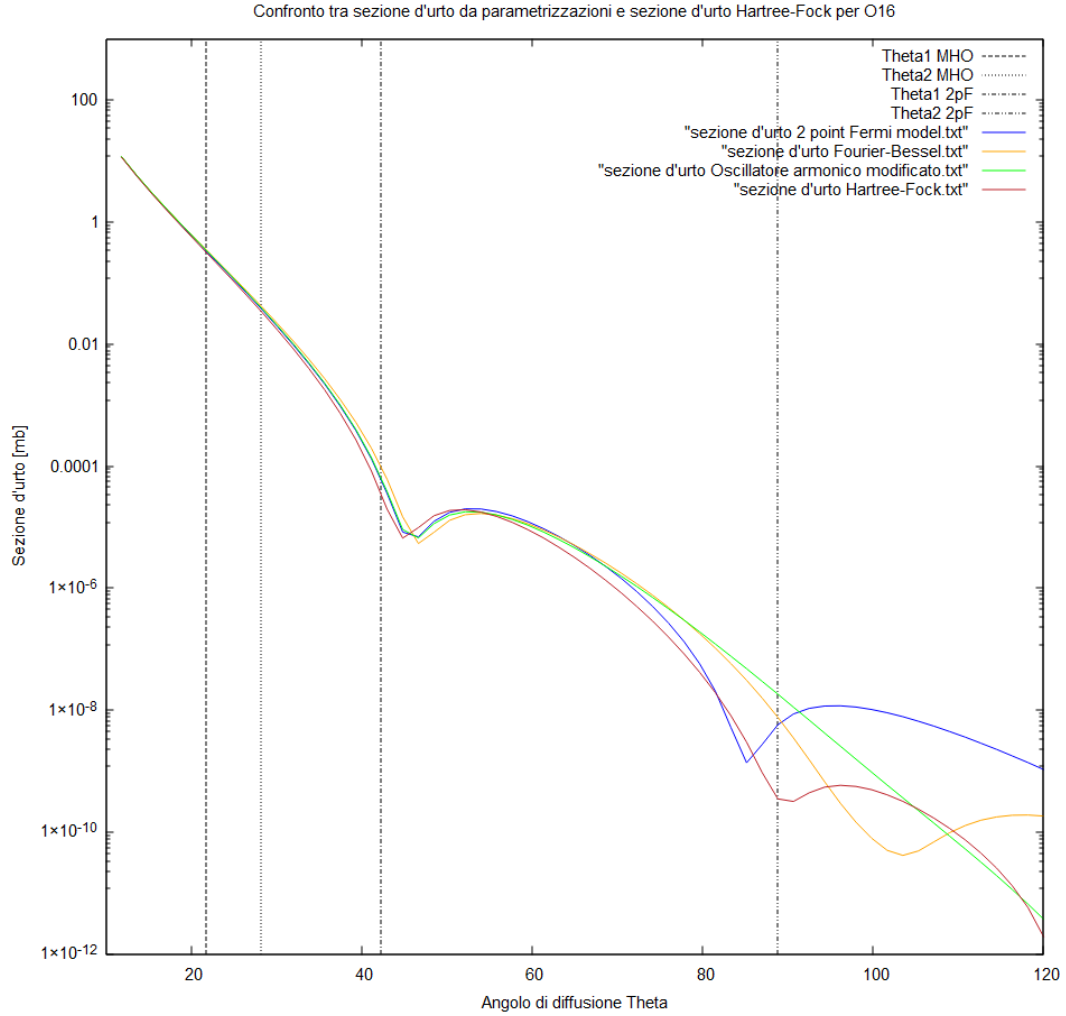


Figura 4.4: Confronto tra le sezioni d'urto ottenute dalle parametrizzazioni e la sezione d'urto Hartree-Fock per ^{16}O .

Per il nucleo ^{62}Ni si ha

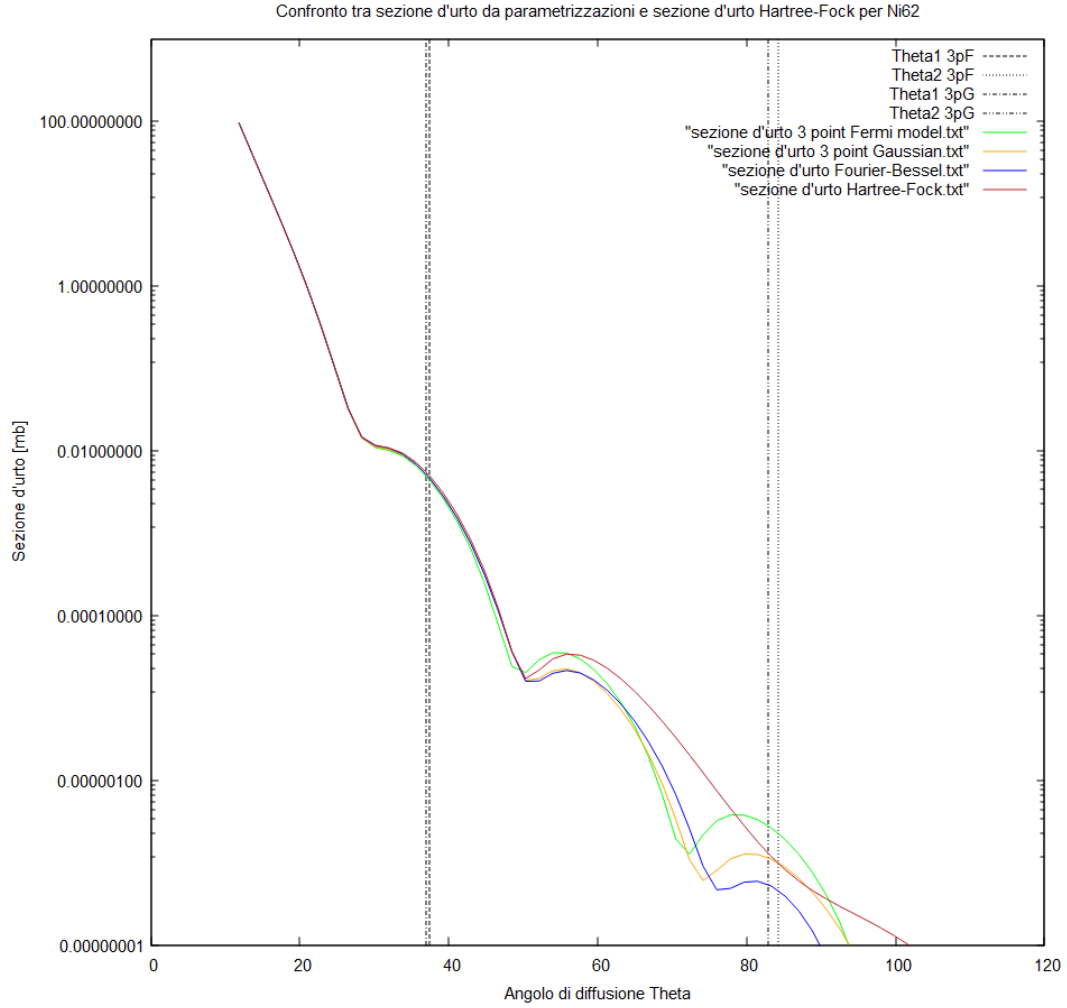


Figura 4.5: Confronto tra le sezioni d'urto ottenute dalle parametrizzazioni e la sezione d'urto Hartree-Fock per ^{62}Ni .

Per il nucleo ^{58}Ni si ha

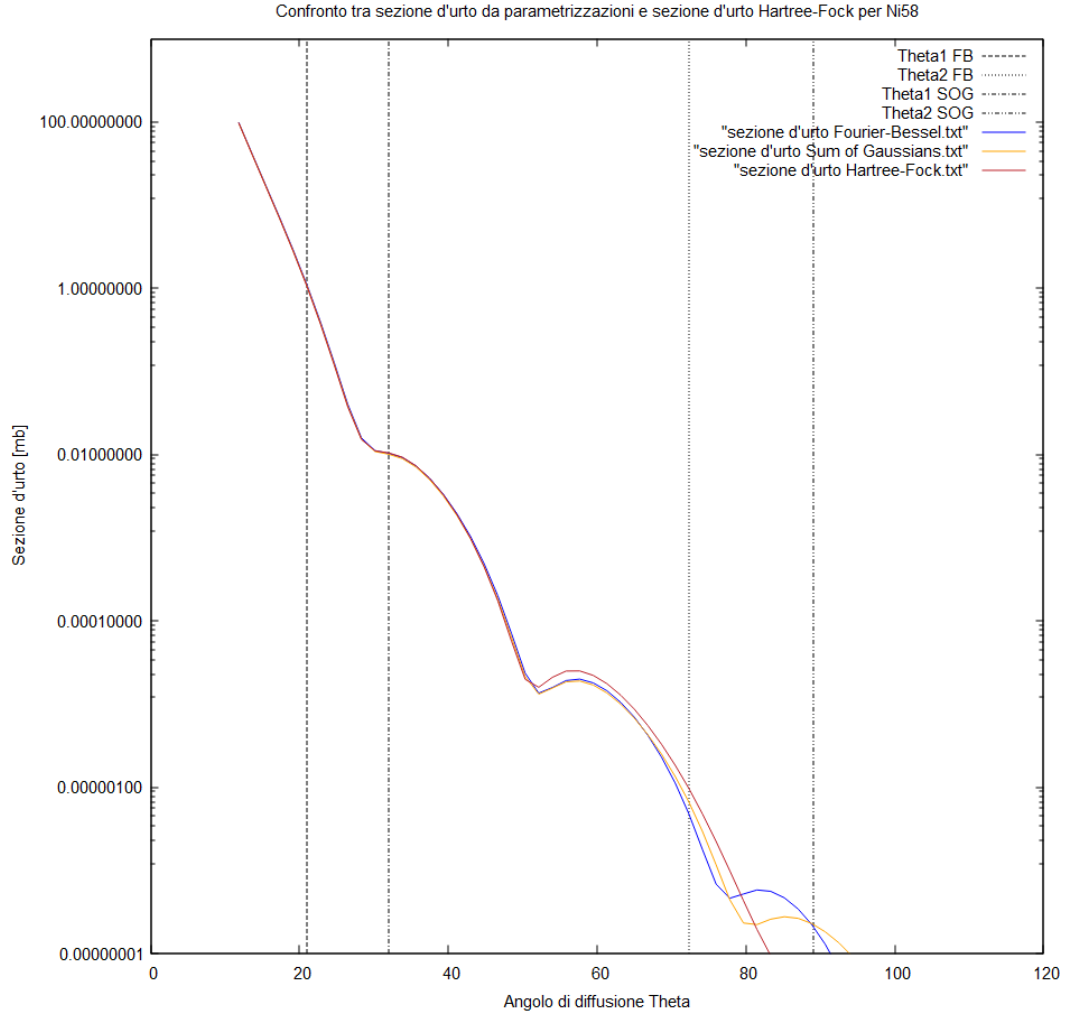


Figura 4.6: Confronto tra le sezioni d'urto ottenute dalle parametrizzazioni e la sezione d'urto Hartree-Fock per ^{58}Ni .

In riferimento ai precedenti grafici di confronto tra le sezioni d'urto sperimentali e teoriche, si ha che entro i range di valori di θ sono compatibili nucleo per nucleo in scala logaritmica.

Ripetendo la prassi vista nel Capitolo 3, si valuta ora lo scostamento $\Delta\sigma(\theta)$ per analizzare la differenza in scala lineare tra le sezioni d'urto sperimentali ricavate nel precedente capitolo e la sezione d'urto teorica Hartree-Fock, dato che le sezioni d'urto su scala logaritmica essenzialmente si sovrappongono.

Si valuta quindi

$$\Delta\sigma(\theta) = \frac{\sigma_A(\theta) - \sigma_B(\theta)}{\sigma_A(\theta) + \sigma_B(\theta)} \quad (4.1)$$

con $\sigma(\theta)$ che indica una sezione d'urto di una specifica parametrizzazione.

Per il nucleo ^{16}O si ha

parametrizzazioni	$\Delta\sigma$ media
MHO-Hartree Fock	$1.93 \cdot 10^{-1}$
2pF-Hartree Fock	$1.26 \cdot 10^{-1}$

Per il nucleo ^{62}Ni si ha

parametrizzazioni	$\Delta\sigma$ media
3pF-Hartree Fock	$1.95 \cdot 10^{-1}$
3pG-Hartree Fock	$2.16 \cdot 10^{-1}$

Per il nucleo ^{58}Ni si ha

parametrizzazioni	$\Delta\sigma$ media
FB-Hartree Fock	$1.25 \cdot 10^{-1}$
SOG-Hartree Fock	$9.3 \cdot 10^{-2}$

Dai valori ricavati di $\Delta\sigma(\theta)$ per ogni nucleo, si nota che effettivamente le sezioni d'urto sperimentali e teoriche differiscono di poco anche in scala lineare.

Quanto si è visto nel Capitolo 3 per le sezioni d'urto sperimentali, si nota anche tra le sezioni d'urto sperimentali e teoriche, ovvero lo scostamento diminuisce nel caso di modelli a più parametri liberi per il nucleo ^{58}Ni , proiettando quindi lo scostamento minimo tra le densità di carica ottenute nel Capitolo 2 e la densità di carica Hartree-Fock ricavata nella Sezione 4.1 nelle sezioni d'urto sperimentali e in quella teorica.

Si riassumono ora i risultati ottenuti di densità di carica, sezione d'urto e scostamento tra le sezioni da parametrizzazioni e la sezione teorica per ogni nucleo, in cui si è graficato $\Delta\sigma(\theta)$ in funzione dell'angolo di diffusione per controllare che gli scostamenti tra le sezioni d'urto sperimentali e teoriche in scala lineare siano accettabili.

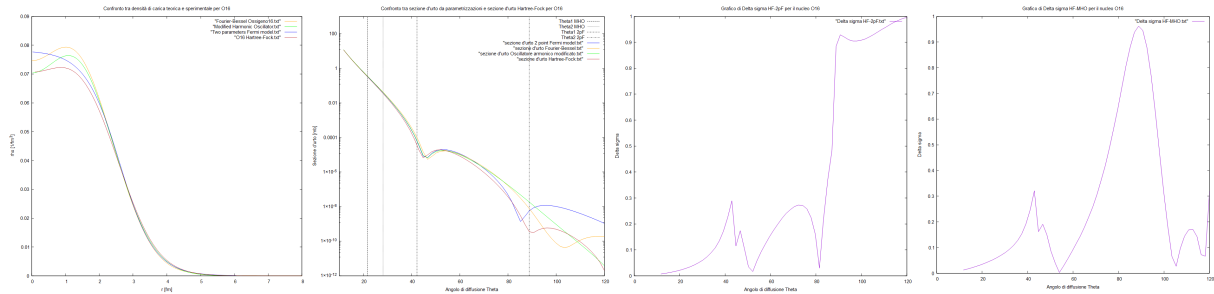


Figura 4.7: Grafico di densità di carica, sezione d'urto da parametrizzazioni, $\Delta\sigma(\theta)$ Modified Harmonic Oscillator-Hartree Fock, $\Delta\sigma(\theta)$ Two parameter Fermi model-Hartree Fock per il nucleo ^{16}O .

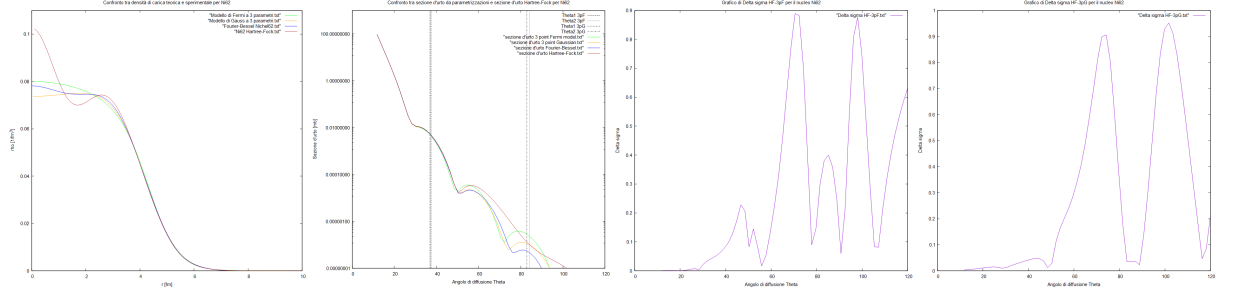


Figura 4.8: Grafico di densità di carica, sezione d'urto da parametrizzazioni, $\Delta\sigma(\theta)$ Three parameter Fermi model-Hartree Fock, $\Delta\sigma(\theta)$ Three parameter Gaussian model-Hartree Fock per il nucleo ^{62}Ni .

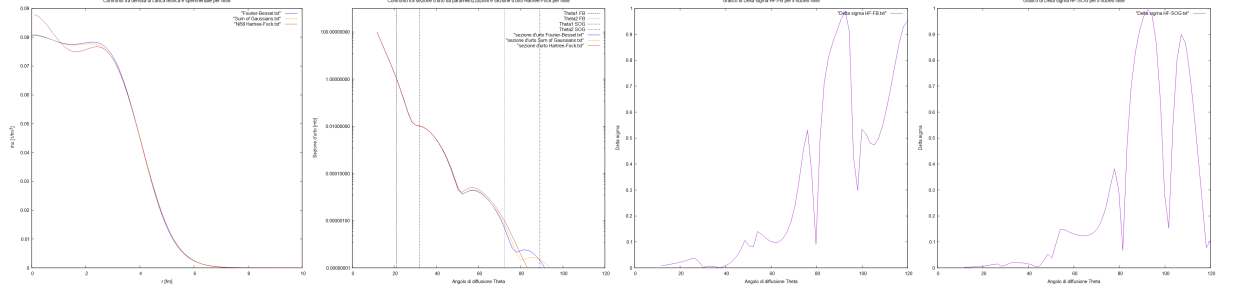


Figura 4.9: Grafico di densità di carica, sezione d'urto da parametrizzazioni, $\Delta\sigma(\theta)$ Fourier Bessel-Hartree Fock, $\Delta\sigma(\theta)$ Sum of Gaussians-Hartree Fock per il nucleo ^{58}Ni .

Come visto nel Capitolo 3, dai panel riassuntivi per ogni nucleo, si nota che lo scostamento $\Delta\sigma(\theta)$ tra le parametrizzazioni sperimentali e teoriche è piccolo per piccoli valori dell'angolo di diffusione, per poi aumentare fino ad 1 dopo 80° , che corrisponde all'incirca alla fine del range di validità delle parametrizzazioni sperimentali dato da [DeV87].

Si conferma quindi il fatto che le parametrizzazioni e le previsioni teoriche di densità di carica hanno validità fino ad un certo valore di θ , mentre ciò che compare nelle sezioni d'urto per grandi valori dell'angolo di diffusione è solo una supposizione data dalla forma funzionale del modello della densità di carica.

Inoltre dai risultati ottenuti si nota che anche le sezioni d'urto e le densità di carica teoriche hanno lo stesso andamento prospettato in Figura 2.1 per ^{40}Ca e le sezioni d'urto sperimentali ricavate nel Capitolo 3, in cui si nota una sezione d'urto con minimi caratteristici, confermando la validità dei risultati ottenuti.

Nella presente Sezione si nota inoltre come le differenze tra le densità di carica sperimentali e teoriche nella sezione 4.1 si riflettano nelle differenze tra le sezioni d'urto in scala lineare, in cui si nota che gli scostamenti sono piccoli ed aumentano all'aumentare dell'angolo di diffusione θ .

Si conferma inoltre quanto detto nel Capitolo 3 per le sezioni d'urto sperimentali, ovvero che gli scostamenti lineari tra le sezioni d'urto sperimentali e teoriche siano minori per i modelli a più parametri del nucleo ^{58}Ni , confermando che le densità di carica, e conseguentemente le sezioni d'urto, si sovrappongano sempre più all'aumentare dei parametri liberi della parametrizzazione di densità di carica.

Conclusioni

Nella presente tesi si sono calcolate le distribuzioni di carica nucleare a partire dai modelli e dai dati sperimentali presenti nell'articolo [DeV87], e si sono calcolate le rispettive sezioni d'urto sperimentali di diffusione elastica.

Dall'articolo si sono scelti dei nuclei in base al numero di parametri liberi delle parametrizzazioni che gli autori hanno utilizzato per descriverli, scegliendone uno per ogni gruppo di parametrizzazioni, e per i suddetti nuclei si sono calcolate le densità di carica attraverso un programma FORTRAN. I nuclei che si sono considerati sono ^{16}O , ^{62}Ni , ^{58}Ni , rispettivamente per due, tre e più parametri liberi.

Si è constatato che, all'aumentare del numero dei parametri liberi del modello, le differenze tra le densità di carica ottenute dalle parametrizzazioni diminuiscono, fino quasi ad essere trascurabili tra le parametrizzazioni Fourier-Bessel e Sum of Gaussians nel caso di modelli a più parametri per il nucleo ^{58}Ni .

Per sottolineare la differenza nelle densità di carica sperimentali tra i modelli a 2 e 3 parametri liberi, nel Capitolo 2 vi è il confronto, per i nuclei ^{16}O e ^{62}Ni , con il modello Fourier-Bessel a più parametri.

Si nota inoltre che le densità di carica con maggior numero di parametri liberi riescono a riprodurre meglio i dati sperimentali di distribuzioni di carica del Capitolo 2 e sono maggiormente in accordo con le previsioni teoriche Hartree-Fock del Capitolo 4.

Dalle anzidette densità di carica sperimentali si sono ricavate le sezioni d'urto sperimentali di diffusione elastica tramite un differente programma FORTRAN, e si sono graficate con il rispettivo range di momento trasferito q , e quindi dell'angolo di diffusione θ , in cui sono stati ricavati i dati di ogni parametrizzazione, confermando che negli intervalli considerati le sezioni d'urto sperimentali si sovrappongono, quindi si possono considerare compatibili.

Per analizzare meglio le differenze tra le sezioni d'urto sperimentali e verificare che esse si possano considerare compatibili con le sezioni d'urto teoriche Hartree-Fock, ricavate dalle sopracitate densità di carica teoriche, si è analizzata la differenza pesata $\Delta\sigma(\theta)$, definita in equazione (3.3), verificando che tale scostamento è piccolo sia tra le diverse parametrizzazioni sperimentali che tra i modelli sperimentali e le previsioni teoriche, notando inoltre che tale scostamento diminuisce all'aumentare del numero di parametri liberi della distribuzione di carica.

Successivamente, seguendo la stessa procedura, si sono calcolate e graficate le sezioni d'urto provenienti da densità di carica Hartree-Fock, e si sono graficate con le sezioni d'urto sperimentali ricavate precedentemente, confermando che sono in accordo.

Anche in questo caso, per verificare che effettivamente le sezioni d'urto sperimentali e teoriche si possano ritenere compatibili, si è valutata la media pesata $\Delta\sigma(\theta)$, confermando che tale scostamento è piccolo tra le varie sezioni d'urto, che quindi si possono ritenere compatibili.

Si è quindi stabilito che, entro il range di valori di momento trasferito q (e conseguentemente di angolo di diffusione θ) in cui le parametrizzazioni di [DeV87] hanno validità, le sezioni d'urto sperimentali e teoriche sono in accordo.

In aggiunta, si nota che le densità di carica sperimentali tendono a sovrapporsi di più a quelle teoriche quando il numero di parametri liberi che descrivono il modello aumenta, quindi nel caso del nucleo ^{58}Ni .

In conclusione, si può affermare che i dati sperimentali delle parametrizzazioni di densità di carica derivanti dall'articolo [DeV87] sono compatibili con quanto ci si aspettava dalle densità di carica teoriche, e lo stesso vale per le sezioni d'urto sperimentali che si ricavano dalle parametrizzazioni e le sezioni d'urto teoriche Hartree-Fock.

Appendice A

Calcolo della sezione d'urto geometrica

Si considera un bersaglio sottile di spessore d con N_b centri diffusori con densità di particelle n_b . Si bombarda il bersaglio con un fascio di particelle puntiformi a , e si assuma che, dopo aver interagito, le particelle siano rimosse dal fascio.

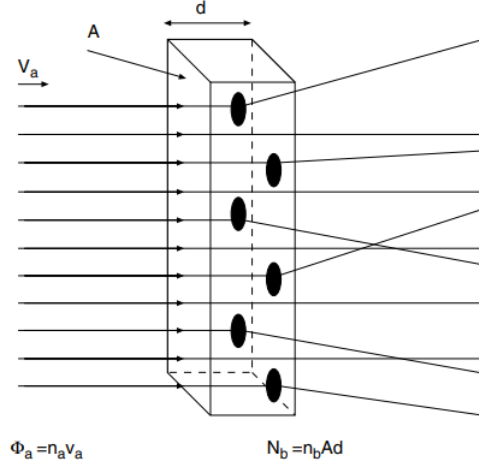


Figura A.1: Misura della sezione d'urto geometrica

Il tasso di conteggi totale \dot{N} associato a tale processo, ovvero il numero totale di reazioni nell'unità di tempo, è dato dalla differenza fra il numero di particelle del fascio N_a prima e dopo l'interazione con il bersaglio. Questo fornisce una misura diretta della sezione d'urto σ_b [Pov98].

Se si indica con A la sezione trasversale del fascio ed n_a densità di particelle, il flusso

di particelle incidenti è dato da

$$\Phi_a = \frac{\dot{N}_a}{A} = n_a v_a \quad (\text{A.1})$$

Il numero totale di particelle bersaglio nell'area del fascio è

$$N_b = n_b A d \quad (\text{A.2})$$

La frequenza \dot{N} a cui la reazione avviene è data dal prodotto del flusso incidente per la sezione d'urto geometrica

$$\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b \quad (\text{A.3})$$

da cui deriva la sezione d'urto geometrica, ovvero l'area che ciascun centro diffusore presenta al proiettile

$$\sigma_b = \frac{\dot{N}}{\Phi_a N_b} \quad (\text{A.4})$$

Appendice B

Calcolo del potenziale elettrico del nucleo

L'elettrone incidente interagisce con il campo elettrostatico del nucleo, e si utilizzano le equazioni di Maxwell per ricavare la distribuzione di carica ρ , in particolare la legge di Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{B.1})$$

Si può scrivere il campo elettrico in funzione del potenziale scalare ϕ e del potenziale vettore \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{B.2})$$

In gauge di Coulomb si ha $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, quindi sostituendo l'espressione precedente (B.2) nella legge di Gauss (B.1) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{B.3})$$

La soluzione dell'equazione differenziale (B.3) è il potenziale elettrico scalare $\phi(r)$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (\text{B.4})$$

Dalla formula del potenziale elettrico si evince che si sta sommando il contributo di ogni carica rispetto ad un punto scelto nel caso di distribuzione continua di cariche.

Appendice C

Derivazione classica della sezione d'urto di Rutherford

C.1 Derivazione classica

Si vuole ricavare la sezione d'urto di Rutherford, ottenuta nel Capitolo 1 da considerazioni quantistiche, seguendo invece un approccio classico al problema.

Si supponga che le particelle incidano con un parametro d'impatto b e che vengano deflesse di un angolo θ , per cui l'angolo solido è $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$.

Si supponga inoltre che il bersaglio abbia massa molto grande, in modo che si possa considerare immobile. Il numero delle particelle raccolte dopo la diffusione è proporzionale al numero di quelle che vengono inviate per la superficie $bd\phi db$, con db variazione infinitesima del parametro d'impatto.

Si considera un processo di diffusione di una particella di carica Z_1e ed energia cinetica E su di un nucleo bersaglio di carica Z_2e , come in figura, supponendo che le sole interazioni fra le particelle del fascio e il nucleo siano di tipo elettromagnetico.

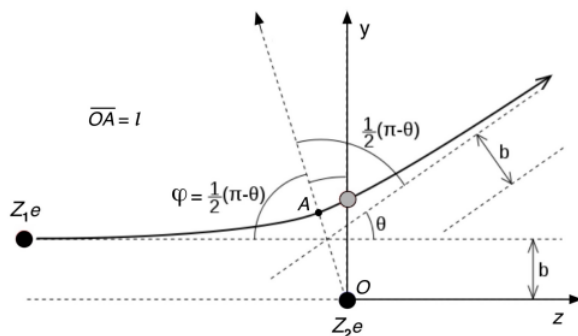


Figura C.1: Processo di diffusione per il calcolo della sezione d'urto di Rutherford

Si considera il processo di scattering elastico, quindi l'energia E ed il modulo dell'impulso p della particella incidente sono uguali prima e dopo l'urto, e la cinematica del processo può essere calcolata con il formalismo classico.

Sia

$$V = \frac{Z_2 e}{(4\pi\epsilon_0 r)} \quad (\text{C.1})$$

il potenziale generato dal centro diffusore carico e si consideri la generica particella del fascio incidente che, a distanza infinita dal centro diffusore, quando non ne sente ancora l'influenza, percorre una traiettoria di avvicinamento con velocità di modulo v lungo una retta parallela all'asse z e distante b da esso.

La quantità b è detta parametro d'impatto e consiste nella distanza alla quale la particella incidente sarebbe passata dal centro diffusore in assenza di interazione.

Da un punto di vista classico, il problema consiste nel determinare l'angolo θ di deflessione sulla traiettoria della particella in funzione di b , ovvero $\theta(b)$. Si procede determinando l'inverso, ovvero $b(\theta)$.

Il potenziale è di tipo centrale, dunque nel processo in esame si conserva il momento angolare ed il moto avviene in un piano, e sia $E_T = E_k + E_p$ l'energia totale a disposizione del sistema particella incidente e centro diffusore, essendo E_k l'energia cinetica ed E_p l'energia potenziale della particella incidente.

La traiettoria assunta da questa è dunque una conica coincidente con un'ellisse se $E_T < 0$ e con un'iperbole se $E_T > 0$. Nel presente caso $E_T > 0$ dato che, a distanza infinita, prima dell'urto, $V(r) = 0$ ed $E_T = E_k = mv^2/2$, e la traiettoria è quindi un'iperbole.

Si supponga, senza con ciò perdere in generalità nel risultato finale, che le forze siano repulsive, ovvero che le cariche di proiettile e bersaglio abbiano segno concorde.

Applicando le conservazioni di momento angolare ed energia si ha che, a distanza infinita, il momento angolare e l'energia valgono rispettivamente,

$$L = m v b \quad (\text{C.2})$$

ed

$$E = m v^2 / 2 \quad (\text{C.3})$$

mentre nel punto A di massimo avvicinamento valgono

$$L = m v_A l \quad (\text{C.4})$$

ed

$$E = \frac{m v_A^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(4\pi\epsilon_0 l)} \quad (\text{C.5})$$

Quindi, imponendo la conservazione di energia e momento angolare si ottiene

$$b = \frac{l v_A}{v} \quad (\text{C.6})$$

e

$$v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1Z_2e^2}{4\pi\epsilon_0ml} \quad (\text{C.7})$$

Ponendo

$$l_0 = \frac{2Z_1Z_2e^2}{4\pi\epsilon_0mv^2} = \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\epsilon_0E_k} \quad (\text{C.8})$$

che, fissata $E_k = mv^2/2$, corrisponde al punto di massimo avvicinamento \bar{A} possibile per un urto centrale, per il quale è $b = 0$. Nel punto di massimo avvicinamento \bar{A} si ha $v_{\bar{A}} = 0$. Si ha dunque

$$v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l} \quad (\text{C.9})$$

Nel caso di urto centrale la particella di carica Z_1e si avvicina al diffusore lungo l'asse z fino alla distanza minima l_0 corrispondente al punto \bar{A} , e poi inverte il moto risultando diffusa a un angolo π .

Dalle relazioni precedenti si ha quindi

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad (\text{C.10})$$

$$v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (\text{C.11})$$

$$b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (\text{C.12})$$

e dalle proprietà geometriche dell'iperbole

$$l = b \cot \left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{C.13})$$

che, sostituita in (C.12), dà

$$\cot^2 \left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{l_0}{b} \cot \left(\frac{\phi}{2}\right) - 1 = 0 \quad (\text{C.14})$$

Moltiplicando per $\sin^2(\varphi/2)$, tramite relazioni trigonometriche si arriva a

$$l_0 = 2b \cot \varphi \quad (\text{C.15})$$

Le relazioni tra gli angoli, deducibili dalla Figura C.1, danno

$$\theta + 2\varphi = \pi \quad (\text{C.16})$$

da cui

$$\cot \varphi = \tan \left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{C.17})$$

per cui, eguagliando le relazioni (C.8) e (C.15) si ha

$$b(\theta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{C.18})$$

che è la relazione cercata.

Si calcola ora la sezione d'urto del processo, definita come il numero di particelle che arrivano nel rivelatore in un angolo solido $d\Omega$ attorno alla direzione in cui si muove il fascio, come si vede in Figura C.2

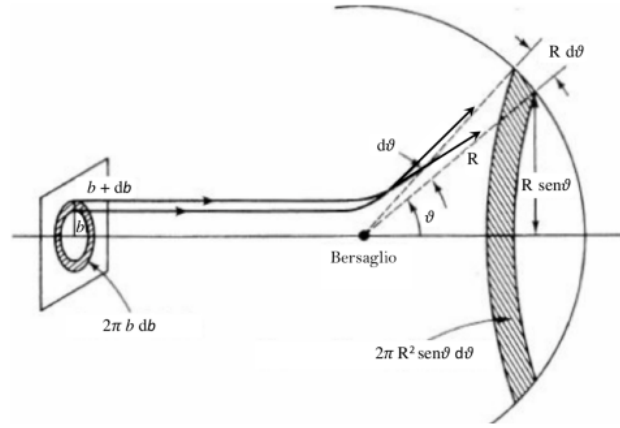


Figura C.2: Geometria del processo di diffusione

Si indica con n_0 il numero di particelle del fascio incidente che, a distanza praticamente infinita dal centro diffusore, attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo, ottenendo

$$dN = 2\pi n_0 b db \quad (\text{C.19})$$

per le particelle che nell'unità di tempo attraversano l'anello circolare fra b e $b + db$.

Supponendo che il numero di particelle si conservi, che cioè quelle incidenti siano tutte diffuse, e considerando quelle diffuse nell'angolo solido compreso fra θ e $\theta + d\theta$ si ha, differenziando la (C.18)

$$|db(\theta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\theta}{3\sin^2(\theta/2)} \quad (\text{C.20})$$

dove si prende il valore assoluto per tener conto del fatto che θ diminuisce all'aumentare di b .

Sostituendo in (C.19) si ha

$$dN(\theta) = 2\pi n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cot(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)} d\theta \quad (\text{C.21})$$

Essendo

$$d\Omega(\theta) = 2\pi \sin \theta d\theta \quad (\text{C.22})$$

l'angolo solido nella simmetria cilindrica del problema, si ottiene, per la sezione d'urto di diffusione coulombiana o di Rutherford

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{n_0} \frac{dN(\theta)}{d\Omega(\theta)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cot(\theta/2)}{2 \sin \theta \sin^2(\theta/2)} = \quad (\text{C.23})$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos(\theta/2)}{2 \sin^3(\theta/2) \cdot 2 \sin(\theta/2) \cdot 2 \cos(\theta/2)} = \quad (\text{C.24})$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (\text{C.25})$$

Si è quindi ottenuto lo stesso andamento della sezione d'urto che si era trovato nel Capitolo 1 tramite la regola d'oro di Fermi.

Impostando il problema in modo classico si ottiene una sezione d'urto che riproduce perfettamente i dati sperimentali fino ad una certa soglia energetica, al di là della quale non si ha più solo interazione coulombiana tra proiettile e bersaglio, ma si potrebbe avere anche interazione forte, come si vede in Figura C.3, in cui vi è un'energia per cui la sezione d'urto sperimentale non segue più l'andamento teorico della sezione d'urto di Rutherford.

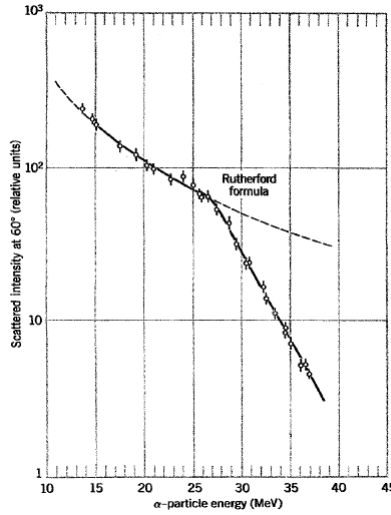


Figura C.3: Confronto tra previsione teorica e sperimentale della sezione d'urto di Rutherford

C.2 Derivazione Lagrangiana

La derivazione classica della sezione d'urto di Rutherford si può ottenere anche tramite considerazioni di meccanica analitica.

Si esamina un processo di diffusione di una particella di carica ze ed energia cinetica E su di un nucleo bersaglio di carica Ze .

Considerando il nucleo bersaglio come puntiforme, le particelle diffuse nell'intervallo $(\theta, \theta + d\theta)$ sono quelle con parametro d'impatto $b, b + db$, quindi il numero di particelle diffuse è dato dal prodotto del numero I di particelle incidenti per la superficie della corona circolare

$$d\sigma = \frac{2\pi b db}{I} I = 2\pi b db = 2\pi b(\theta) \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta \quad (\text{C.26})$$

ed essendo $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, per la sezione d'urto differenziale si ha

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (\text{C.27})$$

Si calcola ora la funzione di distribuzione $b(\theta)$. Detta m la massa ridotta del sistema (dato che il nucleo bersaglio ha massa molto maggiore della particella incidente, m è approssimativamente la massa della particella incidente), la lagrangiana del sistema vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} \quad (\text{C.28})$$

con

$$\alpha = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (\text{C.29})$$

costante di struttura fine.

Le costanti del moto sono il momento angolare l e l'Hamiltoniana H

$$l = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\varphi}} = m v b = m r^2 \dot{\varphi} = \sqrt{2mEb} \quad (\text{C.30})$$

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = E \quad (\text{C.31})$$

con

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad (\text{C.32})$$

Da (C.30) si trova

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \quad (\text{C.33})$$

e da (C.31) si ha

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))} \quad (\text{C.34})$$

per cui

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l}{mr^2} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r))} \quad (\text{C.35})$$

Integrando si ottiene

$$\varphi(r) = l \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} ((E - V_{\text{eff}}(r)))^{-1/2} = b \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}\right)^{-1/2} \quad (\text{C.36})$$

La traiettoria è un'iperbole simmetrica rispetto al raggio vettore di minima distanza dal centro di forza. Si ha allora che l'angolo di diffusione vale

$$\theta = \pi - 2\varphi_{\min} \quad (\text{C.37})$$

dove

$$\varphi_{\min} = b \int_{\infty}^{r_{\min}} \frac{dr}{r^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{V(r)}{E}\right)^{-1/2} \quad (\text{C.38})$$

Calcolando r_{\min} con la condizione che la derivata $\dot{r} = 0$ nel punto $r = r_{\min}$ ed integrando si trova

$$\varphi_{\min} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{C.39})$$

con

$$x = \frac{\alpha}{2bE} \quad (\text{C.40})$$

Algebricamente si trova

$$x = \cot \varphi_{\min} \quad (\text{C.41})$$

e quindi, dato che

$$\tan \varphi_{\min} = \cot \frac{\theta}{2} \quad (\text{C.42})$$

si ottiene la funzione di distribuzione

$$b(\theta) = \frac{\alpha}{2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (\text{C.43})$$

Ricordando la definizione della costante di struttura fine (C.29), dalla (C.27) si ritrova la sezione d'urto Rutherford

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{1}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (\text{C.44})$$

Appendice D

Esempi di fattore di forma

Il fattore di forma $F(\mathbf{q}^2)$ è, con effetti di rinculo trascurabili ed in approssimazione di Born, la trasformata di Fourier (1.11) della distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r})$

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{D.1})$$

In linea di principio, la distribuzione radiale di carica può essere ottenuta dalla trasformata di Fourier inversa del fattore di forma, utilizzando per quest'ultimo una parametrizzazione in termini di \mathbf{q}^2 ricavata sperimentalmente

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{q}^2) e^{-iqr/\hbar} d^3q \quad (\text{D.2})$$

In pratica, però, il fattore di forma può essere misurato solo in un intervallo finito di valori di momento trasferito $|\mathbf{q}|$, limitazione dovuta al fatto che l'energia di fascio disponibile è finita e che la sezione d'urto diminuisce rapidamente al crescere dell'impulso trasferito [Pov98].

Il calcolo analitico del fattore di forma può risultare molto complicato, essendo una trasformata di Fourier, ma vi sono dei casi in cui tale fattore può essere calcolato analiticamente, ovvero quando la distribuzione di carica è descrivibile con funzioni radiali sufficientemente semplici, come ad esempio la distribuzione di carica della Sfera uniformemente carica, calcolo che viene svolto nella sezione D.1.

Data la relazione (D.1) che intercorre tra distribuzione di carica e fattore di forma, per le proprietà della trasformata di Fourier si deduce che ad una distribuzione di carica che diminuisce non troppo rapidamente all'aumentare del raggio corrisponde ad un fattore di forma che varia gradualmente con \mathbf{q}^2 , mentre ad una distribuzione di carica più estesa corrisponde una diminuzione più rapida del fattore di forma.

Date queste considerazioni, si riassumono in Figura D.1 le principali parametrizzazioni delle densità di carica e i corrispondenti fattori di forma

$\rho(r)$	$ F(\mathbf{q}^2) $	Example
pointlike	constant	Electron
exponential	dipole	Proton
gauss	gauss	${}^6\text{Li}$
homogeneous sphere	oscillating	—
sphere with a diffuse surface	oscillating	${}^{40}\text{Ca}$

Figura D.1: Relazione fra le distribuzioni di carica radiale ed il corrispondente fattore di forma in approssimazione di Born

E' interessante notare che si possono ottenere informazioni sul raggio nucleare studiando l'andamento del fattore di forma per $\mathbf{q}^2 \rightarrow 0$. Infatti, se la lunghezza d'onda è sensibilmente più grande del raggio del nucleo, per il coefficiente dell'esponenziale in (D.1) si ha [Pov98]

$$\frac{|\mathbf{q}| \cdot R}{\hbar} \ll 1 \quad (\text{D.3})$$

$$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \sum_n \frac{(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^n}{n!} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \left(\frac{\Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} \right)^n \quad (\text{D.4})$$

ed $F(\mathbf{q}^2)$ può essere sviluppato in serie di potenze di $|\mathbf{q}|$, così che tutti i fattori di forma assumono la seguente espressione.

Quindi sostituendo in (D.1) si ha lo sviluppo del fattore di forma

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{r}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i|\mathbf{q}||\mathbf{r}| \cos \theta}{\hbar} \right) d^3r = \quad (\text{D.5})$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \rho(r) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{q}|r}{\hbar} \right) \cos^2 \theta + \dots \right) d\phi d(\cos \theta) r^2 dr = \quad (\text{D.6})$$

$$= 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2}{\hbar^2} 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^4 dr + \dots \quad (\text{D.7})$$

Definendo il raggio quadratico medio come

$$\langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^4 dr \quad (\text{D.8})$$

si ha

$$F(\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{1}{6} \frac{\mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle}{\hbar^2} + \dots \quad (\text{D.9})$$

Per determinare il valore di $\langle r^2 \rangle$ è necessario quindi misurare il fattore di forma fino a valori molto piccoli di \mathbf{q}^2 , così da poter ricavare il raggio quadratico medio della distribuzione di carica dallo sviluppo in serie del fattore di forma [Pov98].

D.1 Fattore di forma per la distribuzione sferica di carica

Nella Sezione 1.2 si è ricavata l'espressione generale del fattore di forma per sistemi con densità di carica a simmetria sferica (1.33) sviluppando in multipoli l'onda piana $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ e ricavando l'espressione analitica dalle armoniche sferiche.

Se si considera un sistema con densità di carica a simmetria sferica e anche uniforme, si può calcolare l'espressione analitica del fattore di forma per tale distribuzione di carica risolvendo un integrale non troppo complicato.

La forma analitica della distribuzione di carica è

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

e il relativo fattore di forma è dato da (D.1)

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{D.11})$$

Utilizzando coordinate polari sferiche si ha

$$F(\mathbf{q}) = \int \int \int e^{iqr \cos \theta} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = 2\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) r^2 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{iqr \cos \theta} \sin \theta d\theta = \quad (\text{D.12})$$

effettuando il cambio di variabile $t = \cos \theta$ si ha

$$\begin{aligned} &= 2\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) r^2 dr \int_{-1}^1 e^{iqrt} dt = \left(2\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) r^2 dr \right) \frac{e^{iqrt}}{iqr} \Big|_{-1}^1 = \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{r^2 \sin(qr)}{qr} \rho(r) dr = \frac{4\pi}{q} \rho_0 \int_0^R r \sin(qr) dr = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{q^3 R^3} (\sin(qR) - qR \cos(qR)) \quad (\text{D.13})$$

Calcolando il raggio quadratico medio $\langle r^2 \rangle$ della distribuzione

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int r^2 \rho(\mathbf{r}) d^3 r}{\int \rho(\mathbf{r}) d^3 r} = 3R^2/5 \quad (\text{D.14})$$

dalla relazione (D.9) è possibile ricavare lo sviluppo in serie del fattore di forma per la distribuzione di carica della Sfera uniformemente carica per $|\mathbf{q}^2| \rightarrow 0$, ottenendo

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{q^2 R^2}{10} + \frac{q^4 R^4}{280} + \dots \quad (\text{D.15})$$

Bibliografia

- [Ann95] R. Anni, G. Co, P. Pellegrino; *Nuclear charge density distributions from elastic electron scattering data*. Nuclear Physics A, 584 (1995) 35.
- [Be83] G. Beuscher; *Ph.D. thesis*. University of Mainz, (1983), unpublished.
- [Ca80b] J.M. Cavedon; *Distribution de charge de quelques noyaux à couche germée dans leur état fondamental : ^{40}Ca , ^{58}Ni , ^{116}Sn , ^{124}Sn , ^{208}Pb : étude expérimentale par diffusion élastique d'électrons jusqu'à des transferts d'impulsion de 3,5 à 4 fm $^{-1}$* . University of Paris-Sud, Centre d'Orsay, (1980), unpublished.
- [DeV87] H. De Vries, C. W. De Jager, C. De Vries; *Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering*. Atomic data and nuclear data tables, 36 (1987) 495.
- [Fi70] J.R. Ficenec, W.P. Trower, J. Heisenberg, I. Sick; *Elastic electron-nickel scattering*. Physics Letters B, 32 (1970) 460.
- [Ho56] R. Hofstadter; *Electron scattering and nuclear structure*. Reviews of Modern Physics, 28 (1956) 214.
- [Kra91] K. S. Krane; *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons, (1991).
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche; *Particelle e nuclei. Un'introduzione ai concetti fisici*. Bollati Boringhieri, Torino (1998).
- [Sc75] W. Schütz; *Elastic electron scattering from ^{14}N , ^{15}N , ^{16}O and ^{18}O at low momentum transfer*. Zeitschrift für Physik A Atoms and Nuclei, 273 (1975) 69.
- [Si70b] I. Sick, J.S. McCarthy; *Elastic electron scattering from ^{12}C and ^{16}O* . Nuclear Physics A, 150 (1970) 631.
- [Si73a] B.B.P. Sinha, G.A. Peterson, R.R. Whitney, I. Sick, J.S. McCarthy; *Nuclear Charge Distributions of Isotone Pairs. II. ^{39}K and ^{40}Ca* . Physical Review C, 7 (1973) 1930.
- [Wo76] H.D. Wohlfahrt; *Habilitationsschrift*. University of Mainz, (1976), unpublished.