

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

# Iperoni in materia nucleare

*Relatore:*

Ch.mo Prof. Giampaolo Co'

*Laureanda:*

Fiorangela Semeraro

---

ANNO ACCADEMICO 2008-2009



*Ai miei genitori*

# Ringraziamenti

*‘Per aspera ad astra!’*

E’ vero attraverso tante difficoltà è arrivato il momento tanto atteso.

Ringrazio sentitamente il Chiar.mo Prof. Giampaolo Cò per l’infinita pazienza e grande disponibilità che mi ha dedicato nella preparazione del mio lavoro di tesi.

Infine, un grazie speciale ai miei genitori e a mia sorella per avermi permesso di raggiungere questo obiettivo e per avermi sostenuta sempre con molta discrezione.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Estensione del formalismo di isospin</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Equazione di stato della materia nucleare</b>	<b>13</b>
3.1	Materia nucleare simmetrica (SNM): definizione e proprietà . . . . .	13
3.2	Il modello . . . . .	18
3.3	Materia barionica infinita . . . . .	20
3.4	Energia cinetica . . . . .	21
3.5	Termini di interazione . . . . .	22
3.5.1	Interazione nucleonica . . . . .	23
3.5.2	Interazione nucleone - $\Lambda$ . . . . .	31
3.5.3	Interazione $\Lambda$ - $\Lambda$ . . . . .	35
3.6	Equazione di stato . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>41</b>
4.1	Interazioni . . . . .	41
4.1.1	Interazione N-N . . . . .	41
4.1.2	Interazione N- $\Lambda$ . . . . .	47
4.1.3	Interazione $\Lambda - \Lambda$ . . . . .	48
4.2	Materia barionica . . . . .	50
4.3	Stelle di neutroni . . . . .	60

<i>INDICE</i>	1
<b>5 Conclusioni</b>	<b>65</b>
<b>A Matrici di Pauli</b>	<b>67</b>
<b>B Proprietà delle matrici S</b>	<b>69</b>
<b>C Commutazione degli operatori</b>	<b>75</b>
<b>D Listato fortran</b>	<b>77</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

L'esistenza di oggetti stellari composti da neutroni, fu ipotizzata da W. Baade e F. Zwicky [Baa34] poco dopo la scoperta del neutrone. L'esistenza delle stelle di neutroni rimase una speculazione fino a quando nel 1967 fu identificato un segnale radio dal periodo di 1.337 secondi, proveniente da un punto preciso dello spazio [Hew68]. Oggi sono conosciute migliaia di sorgenti radio periodiche, dette pulsar. I periodi di emissione vanno da pochi secondi a qualche millisecondo. La frequenza di emissione delle pulsar ha enorme stabilità nel tempo. Le variazioni misurate del periodo di emissione, sempre in aumento, variano da  $10^{-14}$  a  $10^{-5}$  secondi per anno. Queste caratteristiche fanno ipotizzare che le pulsar siano oggetti stellari velocemente rotanti, dotati di intensi campi magnetici, che emettono radiazione in direzioni privilegiate. Le grandi velocità di rotazione misurate, implicano che questi oggetti stellari devono avere alta densità di materia e dimensioni relativamente piccole.

Questi fatti hanno spinto ad identificare le pulsar come stelle di neutroni rapidamente rotanti.

L'interno delle stelle di neutroni, che contiene circa il 98% della sua massa, può essere considerato un fluido quantistico fermionico, a temperatura zero.

Il principio di esclusione di Pauli implica che per aggiungere al sistema un altro neu-



trone bisogna che questo abbia energie cinetiche maggiori di quella di Fermi. In certe particolari situazioni di densità e pressione piuttosto che aggiungere un neutrone diventa energeticamente favorevole produrre un diverso tipo di barione elettricamente neutro. In questo contesto, il barione energeticamente favorito è la  $\Lambda$ .

Scopo di questo lavoro è quello di studiare il ruolo degli iperoni in un fluido quantistico composto da neutroni. La quantità che studieremo è l'energia di legame per barione in funzione della densità barionica. Da questa relazione, chiamata equazione di stato (EOS), in analogia a quella dei fluidi classici, si ottiene la pressione che permette di calcolare la massa limite di una stella di neutroni, risolvendo le equazioni di Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)[Tol34],[Opp39]. Il valore così calcolato della massa limite può essere confrontato con le masse osservate.

La descrizione dell'interno delle stelle di neutroni può essere fatta risolvendo l'equazione di Schroedinger a multi-corpi.

Nel 1939 J. R. Oppenheimer e G. M. Volkov [Opp39] fecero il primo calcolo dell'equazione di stato di una tale stella ottenendo un valore massimo della massa attorno a 0.7 - 0.8 masse solari. Misure successive delle masse delle pulsar indicano valori di circa 1.5 masse solari. La discrepanza è dovuta al fatto che, nella stima di Oppenheimer e Volkov, l'interazione tra i barioni fosse trascurata, in analogia a quanto viene fatto per il gas degenere di elettroni di una nana bianca. Questa approssimazione permette di risolvere l'equazione di Schroedinger a multi-corpi, ma se è plausibile nel caso del gas di elettroni è evidentemente sbagliata nel caso delle stelle di neutroni.

La soluzione dell'equazione di Schroedinger a multi-corpi per un sistema di fermioni interagenti è formidabile problema teorico, affrontato utilizzando approssimazioni sempre più raffinate e con grande dispiego di risorse computazionali.

Noi affronteremo il problema utilizzando l'approssimazione più semplice che in letteratura viene identificata come Hartree-Fock utilizzata per descrivere sistemi finiti come atomi, molecole e nuclei, considera solo i primi termini di interazione di un

ideale sviluppo perturbativo.

Di fatto si tratta di una teoria effettiva che quindi deve utilizzare interazioni effettive tra i barioni. La scelta di queste interazioni è uno dei punti più problematici del nostro lavoro.

Nel capitolo 2 presenteremo un'estensione del formalismo di isospin. Abbiamo utilizzato questa estensione per sfruttare le tradizionali tecniche di calcolo usate per materia nucleare, anche in presenza di  $\Lambda$ .

Nel capitolo 3 presenteremo la teoria effettiva che abbiamo adottato, e otterremo le equazioni dell'energia di legame in funzione della densità barionica.

Nel capitolo 4 discuteremo i risultati ottenuti dalla soluzione numerica dell'equazione ottenuta.



## Capitolo 2

# Estensione del formalismo di isospin

In questo capitolo descriveremo come abbiamo esteso il formalismo dell'isospin per trattare barioni con stranezza. Il formalismo di isospin nasce dall'evidenza di alcuni fatti sperimentali. Una prima osservazione è che le masse del protone e neutrone sono simili. Un'altra considerazione riguarda le sezioni d'urto elastiche protone-protone, protone-neutrone e neutrone-neutrone che risultano uguali nei casi in cui è possibile il confronto.

Inoltre, si osserva che lo spettro di eccitazione dei nuclei leggeri con identico numero di massa e diverso numero di protoni e neutroni mostra notevoli somiglianze.

Tali motivazioni fenomenologiche hanno portato a supporre che protoni e neutroni siano sostanzialmente indistinguibili per l'interazione forte. In base a quanto detto possiamo affermare che protone e neutrone siano due stati di un' unica particella, il nucleone, e siano distinti dalla terza componente di isospin, un numero quantico che si comporta come un momento angolare di spin  $1/2$ . Tale simmetria è ben descritta dalle matrici di Pauli (vedi Appendice A).

Estendiamo tale formalismo per includere un nuovo tipo di barione, l'iperone  $\Lambda$ , le cui proprietà sono espresse nella tabella 2.1.

Gli iperoni sono particelle che hanno sezioni d'urto tipiche dell'interazione forte e decadono debolmente. Nonostante la massa delle  $\Lambda$  sia circa il 18% maggiore

quarks	spin	carica	isospin	stranezza	massa(MeV)
uds	1/2	0	0	-1	1115.63

Tabella 2.1: principali proprietà dell'iperone  $\Lambda$ .

di quella del nucleone, noi abbiamo considerato p, n,  $\Lambda$  come un'unica particella distinta solo dalla terza componente di sapore della funzione d'onda.

Nel nostro formalismo rappresentiamo la funzione d'onda del barione come

$$\langle \mathbf{r} | \alpha \rangle \equiv \phi_\alpha(\mathbf{r}) = R_\alpha(\mathbf{r}) \chi_{s_\alpha} Y_{I_\alpha} \quad (2.1)$$

dove abbiamo indicato con  $R_\alpha(\mathbf{r})$  la parte radiale della funzione d'onda, con  $\chi$  la parte di spin

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

e con Y il termine di sapore

$$Y_1 = |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = |\Lambda\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Per scrivere l'hamiltoniana del sistema utilizzeremo le 8 matrici indipendenti di

Gell-Mann che sono i generatori del gruppo di simmetria SU(3).

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\Lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \Lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Partendo da queste matrici costruiamo un nuovo set di 9 matrici  $3 \times 3$  che chiameremo matrici di sapore, ovviamente queste non sono indipendenti.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \Lambda_1 & S_2 &= \Lambda_2 & S_3 &= \Lambda_3 \\
S_4 &= \Lambda_4 & S_5 &= \Lambda_5 & S_6 &= \frac{1}{2}[\Lambda_3 + \sqrt{3}\Lambda_8] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
S_7 &= \Lambda_6 & S_8 &= \Lambda_7 & S_9 &= \frac{1}{2}[\sqrt{3}\Lambda_8 - \Lambda_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Definiamo il prodotto scalare di queste matrici come:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \sum_{k=1}^9 S_k S_k \tag{2.6}$$

Il generico prodotto tra due matrici può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
 S_i S_j &= \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_1 + i \sum_{k=1,2,3} \epsilon_{ijk} S_k \right] \quad \text{se } i \neq j = 1, 2 \text{ o } 3 \\
 S_i S_j &= \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_2 + i \sum_{k=1,2,3} \epsilon_{(i-3)(j-3)(k+3)} S_k \right] \quad \text{se } i \neq j = 4, 5 \text{ o } 6 \\
 S_i S_j &= \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_3 + i \sum_{k=1,2,3} \epsilon_{(i-6)(j-6)(k+6)} S_k \right] \quad \text{se } i \neq j = 7, 8 \text{ o } 9 \\
 S_i S_j &= 0 \quad \text{altrimenti.}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

dove abbiamo definito le  $\mathcal{I}$  come:

$$\mathcal{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Utilizzando le espressioni precedenti abbiamo dimostrato che

$$\left( \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right)^2 = \left[ 3(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3) - 2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right], \tag{2.9}$$

dove 1 e 2 indicano due diverse particelle (vedi Appendice B).

Utilizziamo le matrici  $\mathbf{S}$  per definire operatori di proiezione che selezionano il tipo di fermione.

Per i protoni abbiamo

$$\Pi_p = \frac{1}{3}(\mathbb{I} + S_3 + S_6) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & . & . \\ . & 0 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

per i neutroni

$$\Pi_n = \frac{1}{3}(\mathbb{I} - S_3 + S_9) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 3 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

In generale l'operatore di proiezione che seleziona i nucleoni può essere scritto come

$$\Pi_N = \Pi_\Lambda + \Pi_n = \frac{1}{3}(2\mathbb{I} + S_6 + S_9) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & . & . \\ . & 3 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

In analogia l'operatore di proiezione per gli iperoni è

$$\Pi_\Lambda = \frac{1}{3}(\mathbb{I} - S_6 - S_9) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 0 & . \\ . & . & 3 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo indicato con  $\mathbb{I}$  le matrici densità

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Nell calcolo dell'energia di legame risulta utile utilizzare un operatore che scambia il sapore della particella 1 e 2 (Appendice B).

$$P_Y(1, 2) = \frac{1}{2}[\mathbb{I} + \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)] \quad (2.15)$$

E' importante notare che gli operatori  $P_Y(1, 2), \Pi_N, \Pi_\Lambda$  commutano tra di loro. Questo è dimostrato in appendice C.





## Capitolo 3

# Equazione di stato della materia nucleare

Come detto nell'introduzione l'interno della stella di neutroni è composto da materia neutronica infinita a temperatura nulla.

Chiameremo PNM (Pure Neutron Matter) la pura materia neutronica e SNM (Symmetric Nuclear Matter) la materia nucleare simmetrica. Mentre la SNM ha dati empirici su cui controllare la validità dell'EOS (Equation of State), la PNM non ha riscontri fenomenologici.

L'idea è quella di produrre una EOS che riproduca i dati empirici di SNM e poi estendere il calcolo all'equazione di stato della PNM.

### 3.1 Materia nucleare simmetrica (SNM): definizione e proprietà

La materia nucleare simmetrica è un sistema omogeneo, isotropo, traslazionalmente invariante, costituito da un ugual numero, infinito, di protoni e neutroni, e in cui è stata spenta l'interazione di Coulomb. Questa ipotesi è necessaria per la stabilità

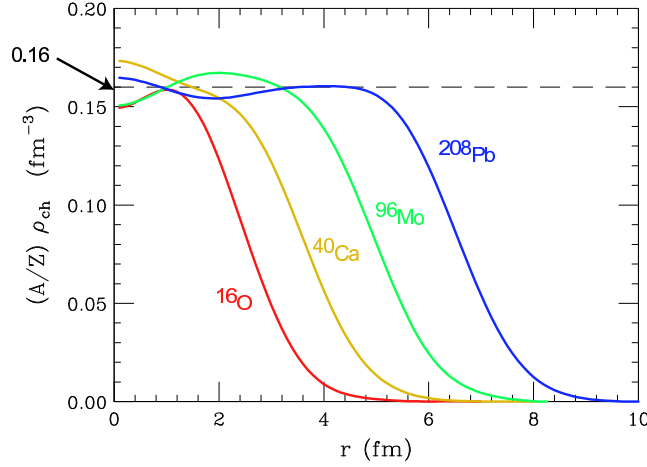


Figura 3.1: Distribuzione di cariche

del sistema infinito dato che l'interazione di Coulomb è a lungo raggio e porterebbe ad una repulsione infinita.

Le proprietà di questo sistema vengono dedotte estrapolando alcune proprietà dai nuclei infiniti.

Un primo dato ricavato da esperimenti di diffusione elastica di elettroni da nuclei, indica che le distribuzioni di carica nel centro dei nuclei medio-pesanti presentano valori molto simili (vedi Fig.3.1). La densità può essere ottenuta ipotizzando una distribuzione sferica uniforme di raggio  $R$ . La densità può essere calcolata dividendo il numero di nucleoni per il volume della sfera

$$\rho = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 0.16 \pm 0.02 fm^{-3}, \quad (3.1)$$

dove abbiamo usato la relazione empirica  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  con  $r_0 = 1.13$  fm [Seg82].

Un secondo dato empirico riguarda l'energia di legame dei nuclei. Nella figura 3.2 è rappresentato l'andamento dell'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa. Possiamo notare che ad eccezione per i nuclei leggeri ( $A < 12$ ), l'energia di legame per nucleone è pressochè costante, con un massimo per il Fe con un valore di energia di  $\approx 8$  MeV.

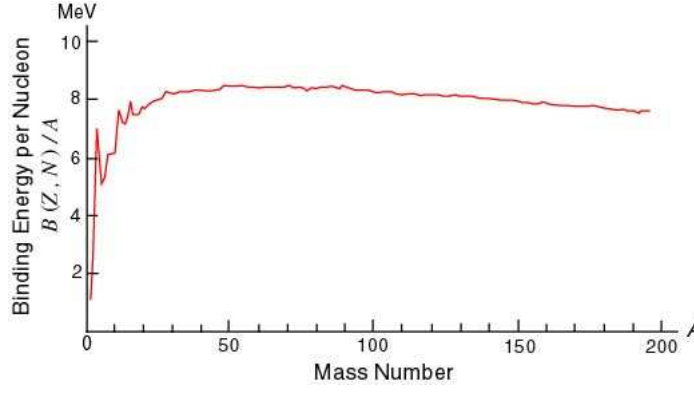


Figura 3.2: Energia di legame in funzione di A

Per nuclei con un numero di nucleoni maggiore di 10, l'energia di legame di un nucleo è ben descritta dalla formula semiempirica della massa:

$$E(A, Z) = a_V A + a_S A^{2/3} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_I \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta \quad (3.2)$$

che contiene, il termine di volume ( $a_V$ ), il termine di superficie ( $a_I$ ), il termine colombiano ( $a_C$ ), il termine di asimmetria ( $a_S$ ), e il termine di accoppiamento ( $\delta$ ).

I valori empirici, in MeV, delle costanti a sono [Seg82],[Pov98]:

$$\begin{aligned} a_V &= -15.67, & a_S &= 17.23, & a_C &= 0.714, \\ a_I &= 23.28, & a_p &= 34 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Il termine di appaiamento  $\delta$  è -11.2 MeV per i nuclei pari-pari, 0 per i pari-dispari e 11.2 MeV per i dispari-dispari [Pov98].

Dividendo l'energia di legame per A, facendo tendere ad infinito sia il volume che il numero di nucleoni A, trascurando i termini di accoppiamento  $\delta$  e coulombiano, per SNM resta solo il termine di volume  $a_v$ . Da tali informazioni empiriche risulta, pertanto, che il punto di saturazione della materia nucleare simmetrica, cioè il punto in cui l'energia di legame per nucleone in funzione della densità raggiunge il valore

minimo, è dato dai valori:

$$\rho_0 \equiv 0.16 \pm 0.01 \quad fm^{-3}; \quad \epsilon_0 = -16.0 \pm 1 \quad MeV \quad (3.4)$$

Ci sono altre informazioni riguardanti SNM che possono essere dedotte dai nuclei finiti, ad esempio la compressibilità, ossia la curvatura dell'energia di legame in funzione del momento di Fermi calcolata in corrispondenza della densità di equilibrio. Sviluppando in serie di Taylor  $\epsilon \equiv E/A$ , attorno al punto di saturazione, abbiamo:

$$\epsilon(\rho) = \epsilon_0 + \frac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2 \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} = \frac{1}{2} \frac{K_0}{9} \frac{(\rho - \rho_0)^2}{\rho_0^2} \quad (3.5)$$

Nell'espressione (3.5) abbiamo considerato che la derivata prima è nulla nel punto di saturazione, e abbiamo definito il modulo di compressione  $K_0$  come [Nak03]:

$$K_0 = 9\rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} = 9 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \quad (3.6)$$

Il valore di  $K_0$  viene dedotto osservando l'energia di eccitazione della risonanza gigante di monopolo elettrico,  $0^+$ , in vari nuclei. Al momento sono accettati valori che vanno dai 200 ai 250 MeV [Bla80].

Un'altra proprietà che può essere dedotta dai dati sperimentali dei nuclei finiti è l'energia di simmetria. Definiamo il parametro di asimmetria come:

$$\eta = \frac{N - Z}{A}, \quad (3.7)$$

abbiamo quindi che

$$\frac{N}{A} = \frac{\rho_n}{\rho} = \frac{1}{2}(1 + \eta), \quad (3.8)$$

e

$$\frac{Z}{A} = \frac{\rho_p}{\rho} = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (3.9)$$

L'energia per particella di materia nucleare asimmetrica può essere sviluppata in potenze pari di  $\eta$

$$\epsilon(\rho, \eta) = \epsilon(\rho, 0) + S_2(\rho)\eta^2 + S_4(\rho)\eta^4 + S_6(\rho)\eta^6 + \dots \quad (3.10)$$

Per la simmetria di isospin dell'interazione nucleare, l'interazione tra due neutroni è identica a quella di due protoni. Questo implica che i termini dispari in  $\eta$  siano nulli. L'energia di simmetria è definita come:

$$\epsilon_{sym}(\rho) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} = S_2(\rho), \quad (3.11)$$

Se, in questo sviluppo, tutti i termini superiori al secondo fossero nulli per ogni valore della densità, l'energia per particella della materia nucleare asimmetrica, potrebbe essere scritta come:

$$\epsilon(\rho, \eta) = \epsilon(\rho, 0) + \epsilon_{sym}(\rho)\eta^2, \quad (3.12)$$

e quindi l'energia di simmetria potrebbe essere espressa come la differenza tra l'energia per nucleone di materia neutronica, e quella della materia nucleare simmetrica

$$\epsilon_{sym}(\rho) = \epsilon(\rho, 1) - \epsilon(\rho, 0). \quad (3.13)$$

Anche in questo caso è possibile legare il valore dell'energia di simmetria a una caratteristica dei nuclei finiti. Si tratta dell'energia di eccitazione della risonanza

gigante di dipolo elettrico. Si ottengono per  $\epsilon_{sym}$  valori di circa 30 MeV.

Come abbiamo già menzionato, il calcolo dell'EOS di PNM viene effettuato calcolando prima l'EOS di SNM, che deve riprodurre i seguenti valori:

1. Punto di saturazione:  $\rho_0 = 0.16 fm^{-3}$  e  $\epsilon_0 = -16$  MeV.
2. Modulo di compressione:  $K_0 \approx 220$  MeV.
3. Energia di simmetria:  $\epsilon_{sym} \approx 30 MeV$ .

## 3.2 Il modello

Calcoliamo l'energia del sistema come valore di aspettazione dell'operatore hamiltoniano che descrive il sistema rispetto ai suoi autostati.

L'equazione di Schroedinger è

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (3.14)$$

quindi

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \quad (3.15)$$

La soluzione dell'equazione di Schroedinger (3.14) per un sistema a molticorpi è un compito molto arduo, per questo motivo utilizziamo un modello.

Ipotizziamo che l'autostato  $|\Psi\rangle$  sia un determinante di Slater di funzioni d'onda  $|\phi_k\rangle$  che descrivono il moto del singolo nucleone. Dato che questa è l'ipotesi su cui si basa il metodo Hartree-Fock applicato a sistemi fermionici finiti (atomi, nuclei, molecole), in letteratura questo modello è chiamato Hartree-Fock. Poichè il sistema che stiamo considerando ha invarianza traslazionale, le funzioni d'onda  $|\phi\rangle$  di

singola particella sono autostati dell'impulso e del numero d'onda  $\mathbf{k}$ ,

$$\langle r|\alpha \rangle = \phi_\alpha(r) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r}} \chi_{s_\alpha} Y_{l_\alpha} \quad (3.16)$$

Consideriamo un hamiltoniana composta da un termine di energia cinetica e da un'interazione a due corpi

$$H = \sum_{i \leq k_F} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq k_F} V(1,2) \quad (3.17)$$

Nel nostro modello, il valore dell'energia è il seguente:

$$\begin{aligned} E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \sum_{i \leq k_F} \langle \phi_i | \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 | \phi_i \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j \leq k_F} \left[ \langle \phi_i \phi_j | V(1,2) | \phi_i \phi_j \rangle - \langle \phi_i \phi_j | V(1,2) | \phi_j \phi_i \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nell'equazione precedente le somme sono limitate ad impulsi minori dell'impulso di Fermi  $k_F$ . Questo perchè stiamo considerando lo stato fondamentale del sistema, e nel nostro modello il suo stato è composto da tutti, e soli, gli stati di singola particella al di sotto della superficie di Fermi.

La statistica fermionica, ovvero il fatto che  $\Psi$  sia un determinante di Slater, produce due termini di interazione, il primo identificato come diretto, il secondo come scambio.

Nel nostro calcolo useremo un'interazione tra barioni composta da tre parti.

L'interazione N-N

$$\begin{aligned} V^{NN}(1,2) = & \left[ V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) + \left( V_2^a(r) + f(\rho) V_{10}^a(r) \right) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\ & \left. + V_3^a(r) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + V_4^a(r) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1) \Pi_N(2) \end{aligned} \quad (3.19)$$



l'interazione  $\Lambda$ -Nucleone

$$\begin{aligned}
 V^{N\Lambda}(1, 2) = & \left[ V_1^b(r) + V_2^b(r) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + V_3^b(r) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \right. \\
 & \left. + V_4^b(r) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \frac{1}{2} \left( \Pi_N(1) \Pi_\Lambda(2) + \Pi_\Lambda(1) \Pi_N(2) \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

e, infine, l'interazione  $\Lambda - \Lambda$

$$\begin{aligned}
 V^{\Lambda\Lambda}(1, 2) = & \left[ V_1^c(r) + V_2^c(r) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + V_3^c(r) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \right. \\
 & \left. + V_4^c(r) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2)
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

In forma generale la possiamo scrivere come:

$$V_{p=1,4}^{\alpha=a,b,c}(r) O_p
 \tag{3.22}$$

con:

$$\begin{aligned}
 O_1 &= \mathbb{I}, & O_2 &= \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2), & O_3 &= \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2), \\
 O_4 &= \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

I termini  $V_p^\alpha$  sono funzioni solo della distanza relativa tra i due barioni interagenti. Facciamo notare che l'interazione N-N contiene termini dipendenti dalla densità del sistema.

### 3.3 Materia barionica infinita

Come già detto il sistema che studiamo gode di invarianza traslazionale. Per questo motivo anche le funzioni d'onda di singola particella godono di invarianza traslazionale,

e sono le onde piane (3.16).

Ogni prodotto scalare deve essere moltiplicato per un fattore  $\frac{\Omega}{(2\pi)^3}$  per garantire la corretta normalizzazione.

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d^3r \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \chi_{s_i}^+ \chi_{s_j} Y_{I_i}^+ Y_{I_j} = \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j) \quad (3.24)$$

Nel nostro modello di Hartree-Fock la densità totale del sistema, ossia la probabilità di trovare una particella qualsiasi in un certo punto dello spazio, è data dalla somma delle probabilità prodotta da ogni particella:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i^A |\phi_i|^2 \quad (3.25)$$

La densità per ogni specie barionica  $I = p, n, \Lambda$  è data da

$$\begin{aligned} \rho_I(\mathbf{r}) &= \sum_{i \leq \mathbf{k}} |\phi_i|^2 = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k_i \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \sum_{s_i} \chi_{s_i}^+ \chi_{s_i} \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_{F_i}} k_i^2 dk_i = \frac{1}{3\pi^2} k_{F_i}^3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Con  $\rho$  indichiamo la densità barionica totale, ossia:  $\rho = \rho_p + \rho_n + \rho_\Lambda$

## 3.4 Energia cinetica

Il valore di aspettazione dell'energia cinetica del sistema è dato da:

$$\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \sum_{i \leq k_F} \langle \phi_i | \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla^2 | \phi_i \rangle \\
&= \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \sum_{s,I} \int d^3r \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \chi_s^+ Y_I^+ \left( -\frac{\hbar^2}{2m_I} \nabla^2 \right) \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \chi_s Y_I \\
&= \frac{2}{(2\pi)^3} 4\pi \sum_I \int_0^{k_F} k_{F_I}^2 dk \int_{R^3} d^3r \left( -\frac{\hbar^2}{2m_I} \right) (-k_{F_I}^2) \\
&= \frac{\Omega}{\pi^2} \sum_I \frac{\hbar^2}{2m_I} \frac{1}{5} k_{F_I}^2 \left( \frac{3\pi^2}{2} \rho_I \right) = \frac{3}{5} \sum_I \frac{\hbar^2}{2m_I} k_{F_I}^2 \Omega \rho_I
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Possiamo esprimere l'energia cinetica per barione come

$$\frac{T}{A} = \frac{3}{5} \left( \frac{\hbar^2}{2m_p} k_{F_p}^2 \frac{\rho_p}{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m_n} k_{F_n}^2 \frac{\rho_n}{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m_\Lambda} k_{F_\Lambda}^2 \frac{\rho_\Lambda}{\rho} \right) \tag{3.28}$$

### 3.5 Termini di interazione

L'equazione (3.18) indica la presenza di due termini di interazione, il primo detto diretto, il secondo di scambio.

Stiamo descrivendo un sistema saturato in spin, globalmente a spin 0. Questo significa che il numero di particelle con terza componente di spin  $+1/2$  è identico a quello delle particelle con spin  $-1/2$ .

Per questo motivo i termini diretti delle parti dipendenti dallo spin dell'interazione sono nulle.

Difatti:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_i s_j} \chi_{s_i}^+(1) \chi_{s_j}^+(2) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \chi_{s_i}(1) \chi_{s_j}(2) \\
&= \sum_{s_i s_j} \chi_{s_i}^+(1) \chi_{s_j}^+(2) \sigma_3(1) \sigma_3(2) \chi_{s_i}(1) \chi_{s_j}(2) \\
&= \sum_{s_i} \chi_{s_i}^+(1) \sigma_3(1) \chi_{s_i}(1) \sum_{s_j} \chi_{s_j}^+(2) \sigma_3(2) \chi_{s_j}(2) = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

dato che

$$\begin{aligned}
& \sum_{s_i} \chi_{s_i}^+ \sigma_3(2) \chi_{s_j} = \chi_{1/2}^+ \chi_{1/2}^+ - \chi_{1/2}^+ \chi_{-1/2}^+ + \chi_{-1/2}^+ \chi_{1/2}^+ - \chi_{-1/2}^+ \chi_{-1/2}^+ \\
&= \chi_{1/2}^+ \chi_{1/2} - \chi_{-1/2}^+ \chi_{-1/2} = 1 - 1 = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Per il calcolo dei termini di scambio utilizzeremo gli operatori di scambio di spin e sapore  $P_\sigma$  e  $P_Y$  la cui azione è

$$\chi_s(1) \chi_{s'} Y_I(1) Y_{I'}(2) = P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \chi_{s'}(1) \chi_s(2) Y_{I'}(1) Y_I(2) \tag{3.31}$$

### 3.5.1 Interazione nucleonica

In questa sessione calcoliamo il contributo dell'interazione tra due nucleoni nell'equazione (3.18).

Considereremo separatamente i termini diretti e di scambio e useremo gli operatori di proiezione (2.12) per selezionare i nucleoni.

Consideriamo il termine scalare dell'interazione N-N. Il termine diretto dell'equazione (3.18) può essere scritto come

$$\begin{aligned}
& \sum_{ij} \frac{1}{A} \langle ij | V_1^a(ij) \Pi_N(i) \Pi_N(j) | ij \rangle \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \sum_{ij} \phi_i^*(1) \phi_j^*(2) V_1^a(|\mathbf{r}_{12}|) \Pi_N(i) \Pi_N(j) \phi_i(1) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \sum_i \phi_i^*(1) \Pi_N(i) \phi_i(1) V_1^a(|\mathbf{r}_{12}|) \sum_j \phi_j^*(2) \Pi_N(j) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 (\rho_p + \rho_n) V_1^a(|\mathbf{r}_{12}|) (\rho_p + \rho_n) \\
&= \frac{1}{A} (\rho_p + \rho_n)^2 \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 V_1^a(|\mathbf{r}_{12}|) \\
&= \frac{1}{A} (\rho_p + \rho_n)^2 \int d^3 R \int d^3 r V_1^a(|\mathbf{r}|) = \frac{\Omega}{A} (\rho_p + \rho_n)^2 4\pi \int dr r^2 V_1^a(|\mathbf{r}|) \\
&= 4\pi \frac{(\rho_p + \rho_n)^2}{\rho} \int dr r^2 V_1^a(|\mathbf{r}|)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con  $\phi_i(1)$  la funzione d'onda della particella 1 i cui numeri quantici sono identificati con l'indice i. Le somme sono limitate a stati sotto la superficie di Fermi e le densità sono ottenute secondo la definizione (3.26):  $\sum_i \phi_i^* \phi_i = \sum_i |\phi|^2 = \rho$

Nel calcolo è stato fatto il cambio di coordinate:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \\
\mathbf{R} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \mathbf{r}_j = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}}{2}
\end{aligned}$$

che produce lo jacobiano:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial R} & \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial R} & \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{r}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = |-1| = 1$$

Il contributo del termine dipendente dal sapore della (3.19) è

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | V_2^a(ij) \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) \Pi_N(i) \Pi_N(j) | ij \rangle \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \sum_{ij} \phi_i^*(1) \phi_j^*(2) V_2^a(|\mathbf{r}_{12}|) \\
&\quad \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \Pi_N(1) \Pi_N(2) \phi_i(1) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 R \int d^3 r V_2^a(r) \sum_{ij} \phi_i^*(1) \phi_j^*(2) [S_3(1) S_3(2)] \phi_i(1) \phi_j(2) \\
&= \frac{\Omega}{A} \int d^3 r V_2^a(r) \sum_i \phi_i^*(1) S_3(1) \phi_i(1) \sum_j \phi_j^*(2) S_3(2) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{\rho} \int d^3 r V_2^a(r) [\rho_p - \rho_n] [\rho_p - \rho_n] \\
&= 4\pi \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{\rho} \int dr r^2 V_2^a(r)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dato che il contributo dei termini dipendenti dallo spin è nullo, come mostrato dalla (3.29), rimangono da calcolare i contributi dei termini dipendenti dalla densità della (3.19).

Per il termine scalare abbiamo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | V_9^a f(\rho) \Pi_N(i) \Pi_N(j) | ij \rangle \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 r_i \int d^3 r_j \sum_{ij} \phi_i^*(1) \phi_j^*(2) f(\rho) V_9^a(|\mathbf{r}_{12}|) \Pi_N(i) \Pi_N(j) \phi_i(1) \phi_j(2) \\
&= 4\pi \frac{(\rho_p + \rho_n)^2}{\rho} f(\rho) \int dr r^2 V_9^a(r)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e per il termine dipendente dal sapore otteniamo

$$\frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | V_{10}^a f(\rho) \Pi_N(i) \cdot \Pi_N(j) | ij \rangle = 4\pi \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{\rho} f(\rho) \int dr r^2 V_{10}^a(r) \tag{3.35}$$

Il termine diretto della parte di interazione N-N risulta pertanto così formato:

$$\begin{aligned}
V_{dir}^{NN} &= \frac{(\rho_p + \rho_n)^2}{\rho} \int dr r^2 \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) \right) \\
&+ \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{\rho} \int dr r^2 \left( V_2^a + f(\rho) V_{10}^a \right)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Consideriamo ora il calcolo del termine di scambio della (3.18). Per affrontare questo calcolo scriviamo i termini dipendenti dallo spin e dal sapore come indicato dalla (3.31). Questo ci permette di calcolare l'elemento di matrice di spin e sapore come termine diretto di un operatore che contiene anche gli operatori di scambio.

L'operatore prodotto dalla parte scalare ( $p=1$ ,  $\alpha=a$ ) dell'interazione N-N (3.19) è

$$\begin{aligned}
&\left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) \right) \Pi_N(1) \Pi_N(2) \left( P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \right) \\
&= \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) \right) \left( P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \right) \Pi_N(1) \Pi_N(2) \\
&= \frac{1}{4} \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) \right) \left( 1 + \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right) \Pi_N(1) \Pi_N(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

dove indichiamo con  $T(\sigma)$  i termini dipendenti da  $\sigma$  la cui traccia è nulla.

Per la parte dipendente dal sapore abbiamo

$$\begin{aligned}
& \left[ V_2^a(r) + f(\rho)V_{10}^a(r) \right] \left[ \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \left[ \Pi_N(1)\Pi_N(2) \right] \left[ P_\sigma(1,2)P_Y(1,2) \right] \\
= & \frac{1}{4} \left[ V_2^a(r) + f(\rho)V_{10}^a(r) \right] \\
& \left[ \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \right. \\
& \left. + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) \\
= & \frac{1}{4} \left[ V_2^a(r) + f(\rho)V_{10}^a(r) \right] \left[ \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) + T(\sigma) \\
= & \frac{1}{4} \left[ V_2^a(r) + f(\rho)V_{10}^a(r) \right] \left[ 3\mathcal{I}_1 - \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Il termine di spin (p=3,  $\alpha=a$ ) dell'interazione nel termine di scambio dà un contributo prodotto dall'operatore

$$\begin{aligned}
& V_3^a(r) \left[ \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) \left[ P_\sigma(1,2)P_Y(1,2) \right] \\
= & \frac{1}{4} V_3^a(r) \left[ \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \right. \\
& \left. + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2 + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) = \\
= & \frac{1}{4} V_3^a(r) \left[ 3 - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + 3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\
& \left. - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) = \\
= & \frac{1}{4} V_3^a(r) \left[ 3 + 3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1)\Pi_N(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.39}$$



L'operatore prodotto dal termine spin-sapore( $p=4, \alpha=a$ ) è

$$\begin{aligned}
& V_4^a(r) \left[ \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1) \Pi_N(2) P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \\
&= \frac{1}{4} V_4^a(r) \left[ \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2 \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2 (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 \right] \Pi_N(1) \Pi_N(2) \\
&= \frac{1}{4} V_4^a(r) \left[ 3 \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + 9 \mathcal{I}_1 - 6 \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1) \Pi_N(2) + T(\sigma) \\
&= \frac{1}{4} V_4^a(r) \left[ 9 \mathcal{I}_1 - 3 \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right] \Pi_N(1) \Pi_N(2)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Risistemando i contributi dei quattro termini precedenti possiamo riassumere dicendo che gli operatori dell'interazione di cui si deve calcolare il contributo sono composti da una parte scalare

$$\begin{aligned}
\widetilde{V_1^a(r)} &= \frac{1}{4} \left[ V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) + 3 \left( V_2^a(r) + f(\rho) V_{10}^a(r) \right) + \right. \\
&\quad \left. + 3 V_3^a(r) + 9 V_4^a(r) \right] \Pi_N(1) \Pi_N(2)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

e da una dipendente dal sapore:

$$\begin{aligned}
\widetilde{V_2^a(r)} &= \frac{1}{4} \left[ V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) - V_2^a(r) \right. \\
&\quad \left. - f(\rho) V_{10}^a(r) + 3 V_3^a(r) - 3 V_4^a(r) \right] \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \Pi_N(1) \Pi_N(2)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Non abbiamo considerato i termini dipendenti da  $\sigma$  perchè il sistema è saturo in spin.

Determiniamo il valore di aspettazione del termine di scambio per la parte scalare

$\widetilde{V_1^a(r)}$ 

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | \widetilde{V_1^a}(r) \Pi_N(i) \Pi_N(j) | ji \rangle \\
&= \frac{1}{A} \sum_{ij} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{Fi}} d^3 k_i \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{Fj}} d^3 k_j \\
& \quad \int d^3 r_i \int d^3 r_j \frac{4}{\Omega^2} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} e^{i\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \widetilde{V_1^a}(|\mathbf{r}|_{ij}) \\
&= \frac{4}{(2\pi)^6} \sum_{i,j} \int_0^{k_{Fi}} d^3 k_i \int_0^{k_{Fj}} d^3 k_j \int d^3 R \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \widetilde{V_1^a}(r)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

dove  $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  e le somme su  $i, j$  sono limitate agli stati nucleonici.

Calcoliamo l'integrale sul momento

$$\begin{aligned}
& \int_0^{k_F} d^3 k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\
&= \int_0^{k_F} dk k^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d\phi_k d \cos \theta_k 4\pi \sum_{JM} (i)^J j_J(kr) Y_{JM}(\widehat{k}) Y_{JM}^*(\widehat{r})
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Dato che

$$\int d\widehat{k} Y_{JM}(\widehat{k}) = \delta_{JO} \delta_{MO} \sqrt{4\pi} \tag{3.45}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
& \int_0^{k_F} d^3 k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \int_0^{k_F} dk k^2 j_0(kr) \sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{4\pi}{r} \int_0^{k_F} dk k \sin(kr) = \\
&= \frac{4\pi}{r^3} [\sin(k_F r) - (k_F r) \cos(k_F r)] = \frac{4\pi}{r} k_F^2 j_1(k_F r)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

dove abbiamo indicato con  $j$ , la funzione di Bessel sferica di rango 1

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \tag{3.47}$$

Utilizzando il risultato (3.44) nella (3.41) abbiamo che

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | \widetilde{V}_1^a(r) | ji \rangle \\
&= \frac{1}{A} \frac{4}{(2\pi)^6} \Omega \sum_{ij} \int d^3r \frac{4\pi}{r} k_{Fi}^2 j_1(k_{Fi}r) \frac{4\pi}{r} k_{Fj}^2 j_1(k_{Fj}r) \widetilde{V}_1^a(r) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{4}{\pi^3} \sum_{ij} \int dr k_{Fi}^2 j_1(k_{Fi}r) k_{Fj}^2 j_1(k_{Fj}r) \widetilde{V}_1^a(r) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{4}{\pi^3} \int dr \widetilde{V}_1^a(r) \left[ k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p}r) + k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n}r) \right]^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Il contributo della parte dipendente da sapore  $\widetilde{V}_2^a(r)$  all'energia (3.18) è

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | \widetilde{V}_2^a(r) \Pi_N(i) \Pi_N(j) | ji \rangle \\
&= \frac{1}{A} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \sum_{ij} \int_0^{k_{Fi}} d^3k_i \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{Fj}} d^3k_j \sum_{s_i s_j} \chi_{s_i}^\dagger \chi_{s_j}^\dagger \chi_{s_i} \chi_{s_j} \\
& \quad \sum_{I_i I_j} Y_{I_i}^\dagger Y_{I_j}^\dagger \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) Y_{I_i} Y_{I_j} \int d^3r_i \int d^3r_j \frac{1}{\Omega^2} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} e^{i\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \widetilde{V}_2^a(|\mathbf{r}|_{ij}) \\
&= \frac{4}{(2\pi)^6} \frac{1}{A} \sum_{ij} \int_0^{k_{Fi}} d^3k_i \int_0^{k_{Fj}} d^3k_j \int d^3R \int d^3r e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}} \widetilde{V}_2^a(r) \\
&= \frac{4}{\pi^3} \frac{1}{\rho} \int dr \left[ k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p}r) - k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n}r) \right]^2 \widetilde{V}_2^a(r)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

dove abbiamo usato il risultato (3.44).

Unendo i risultati (3.46) e (3.47) ed esplicitando  $\widetilde{V}$  possiamo scrivere il termine di scambio della parte di N-N come

$$V_{exc}^{NN} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi^3} \left[ \int dr \left( k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p}r) + k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n}r) \right)^2 \right. \right. \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
& \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) + 3\mathcal{I}_1(V_2^a(r) + f(\rho) V_{10}^a(r)) + 3V_3^a(r) + 9\mathcal{I}_1 V_4^a(r) \right) \\
& + \int dr \left( k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p}r) - k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n}r) \right)^2 \\
& \left. \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a - V_2^a(r) - f(\rho) V_{10}^a(r) + 3V_3^a(r) - 3V_4^a(r) \right) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

### 3.5.2 Interazione nucleone - $\Lambda$

Consideriamo il contributo dell'interazione  $N - \Lambda$  all'energia.

Definiamo un operatore che seleziona stati nucleone -  $\Lambda$

$$\Pi_{N,\Lambda}(1, 2) = \frac{1}{2} [\Pi_N(1)\Pi_\Lambda(2) + \Pi_\Lambda(1)\Pi_N(2)] \quad (3.52)$$

Il termine diretto della (3.18) prodotto dal termine scalare è

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \frac{1}{A} \langle ij | V_1^b(ij) \Pi_{N,\Lambda}(i, j) | ij \rangle \\ &= \frac{1}{A} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \sum_{ij} \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) V_1^b(|\mathbf{r}_{12}|) \Pi_{N,\Lambda}(i, j) \phi_i(\mathbf{r}_1) \phi_j(\mathbf{r}_2) \\ &= \frac{1}{A} \int d^3r_1 \int d^3r_2 \frac{1}{2} \left[ (\rho_p + \rho_n) V_1^b(|\mathbf{r}_{12}|) \rho_\Lambda + \rho_\Lambda V_1^b(|\mathbf{r}_{12}|) (\rho_p + \rho_n) \right] \\ &= \frac{1}{A} (\rho_p + \rho_n) \rho_\Lambda \int d^3R \int d^3r V_1^b(|\mathbf{r}|) = \frac{\Omega}{A} (\rho_p + \rho_n) \rho_\Lambda 4\pi \int dr r^2 V_1^b(|\mathbf{r}|) \\ &= 4\pi \frac{(\rho_p + \rho_n) \rho_\Lambda}{\rho} \int dr r^2 V_1^b(|\mathbf{r}|) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Per quanto riguarda il termine dipendente sapore dell'interazione abbiamo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | V_2^b(i, j) \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) \Pi_{N,\Lambda}(ij) | ij \rangle \\
&= \frac{1}{A} \int d^3 r_1 \int d^3 r_2 \sum_{ij} \phi_i^*(1) \phi_j^*(2) V_2^b(|\mathbf{r}_{12}|) \\
& \quad \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \Pi_{N,\Lambda}(1) \Pi_{N,\Lambda}(2) \phi_i(1) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{A} \int d^3 R \int d^3 r V_2^b(r) \sum_{ij} \phi_i^*(1) \phi_j^*(2) [S_6(1) S_6(2)] \phi_i(1) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Omega}{A} \int d^3 r V_2^b(r) \sum_i \phi_i^*(1) S_6(1) \phi_i(1) \sum_j \phi_j^*(2) S_6(2) \phi_j(2) \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{1}{2} \left\{ [\rho_p + \rho_n] V_2^b(r) (-\rho_\Lambda) + (-\rho_\Lambda) V_2^b(r) [\rho_p + \rho_n] \right\} \\
&= -4\pi \frac{(\rho_p + \rho_n) \rho_\Lambda}{\rho} \int dr r^2 V_2^b(r)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Il contributo del termine diretto dell'interazione nucleone- $\Lambda$  è :

$$V_{dir}^{N\Lambda} = \frac{1}{2} \left\{ 4\pi \left[ \frac{(\rho_p + \rho_n) \rho_\Lambda}{\rho} \int dr r^2 V_1^b(r) - \frac{(\rho_p + \rho_n) \rho_\Lambda}{\rho} \int dr r^2 V_2^b(r) \right] \right\} \tag{3.55}$$

Calcoliamo il contributo del termine di scambio utilizzando la stessa tecnica usata per il caso nucleone-nucleone.

Definiamo gli operatori dell'interazione che si ottengono applicando gli operatori di scambio di spin e sapore. Per il termine scalare ( $p=1$ ,  $\alpha=b$ ) otteniamo

$$\begin{aligned}
& V_1^b(r) \Pi_{N,\Lambda}(1) \Pi_{N,\Lambda}(2) \left( P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \right) \\
&= V_1^b(r) \left[ \frac{1}{4} \left( 1 + \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right) \Pi_{N,\Lambda}(1) \Pi_{N,\Lambda}(2) + T(\sigma) \right]
\end{aligned} \tag{3.56}$$

e per il termine di sapore ( $p=2$ ,  $\alpha=b$ ) abbiamo che

$$\begin{aligned}
& V_2^b(r)[\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)]\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2)\left(P_\sigma(1,2)P_Y(1,2)\right) \\
&= \frac{1}{4}V_2^b(r)\left(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_2^b(r)\left(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_2^b(r)\left(S_6(1)S_6(2) + S_9(1)S_9(2) \right. \\
&\quad \left. + 3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - 2S_6(1)S_6(2) - 2S_9(1)S_9(2)\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_2^b(r)\left(3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - S_6(1)S_6(2) - S_9(1)S_9(2)\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Nell'espressione precedente abbiamo considerato solo i termini che in un sistema saturo nello spin producono contributi diversi da zero.

Per il termine di spin ( $p=3$ ,  $\alpha=b$ ) abbiamo

$$\begin{aligned}
& V_3^b(r)[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)]\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2)\left(P_\sigma(1,2)P_Y(1,2)\right) \\
&= \frac{1}{4}V_3^b(r)\left(\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2 + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_3^b(r)\left(3 - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + 3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \cdot (1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_3^b(r)\left(3 + 3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

e per il termine di spin-sapore (p=4,  $\alpha=b$ )

$$\begin{aligned}
& V_4^b(r)[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)]\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2)\left(P_\sigma(1,2)P_Y(1,2)\right) \\
&= \frac{1}{4}V_4^b(r)\left[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right. \\
&\quad +\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \\
&\quad \left. +(\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2\right]\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_4^b(r)\left[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right. \\
&\quad +\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + (3 - 2\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \\
&\quad \left. + (3 - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2\right]\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) \\
&= \frac{1}{4}V_4^b(r)\left[3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right. \\
&\quad \left.+ 3\left(3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - 2S_6(1)S_6(2) - 2S_9(1)S_9(2)\right)\right]\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) + T(\sigma) \\
&= \frac{1}{4}V_4^b(r)\left(9\mathcal{I}_2 + 9\mathcal{I}_3 - 3S_6(1)S_6(2) - 3S_9(1)S_9(2)\right)\Pi_{N,\Lambda}(1)\Pi_{N,\Lambda}(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Risistemando i risultati ottenuti e trascurando i termini  $T(\sigma)$ , possiamo concludere che gli operatori da usare per il calcolo dello scambio sono composti da una parte scalare:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{V_1^b(r)} \\
&= \frac{1}{4}\left[V_1^b(r) + 3(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)V_2^b(r) + 3V_3^b(r) + 9(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3)V_4^b(r)\right]
\end{aligned} \tag{3.60}$$

e una dipendente dal sapore:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{V_2^b(r)}(S_6(1)S_6(2) + S_9(1)S_9(2)) \\
&= \frac{1}{4}\left(V_1^b(r) - V_2^b(r) + 3V_3^b(r) - 3V_4^b(r)\right)(S_6(1)S_6(2) + S_9(1)S_9(2))
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Utilizzando i risultati (3.43) e (3.44) otteniamo

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | \widetilde{V}_1^b(r) | ji \rangle \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{4}{\pi^3} \int dr \widetilde{V}_1^b(r) \left[ k_{k_{F_p}}^2 j_1(k_{k_{F_p}} r) + k_{k_{F_n}}^2 j_1(k_{k_{F_n}} r) \right] k_{k_{F_\Lambda}}^2 j_1(k_{k_{F_\Lambda}} r)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A} \sum_{ij} \langle ij | \widetilde{V}_2^b(r) | ji \rangle \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{4}{\pi^3} \int dr \widetilde{V}_2^b(r) \left[ k_{k_{F_p}}^2 j_1(k_{k_{F_p}} r) + k_{k_{F_n}}^2 j_1(k_{k_{F_n}} r) \right] k_{k_{F_\Lambda}}^2 j_1(k_{k_{F_\Lambda}} r)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Il contributo del termine di scambio dell'interazione  $N - \Lambda$  è

$$\begin{aligned}
V_{exc}^{N\Lambda} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi^3} \left[ \int dr \left[ \left( k_{k_{F_p}}^2 j_1(k_{k_{F_p}} r) + k_{k_{F_n}}^2 j_1(k_{k_{F_n}} r) \right) k_{k_{F_\Lambda}}^2 j_1(k_{k_{F_\Lambda}} r) \right] \right. \right. \\
&\quad \left( V_1^b(r) + 3V_2^b(r) + 3V_3^b(r) + 9V_4^b(r) \right) \\
&\quad - \int dr \left[ \left( k_{k_{F_p}}^2 j_1(k_{k_{F_p}} r) + k_{k_{F_n}}^2 j_1(k_{k_{F_n}} r) \right) k_{k_{F_\Lambda}}^2 j_1(k_{k_{F_\Lambda}} r) \right] \\
&\quad \left. \left. \left( V_1^b(r) - V_2^b(r) + 3V_3^b(r) - 3V_4^b(r) \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

### 3.5.3 Interazione $\Lambda - \Lambda$

Analogamente a quanto fatto in precedenza, determiniamo il contributo dell'interazione  $\Lambda - \Lambda$  (3.21) all'energia di legame.

Per quanto riguarda il termine diretto abbiamo un contributo della parte scalare dell'interazione

$$\frac{1}{A} \langle ij | V_1^c(r) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) | ij \rangle = \frac{\rho_\Lambda^2}{\rho} \int dr r^2 V_1^c(r) \tag{3.65}$$



e della parte dipendente dal sapore

$$\frac{1}{A} \langle ij | V_2^c(r) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \Pi_\Lambda(2) \Pi_\Lambda(2) | ij \rangle = \frac{\rho_\Lambda^2}{\rho} \int dr r^2 V_2^c(r) \quad (3.66)$$

globalmente

$$V_{dir}^{\Lambda\Lambda} = \frac{1}{2} \left\{ 4\pi \left[ \frac{\rho_\Lambda^2}{\rho} \int dr r^2 V_1^c(r) + \frac{\rho_\Lambda^2}{\rho} \int dr r^2 V_1^c(r) \right] \right\} \quad (3.67)$$

Anche in questo caso, determiniamo il termine di scambio definendo prima gli operatori dell'interazione. L'operatore generato dal termine scalare (p=1,  $\alpha=c$ ) è

$$V_1^c(r) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) \left( P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \right) = \frac{1}{4} V_1^c(r) \left( 1 + S(1) S(2) \right) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) + T(\sigma) \quad (3.68)$$

Quello prodotto dal termine dipendente dal sapore (p=2,  $\alpha=c$ ) è

$$\begin{aligned} & V_2^c(r) [\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)] \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) \left( P_\sigma(1, 2) P_Y(1, 2) \right) \\ &= \frac{1}{4} V_2^c(r) \left( \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \right. \\ & \quad \left. + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 \right) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) \\ &= \frac{1}{4} V_2^c(r) \left( \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + (\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 \right) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) \\ &= \frac{1}{4} V_2^c(r) \left( S_6(1) S_6(2) + S_9(1) S_9(2) \right. \\ & \quad \left. + 3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - 2S_6(1) S_6(2) - 2S_9(1) S_9(2) \right) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) \\ &= \frac{1}{4} V_2^c(r) \left( 3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - S_6(1) S_6(2) - S_9(1) S_9(2) \right) \Pi_\Lambda(1) \Pi_\Lambda(2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

dove abbiamo considerato solo i termini che danno contributo non nullo in un sistema saturo nello spin.

L'operatore generato dal termine dipendente dallo spin (p=3,  $\alpha=c$ ) è

$$\begin{aligned}
& V_3^c(r)[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)]\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2)\left(P_\sigma(1,2)P_Y(1,2)\right) \\
&= \frac{1}{4}V_3^c(r)\left(\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2 + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) \\
&= \frac{1}{4}V_3^c(r)\left(3 - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + 3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \cdot (1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) \\
&= \frac{1}{4}V_3^c(r)\left(3 + 3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.70}$$

e quello generato dal termine dipendente dallo spin e dal sapore (p=4,  $\alpha=c$ )

$$\begin{aligned}
& V_4^c(r)[\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)]\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2)\left(P_\sigma(1,2)P_Y(1,2)\right) \\
&= \frac{1}{4}V_4^c(r)\left(\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \right. \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))^2(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2\right)\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) \\
&= \frac{1}{4}V_4^c(r)\left(\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2)(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2 + (3 - 2\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) + \right. \\
&\quad \left. + (3 - \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2))(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))^2\right)\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) \\
&= \frac{1}{4}V_4^c(r)\left[3\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \right. \\
&\quad \left. + 3\left(3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - 2S_6(1)S_6(2) - 2S_9(1)S_9(2)\right)\right]\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) + T(\sigma) \\
&= \frac{1}{4}V_4^c(r)\left(9\mathcal{I}_2 + 9\mathcal{I}_3 - 3S_6(1)S_6(2) - 3S_9(1)S_9(2)\right)\Pi_\Lambda(1)\Pi_\Lambda(2) + T(\sigma)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Gli operatori da considerare per il calcolo del termine di scambio sono composti da una parte scalare:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{V}_1^c(r) \\
&= \frac{1}{4}\left[V_1^c(r) + 3\left(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3\right)V_2^c(r) + 3V_3^c(r) + 9\left(\mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3\right)V_4^c(r)\right]
\end{aligned} \tag{3.72}$$

e da una dipendente dal sapore:

$$\begin{aligned} & \widetilde{V_2^c(r)}(S_6(1)S_6(2) + S_9(1)S_9(2)) \\ &= \frac{1}{4} \left( V_1^c(r) - V_2^c(r) + 3V_3^c(r) - 3V_4^c(r) \right) (S_6(1)S_6(2) + S_9(1)S_9(2)) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Sviluppando i calcoli, in analogia a quanto fatto per l'interazione  $N-\Lambda$  otteniamo la seguente interazione di scambio:

$$\begin{aligned} V_{exc}^{\Lambda\Lambda} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi^3} \left[ \int dr k_{F\Lambda}^4 j_1^2(k_{F\Lambda} r) \left( V_1^c(r) + 6V_2^c(r) + 3V_3^c(r) + 18V_4^c(r) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int dr k_{F\Lambda}^4 j_1^2(k_{F\Lambda} r) 2 \left( V_1^c(r) - V_2^c(r) + 3V_3^c(r) - 3V_4^c(r) \right) \right] \Bigg\} \end{aligned} \quad (3.74)$$

## 3.6 Equazione di stato

I calcoli precedenti ci permettono di esprimere l'energia di legame in funzione della densità. Questa espressione chiamata equazione di stato (EOS) è composta da quattro pezzi rilevanti dal punto di vista fisico.

Il termine di energia cinetica

$$\frac{T}{A} = \frac{\hbar^2}{2m_p} \frac{3}{5} k_{F_p}^2 \frac{\rho_p}{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m_n} \frac{3}{5} k_{F_n}^2 \frac{\rho_n}{\rho} + \frac{\hbar^2}{2m_\Lambda} \frac{3}{5} k_{F_\Lambda}^2 \frac{\rho_\Lambda}{\rho} \quad (3.75)$$

che è semplicemente la somma delle energie cinetiche di protoni, neutroni e  $\Lambda$ .

Poi abbiamo un termine legato all'interazione tra nucleoni

$$\begin{aligned}
V^{NN} = & \frac{1}{2} \left\{ 4\pi \left[ \frac{(\rho_p + \rho_n)^2}{\rho} \int dr r^2 \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) \right) \right. \right. \\
& + \frac{(\rho_p - \rho_n)^2}{\rho} \int dr r^2 \left( V_2^a(r) + f(\rho) V_{10}^a(r) \right) \Big] \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi^3} \left[ \int dr \left( k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p} r) + k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n} r) \right)^2 \right. \\
& \quad \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a(r) + 3(V_2^a(r) + f(\rho) V_{10}^a(r)) + 3V_3^a(r) + 9V_4^a(r) \right) \\
& + \int dr \left( k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p} r) - k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n} r) \right)^2 \\
& \quad \left. \left. \left( V_1^a(r) + f(\rho) V_9^a - V_2^a(r) - f(\rho) V_{10}^a(r) + 3V_3^a(r) - 3V_4^a(r) \right) \right] \right\} \quad (3.76)
\end{aligned}$$

quindi un termine legato all'interazione  $N - \Lambda$

$$\begin{aligned}
V^{N\Lambda} = & \frac{1}{2} \left\{ 4\pi \left[ \frac{(\rho_p + \rho_n)\rho_\Lambda}{\rho} \int dr r^2 V_1^b(r) - \frac{(\rho_p + \rho_n)\rho_\Lambda}{\rho} \int dr r^2 V_2^b(r) \right] \right. \\
& - \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi^3} \left[ \int dr \left[ \left( k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p} r) + k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n} r) \right) k_{F_\Lambda}^2 j_1(k_{F_\Lambda} r) \right] \right. \\
& \quad \left( V_1^b(r) + 3V_2^b(r) + 3V_3^b(r) + 9V_4^b(r) \right) \\
& + \int dr \left[ \left( k_{F_p}^2 j_1(k_{F_p} r) + k_{F_n}^2 j_1(k_{F_n} r) \right) k_{F_\Lambda}^2 j_1(k_{F_\Lambda} r) \right] \\
& \quad \left. \left. \left( V_1^b(r) - V_2^b(r) + 3V_3^b(r) - 3V_4^b(r) \right) \right] \right\} \quad (3.77)
\end{aligned}$$

e un termine generato dall'interazione  $\Lambda - \Lambda$

$$\begin{aligned}
 V^{\Lambda\Lambda}(r) = & \frac{1}{2} \left\{ 4\pi \left[ \frac{\rho_\Lambda^2}{\rho} \int dr r^2 V_1^c(r) + \frac{\rho_\Lambda^2}{\rho} \int dr r^2 V_2^c(r) \right] \right. \\
 - & \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi^3} \\
 & \left[ \int dr k_{F\Lambda}^4 j_1^2(k_{F\Lambda} r) \left( V_1^c(r) + 6V_2^c(r) + 3V_3^c(r) + 18V_4^c(r) \right) \right. \\
 + & \left. \left. \int dr k_{F\Lambda}^4 j_1^2(k_{F\Lambda} r) 2 \left( V_1^c(r) - V_2^c(r) + 3V_3^c(r) - 3V_4^c(r) \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Nel prossimo capitolo studieremo l'EOS di materia barionica con diverse percentuali di protoni, neutroni e  $\Lambda$ , ed analizzeremo il ruolo svolto da questi quattro termini.

# Capitolo 4

## Risultati

### 4.1 Interazioni

Nel capitolo precedente abbiamo presentato l'equazione di stato di un sistema infinito di protoni, neutroni e iperoni.

Questa equazione esprime l'energia di legame per barione in funzione della densità del sistema. Per risolvere l'equazione di stato abbiamo sviluppato un programma in linguaggio Fortran, il cui listato si trova in appendice D.

Il solo input necessario per questo calcolo è l'interazione tra i barioni, interazione che abbiamo separato in tre parti: N-N, N- $\Lambda$ ,  $\Lambda - \Lambda$ .

#### 4.1.1 Interazione N-N

La cromodinamica quantistica (QCD) è la teoria che, si ritiene, descriva l'interazione forte. Quindi le tre interazioni che ci interessano dovrebbero essere ottenute risolvendo le equazioni della QCD per i sistemi in esame. Di fatto la complessità delle equazioni QCD impedisce la loro soluzione nei casi di nostro interesse.

Le interazioni sono ottenute in forma fenomenologica fissando i parametri per riprodurre alcune quantità fisiche.

Nel caso dell'interazione N-N i dati da riprodurre riguardano i sistemi a due corpi: il deutone, e circa 5000 dati di diffusione elastica tra due nucleoni. Le interazioni così ottenute sono dette microscopiche e vengono utilizzate in teorie, a loro volta identificate come microscopiche, che risolvono l'equazione di Schroedinger senza fare approssimazioni.

Le interazioni N-N microscopiche hanno un core fortemente repulsivo a corte distanze di interazione, e questo richiede una trattazione non perturbativa del problema, trattazione che solo teorie microscopiche forniscono. Non è possibile utilizzare interazioni microscopiche in teorie effettive, come quella che abbiamo sviluppato, perchè in questo caso il core repulsivo produrrebbe problemi di convergenza.

Per il motivo che abbiamo sopra menzionato, nel nostro lavoro abbiamo utilizzato interazioni NN fissate in calcoli HF per riprodurre proprietà di nuclei finiti, innanzitutto energie di legame. Ovviamente c'è un grande sforzo di ricerca per collegare le interazioni effettive a quelle microscopiche.

Nei nostri calcoli l'interazione tra due nucleoni è stata parametrizzata come indicato nelle equazioni (3.22) e (3.23):

$$V(1,2)(r) = \sum_{\alpha=a,b,c} \sum_{p=1}^4 V_p^\alpha(r) O_p \quad (4.1)$$

con:

$$\begin{aligned} O_1 &= \mathbb{I}, & O_2 &= \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2), & O_3 &= \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2), \\ O_4 &= \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove  $\mathbf{r} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  è la distanza tra due barioni. Nella nostra trattazione scriveremo tutte le interazioni in questa forma, indipendentemente da come è stata presentata in letteratura.

Una prima interazione che abbiamo considerato è l'interazione D1S di Gogny [Dec80], molto usata in letteratura. In questa interazione le parti radiali sono

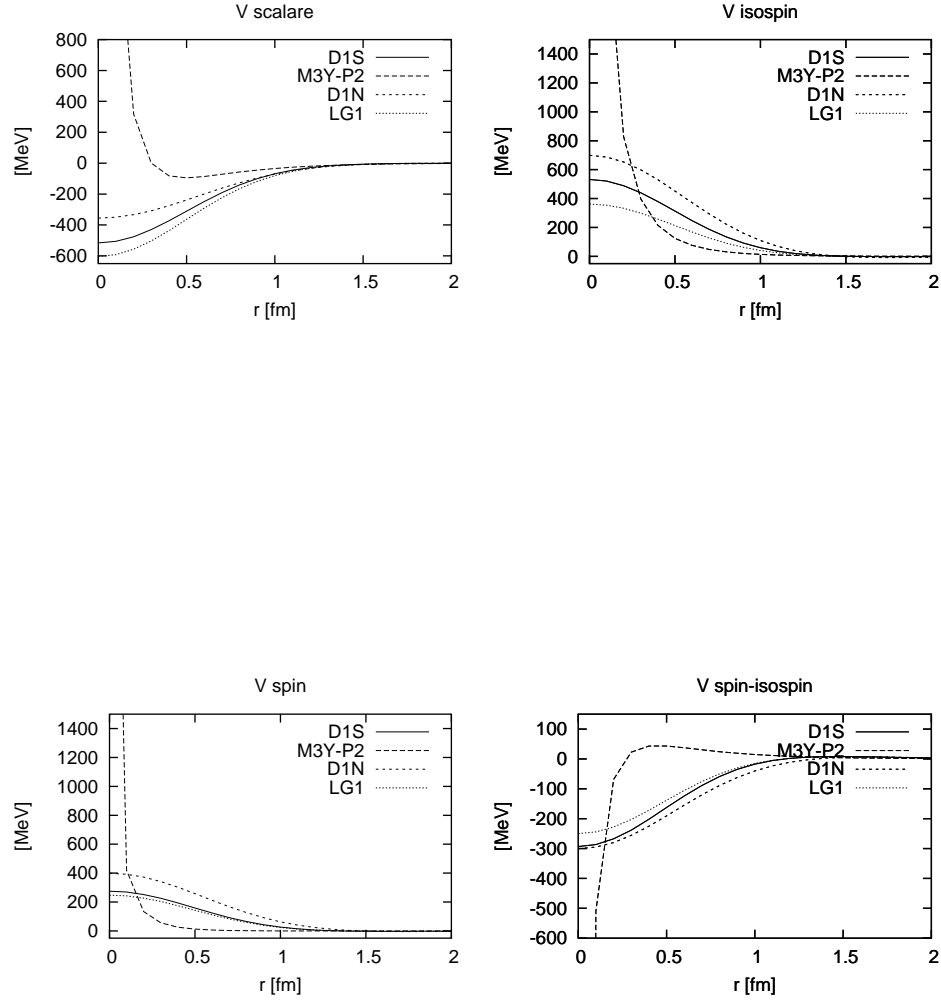


Figura 4.1: Termini delle  $V_i$  ottenute con quattro diverse parametrizzazioni dell'interazione N-N. La linea continua rappresenta l'interazione D1S, la linea con il tratteggio largo rappresenta l'interazione M3Y-P2, il tratteggio stretto l'interazione D1N e la linea punteggiata rappresenta l'interazione LG1.



esprese come funzione di due gaussiane che hanno lo stesso range per i primi 4 canali, i termini dipendenti dalla densità hanno raggio d'azione nullo, così come il termine di spin-orbita.

$$\begin{aligned}
V^{D1S}(1,2) = & \sum_{i=1,2} e^{\frac{-r^2}{\mu_i^2}} \\
& \left[ w_1^i + w_2^i \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) + w_3^i \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + w_4^i \boldsymbol{\sigma}(1) \boldsymbol{\sigma}(2) \boldsymbol{\tau}(1) \boldsymbol{\tau}(2) \right] \\
& + w_{LS} \mathbf{l}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \delta(\mathbf{r}) \\
& + w_{1,\rho} \rho^\alpha \left( \frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|}{2} \right) \delta(\mathbf{r}) \\
& + w_{2,\rho} (\boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2)) \rho^\alpha \left( \frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|}{2} \right) \delta(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

con  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Nel nostro caso il termine  $w_{LS}$  dà contributo nullo. I valori dei parametri dell'interazione D1S sono dati nella tabella 4.1.

Abbiamo preso in considerazione l'interazione D1N [Cha08], parametrizzazione più moderna dell'interazione D1S, infatti ha la stessa espressione. L'interazione D1N riproduce bene la PNM. Riportiamo in tabella 4.2 la parametrizzazione dell'interazione D1N.

forza	i	$\mu_i$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
D1S	1	0.7	-512.93	557.36	300.60	-349.40
	2	1.2	-3.52	-25.42	-25.76	555.98
			$w_{1,\rho}$	$w_{2,\rho}$		
			695	-695		

Tabella 4.1: Parametrizzazione dell'interazione Gogny D1S. I valori dei coefficienti  $w$  sono espressi in MeV e quelli dei  $\mu$  in fm

forza	i	$\mu_i$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
D1N	1	0.8	-369.98	470.16	827.63	-379.84
	2	1.2	14.54	-71.18	-128.08	79.21
			$w_{1,\rho}$	$w_{2,\rho}$		
			804.73	-804.73		

Tabella 4.2: Parametrizzazione dell'interazione D1N. I valori dei coefficienti  $w$  sono espressi in MeV e  $\mu$  in fm

Un'altra interazione da noi considerata è M3Y-P2 [Nak03], composta da tre funzioni di Yukawa, la cui espressione è la seguente:

$$\begin{aligned}
V^{M3Y-P2}(1, 2) = & \sum_{i=1,2} \frac{e^{-\mu_i r}}{\mu_i r} \\
& \left[ w_1^i + w_2^i \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) + w_3^i \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + w_4^i \boldsymbol{\sigma}(1) \boldsymbol{\sigma}(2) \boldsymbol{\tau}(1) \boldsymbol{\tau}(2) \right] \\
& + w_{LS} \mathbf{l}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \delta(\mathbf{r}) \\
& + w_{1,\rho} \rho^\alpha \left( \frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|}{2} \right) \delta(\mathbf{r}) \\
& + w_{2,\rho} (\boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2)) \rho^\alpha \left( \frac{|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|}{2} \right) \delta(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{4.4}$$

con  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

Questa interazione è stata costruita basandosi su un'interazione (M3Y) fissata per riprodurre dati di diffusione elastica nucleone-nucleo. Anche in questo caso abbiamo termini dipendenti dalla densità e spin-orbita a raggio nullo. I parametri sono stati fissati per riprodurre l'energia di legame. La parametrizzazione dell'interazione M3Y-P2 è riportata in tabella 4.3.

Un'ultima interazione da noi considerata è LG1, costruita da noi, ha la stessa espressione della D1S ma con parte finite range dipendente dalla densità. In tabella 4.4 riportiamo la parametrizzazione dell'interazione LG1.

forza	i	$\mu_i$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
M3Y-P2	1	0.25	4038.81	817.94	331.19	-1387.94
	2	0.4	-1608	303.	-43.5	568.5
			$w_{1,\rho}$	$w_{2,\rho}$		
			958	-958		

Tabella 4.3: Parametrizzazione dell'interazione M3Y-P2. I valori dei coefficienti  $w$  sono espressi in MeV,  $i$   $\mu$  in  $fm^{-1}$

forza	i	$\mu_i$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$
LG1	1	0.7	-600.21	379.03	270.534	-297.50
	2	1.2	-4.09	-17.27	-23.13	47.60
		$\mu_\rho$	$w_{1\rho}$	$w_{2\rho}$		
		0.5	1759.99	-300.00		

Tabella 4.4: Parametrizzazione dell'interazione LG1. I valori dei coefficienti  $w$  sono espressi in MeV e  $\mu$  in fm

Non abbiamo fatto un fit HF dell'energia di legame per nucleone su tutta la tavola periodica, solo per  $^{16}O$  i cui valori sono riportati in tabella 4.5. Notiamo che nel limite degli errori tutte le interazioni riproducono il valore sperimentale.

Nella figura 4.1 mostriamo il comportamento delle interazioni N-N, D1S (linea continua), M3Y-P2 (linea con tratteggio largo), D1N (linea con tratteggio stretto) e LG1 (linea punteggiata) per ciascun canale nello spazio  $r$ . Si notano delle anomalie nell'interazione M3Y-P2, in quanto non è stata costruita richiedendo di riprodurre le proprietà fisiche dei nuclei con calcoli Hartree-Fock, ma di riprodurre diffusione

		Exp	M3Y-P2	D1S	LG1
$^{16}\text{O}$	-E (MeV)	127.6	127.1	129.5	129.0

Tabella 4.5: Energia di legame di  $^{16}\text{O}$ . La tabella riporta il confronto tra i valori dell'energia di legame per l' $^{16}\text{O}$ .

elastica nucleone-nucleo.

### 4.1.2 Interazione N- $\Lambda$

Se l'interazione N-N è ben caratterizzata dai numerosi dati empirici, questo non è il caso per l'interazione  $N - \Lambda$ . Nei nostri calcoli abbiamo utilizzato una interazione N $\Lambda$  di rango finito, i cui parametri sono stati fissati per riprodurre le energie di eccitazione degli stati  $0^-$ ,  $2^-$  e  $1^-$  nell'ipernucleo  $^{16}_{\Lambda}\text{O}$ , utilizzando la teoria effettiva Random Phase Approximation.

L'interazione, denominata LNDE [Mar08], presenta la seguente forma:

$$V^{N-\Lambda}(r) = \sum_{i=1,3} w_i^c e^{-(r/\beta_i^c)^2} + \sum_{i=1,3} w_i^\sigma e^{-(r/\beta_i^\sigma)^2} \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \quad (4.5)$$

I valori dei parametri sono presentati in tabella 4.6 e l'interazione in figura 4.2, dove possiamo riconoscere il comportamento repulsivo del canale centrale a piccole distanze.

L'interazione LNDE fissata per riprodurre lo spettro di  $^{16}_{\Lambda}\text{O}$  produce risultati in buon accordo con i dati empirici dello spettro di eccitazione di  $^{12}_{\Lambda}\text{C}$ ,  $^{40}_{\Lambda}\text{C}$ ,  $^{90}_{\Lambda}\text{Zr}$ ,  $^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$ . Tutti questi sistemi adronici contengono un solo iperone.

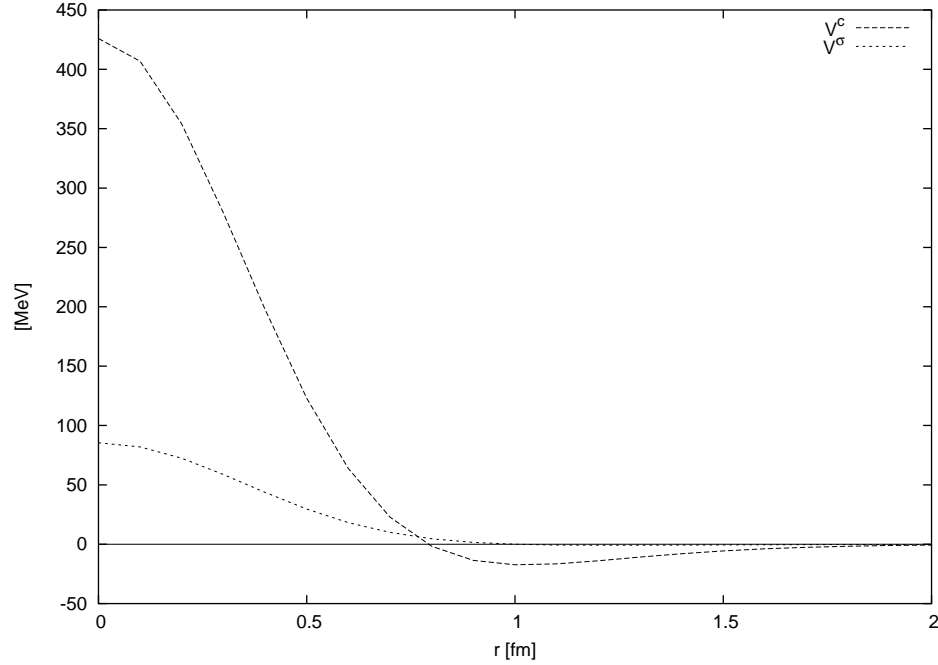


Figura 4.2: Termini scalare (linea con tratteggio largo) e di spin (linea con punti) dell'interazione N- $\Lambda$ , LNDE, nello spazio  $r$ .

forza		$w_1$	$w_2$	$w_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
LNDE	c	0.0	-92.0	518.0	1.5	0.9	0.5
	$\sigma$	-1.0	-3.5	90.0	1.5	0.9	0.5

Tabella 4.6: Parametrizzazione dell'interazione LNDE. I valori dei coefficienti  $w$  sono espressi in MeV e i raggi delle gaussiane,  $\beta_i$ , in fm.

### 4.1.3 Interazione $\Lambda - \Lambda$

La costruzione dell'interazione  $\Lambda - \Lambda$  è un problema ancora più difficile perchè si hanno pochissimi dati su sistemi adronici contenenti più di un iperone.

Sono disponibili dati di diffusione di K con scambio di doppia stranezza,  $K^-$  come proiettile e  $K^+$  come bersaglio. In questo modo è stato possibile studiare lo spettro di eccitazione del  ${}^{12}_{\Lambda\Lambda}C$ .

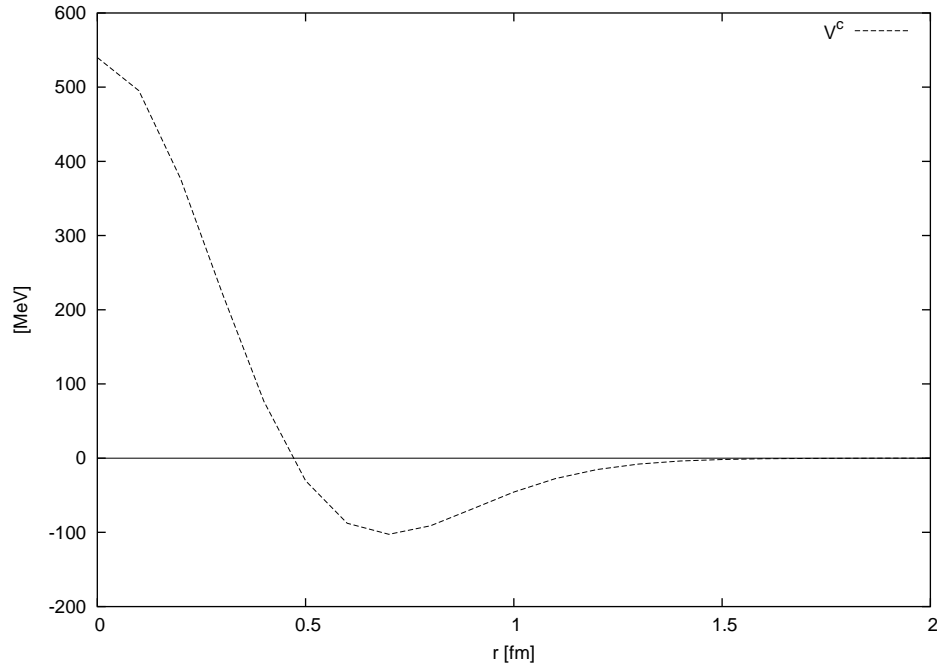


Figura 4.3: Termine scalare dell'interazione  $\Lambda - \Lambda$ , OHN1, nello spazio  $r$ .

L'interazione iperone-iperone, OHN1 [Ohn00], formata da due gaussiane

$$V^{\Lambda\Lambda}(r) = v_c e^{-r^2/\mu_c^2} + v_s e^{-r^2/\mu_s^2} \quad (4.6)$$

e la cui parametrizzazione è data in tabella 4.7, descrive lo spettro di  $^{12}_{\Lambda\Lambda}C$  in una teoria effettiva di campo medio come il modello a shell.

In figura 4.3 riportiamo l'andamento dell'interazione  $\Lambda - \Lambda$ , interazione puramente scalare, con la parametrizzazione della tabella 4.7.

forza	$\mu_c$	$\mu_s$	$v_c$	$v_s$
OHN1	0.6	0.45	-900	1440

Tabella 4.7: Parametrizzazione dell'interazione OHN1.

I valori dei coefficienti  $w$  sono espressi in MeV e quelli di  $\mu$  in fm.

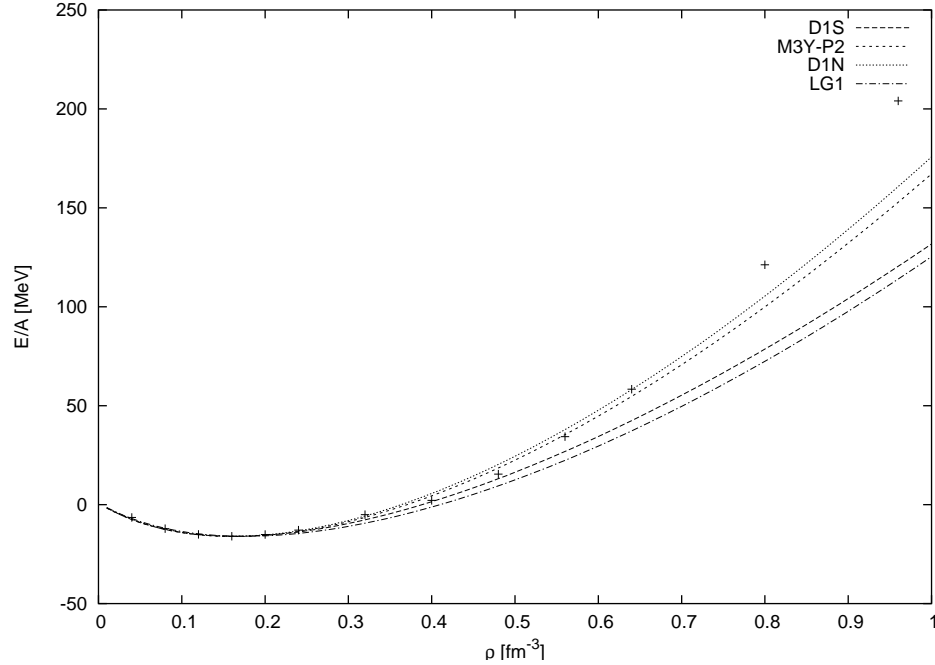


Figura 4.4: Equazione di Stato per materia nucleare simmetrica. La figura mostra il confronto fra gli andamenti dell'energia di legame ottenuti con calcoli Hartree-Fock utilizzando le quattro interazioni nucleone-nucleone, D1S, M3Y-P2, D1N e LG1 (linee tratteggiate) e i calcoli microscopici (punti).

## 4.2 Materia barionica

In questa sezione analizzeremo l'influenza delle quattro interazioni N-N presentate precedentemente sulla materia nucleare.

Abbiamo confrontato gli andamenti delle interazioni N-N per materia nucleare simmetrica con i dati sperimentali [Akm98]. Tale confronto è presentato nelle figura 4.4. Le quattro interazioni (linee tratteggiate) riproducono bene il punto di saturazione. All'aumentare della densità aumentano le discrepanze.

Dopo aver analizzato la SNM, siamo passati a studiare la PNM. Il comportamento dell'equazione per pura materia neutronica è riportata in figura 4.5. Nella figura mostriamo i risultati dell'equazione di stato e li confrontiamo con i calcoli microscopici [Akm98].

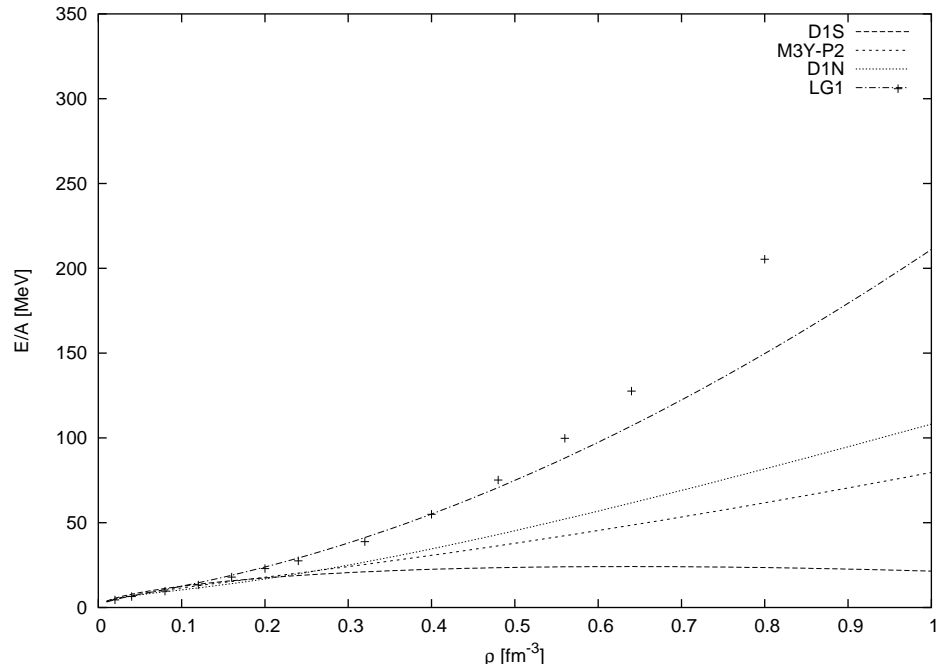


Figura 4.5: Equazione di Stato per materia neutronica. La figura mostra il confronto fra gli andamenti dell'energia di legame ottenuti con calcoli Hartree-Fock utilizzando le quattro interazioni nucleone-nucleone, D1S, M3Y-P2, D1N e LG1 (linee tratteggiate) e i calcoli microscopici (punti).



forza	Empirico	D1S	D1N	LG1	M3Y-P2
$\rho_0 [fm^{-3}]$	0.16	0.16	0.16	0.17	0.16
B/A [MeV]	-16.	-16.	-16.	-16.	-16.1
$K [MeV] = 9\rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=\rho_0}$	220	203	224	208	220
$a_S [MeV] = (B/A_{PNM} - B/A_{SNM})_{\rho=\rho_0}$	30	31.1	29.6	36.2	30.

Tabella 4.8: Confronto delle proprietà della materia nucleare tra le quattro interazioni N-N e il modello teorico.

Si nota che l'interazione D1S (linea con tratto largo) si discosta in maniera molto evidente dall'andamento della PNM ottenuto con i dati microscopici. Stesso discorso vale per le interazioni D1N (linea con tratti larghi) e M3Y-P2 (linea con tratti stretti). Solo l'interazione LG1 riproduce in maniera più soddisfacente l'andamento delle PNM.

In futuro, per i nostri calcoli, prenderemo in considerazione l'interazione nucleone-nucleone LG1.

Confrontando le figure 4.4 e 4.5 possiamo evidenziare che l'energia di legame in materia nucleare simmetrica è negativa, mentre nel caso di materia neutronica è positiva. Questo indica che la materia nucleare simmetrica è un sistema legato dall'interazione forte, mentre non lo è la materia di soli neutroni.

Per analizzare in modo accurato la validità delle nostre interazioni, abbiamo riportato nella tabella 4.8 i valori delle proprietà della materia nucleare per le varie interazioni, confrontandole con i dati sperimentali trattati nel capitolo 3.

Un fattore comune dei nostri risultati è la riproduzione del punto di saturazione nei limiti degli errori.

Vogliamo, ora, analizzare il comportamento dell'equazione di stato inserendo gli iperoni.

La figura 4.6 mostra gli andamenti delle energie di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni, considerando attiva solo l'interazione tra i nucleoni.

Studiamo i risultati distinguendo il caso  $x_\Lambda \leq 0.5$  e  $x_\Lambda > 0.5$ .

Alle basse densità si hanno valori di energia maggiori nel secondo caso. All'aumentare della densità, nel secondo caso, troviamo valori di energia minori, ma per  $x_\Lambda = 0.8$  risulta maggiore.

Diamo una possibile spiegazione dei risultati ottenuti.

Consideriamo le equazioni dell'equazione di stato (3.72)-(3.75). Poiché stiamo considerando attiva solo l'interazione NN, l'EOS è costituita solo dalle equazioni 3.73 e 3.74. Inserendo gli iperoni, aumenta la densità del sistema e di conseguenza diminuisce l'energia cinetica, portando a una diminuzione dell'EOS totale.

Per  $x_\Lambda \geq 0.8$  diventa più significativa l'energia cinetica degli iperoni contro quelli dei neutroni, incrementando l'energia di legame totale.

Nella tabella 4.9 riportiamo i valori delle energie di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni ad una densità pari a  $\rho = 1 fm^{-3}$ .

Esaminiamo, ora, il comportamento dell'EOS con l'interazione nucleone-nucleone, LG1, e nucleone-iperone, LNDE (Fig.4.7).

La figura 4.7 mostra il confronto dell'EOS di materia nucleare con le interazioni nucleone-nucleone all'aumentare della concentrazione degli iperoni (linee tratteggiate) e PNM (linea continua). Si evidenzia come all'aumentare della concentrazione degli iperoni l'energia di legame per barione diminuisce.

Questo si può comprendere considerando le equazioni dell'equazione di stato, che nel caso specifico sono composte dalle equazioni (3.72)-(3.74).

L'interazione  $N-\Lambda$ , essendo negativa, diminuisce l'energia di legame. A tal proposito nella tabella 4.10 riportiamo i valori dell'energia di legame per barione alla densità

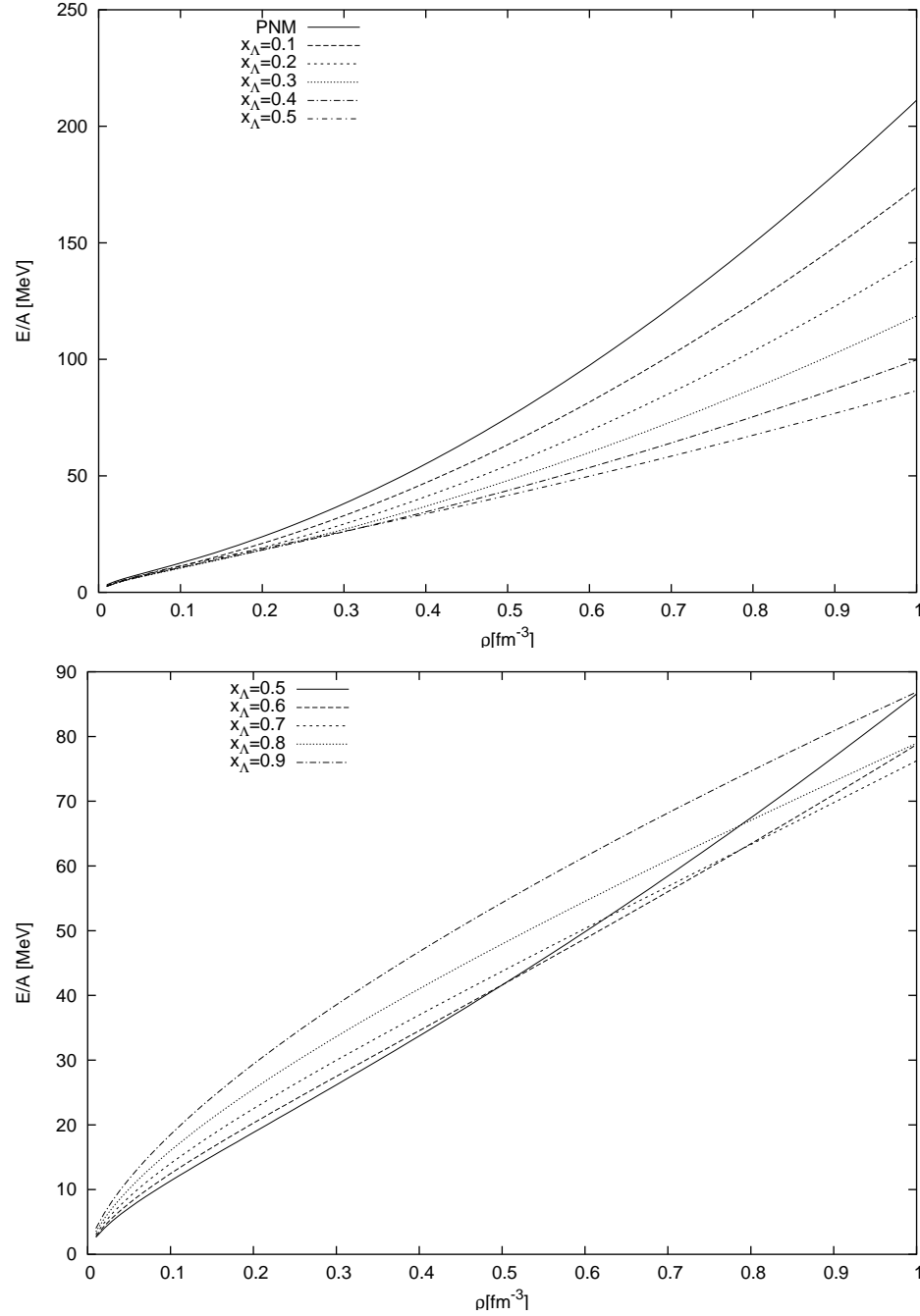


Figura 4.6: Il primo pannello mostra l'energia di legame per barione per PNM (linea continua) e per materia nucleare costituita da neutroni e iperoni all'aumentare della concentrazione di questi ultimi (linee tratteggiate). Il secondo pannello mostra l'energia di legame per barione per materia nucleare costituita da neutroni e iperoni all'aumentare della concentrazione degli iperoni. La linea continua rappresenta il calcolo per  $x_\Lambda = 0.5$  e le linee tratteggiate per concentrazioni  $x_\Lambda < 0.5$ .

$x_\Lambda$	B/A [MeV]
0.1	173.8
0.2	143.2
0.3	118.6
0.4	99.8
0.5	86.6
0.6	78.7
0.7	76.2
0.8	78.9
0.9	86.9

Tabella 4.9: Valori dell'energia di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni ad una densità  $\rho = 1fm^{-3}$  con l'interazione nucleone-nucleone.

$x_\Lambda$	B/A [MeV]
0.1	173.2
0.2	142.2
0.3	117.3
0.4	98.3
0.5	85.0

Tabella 4.10: Valori dell'energia di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni ad una densità  $\rho = 1fm^{-3}$  con le interazioni nucleone-nucleone e nucleone-iperone.

$\rho = 1fm^{-3}$  all'aumentare della concentrazione degli iperoni.

Confrontando le tabelle 4.9 e 4.10, possiamo notare che la seconda tabella fornisce valori di energia leggermente minori. Considerando l'interazione  $N - \Lambda$ , osserviamo,

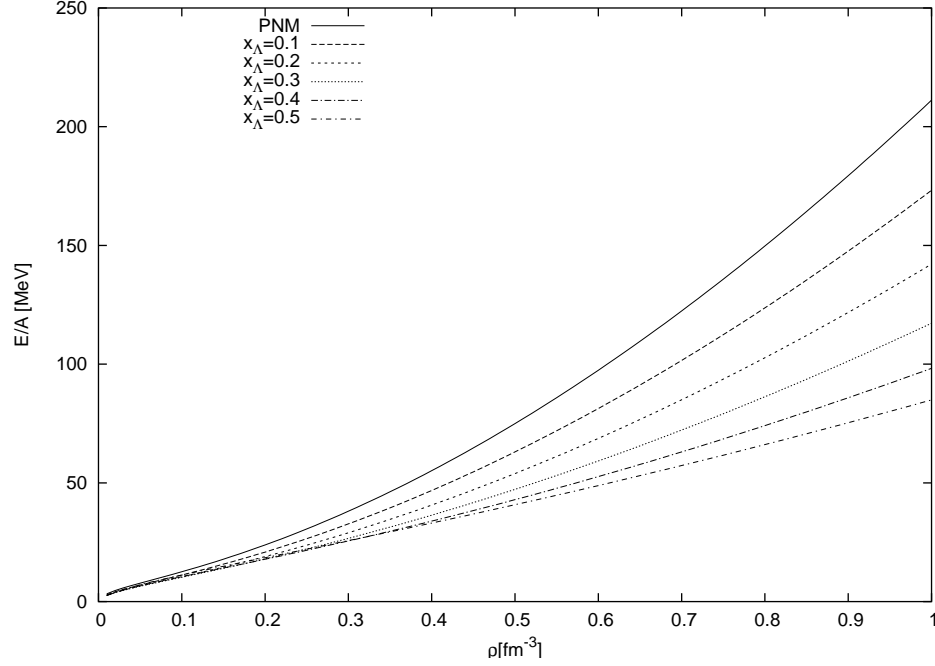


Figura 4.7: Andamento dell'energia di legame considerando attive le interazioni nucleone-nucleone, LG1, e nucleone- iperone, LNDE. La linea continua mostra l'andamento della PNM e le linee tratteggiate gli andamenti dell'energia di legame al variare della concentrazione degli iperoni.

dunque, solo una piccola diminuzione dell'energia di legame per barione.

Infine, passiamo ad esaminare l'energia di legame per barione in funzione della densità accendendo anche l'interazione tra gli iperoni, OHN1.

La figura 4.8 presenta il confronto tra la PNM, calcolata con l'interazione LG1, e l'energia di legame all'aumentare degli iperoni con le interazioni nucleone-nucleone, LG1, nucleone-iperone, LNDE, iperone-iperone, OHN1.

La figura mostra una maggiore diminuzione dell'energia rispetto al caso in cui è spenta l'interazione tra  $\Lambda - \Lambda$ . Questo fenomeno lo possiamo capire considerando le equazioni dell'EOS (3.72)-(3.75).

Rispetto al caso precedente l'EOS è composta anche dall'energia potenziale  $\Lambda - \Lambda$ , che sommata alle altre energie potenziali fa diminuire l'energia di legame totale del

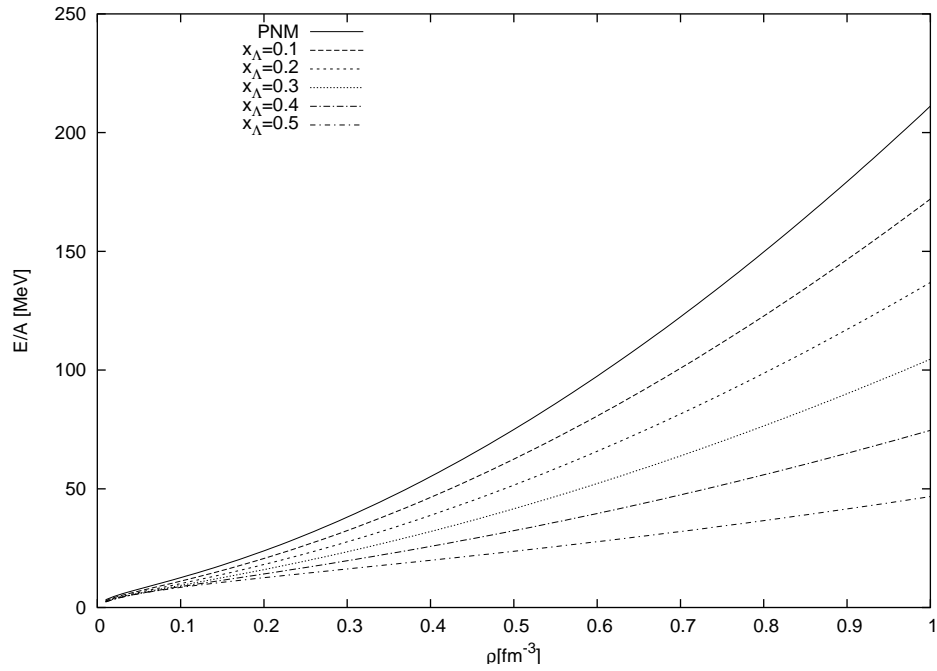


Figura 4.8: Energia di legame. I calcoli sono stati fatti con Hartee-Fock, considerando attive le interazioni nucleone-nucleone, LG1, nucleone-iperone, LNDE e iperone-iperone, OHN1. La figura mostra il confronto delle energie di legame all'aumentare degli iperoni (linee tratteggiate) e la pura materia nucleonica (linea continua).

sistema.

Per quantificare la diminuzione di energia di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni ne riportiamo i valori per una densità  $\rho = 1 fm^{-3}$  in tabella 4.11.

$x_\Lambda$	B/A [MeV]
0.1	172.2
0.2	136.9
0.3	104.6
0.4	74.6
0.5	46.7

Tabella 4.11: Valori dell'energia di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni ad una densità  $\rho = 1 fm^{-3}$  con le interazioni nucleone-nucleone, LG1, nucleone-iperone, LNDE, e iperone-iperone, OHN1.

Confrontando le tabelle 4.11 e 4.10 possiamo osservare come l'interazione  $\Lambda - \Lambda$  ha fatto diminuire in modo apprezzabile l'energia di legame. Per  $x_\Lambda = 0.5$  l'energia di legame è diminuita quasi del 50%.

Completiamo lo studio introducendo una piccola percentuale di protoni (Fig.4.9).

Abbiamo fissato la concentrazione dei protoni a  $x_p = 0.2$  e abbiamo variato gli iperoni. L'energia di legame per barioni ha mostrato che l'energia diminuisce all'aumentare degli iperoni anche in presenza dei protoni.

Questo comportamento lo possiamo interpretare considerando l'equazione dell'energia cinetica (3.72). La massa degli iperoni è maggiore rispetto a quella dei nucleoni, e stando al denominatore abbassa l'energia cinetica totale del sistema e conseguentemente l'EOS totale.

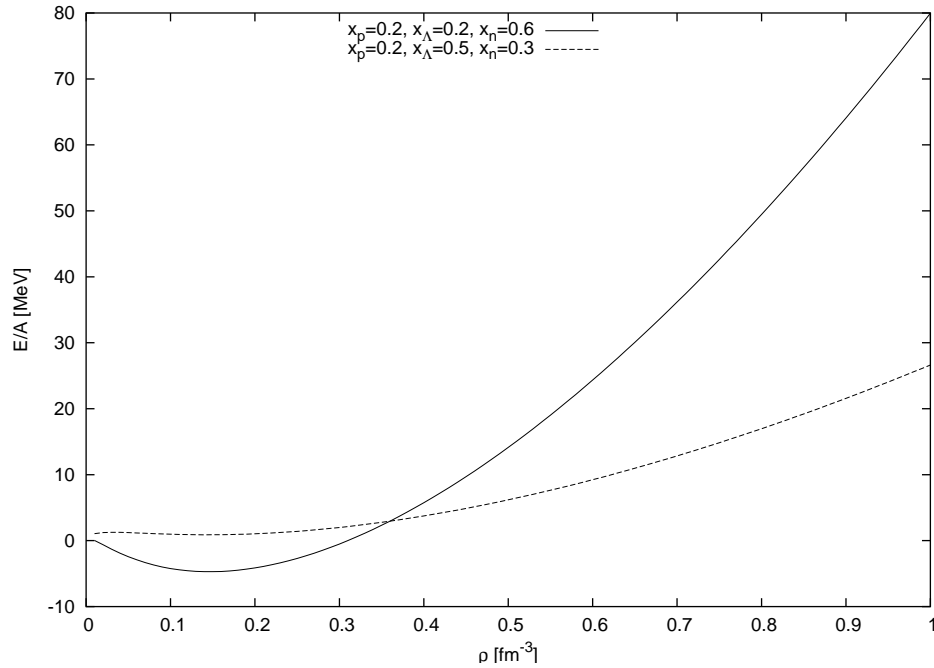


Figura 4.9: Equazione di Stato considerando accese tutte le interazioni tra i barioni, N-N, N- $\Lambda$ ,  $\Lambda$ - $\Lambda$ , e considerando il sistema formato da protoni, neutroni e iperoni. La figura mostra il confronto tra l'andamento della PNM (linea continua) e dell'energia di legame, con concentrazione di protoni fissata a 0.2, all'aumentare degli iperoni (linee tratteggiate).

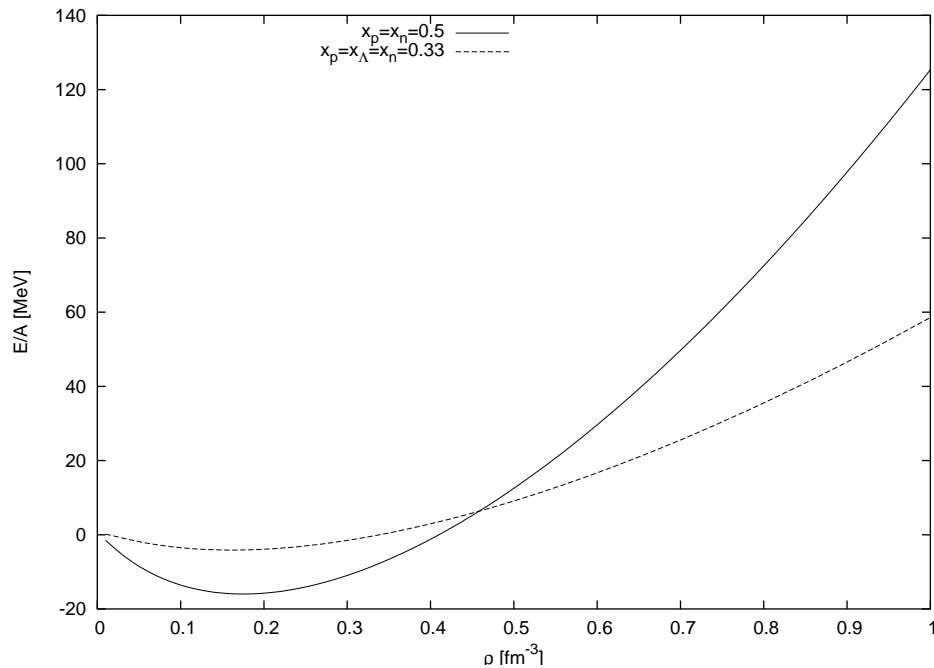


Figura 4.10: Energia di simmetria. La linea continua si riferisce al sistema nucleare simmetrico nucleonico, la linea tratteggiate al sistema nucleare simmetrico costituito da protoni, neutroni e iperoni.



$x_\Lambda$	B/A [MeV]
0.2	79.9
0.5	26.6

Tabella 4.12: Valori dell'energia di legame per barione all'aumentare della concentrazione degli iperoni ad una densità  $\rho = 1 fm^{-3}$ , con una concentrazione di protoni  $x_p = 0.2$  considerando attive le interazioni nucleone-nucleone, nucleone-iperone e iperone-iperone.

Abbiamo riportato i valori nella tabella 4.12.

Nella figura 4.10 abbiamo confrontato l'energia di simmetria del sistema nucleonico (linea continua) e del sistema barionico (linea tratteggiata), costituito da protoni, neutroni e iperoni. Per la densità di saturazione  $\rho = 0.16$  nel sistema simmetrico barionico abbiamo un'energia  $E = -4.13$  MeV, nel sistema nucleonico  $E = -16$  MeV. Questo comportamento si spiega considerando l'energia cinetica del sistema. Nel sistema barionico l'energia cinetica è composta anche dall'energia cinetica degli iperoni, che comporta un aumento dell'energia del sistema nucleare simmetrico.

### 4.3 Stelle di neutroni

Dall'analisi dei risultati delle sezioni precedenti possiamo asserire che la presenza degli iperoni abbassa sostanzialmente il valore dell'energia di legame della materia nucleare con protoni, neutroni e iperoni rispetto al caso di materia puramente neutronica.

A densità sufficientemente elevate il potenziale chimico dei neutroni cresce al punto da rendere possibile il decadimento delle particelle più energetiche in  $\Lambda$  attraverso processi deboli.

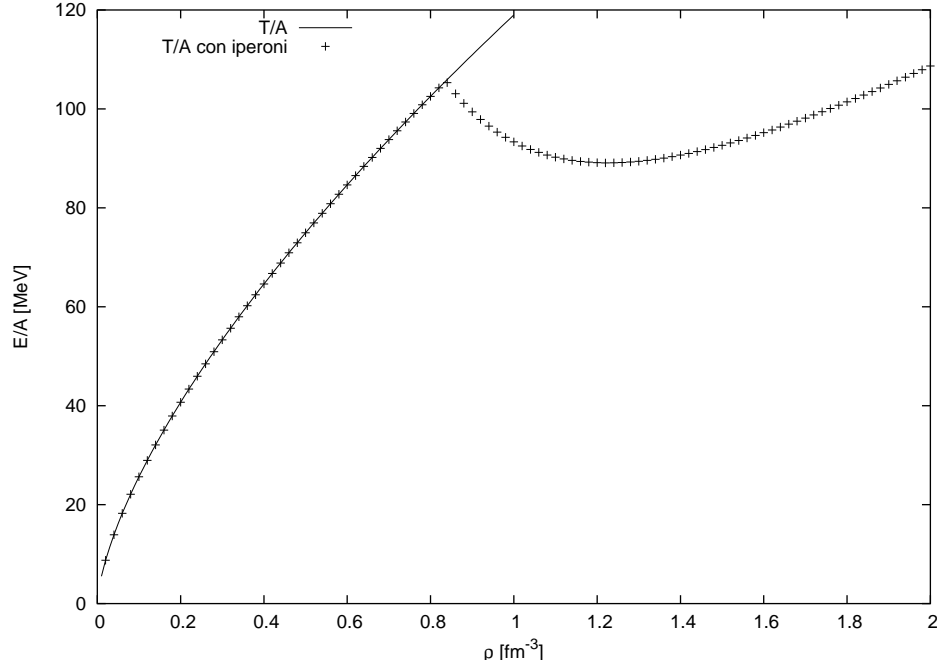


Figura 4.11: Confronto dell'energia cinetica del sistema senza iperoni e con l'apparizione di iperoni. La linea continua si riferisce al calcolo effettuato senza iperoni, la linea tratteggiata al calcolo con iperoni.

La densità critica per la produzione di  $\Lambda$  è:

$$\rho_{cr} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{[2m_N c^2 (m_\Lambda - m_N) c^2]^{1/2}}{\hbar c} \right\}^3 \quad (4.7)$$

dove  $m_N$  indica la massa media del nucleone.

Poichè  $m_\Lambda c^2 = 1115.68$  MeV si ha che  $\rho_{cr} = 0.837 \text{ fm}^{-3}$  che corrisponde a 5.23 volte la densità di saturazione della materia nucleare simmetrica.

In figura 4.11 riportiamo il confronto tra l'energia cinetica del sistema senza iperoni (linea continua) e l'energia cinetica relativa all'apparizione degli iperoni (punti). Si noti che per  $\rho = 0.8$  iniziano ad apparire gli iperoni.

Fissiamo l'attenzione sulla presenza del minimo nell'andamento relativo alla presenza degli iperoni. Per comprendere tale fenomeno, consideriamo l'equazione (3.72)

$\rho[fm^{-3}]$	T/A [MeV]
1.20	89.14
1.22	89.09
1.24	89.10

Tabella 4.13: Valori dell'energia cinetica del sistema con iperoni attorno al minimo.

dell'equazione di stato. Poichè la densità barionica compare al denominatore, l'energia cinetica per barione diminuisce con l'inserimento degli iperoni. All'aumentare della densità si producono più iperoni. Aumentando la concentrazione degli iperoni, aumenta l'energia cinetica di questi ultimi e di conseguenza aumenta l'energia cinetica totale del sistema nucleare barionico. Questo spiega perchè a  $\rho = 1.22 fm^{-3}$  si ha un minimo. In tabella 4.13 riportiamo i valori dell'energia cinetica attorno al minimo.

In figura 4.12 riportiamo i grafici dell'energia di legame per barione attivando le varie interazioni.

Analizziamo il contributo dell'interazione nucleone-nucleone, LG1, all'energia. La differenza tra PNM (linea continua) e N-N (linea a tratti larghi) sta nella presenza degli iperoni, nel secondo caso, che contribuiscono ad abbassare l'energia cinetica del sistema e giustifica la diminuzione dell'energia di legame per barione.

Il contributo dell'interazione nucleone-iperone, LNDE (linea a tratti stretti), all'energia non altera di molto l'andamento ottenuto precedentemente con la sola interazione N-N.

Risultati diversi si ottengono con l'attivazione dell'interazione iperone-iperone, OHN1 (linea punteggiata). In questo caso l'azione dell'interazione sulla materia nucleare provoca un abbassamento nell'andamento dell'energia di legame.

Possiamo, dunque, dedurre che nell'EOS di materia nucleare barionica l'interazione  $\Lambda - \Lambda$  produce effetti rilevanti e l'incertezza sulla costruzione di tale interazione

genera un'incertezza nel calcolo dell'energia di legame per barione.

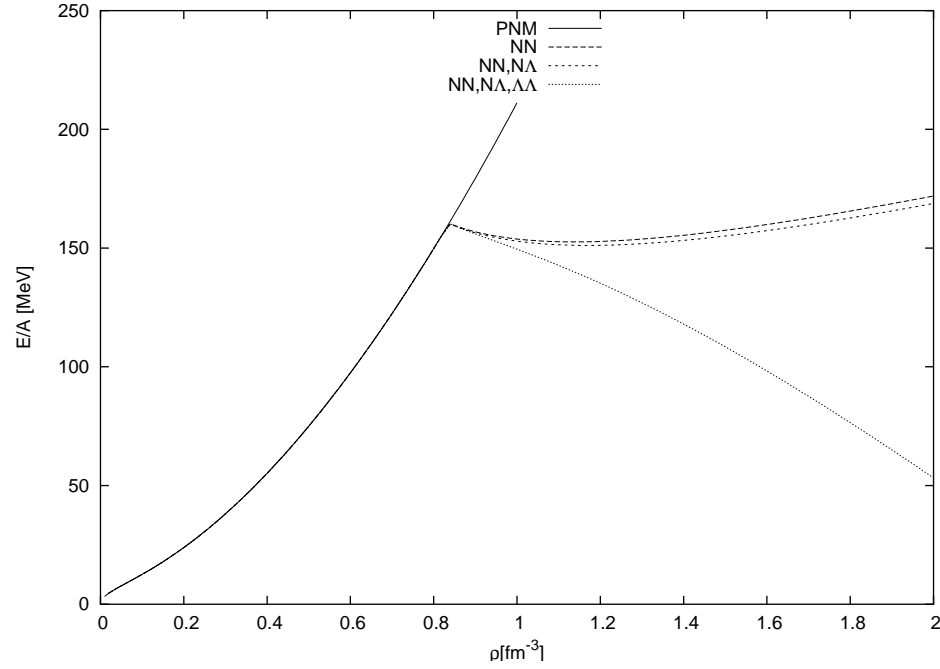


Figura 4.12: Condizioni di equilibrio per l'apparizione di iperoni per interazioni N-N, N- $\Lambda$ ,  $\Lambda - \Lambda$ . Alla densità  $\rho = 0.837 \text{ fm}^{-3}$  si ha la produzione degli iperoni, perchè il potenziale chimico dei neutroni cresce al punto da rendere possibile il decadimento delle particelle. La linea continua è relativa alla pura materia neutronica PNM, le linee a tratti indicano i risultati ottenuti quando varie parti dell'interazione tra barioni sono attive nella condizione di equilibrio per l'apparizione degli iperoni. La linea a tratti larghi si riferisce al contributo dell'interazione N-N, LG1, quella a tratti più stretti ai contributi delle interazioni N-N e N- $\Lambda$ , LNDE e la linea punteggiata si riferisce al calcolo ottenuto considerando attiva anche l'interazione  $\Lambda - \Lambda$ , OHN1.

# Capitolo 5

## Conclusioni

Nel nostro lavoro di tesi abbiamo ricavato l'equazione dell'energia di legame di materia nucleare, infinita, costituita da protoni, neutroni e iperoni, in funzione della densità barionica.

Abbiamo applicato tale equazione nei calcoli Hartree-Fock per studiare le proprietà dell'energia di legame.

Abbiamo utilizzato, nei calcoli, interazioni effettive e non microscopiche in quanto queste avendo un core fortemente repulsivo renderebbero instabile la soluzione Hartree-Fock.

In particolare, abbiamo utilizzato quattro interazioni per il sistema nucleonico: D1S, M3Y-P2, D1N e LG1, e abbiamo ottenuto risultati compatibili con le evidenze sperimentali, riproducendo bene le proprietà della materia nucleonica: punto di saturazione, compressibilità e energia di simmetria. Abbiamo, inoltre, analizzato le curve dell'energia di legame per barione al variare della concentrazione di protoni, neutroni e iperoni.

Abbiamo studiato le azioni delle interazioni nucleone-iperone, LNDE, e iperone-iperone, OHN1, al variare delle concentrazioni di protoni, neutroni e iperoni.

Infine, abbiamo studiato le stelle di neutroni.

Abbiamo analizzato il ruolo delle interazioni nucleone-nucleone, nucleone-iperone e

iperone-iperone sull'equazione di stato alle alte densità barioniche, dove il potenziale chimico dei neutroni cresce al punto da rendere possibile il decadimento delle particelle più energetiche in iperoni attraverso processi deboli.

L'attivazione dell'interazione  $N-N$  abbassa l'energia di legame, rispetto alla PNM, a causa dell'aumento dell'energia cinetica dovuto all'inserimento degli iperoni.

L'accensione dell'interazione  $N - \Lambda$  non varia molto l'andamento dell'energia di legame.

Con l'attivazione dell'interazione  $\Lambda - \Lambda$  abbiamo ottenuto un'abbassamento dell'energia.

Questo comportamento anomalo è dovuto alla costruzione dell'interazione iperone-iperone. Mentre la costruzione delle interazioni nucleone-nucleone deve accordarsi con valori empirici, le interazioni nucleone-iperone e iperone-iperone non hanno riscontri fenomenologici con cui confrontarsi.

Con uno studio più approfondito delle interazioni nucleone-iperone e iperone-iperone e, quindi, una migliore costruzione delle stesse si potrà in futuro trovare una buona equazione di stato per materia nucleare, infinita, formata da protoni, neutroni e iperoni.

Il passo successivo sarà quello di stimare la massa limite di una stella di neutroni.

# Appendice A

## Matrici di Pauli

Le matrici di Pauli sono un insieme di matrici  $2 \times 2$  complesse, hermitiane e unitarie.

Generalmente sono indicate con  $\sigma_i$  e la loro rappresentazione è

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Le matrici soddisfano la seguente identità:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (\text{A.2})$$

dove  $\delta_{ij}$  è la delta di Kronecker e  $\epsilon_{ijk}$  il simbolo di Levi-Civita.

Le matrici di Pauli godono della seguente proprietà:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}_i(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_j(2))^2 &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i(1) \sigma_i(2) \sum_{j=1}^3 \sigma_j(1) \sigma_j(2) \\ &= \sum_{ij} (\sigma_i(1) \sigma_j(1)) (\sigma_i(2) \sigma_j(2)) \\ &= \sum_{ij} \left[ \delta_{ij} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k(1) \right] \left[ \delta_{ij} + i \sum_{k'} \epsilon_{ijk'} \sigma_{k'}(2) \right] \\ &= \sum_{ij} \delta_{ij} - \sum_{ijkk'} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk'} \sigma_k(1) \sigma_{k'}(2) = 3 - 2\boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$



L'operatore scambio di spin, che scambia le coordinate di spin, è definito come:

$$P_{\sigma}(1, 2) = \frac{1}{2}[1 + \sigma(1) \cdot \sigma(2)] \quad (\text{A.4})$$



## Appendice B

### Proprietà delle matrici S

In questa appendice dimostreremo alcune proprietà delle matrici S.

La prima proprietà riguarda il quadrato del prodotto scalare di due matrici S.

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)\right)^2 &= \sum_{i(1-3)} S_i(1)S_i(2) \sum_{j(1-3)} S_j(1)S_j(2) \\
&+ \sum_{i(4-6)} S_i(1)S_i(2) \sum_{j(4-6)} S_j(1)S_j(2) \\
&+ \sum_{i(7-9)} S_i(1)S_i(2) \sum_{j(7-9)} S_j(1)S_j(2) \\
&= \sum_{ij(1-3)} (S_i(1)S_j(1))(S_i(2)S_j(2)) \\
&+ \sum_{ij(4-6)} (S_i(1)S_j(1))(S_i(2)S_j(2)) \\
&+ \sum_{ij(7-9)} (S_i(1)S_j(1))(S_i(2)S_j(2)) \\
&= \sum_{ij(1-3)} \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_1 + i \sum_{k=(1-3)} \epsilon_{ijk} S_k(1) \right] \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_1 + i \sum_{k'=(1-3)} \epsilon_{ijk'} S_{k'}(2) \right] \\
&+ \sum_{ij(4-6)} \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_2 + i \sum_k \epsilon_{(i-3)(j-3)(k+3)} S_k(1) \right] \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_2 + i \sum_{k'} \epsilon_{(i-3)(j-3)(k'+3)} S_{k'}(2) \right] \\
&+ \sum_{ij(7-9)} \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_3 + i \sum_k \epsilon_{(i-6)(j-6)(k+6)} S_k(1) \right] \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_3 + i \sum_{k'} \epsilon_{(i-6)(j-6)(k'+6)} S_{k'}(2) \right] \\
&= \sum_{ij(1-3)} \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_1 - \sum_{kk'=(1-3)} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk'} S_k(1) S_{k'}(2) \right] \\
&+ \sum_{ij(4-6)} \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_2 - \sum_{kk'=(4-6)} \epsilon_{(i-3)(j-3)(k+3)} \epsilon_{(i-3)(j-3)(k'+3)} S_k(1) S_{k'}(2) \right] \\
&+ \sum_{ij(7-9)} \left[ \delta_{ij} \mathcal{I}_3 - \sum_{kk'=(7-9)} \epsilon_{(i-6)(j-6)(k+6)} \epsilon_{(i-6)(j-6)(k'+6)} S_k(1) S_{k'}(2) \right] \\
&= 3\mathcal{I}_1 + 3\mathcal{I}_2 + 3\mathcal{I}_3 - 2\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)
\end{aligned}$$

dato che  $\epsilon_{ijk}ijk' = \delta_{kk'}$  e le  $\mathcal{I}$  sono state definite in eq. (2.8)

Un'altra proprietà si riferisce all'applicazione dell'operatore di scambio  $P_Y(1, 2)$ , eq. (2.15) sulle particelle. Definiamo gli operatori di innalzamento e abbassamento

$$\begin{aligned}
 S_+^I &= \frac{1}{2}(S_1 + iS_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & S_-^I &= \frac{1}{2}(S_1 - iS_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 S_+^U &= \frac{1}{2}(S_4 + iS_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & S_-^U &= \frac{1}{2}(S_4 - iS_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 S_+^V &= \frac{1}{2}(S_7 + iS_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & S_-^V &= \frac{1}{2}(S_7 - iS_8) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Le sole operazioni non nulle sono:

$$\begin{aligned}
 S_+^I Y_2 &= Y_1 & ; & & S_-^I Y_1 &= Y_2 \\
 S_+^U Y_3 &= Y_1 & ; & & S_-^U Y_1 &= Y_3 \\
 S_+^V Y_3 &= Y_2 & ; & & S_-^V Y_2 &= Y_3
 \end{aligned}$$

Ovviamente:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= S_+^I + S_-^I & S_2 &= i(S_-^I - S_+^I) \\
 S_4 &= S_+^U + S_-^U & S_5 &= i(S_-^U - S_+^U) \\
 S_7 &= S_+^V + S_-^V & S_8 &= i(S_-^V - S_+^V)
 \end{aligned}$$

Si ha che:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2) &= \sum_{i=1,9} S_i(1) \cdot S_i(2) = \\
&= 2 \left( S_+^I(1) S_-^I(2) + S_-^I(1) S_+^I(2) \right) + S_3(1) S_3(2) \\
&+ 2 \left( S_+^U(1) S_-^U(2) + S_-^U(1) S_+^U(2) \right) + S_6(1) S_6(2) \\
&+ 2 \left( S_+^V(1) S_-^V(2) + S_-^V(1) S_+^V(2) \right) + S_9(1) S_9(2)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Gli apici I, U e V stanno a indicare rispettivamente I-spin che cambia il doppietto di SU(2) protoni e neutroni, U-spin che cambia il doppietto di SU(2) protoni e iperoni e V-spin che cambia il doppietto di SU(2) neutroni e iperoni.

Applichiamo l'operatore  $P_Y(1, 2) = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))$  a  $Y(1)Y(2)$ , e distinguiamo due casi:

Caso 1.  $Y(1)=Y(2)$

tutti gli operatori contenenti  $S_+$  e  $S_-$  danno contributo nullo. Gli altri operatori sono così costruiti:

$$\begin{aligned}
&\left[ S_3(1) S_3(2) + S_6(1) S_6(2) + S_9(1) S_9(2) \right] Y_i(1) Y_i(2) \\
&= Y_i(1) Y_i(2)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Quindi:

$$P_Y(1, 2) Y(1) Y(2) = \frac{1}{2} (1 + 1) Y(1) Y(2) \tag{B.5}$$

Caso  $Y(1) \neq Y(2)$

Caso  $p, n$

$$\begin{aligned}
P_Y(i, j)Y_1(i)Y_2(j) &= \frac{1}{2} \left[ \mathbb{I} + \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) \right] Y_1(i)Y_2(j) = \\
&= \frac{1}{2} \left[ Y_1(i)Y_2(j) + 2S_-^I(1)S_+^I(2)Y_1(i)Y_2(j) + S_3(i)Y_1(i)S_3(j)Y_2(j) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ Y_1(i)Y_2(j) + 2Y_2(i)Y_1(j) - Y_1(i)Y_2(j) \right] = Y_2(i)Y_1(j)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo considerato i soli termini non nulli.

Caso  $p, \Lambda$

$$\begin{aligned}
P_Y(i, j)Y_1(i)Y_3(j) &= \frac{1}{2} \left[ \mathbb{I} + \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) \right] Y_1(i)Y_3(j) = \\
&= \frac{1}{2} \left[ Y_1(i)Y_3(j) + 2S_-^U(1)S_+^U(2)Y_1(i)Y_3(j) + S_6(i)Y_1(i)S_6(j)Y_3(j) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ Y_1(i)Y_3(j) + 2Y_3(i)Y_1(j) - Y_1(i)Y_3(j) \right] = Y_3(i)Y_1(j)
\end{aligned}$$

Caso  $n, \Lambda$

$$\begin{aligned}
P_Y(i, j)Y_2(i)Y_3(j) &= \frac{1}{2} \left[ \mathbb{I} + \mathbf{S}(i) \cdot \mathbf{S}(j) \right] Y_2(i)Y_3(j) = \\
&= \frac{1}{2} \left[ Y_2(i)Y_3(j) + 2S_-^V(1)S_+^V(2)Y_2(i)Y_3(j) + S_9(i)Y_2(i)S_9(j)Y_3(j) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ Y_2(i)Y_3(j) + 2Y_3(i)Y_2(j) - Y_2(i)Y_3(j) \right] = Y_3(i)Y_2(j)
\end{aligned}$$

E' verificato, pertanto, che l'operatore  $P_Y$  scambia il numero quantico di sapore.



# Appendice C

## Commutazione degli operatori

Calcoliamo le proprietà di commutazione dell'operatore che seleziona nucleoni  $\Pi_N$ , operatore di scambio di sapore.

$$\begin{aligned} & \Pi_N(1)\Pi_N(2)P_Y(1,2)|1 > |2 > \\ = & \frac{1}{3}(2\mathbb{I}(1) + S_6(1) + S_9(1))\frac{1}{3}(2\mathbb{I}(2) + S_6(2) + S_9(2))\frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2))|1 > |2 > \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Valutiamo l'azione di  $S_6$  e  $S_9$  sul prodotto scalare  $(1) \cdot (2)$ .

$$\begin{aligned} & S_6(1)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)|p > = S_6S_3|p > \\ = & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & S_3S_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$S_9$  sullo stato di protone è nullo.



$$\begin{aligned}
& S_9(1)\mathbf{S}(1) \cdot \mathbf{S}(2)|n > = S_9 S_3 |n > \\
& = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& S_3 S_9 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Questi due risultati indicano che l'azione di  $S_6$  e  $S_9$  commutano con  $(1) \cdot (2)$ , quindi gli operatori  $\Pi_N$  commutano con  $P_Y$ .

Un calcolo analogo può essere fatto per  $\Pi_\Lambda$

# Appendice D

## Listato fortran

E' riportato in questa appendice un listato del programma utilizzato per il calcolo.

```
C-----
C  PROGRAM FOR ASYMMETRIC NUCLEAR MATTER WITH HYPERON
C  WITH DENSITY DEPENDENT TERM
C
C-----
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C
      COMMON/CONST/PI,HBC,APMASS,ANMASS,ALMASS
      COMMON/CONST2/HPKIN,HNKIN,HLKIN,UT,UPI2,UPI3,DU
C
      OPEN(UNIT=5,FILE='hf_hyp.inp',STATUS='OLD')
      OPEN(UNIT=6,FILE='hf_hyp.out',STATUS='unknown')
C
      PI=DACOS(-1.D0)
      HBC=197.32858D+00
      APMASS=938.2796D+00
```

```
      ANMASS=939.5739D+00
      ALMASS=1115.63D+00
C
      UT=1.0/3.0
      UL=3.0/5.0
      UPI2=PI*PI
      UPI3=1.0/(PI*PI*PI)
      DU=2.0
C
      HTMP=HBC*HBC/(2.0*APMASS)
      HTMN=HBC*HBC/(2.0*ANMASS)
      HTML=HBC*HBC/(2.0*ALMASS)
      HPKIN=HTMP*UL
      HNKIN=HTMN*UL
      HLKIN=HTML*UL
C
      CALL INPUT
      CALL FORCE
      CALL ENERGY
C
      STOP
      END
C-----
      SUBROUTINE INPUT
C-----
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      CHARACTER*80 FILENN,FILENL,FILELL
C
```

PARAMETER (NCH=10,MC=8,NQ=400,NP=300)

C

COMMON/NNFORCE/A(NCH,MC),B(NCH,MC),NC(NCH),NCHAN,IREAD

COMMON/RRDAT/RCUT,NPOINT

COMMON/DDEN/ALPHA,NDELTA

COMMON/FILE/FILENN,FILENL,FILELL

COMMON/DENS/RHOMAX,NRHO

COMMON/ASY/XLMIN,XLMAX,NXL

COMMON/ASY2/XPMIN,XPMAX,NXP

COMMON/OPTION/IEXNN,IEXNL,IEXLL

COMMON/PRINT/IPRINT

COMMON/DD/VDD,VIDD

C

READ(5,99)

C

READ(5,99)

READ(5,'(A)') FILENN

WRITE(6,'(A)') FILENN

C

READ(5,99)

READ(5,'(A)') FILENL

WRITE(6,'(A)') FILENL

C

READ(5,99)

READ(5,'(A)') FILELL

WRITE(6,'(A)') FILELL

C

READ(5,99)

```
      READ(5,*)    IPRINT
      WRITE(6,2001) IPRINT

C

      READ(5,99)

      READ(5,*) RCUT,NPOINT
      WRITE(6,2000) RCUT,NPOINT

C

      READ(5,99)

      READ(5,*) RHOMAX,NRHO
      WRITE(6,2000) RHOMAX,NRHO

C

      READ(5,99)

      READ(5,*) XPMIN,XPMAX,NXP
      WRITE(6,2003) XPMIN,XPMAX,NXP

C

      READ(5,99)

      READ(5,*) XLMIN,XLMAX,NXL
      WRITE(6,2003) XLMIN,XLMAX,NXL

C

      READ(5,99)

      READ(5,*) IEXNN,IEXNL,IEXLL
      WRITE(6,2001) IEXNN,IEXNL,IEXLL

C

      READ(5,99)

      READ(5,*) ALPHA,NDELTA
      WRITE(6,2000) ALPHA,NDELTA

C

      READ(5,99)
```

```

      READ(5,*) VDD,VIDD
      WRITE(6,2002) VDD,VIDD
C
      WRITE(6,4000)
C
      RETURN
C
      99 FORMAT(1X)
      100 FORMAT(2X,I5,2X,F10.5)
      101 FORMAT(2X,10(I4,1X))
      102 FORMAT(2X,I4)
      103 FORMAT(2X,F10.5)
      105 FORMAT(2X,2(1PE12.5,2X))
      1000 FORMAT(2X,'***** INPUT *****')
      2000 FORMAT(1X,5(F10.5,1X,I4))
      2001 FORMAT(4(2X,I4))
      2002 FORMAT(2X,2(1PE12.5,2X))
      2003 FORMAT(2X,2(F10.5,1X),1X,I4)
      3001 FORMAT(/,2X,'*** ERROR IN THE INPUT ***',/,2X,'THE NUMBER OF',
        ^' COEFFICIENTS IN THE CHANNEL ',I3,/,2X,' IS ',I4,
        ^' AND SHOULD BE .LE. THEN ',I4)
      4000 FORMAT(2X,'***** END INPUT *****',/)
C
      END
C-----
      SUBROUTINE FORCE
C-----
C THIS SUBROUTINE CALCULATES THE INTERACTION IN R SPACE

```

C

C THE CHANNELS ARE MAPPED THE FOLLOWING MANNER

C

C     N CHANNEL       FORCE

C       1            SCALAR

C       2            ISOSPIN

C       3            SPIN

C       4            SPIN-ISOSPIN

C       5            TENSOR

C       6            TENSOR-ISOSPIN

C       7            SCALAR DENSITY DEPENDENCE

C       8            ISOSPIN DENSITY DEPENDENCE

C

C-----

C

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

CHARACTER\*80 FILENN,FILENL,FILELL

C

PARAMETER (NCH=10,MC=8,NP=300,LM=20)

C

COMMON/NNFORCE/A(NCH,MC),B(NCH,MC),NC(NCH),NCHAN,IREAD

COMMON/RRDAT/RCUT,NPOINT

COMMON/GAFOR/VGAUSSA(NCH,NP),VGAUSSB(NCH,NP),VGAUSSC(NCH,NP)

COMMON/FILE/FILENN,FILENL,FILELL

C

DIMENSION RREAD(10\*NP),VVRR(10\*NP)

DIMENSION R(NP),FR(NP)

C

```

DR=RCUT/FLOAT(NPOINT)
DO IR=1,NPOINT
  R(IR)=DR*FLOAT(IR-1)
ENDDO

C

DO IC=1,NCH
DO IR=1,NPOINT
  VGAUSSA(IC,IR)=0.0
  VGAUSSB(IC,IR)=0.0
  VGAUSSC(IC,IR)=0.0
ENDDO
ENDDO

C

C READ-IN N-N FORCE IN R SPACE
C
WRITE(6,2000) FILENN
OPEN(UNIT=12,FILE=FILENN,STATUS='OLD')
READ(12,99)
READ(12,*) NCCHH,NRFAKE
READ(12,*) (RREAD(IR),IR=1,NRFAKE)
DO IC=1,NCCHH
  READ(12,*) (VVRR(IR),IR=1,NRFAKE)
  CALL INTERPOL(RREAD,VVRR,NRFAKE,R,FR,NPOINT,2)
  DO IR=1,NPOINT
    VGAUSSA(IC,IR)=FR(IR)
  ENDDO
ENDDO

C

```



```
CLOSE(12)

C
C READ-IN N-L FORCE IN R SPACE
C

write(6,2001) FILENL
OPEN(UNIT=13,FILE=FILENL,STATUS='OLD')
READ(13,99)
READ(13,*) NCCHH,NRFAKE
READ(13,*) (RREAD(IR),IR=1,NRFAKE)
DO IC=1,NCCHH
  READ(13,*) (VVRR(IR),IR=1,NRFAKE)
  CALL INTERPOL(RREAD,VVRR,NRFAKE,R,FR,NPOINT,2)
  DO IR=1,NPOINT
    VGAUSSB(IC,IR)=FR(IR)
  ENDDO
ENDDO

C
CLOSE(13)

C
C READ-IN L-L FORCE IN R SPACE
C

write(6,2002) FILELL
OPEN(UNIT=14,FILE=FILELL,STATUS='OLD')
READ(14,99)
READ(14,*) NCCHH,NRFAKE
READ(14,*) (RREAD(IR),IR=1,NRFAKE)
DO IC=1,NCCHH
  READ(14,*) (VVRR(IR),IR=1,NRFAKE)
```

```

      CALL INTERPOL(RREAD,VVRR,NRFAKE,R,FR,NPOINT,2)

      DO IR=1,NPOINT
        VGAUSSC(IC,IR)=FR(IR)
      ENDDO

      ENDDO

C

      CLOSE(14)

      NCHAN=NCCHH

C

      RETURN

99   FORMAT(1X)

1000 FORMAT(1X,F7.3,6(1X,1PE10.3))

1001 FORMAT(/,6X,'R',4X,'FORCE',/,
~ 11X,'V_C',8X,'V_TAU',6X,'V_S',7X,'V_S_TAU',6X,'V(RHO)',3X,
~'V(RHO)_TAU')

2000 FORMAT(/,2X,'N-N INTERACTION FROM FILE --> ',A)

2001 FORMAT(/,2X,'N-LAMBDA INTERACTION FROM FILE --> ',A)

2002 FORMAT(/,2X,'LAMBDA-LAMBDA INTERACTION FROM FILE --> ',A)

      END

C-----

      SUBROUTINE ENERGY

C-----

C

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

C

      PARAMETER(NCH=10,NP=300,MC=8,NDEN=100)

C

      COMMON/NNFORCE/A(NCH,MC),B(NCH,MC),NC(NCH),NCHAN,IREAD

```

```

COMMON/RRDAT/RCUT,NPOINT
COMMON/GAFOR/VGAUSSA(NCH,NP),VGAUSSB(NCH,NP),VGAUSSC(NCH,NP)
COMMON/CONST/PI,HBC,APMASS,ANMASS,ALMASS
COMMON/CONST2/HPKIN,HNKIN,HLKIN,UT,UPI2,UPI3,DU
COMMON/DDEN/ALPHA,NDELTA
COMMON/DENS/RHOMAX,NRHO
COMMON/ASY/XLMIN,XLMAX,NXL
COMMON/ASY2/XPMIN,XPMAX,NXP
COMMON/OPTION/IEXNN,IEXNL,IEXMLL
COMMON/PRINT/IPRINT
COMMON/DD/VDD,VIDD

```

C

```

      DIMENSION R(NP),W1A(NP),W2A(NP),W9A(NP),W10A(NP),W1B(NP),
^W2B(NP),W1C(NP),W2C(NP)

```

C

```

      DIMENSION RRHO(NDEN),TKINP(NDEN),TKINN(NDEN),TKINL(NDEN)
^
^      ,DIRNN(NDEN),DIRNL(NDEN),DIRLL(NDEN)
^
^      ,EXCNN(NDEN),EXCNL(NDEN),EXCLL(NDEN)

```

C

```

      DR=RCUT/FLOAT(NPOINT)

```

C

```

      IF(NXL.LT.2) NXL=2
      IF(NXP.LT.2) NXP=2
      DXL=(XLMAX-XLMIN)/(NXL-1)
      DXP=(XPMAX-XPMIN)/(NXP-1)
      DRHO=RHOMAX/FLOAT(NRHO)

```

C

```

      IF(NDELTA.EQ.1) THEN

```

C

C ----- DIRECT INTEGRAL -----

C

```

      DO I=1,NPOINT
        R(I)=DR*FLOAT(I-1)
        W1A(I)=VGAUSSA(1,I)*R(I)*R(I)
        W2A(I)=VGAUSSA(2,I)*R(I)*R(I)
        W9A(I)=VGAUSSA(7,I)*R(I)*R(I)
        W10A(I)=VGAUSSA(8,I)*R(I)*R(I)
      ENDDO
      VINTA1=SIMP1(1,NPOINT,DR,W1A)
      VINTA9=SIMP1(1,NPOINT,DR,W9A)
      VINTA2=SIMP1(1,NPOINT,DR,W2A)
      VINTA10=SIMP1(1,NPOINT,DR,W10A)
      WRITE(6,1001) VINTA1,VINTA9,VINTA2,VINTA10

```

C

```

      DO I=1,NPOINT
        R(I)=DR*FLOAT(I-1)
        W1B(I)=VGAUSSB(1,I)*R(I)*R(I)
        W2B(I)=VGAUSSB(2,I)*R(I)*R(I)
      ENDDO
      VINTB1=SIMP1(1,NPOINT,DR,W1B)
      VINTB2=SIMP1(1,NPOINT,DR,W2B)
      WRITE(6,1002)VINTB1,VINTB2

```

C

```

      DO I=1,NPOINT
        R(I)=DR*FLOAT(I-1)
        W1C(I)=VGAUSSC(1,I)*R(I)*R(I)

```

```

      W2C(I)=VGAUSSC(2,I)*R(I)*R(I)
      ENDDO
      VINTC1=SIMP1(1,NPOINT,DR,W1C)
      VINTC2=SIMP1(1,NPOINT,DR,W2C)
      WRITE(6,1003)VINTC1,VINTC2
C
C ----- ENERGY CALCULATION -----
C
      IF(DXL.LT.0.001) NXL=1
      IF(DXP.LT.0.001) NXP=1
      DO NL=0,NXL-1
        XL=XLMIN+DXL*FLOAT(NL)
        DO NX=0,NXP-1
          XP=XPMIN+DXP*FLOAT(NX)
          XLP=XL+XP
          IF(XLP.LE.1.0) THEN
            XN=1.0-XP-XL
C
C          WRITE(6,1004) XP,XN,XL
C
          DO NR=1,NRHO
            RRHO(NR)=DRHO*FLOAT(NR)
            RHO=RRHO(NR)
C
C            RHOP=XP*RHO
            RHOL=XL*RHO
            RHON=XN*RHO
C
C

```



```

      W1A(I)=0.0
      ENDDO
      ELSEIF( IEXNN.EQ.1) THEN
      DO I=1,NPOINT
      XPP=AKP*R(I)
      XNN=AKN*R(I)
      XLL=AKL*R(I)
      B1P=BJAY12(XPP)
      B1N=BJAY12(XNN)
      B1L=BJAY12(XLL)
C
      W1A(I)=(VGAUSSA(1,I)+FRHO*VGAUSSA(7,I)
~          +3.0*(VGAUSSA(2,I)+FRHO*VGAUSSA(8,I))
~          +3.0*VGAUSSA(3,I)+9.0*VGAUSSA(4,I))*
~          ((AKP2*B1P+AKN2*B1N)**DU)
~          +
~          (VGAUSSA(1,I)+FRHO*VGAUSSA(7,I)-
~          VGAUSSA(2,I)-FRHO*VGAUSSA(8,I)+
~          3.0*VGAUSSA(3,I)-3.0*VGAUSSA(4,I))*
~          ((AKP2*B1P-AKN2*B1N)**DU)
C
      ENDDO
      ENDIF
C
C NL-EXCH
C
      IF( IEXNL.EQ.0) THEN
      DO I=1,NPOINT

```

```

        W1B(I)=0.0
        ENDDO
ELSEIF( IEXNL.EQ.1) THEN
        DO I=1,NPOINT
                XPP=AKP*R(I)
                XNN=AKN*R(I)
                XLL=AKL*R(I)
                B1P=BJAY12(XPP)
                B1N=BJAY12(XNN)
                B1L=BJAY12(XLL)
C
        W1B(I)=(VGAUSSB(1,I)+3.0*VGAUSSB(2,I)+
~          3.0*VGAUSSB(3,I)+9.0*VGAUSSB(4,I))*
~          (AKP2*B1P*AKL2*B1L+AKN2*B1N*AKL2*B1L)
~          -
~          (VGAUSSB(1,I)-VGAUSSB(2,I)+
~          3.0*VGAUSSB(3,I)-3.0*VGAUSSB(4,I))*
~          (AKP2*B1P*AKL2*B1L+AKN2*B1N*AKL2*B1L)
        ENDDO
ENDIF
C
C LL-EXCH
C
        IF( IEXLL.EQ.0) THEN
                DO I=1,NPOINT
                        W1C(I)=0.0
                ENDDO
        ELSEIF( IEXLL.EQ.1) THEN

```



```

DO I=1,NPOINT
  XPP=AKP*R(I)
  XNN=AKN*R(I)
  XLL=AKL*R(I)
  B1P=BJAY12(XPP)
  B1N=BJAY12(XNN)
  B1L=BJAY12(XLL)

```

C

```

      W1C(I)=(VGAUSSC(1,I)+6.0*VGAUSSB(2,I)+
~          3.0*VGAUSSC(3,I)+18.0*VGAUSSC(4,I))*
~          (AKL2*AKL2*B1L*B1L)
~          +
~          DU*(VGAUSSC(1,I)-VGAUSSC(2,I)+
~          3.*VGAUSSC(3,I)-3.0*VGAUSSC(4,I))*
~          (AKL2*AKL2*B1L*B1L)
      ENDDO
    ENDIF

```

C

```

EXCNN(NR)=-0.5*SIMP1(1,NPOINT,DR,W1A)*UPI3/RHO
EXCNL(NR)=-0.5*SIMP1(1,NPOINT,DR,W1B)*UPI3/RHO
EXCLL(NR)=-0.5*SIMP1(1,NPOINT,DR,W1C)*UPI3/RHO

```

C

```

      TKIN=TKINP(NR)+TKINN(NR)+TKINL(NR)
      ENER=TKIN+DIRECT+EXCH
    ENDDO

```

C

```

IF(IPRINT.EQ.1) THEN
  WRITE(6,1005)

```

```

DO NR=1,NRHO
  WRITE(6,1000) RRHO(NR),TKINP(NR),TKINN(NR),TKINL(NR)
ENDDO
WRITE(6,1006)
DO NR=1,NRHO
  WRITE(6,1000) RRHO(NR),DIRNN(NR),DIRNL(NR),DIRLL(NR)
ENDDO
WRITE(6,1007)
DO NR=1,NRHO
  WRITE(6,1000) RRHO(NR),EXCNN(NR),EXCNL(NR),EXCLL(NR)
ENDDO
ENDIF
WRITE(6,1008)
DO NR=1,NRHO
  ENENN=TKINP(NR)+TKINN(NR)+DIRNN(NR)+EXCNN(NR)
  ENELL=TKINL(NR)+DIRNL(NR)+DIRLL(NR)+EXCNL(NR)+EXCLL(NR)
  ENER=ENENN+ENELL
  WRITE(6,1000) RRHO(NR),ENENN,ENELL,ENER
ENDDO
C
  ENENDIF
C
  ENDDO
ENDDO
C
  ELSEIF(NDELTA.EQ.0) THEN
C
C ----- DIRECT INTEGRAL -----

```

C

```
DO I=1,NPOINT
  R(I)=DR*FLOAT(I-1)
  W1A(I)=VGAUSSA(1,I)*R(I)*R(I)
  W2A(I)=VGAUSSA(2,I)*R(I)*R(I)
ENDDO
VINTA1=SIMP1(1,NPOINT,DR,W1A)
VINTA2=SIMP1(1,NPOINT,DR,W2A)
WRITE(6,1001) VINTA1,VINTA2
```

C

```
DO I=1,NPOINT
  R(I)=DR*FLOAT(I-1)
  W1B(I)=VGAUSSB(1,I)*R(I)*R(I)
  W2B(I)=VGAUSSB(2,I)*R(I)*R(I)
ENDDO
VINTB1=SIMP1(1,NPOINT,DR,W1B)
VINTB2=SIMP1(1,NPOINT,DR,W2B)
WRITE(6,1002) VINTB1,VINTB2
```

C

```
DO I=1,NPOINT
  R(I)=DR*FLOAT(I-1)
  W1C(I)=VGAUSSC(1,I)*R(I)*R(I)
  W2C(I)=VGAUSSC(2,I)*R(I)*R(I)
ENDDO
VINTC1=SIMP1(1,NPOINT,DR,W1C)
VINTC2=SIMP1(1,NPOINT,DR,W2C)
WRITE(6,1003) VINTC1,VINTC2
```

C

```

C      DXL=XPMAX/(NXL-1)
C      DXP=XPMAX/(NXP-1)
C      DRHO=RHOMAX/FLOAT(NRHO)
C
C ----- ENERGY CALCULATION -----
C
      IF(DXL.LT.0.001) NXL=1
      IF(DXP.LT.0.001) NXP=1
      DO NL=0,NXL-1
        XL=XLMIN+DXL*FLOAT(NL)
        DO NX=0,NXP-1
          XP=XPMIN + DXP*FLOAT(NX)
          XLP=XL+XP
          IF(XLP.LE.1.0) THEN
            XN=1.0-XP-XL
C
C          WRITE(6,1004) XP,XN,XL
C
          DO NR=1,NRHO
            RRHO(NR)=DRHO*FLOAT(NR)
            RHO=RRHO(NR)
C
            RHOP=XP*RHO
            RHOL=XL*RHO
            RHON=XN*RHO
C
            AKP=(3.0*UPI2*RHOP)**UT
            AKN=(3.0*UPI2*RHON)**UT

```

```
AKL=(3.0*UPI2*RHOL)**UT
```

```
AKP2=AKP*AKP
```

```
AKN2=AKN*AKN
```

```
AKL2=AKL*AKL
```

```
C
```

```
FRHO=RHO**ALPHA
```

```
C
```

```
TKINP(NR)=HPKIN*AKP*AKP*RHOP/RHO
```

```
TKINN(NR)=HNKIN*AKN*AKN*RHON/RHO
```

```
TKINL(NR)=HLKIN*AKL*AKL*RHOL/RHO
```

```
C
```

```
DIRNN(NR)=DU*PI*(
```

```
~      ( ( (RHOP+RHON)**DU )/RHO )*VINTA1+
```

```
~      ( ( (RHOP-RHON)**DU )/RHO )*VINTA2 )
```

```
~      +
```

```
~      0.5*FRHO*
```

```
~      ( ((RHOP+RHON)**DU)/RHO)*VDD+
```

```
~      ((RHOP-RHON)**DU)/RHO)*VIDD )
```

```
DIRNL(NR)=DU*PI*(
```

```
~      ((RHOP*RHOL+RHON*RHOL)/RHO)*VINTB1-
```

```
~      ((RHOP*RHOL+RHON*RHOL)/RHO)*VINTB2 )
```

```
DIRLL(NR)=DU*PI*(
```

```
~      ((RHOL*RHOL)/RHO)*VINTC1+
```

```
~      ((RHOL*RHOL)/RHO)*VINTC2)
```

```
C
```

```
C NN-EXCH
```

```
C
```

```
IF( IEXNN.EQ.0) THEN
```

```

DO I=1,NPOINT
  W1A(I)=0.0
ENDDO

ELSEIF( IEXNN.EQ.1) THEN

DO I=1,NPOINT
  XPP=AKP*R(I)
  XNN=AKN*R(I)
  XLL=AKL*R(I)
  B1P=BJAY12(XPP)
  B1N=BJAY12(XNN)
  B1L=BJAY12(XLL)

C
  W1A(I)=(VGAUSSA(1,I)
~      +3.*VGAUSSA(2,I)
~      +3.*VGAUSSA(3,I)+9.*VGAUSSA(4,I))*
~      ((AKP2*B1P+AKN2*B1N)**DU)
~      +
~      (VGAUSSA(1,I)-
~      VGAUSSA(2,I)+
~      3.*VGAUSSA(3,I)-3.*VGAUSSA(4,I))*
~      ((AKP2*B1P-AKN2*B1N)**DU)

C
  ENDDO

ENDIF

C
C NL-EXCH
C
  IF( IEXNL.EQ.0) THEN

```

```

DO I=1,NPOINT
  W1B(I)=0.0
ENDDO

ELSEIF( IEXNL.EQ.1) THEN
  DO I=1,NPOINT
    XPP=AKP*R(I)
    XNN=AKN*R(I)
    XLL=AKL*R(I)
    B1P=BJAY12(XPP)
    B1N=BJAY12(XNN)
    B1L=BJAY12(XLL)
C
    W1B(I)=(VGAUSSB(1,I)+3.0*VGAUSSB(2,I)+
~      3.0*VGAUSSB(3,I)+9.0*VGAUSSB(4,I))*
~      (AKP2*B1P*AKL2*B1L+AKN2*B1N*AKL2*B1L)
~      -
~      (VGAUSSB(1,I)-VGAUSSB(2,I)+
~      3.0*VGAUSSB(3,I)-3.0*VGAUSSB(4,I))*
~      (AKP2*B1P*AKL2*B1L+AKN2*B1N*AKL2*B1L)
    ENDDO
  ENDIF
C
C LL-EXCH
C
  IF( IEXLL.EQ.0) THEN
    DO I=1,NPOINT
      W1C(I)=0.0
    ENDDO

```

```
ELSEIF( IEXLL.EQ.1) THEN
```

```
DO I=1,NPOINT
```

```
  XPP=AKP*R(I)
```

```
  XNN=AKN*R(I)
```

```
  XLL=AKL*R(I)
```

```
  B1P=BJAY12(XPP)
```

```
  B1N=BJAY12(XNN)
```

```
  B1L=BJAY12(XLL)
```

C

```
W1C(I)=(VGAUSSC(1,I)+6.0*VGAUSSB(2,I)+
```

```
~      3.0*VGAUSSC(3,I)+18.0*VGAUSSC(4,I))*
```

```
~      (AKL2*AKL2*B1L*B1L)
```

```
~      +
```

```
~      DU*(VGAUSSC(1,I)-VGAUSSC(2,I)+
```

```
~      3.*VGAUSSC(3,I)-3.0*VGAUSSC(4,I))*
```

```
~      (AKL2*AKL2*B1L*B1L)
```

```
ENDDO
```

```
ENDIF
```

C

```
EXCNN(NR)=-0.5*SIMP1(1,NPOINT,DR,W1A)*UPI3/RHO
```

```
~      -0.5*FRHO*
```

```
~      (((VDD+3.0*VIDD)*
```

```
~      ((AKP**3+AKN**3)**DU))
```

```
~      +
```

```
~      ((VDD-VIDD)*
```

```
~      ((AKP**3-AKN**3)**DU))) /
```

```
~      (RHO*36.0*(PI**4))
```

```
EXCNL(NR)=-0.5*SIMP1(1,NPOINT,DR,W1B)*UPI3/RHO
```



```
EXCLL(NR)=-0.5*SIMP1(1,NPOINT,DR,W1C)*UPI3/RHO
```

```
C
```

```
ENDDO
```

```
C
```

```
IF(IPRINT.EQ.1) THEN
```

```
WRITE(6,1005)
```

```
DO NR=1,NRHO
```

```
WRITE(6,1000) RRHO(NR),TKINP(NR),TKINN(NR),TKINL(NR)
```

```
ENDDO
```

```
WRITE(6,1006)
```

```
DO NR=1,NRHO
```

```
WRITE(6,1000) RRHO(NR),DIRNN(NR),DIRNL(NR),DIRLL(NR)
```

```
ENDDO
```

```
WRITE(6,1007)
```

```
DO NR=1,NRHO
```

```
WRITE(6,1000) RRHO(NR),EXCNN(NR),EXCNL(NR),EXCLL(NR)
```

```
ENDDO
```

```
ENDIF
```

```
WRITE(6,1008)
```

```
DO NR=1,NRHO
```

```
ENENN=TKINP(NR)+TKINN(NR)+DIRNN(NR)+EXCNN(NR)
```

```
ENELL=TKINL(NR)+DIRNL(NR)+DIRLL(NR)+EXCNL(NR)+EXCLL(NR)
```

```
ENER=ENENN+ENELL
```

```
WRITE(6,1000) RRHO(NR),ENENN,ENELL,ENER
```

```
ENDDO
```

```
C
```

```
ENDIF
```

```
C
```

```

        ENDDO
    ENDDO
C
    ENDIF
C
    STOP

1000 FORMAT(F10.5,5(2X,1PE12.5))
1001 FORMAT(//,1X,'DIRECT INTEGRALS:  V1A V2A V9A V10A',/,
           ^4(2X,1PE12.5))
1002 FORMAT(//,1X,'DIRECT INTEGRALS:V1B, V2B',/,
           ^2(2X,1PE12.5))
1003 FORMAT(//,1X,'DIRECT INTEGRALS:V1C, V2C',/,
           ^2(2X,1PE12.5))
1004 FORMAT(///,2x,'*****',
           ^/,5X,'XP',8X,'XN',8X,'XL',/,3(F10.5))
1005 FORMAT(/,5X,'RHO',8X,'KIN P  ',7X,
           ^'KIN N  ',7X,'KIN L')
1006 FORMAT(/,5X,'RHO',8X,'DIR N-N',7X,
           ^'DIR N-L',7X,'DIR L-L')
1007 FORMAT(/,5X,'RHO',8X,'EXC N-N',7X,
           ^'EXC N-L',7X,'EXC L-L')
1008 FORMAT(/,6X,'RHO',5X,'ENE NUCL',5X,
           ^'ENE LAMBDA',4X,'TOTAL')
2000 FORMAT(//,1X,'SYMMETRY ENERGY')
2001 FORMAT(/,1X,'RHO (fm^-3)',2X,'ENERGY (MeV)')

    END
C-----
    FUNCTION SIMP1(IU,IO,DR,WF)

```

```

C-----
C
C    BETTER SIMPSON INTEGRATION
C    ABRAMOWITZ 25.4.6
C
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    DIMENSION WF(1)
C
    S=WF(IU)+WF(IO)
    DO J1=IU+1,IO-1,2
        S=S + WF(J1)*4.0
    ENDDO
    DO J1=IU+2,IO-1,2
        S=S + WF(J1)*2.0
    ENDDO
    SIMP1=S*DR/3.0
    RETURN
    END
C-----

    FUNCTION BJAY12(X)
C-----
C
C    JAY1 SQUARED
C
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    DIMENSION WF(1)
C
    IF(X.LT.0) THEN

```

```

        WRITE(6,1000)

        STOP

    ENDIF

C

    IF (ABS(X).LT.1.0E-30) THEN

        BJAY12=0.0

    ELSE

        BJAY12=(SIN(X)/X-COS(X))/X

    ENDIF

C

    RETURN

1000 FORMAT(1X,' ARGUMENT < 0 IN JAY12')

    END

C-----

        SUBROUTINE INTERPOL(XX,YY,NXX,X,Y,NX,LQ)

C-----

C  SUBROUTINE TO MAKE LINEAR OR QUADRATIC INTERPOLATION
C  LQ=1  LINEAR
C  LQ=2  QUADRATIC
C  XX,YY KNOWN VECTORS TO BE INTERPOLATED
C  NXX  NUMBER OF POINTS
C  X    THE INTERPOLATION POINTS
C  Y    THE INTERPOLATED FUNCTIONS (OUTPUT)
C  NX   THE NUMBER OF POINTS

C-----

C

        IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

C

```

```

        DIMENSION XX(1),YY(1)
        DIMENSION X(1),Y(1)
C
        IF (LQ.EQ.1) THEN
            DO IX=1,NX
                DO IXX=2,NXX
                    IF(XX(IXX).GT.X(IX)) GOTO 100
                ENDDO
                IXX=IXX-1
100         NS=IXX
                CALL LINTER(XX(NS-1),YY(NS-1),XX(NS),YY(NS),X(IX),Y(IX))
            ENDDO
        ENDIF
C
        IF (LQ.EQ.2) THEN
            DO IX=1,NX
                DO IXX=3,NXX
                    IF(XX(IXX).GT.X(IX)) GOTO 200
                ENDDO
                IXX=IXX-1
200         NS=IXX
                CALL QINTER(XX(NS-2),YY(NS-2),XX(NS-1),YY(NS-1),
~         XX(NS),YY(NS),X(IX),Y(IX))
            ENDDO
        ENDIF
C
        RETURN
        END

```

C-----

SUBROUTINE QINTER(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X,Y)

C-----

IMPLICIT REAL\*8(A-H,O-Z)

ANUM=(Y3-Y1)\*(X2-X1)-(Y2-Y1)\*(X3-X1)

ADEN=(X3\*X3-X1\*X1)\*(X2-X1)-(X2\*X2-X1\*X1)\*(X3-X1)

A=ANUM/ADEN

B=( Y2-Y1 -A\*(X2\*X2-X1\*X1) )/(X2-X1)

C=Y1-A\*X1\*X1-B\*X1

Y=A\*X\*X+B\*X+C

RETURN

END

C-----

SUBROUTINE LINTER(X1,Y1,X2,Y2,X,Y)

C-----

IMPLICIT REAL\*8 (A-H,O-Z)

DER=(Y2-Y1)/(X2-X1)

Y=Y1+DER\*(X-X1)

RETURN

END



# Bibliografia

- [Akm98] A. Akmal and V. R. Pandharipande and D. G. Ravenhall, Phys. Rev. C, 58 (1988) 1804.
- [Baa34] W.Baade e F. Zwychy, Phys. Rev. 46 (1934) 76.
- [Bla80] J. P. Blaizot, Phys. Rep. 64 (1980) 171.
- [Cha08] F. Chappert, M. Girod, S. Hilaire, Phys. Lett. B 668 (2008) 420.
- [Dec80] J. Dechargé, D.Gogny, Phys. Rev. C 21(1980)1568.
- [Hew68] A. Hewish, S.J. Bell, J.D.H. Pikington, P.F. Scott, R.A. Collins, Nature 217, (1968) 709.
- [Mar08] M. Martini, V. De Donno, C. Maieron, G. Cò, Nucl. Phys. A 813 (2008) 212.
- [Nak03] H. Nakada, Phys. Rev. C 68 (2003) 014316.
- [Ohn00] A. Ohnishi, Y. Hirata, Y. Nara, S. Shinmura, Y. Akaishi, Nucl.Phys. A 670 (2000) 297C.
- [Opp39] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkov, Phys. Rev. 55 (1939) 364.
- [Pov98] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, Particelle e nuclei, Bollati Boringhieri, Torino (1998).
- [Seg82] E. Segrè, Nuclei e Particelle, Zanichelli, Bologna (1982).



[Tol34] Tolman, Proc. Nat. Acc. Sci. USA 20 (1934) 3.