Università degli Studi di Lecce
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
Dipartimento di Fisica

Tesi di Laurea

VIOLAZIONE DI PARITÀ NEI PROCESSI DI DIFFUSIONE DI ELETTRONI DA NUCLEI

Laureanda:
Saori Pastore

Relatore:
Prof. Giampaolo Co'

Anno Accademico 2001/2002

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Le informazioni provenienti dallo studio di processi di diffusione, dipendono dall'interazione tra sonda e oggetto in esame. Ad esempio, una sonda sensibile all'interazione elettromagnetica, interagisce con i campi elettromagnetici generati dalle distribuzioni di carica e di corrente elettromagnetica del bersaglio. In mariera analoga, una sonda sensibile solo all'interazione debole, vedrà le distribuzioni di carica e corrente debole.

La diffusione di leptoni, è uno strumento ideale per lo studio della struttura dei sistemi adronici. I leptoni sono entità puntiformi, cioè prive di struttura interna, sensibili alle interazioni elettromagnetica e/o debole. Risentono, ovviamente, anche dell'interazione gravitazionale, ma questa è trascurabile nell'ambito dei processi legati alla fisica del nucleo atomico e del nucleone.

La diffusione di leptoni da protoni, permette di studiare la distribuzione di corrente all'interno del bersaglio. Questa è generata dalla distribuzione di materia all'interno del protone, quindi riflette la distribuzione dei quark che costituiscono il nucleone. Nel caso di diffusione elastica, queste distribuzioni vengono parametrizzate in termini di fattori di forma. Tali studi mostrano che il nucleone non è composto soltanto dai quark di valenza, ma che esistono coppie di quark-antiquark che contribuiscono alla definizione delle caratteristiche macroscopiche del nucleone.

Dal punto di vista sperimentale gli elettroni sono la sonda ideale per questo tipo di studi. Contrariamente ai neutrini, sono sensibili anche all'interazione elettromagnetica, possono essere quindi accelerati e focalizzati da campi elettromagnetici, e poi essere facilmente rivelati. Rispetto ai muoni, hanno il vantaggio di essere stabili, e quindi facilmente repe-

ribili in natura.
I processi di interazione elettromagnetica sono descritti da una teoria di campo (QED), in grado di risolvere le equazioni del moto in maniera perturbativa. In particolare, al più basso ordine dello sviluppo, l'interazione elettromagnetica tra elettrone e bersaglio, è descritta dallo scambio di un singolo fotone.
La teoria che descrive i processi deboli è costruita sul modello dato dall'elettrodinamica quantistica. L'interazione è descritta in termini di correnti associate a bosoni vettori intermedi. I bosoni $W^{\pm}$ sono responsabili dei processi deboli di corrente carica, mentre il bosone Z^0 dei processi deboli di corrente neutra.
Nell'ambito della teoria di unificazione elettrodebole, l'interazione elettrone-adrone è mediata da un fotone e da un bosone Z^0. L'elettrone interagisce, pertanto, con i campi generati dalle quadricorrenti adroniche elettromagnetica e debole neutra.
Nella diffusione di elettroni, la presenza dell'interazione debole è mascherata dall'interazione elettromagnetica che è dominante per energie dell'elettrone incidente inferiori al GeV.
Un aspetto peculiare dell'interazione debole, è il suo carattere non conservativo sotto l'azione di inversione spaziale, mentre, come è noto, le interazioni elettromagnetica e forte, sono invarianti sotto l'azione dell'operatore di parità. Una delle conseguenze è la capacità dell'interazione debole di distinguere particelle con differente stato di polarizzazione. Da qui l'idea di utilizzare elettroni longitudinalmente polarizzati per rendere manifesto l'effetto di violazione di parità nel processo di diffusione elettrone-adrone, da attribuirsi alla sola interazione debole neutra.
La sezione d'urto del processo di diffusione elettrone polarizzato-adrone, risulta infatti dipendente dall'orientazione dello spin dell'elettrone incidente. La differenza tra sezioni d'urto per elettroni destrogiri, $(d\sigma^+)$, e levogiri $(d\sigma^-)$, permette di isolare il termine di violazione di parità, dato dall'interferenza tra ampiezza di transizione associata al fotone e ampiezza di transizione associata al bosone Z^0.
L'introduzione dell'osservabile Asimmetria $\mathcal{A}$, definita come il rapporto tra $d\sigma^+ - d\sigma^-$ e $d\sigma^+ + d\sigma^-$, consente di determinare l'ordine di grandezza del contributo debole neutro nell'interazione elettrone-adrone. Quindi permette di analizzare la struttura della corrente debole neutra del bersaglio, ovvero di studiare, oltre alle note distribuzioni di corrente

elettromagnetica adronica, le distribuzioni di carica e corrente deboli neutre presenti all'interno dell'adrone. Si ha, in questa maniera, la possibilità di evidenziare altri aspetti della struttura adronica.

La diffusione sul protone, non consente di studiare tutti i fattori di forma di interesse, elettrico, magnetico e assiale, che intervengono nel processo; questo perché il numero di osservabili è limitato [Don92], [Mus92], [Mus94]. È quindi necessario misurare la diffusione anche da neutroni, e questo, data l'instabilità del neutrone, implica considerare processi di diffusione da bersagli nucleari. È chiaro a questo punto che, per poter studiare i fattori di forma nucleonici, è necessario poter controllare con grande precisione la struttura nucleare. Nell'analisi dei processi di diffusione tra elettroni polarizzati e nuclei, faremo l'ipotesi che l'elettrone interagisca con il singolo nucleone. La risposta globale del nucleo alla sonda esterna, verrà ottenuta sommando tutte le possibili risposte individuali dei singoli nucleoni. La somma sarà opportunamente pesata dalla funzione d'onda a molti corpi del nucleo. Questa approssimazione è detta Approssimazione degli Impulsi, ed è quella sempre utilizzata in fisica nucleare.
In questa visione, il nucleo si presenta come un sistema a molti corpi i cui componenti fondamentali sono i nucleoni. L'unica informazione sul fatto che i nucleoni abbiano una struttura interna è data dai fattori di forma, che sono l'oggetto del nostro studio. Noi utilizzeremo i fattori di forma elettromagnetici fissati per riprodurre i dati sperimentali di diffusione elastica di elettroni non polarizzati su protoni.

Un'accurata conoscenza sperimentale dell'osservabile Asimmetria, consentirebbe di analizzare la sensibilità delle sezioni d'urto rispetto a differenti parametrizzazioni dei fattori di forma nucleonici elettromagnetici e deboli neutri. In particolare, recenti studi [Mus92], [Mus94], [Ama96], [Alb01], mostrano la possibilità di determinare la distribuzione di quark strani all'interno dei nucleoni, a partire da dati provenienti dalla diffusione di elettroni longitudinalmente polarizzati da nuclei.
L'ordine di grandezza dell'osservabile Asimmetria, è di 10^{-6}. È evidente che affinché si possano ottenere informazioni trasparenti, bisogna minimizzare le incertezze teoriche riguardanti la struttura nucleare. È chiaro che, se è soddisfatta questa richiesta, è ragionevole pensare che le variazioni dell'Asimmetra rispetto a differenti parametrizzazioni dei fattori di forma nucleonici, siano attribuibili a un qualcosa di fisico piuttosto che ad

incertezze teoriche. Fortunatamente i nuclei offrono un vasto spettro di numeri quantici iniziali e finali, permettendo di scegliere stati eccitati e cinematiche in cui sia chiara la fisica del processo. Analisi in questo senso sono state effettuate [Mus92], [Mus94], [Ama96], [Alb01], prestando particolare attenzione a processi di diffusione elastica e quasielastica su nuclei doppio magici.

Anche noi, per semplificare al massimo i problemi di struttura nucleare, e quindi tenerli sotto controllo, ci siamo limitati a considerare nuclei a doppia shell chiusa, che sono sferici. Inoltre abbiamo considerato stati eccitati nella parte discreta dello spettro. Studi simili al nostro sono stati svolti [Mus92], [Mus94], [Ama96], [Alb01], ma nella regione del picco quasi-elestico, ad energie di eccitazione del nucleo dell'ordine di centinaia di MeV, quindi nel continuo.

I vantaggi della nostra scelta riguardano il fatto che nel discreto, selezionando l'energia di eccitazione è possibile isolare gli stati nucleari. Nel continuo i vari stati si sovrappongono ad ogni energia e pertanto la descrizione dell'eccitazione è più problematica. Inoltre nel continuo è necessario considerare che il nucleo si disintegra quindi bisogna descrivere l'interazione tra i nucleoni emessi ed il nucleo residuo. Nel nostro caso questo problema non si presenta perché il nucleo rimane legato.

Gli svantaggi della nostra scelta sono di tipo sperimentale, ovvero le sezioni d'urto sono notevolmente più piccole che nel picco quasi-elestico, quindi è più difficile ottenere misure accurate delle Asimmetrie.

Gli stati eccitati del nucleo sono stati descritti utilizzando il modello a strati, o a campo medio, e la teoria RPA. L'idea è di identificare degli stati eccitati la cui struttura sia indipendente dal modello nucleare utilizzato. In questo modo si spera che eventuali discrepanze con i dati sperimentali possano essere attribuite ai fattori di forma.

Il modello a strati costituisce il punto di partenza per lo studio dei sistemi a molti corpi. L'ipotesi su cui si basa il modello a strati è che i nucleoni siano liberi di muoversi indipendentemente gli uni dagli altri sotto l'azione di un potenziale medio. In questa particolare scelta l'Hamiltoniana nucleare è data dalla somma delle Hamiltoniane di singola particella, pertanto il problema a molti corpi è ricondotto alla soluzione di molti problemi ad un corpo. Il potenziale medio, parametrizzato per riprodurre i dati sperimentali, determina i livelli energetici di singola particella. Gli stati fondamentali dei nuclei si ottengono

riempiendo tali livelli energetici compatibilmente con il principio di esclusione di Pauli. Il livello energetico più alto occupato è detto superficie o livello di Fermi.
Per la descrizione degli stati eccitati è necessario distinguere tra stati eccitati di singola particella e stati eccitati collettivi. I primi sono determinati dalla transizione di un nucleone da uno stato al di sotto della superficie di Fermi ad uno stato al di sopra della superficie di Fermi. I secondi sono caratterizzati dalla partecipazione all'eccitazione del nucleo nel suo insieme. Questi stati possono essere interpretati come dovuti al moto collettivo e correlato dei nucleoni, pertanto non possono essere descritti nell'ambito del modello a strati che si basa sull'ipotesi di moto indipendente dei nucleoni. Tuttavia le eccitazioni collettive possono essere trattate a livello microscopico supponendo che siano il risultato di combinazioni lineari di eccitazioni di singola particella. È questa l'idea che sta alla base della teoria RPA.
Per concludere vorremmo menzionare che esperimenti di elettroni polarizzati su nuclei sono già stati realizzati [Hei89], [Sou90], e sono nei programmi sperimentali degli acceleratori di Mainz, Bates e Jefferson Lab.

Capitolo 2

Interazione elettrodebole

Le energie tipiche degli elettroni in processi di diffusione in fisica nucleare, sono dell'ordine di qualche centinaia di MeV. Poiché la massa a riposo dell'elettrone è di circa 0.5 MeV, è necessaria una trattazione relativistica del moto dell'elettrone. Di fatto si utilizzerà l'approssimazione ultrarelativistica, per la quale, i termini in cui compare la massa dell'elettrone, vengono trascurati.

L'ampiezza di transizione del generico processo di diffusione su bersaglio adronico, è stata ottenuta considerando l'ordine più basso dello sviluppo perturbativo. Ciò significa supporre che il moto degli elettroni sia ben descritto da onde piane, e che l'interazione sia mediata da un solo fotone e da un solo bosone Z^0. Quest'approssimazione è anche detta approssimazione di Born delle onde piane, (PWBA). La PWBA, non considera le distorsioni provocate dal campo elettromagnetico generato dal bersaglio adronico.

Definiremo le correnti associate all'elettrone ed ai nucleoni, questi ultimi considerati inizialmente puntiformi. Sfruttando le proprietà di simmetria soddisfatte dalle interazioni elettromagnetica e debole neutra, costruiremo gli operatori di corrente che agiscono su stati nucleonici e introdurremo i fattori di forma che parametrizzano la struttura interna dei nucleoni. La metrica utilizzata è quella definita in [Bjo64], mentre le matrici γ e le matrici di spin di Pauli σ_i sono definite in Appendice A. Utilizzeremo le unità naturali $\hbar = c = 1$.

2.1 Elettroni polarizzati

L'equazione di Dirac descrive il moto relativistico di una particella di spin $\frac{1}{2}$. In assenza di forze esterne, un fermione di massa m è rappresentato da una funzione d'onda ψ soluzione di:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\,\psi = 0 \tag{2.1}$$

Le soluzioni dell'equazione (2.1) sono autostati del momento lineare:

$$\psi = u\,(\mathbf{p})\,e^{-ip\cdot x} = u\,(\mathbf{p})\,e^{-i(\epsilon t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \tag{2.2}$$

con

$$\epsilon = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \tag{2.3}$$

La funzione $u\,(\mathbf{p})$, indipendente da x, è uno spinore a quattro componenti e soddisfa l'equazione di Dirac nello spazio dei momenti, ottenuta inserendo la funzione (2.2) nell'equazione (2.1):

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\,u\,(\mathbf{p}) = 0 \tag{2.4}$$

L'equazione (2.4) ammette 4 soluzioni indipendenti che hanno le seguenti espressioni [Hal84]:

$$\begin{aligned}
u^{(s)}\,(\mathbf{p}) &= N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\epsilon+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad s = 1,2 \\
u^{(s+2)}\,(\mathbf{p}) &= N \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\epsilon-m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad s = 1,2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con $\boldsymbol{\sigma}$ un vettore composto dalle tre matrici di spin di Pauli, con N la costante di normalizzazione e con $\chi^{(s)}$ gli spinori a due componenti di Pauli definiti da:

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Seguendo le convenzioni di [Hal84], fissiamo il valore della costante N in maniera che si abbiano 2ϵ particelle nel volume V di normalizzazione:

$$N = \sqrt{\frac{\epsilon + m}{V}} \tag{2.7}$$

Le funzioni spinoriali $u^{(s)}(\mathbf{p})$ e $u^{(s+2)}(\mathbf{p})$, si riferiscono, rispettivamente, a valori di energia positivi , $\epsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, e negativi, $\epsilon = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Le soluzioni $u^{(s+2)}(\mathbf{p})$, secondo l'interpretazione di Feynmann, rappresentano stati di antiparticella. Per cui una particella libera di spin $\frac{1}{2}$ è descritta dalla funzione d'onda:

$$\psi = \sqrt{\frac{\epsilon + m}{V}} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\epsilon + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} e^{-ip \cdot x} \tag{2.8}$$

La descrizione degli stati polarizzati di un fermione massivo, è semplificata se si è in regime ultrarelativistico, ovvero se si considerano energie per cui valgano le seguenti approssimazioni:

$$\epsilon \gg m \qquad\qquad |\mathbf{p}| \simeq \epsilon \tag{2.9}$$

Gli operatori di proiezione su stati longitudinalmente polarizzati sono [Bjo64]:

$$P_+ = \frac{1 + \gamma_5}{2} \qquad\qquad P_- = \frac{1 - \gamma_5}{2} \tag{2.10}$$

e godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} P_\pm P_\pm &= P_\pm \\ P_\pm P_\mp &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Gli stati ottenuti dall'applicazione degli operatori $P_\pm$ hanno spin concorde o opposto alla direzione del moto e sono autostati dell'operatore elicità $\hat{h}$ relativi ad autovalori $h = \pm 1$, con:

$$\hat{h} = \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \qquad\qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Un fermione massivo polarizzato lungitudinalmente, in regime ultrarelativistico, è quindi descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi_h = P_h \psi = \frac{(1 + h\gamma_5)}{2} u^{(s)} (\mathbf{p}) \, e^{-ip \cdot x} \tag{2.13}$$

Le proprietà degli operatori di proiezione definite nella (2.11) possono essere sintetizzate nella seguente maniera:

$$P_h P_{h'} = P_h \delta_{hh'} \tag{2.14}$$

2.2 Ampiezza del processo di diffusione elettrone-bersaglio adronico

I processi governati dall'interazione elettromagnetica sono descritti dall'elettrodinamica quantistica (QED). Consideriamo il generico processo di diffusione di elettrone su bersaglio adronico A:

$$e^- \; + \; A \longrightarrow e^- \; + \; A \tag{2.15}$$

Gli stati elettronici iniziali e finali sono caratterizzati dai quadrimpulsi $p = (\epsilon, \mathbf{p})$ e $p' = (\epsilon', \mathbf{p}')$. Al primo ordine dello sviluppo perturbativo, l'ampiezza di transizione del processo tra due stati indicati con gli indici i ed f, assume la seguente espressione [Bjo64]:

$$S_{fi} = -ie \int j_\mu^{em} (x) \, A^\mu (x) \, d^4 x \tag{2.16}$$

dove e è la carica unitaria, $j_\mu^{em} (x)$ è la corrente elettromagnetica associata all'elettrone e $A^\mu (x)$ è il campo elettromagnetico generato dal bersaglio adronico che soddisfa l'equazione di Maxwell:

$$\Box A^\mu (x) = e J^\mu_{em} (x) \tag{2.17}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con $J^\mu_{em} (x)$ la corrente elettromagnetica adronica e con $\Box$ l'operatore di D'Alambert definito da $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. L'equazione (2.17) ammette la seguente soluzione:

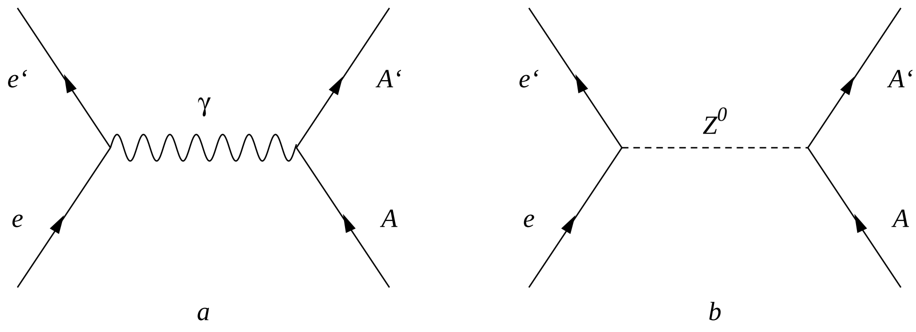

Figura 2.1: Diagrammi di Feynmann per il processo $e^- + A \longrightarrow e^- + A$.

$$A^\mu = -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} e J_\nu^{em}(x) \tag{2.18}$$

dove q è quadrimpulso trasferito durante il processo, dato da:

$$q = p - p' \tag{2.19}$$

Inserendo la (2.18) nella (2.16), si ottiene:

$$S_{fi} = -e^2 \int j_\mu^{em}(x) \left(-i\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\right) J_\nu^{em}(x)\, d^4x \tag{2.20}$$

Il diagramma di Feynmann in Figura 2.1.a è rappresentativo dell'ampiezza di transizione S_{fi} dove il propagatore che descrive lo scambio del fotone tra i vertici è dato dal termine:

$$P_{em}\left(q^2\right) = -i\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \tag{2.21}$$

Nel calcolo dell'ampiezza di transizione per il processo descritto in (2.15), bisogna considerare anche il contributo dell'interazione debole di corrente neutra. La teoria che descrive i processi di interazione debole è costruita sul modello dato dall'elettrodinamica quantistica. L'interazione è descritta in termini di correnti accoppiate a bosoni vettori intermedi. I processi deboli neutri, in cui non vi è cambiamento di carica tra gli stati iniziali e finali, avvengono mediante lo scambio del bosone Z^0 (vedi Figura 2.1.b). Considerando sia l'interazione elettromagnetica che l'interazione debole, l'ampiezza di transizione per il processo definito in (2.15), è data da:

$$S_{fi} \;\; = \;\; -e^2 \int j_\mu^{em}(x) \left(-i\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\right) J_\nu^{em}(x)\, d^4x + \tag{2.22}$$

$$-\frac{g^2}{16\cos^2\theta_W}\int j_\mu^{nc}(x)\left(i\frac{-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M_{Z^0}^2}{q^2-M_{Z^0}^2}\right)J_\nu^{nc}(x)\,d^4x$$

dove $j_\mu^{nc}(x)$ e $J_\nu^{nc}(x)$ sono le correnti neutre associate all'elettrone e al bersaglio adronico, g è la costante adimensionale di accoppiamento debole e il termine in parentesi tonde è il propagatore che descrive lo scambio del bosone vettore intermedio Z^0. L'angolo di Weinberg, θ_W, è un parametro fondamentale della teoria di unificazione elettrodebole.
Nel limite in cui $q^2 \ll M_{Z^0}^2 \sim (90\ GeV)^2$ si possono trascurare i termini q^2 nel propagatore:

$$i\left(\frac{-g^{\mu\nu}+q^\mu q^\nu/M_{Z^0}^2}{q^2-M_{Z^0}^2}\right)\simeq i\frac{g^{\mu\nu}}{M_{Z^0}^2} \tag{2.23}$$

e l'interazione debole neutra si riduce ad un'interazione di contatto. L'intensità dei processi deboli a basse energie, è caratterizzata dalla costante di accoppiamneto dimensionale di Fermi , $G \sim 10^{-5}\ GeV^{-2}$ e nell'ambito del modello di unificazione elettrodebole si identifica con:

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8M_W^2} \tag{2.24}$$

dove M_W è la massa dei bosoni vettori $W^\pm$ responsabili dei processi di interazione debole di carica. Il legame tra le masse dei bosoni $W^\pm$ e Z^0 è fissato da [Hal84]:

$$M_{Z^0}=\frac{M_W}{\cos\theta_W} \tag{2.25}$$

Utilizzando le relazioni (2.24) e (2.25), l'ampiezza di transizione definita in (2.22), diventa:

$$S_{fi}=ie^2\int j_\mu^{em}(x)\left(\frac{1}{q^2}\right)J_{em}^\mu(x)\,d^4x - i\frac{G}{2\sqrt{2}}\int j_\mu^{nc}(x)\,J_{nc}^\mu(x)\,d^4x \tag{2.26}$$

2.3 Corrente debole neutra

L'espressione della corrente debole neutra associata ad un elettrone è [Sch96]:

$$j_\mu^{nc}\ (x) = -\ \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu\,(1-\gamma_5)\,\psi_i(x) - 4\sin^2\theta_W\ j_\mu^{em}\ (x) \tag{2.27}$$

dove $\psi_f(x)$ e $\psi_i(x)$ sono le funzioni d'onda che descrivono l'elettrone incidente e diffuso, e la corrente elettromagnetica $j_\mu^{em}(x)$ è definita, in unità di carica e, da:

$$j_\mu^{em}(x) = -\overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu\psi_i(x) \tag{2.28}$$

Introducendo le relazioni:

$$c_V = -1 + 4\sin^2\theta_W \cong -0.092 \tag{2.29}$$

$$c_A = 1 \tag{2.30}$$

nella (2.27) otteniamo:

$$j_\mu^{nc}(x) = \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu\,(c_V + c_A\gamma_5)\,\psi_i(x) \tag{2.31}$$

La corrente neutra leptonica risulta essere costituita da un termine vettoriale, $\overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu\psi_i(x)$, e da un termine vettor-assiale, $\overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$, con pesi dati dalle costanti c_V e c_A . Le componenti spaziali del termine vettoriale e del termine assiale hanno un comportamento opposto sotto l'azione di inversione spaziale, generando così fenomeni di violazione di parità.

In analogia con l'equazione (2.27) introduciamo le correnti deboli neutre associate ai nucleoni. Indichiamo con $\Psi^p(x)$ e $\Psi^n(x)$ le funzioni d'onda relative al protone ed al neutrone supponendo, per il momento, che siano particelle prive di struttura interna. Sotto queste ipotesi, le espressioni delle correnti neutre deboli nucleoniche sono [Mus94], [Sch96]:

$$J_\mu^{nc;p}(x) = \left[\left(1 - 4\sin^2\theta_W\right)\overline{\Psi}_f^p(x)\,\gamma_\mu\Psi_i^p(x) - \overline{\Psi}_f^p(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\Psi_i^p(x)\right] \tag{2.32}$$

$$J_\mu^{nc;n}(x) = -\left[\overline{\Psi}_f^n(x)\,\gamma_\mu\Psi_i^n(x) - \overline{\Psi}_f^n(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\Psi_i^n(x)\right] \tag{2.33}$$

Osserviamo che il termine definito in (2.28) non contribuisce per un neutrone puntiforme perché la carica elettrica è nulla.

A questo punto, è utile introdurre il formalismo dell'isospin. L'indipendenza dell'interazione forte dalla carica e la piccola differenza tra le masse nucleoniche induce a considerare il protone ed il neutrone come due stati quantistici di una stessa particella: il nucleone. Nello spazio dell'isospin si identificano il protone ed il neutrone con gli stati nucleonici χ_p e χ_n , autostati della terza componente dell'operatore di isospin, I_3, relativi ad autovalori $\pm\frac{1}{2}$. Nella rappresentazione fondamentale, l'operatore di isospin è definito da:

$$I_i = \frac{\tau_i}{2} \tag{2.34}$$

dove τ_i sono le matrici di Pauli e χ_p , χ_n gli spinori a due componenti di Pauli. Gli stati χ_p e χ_n costituiscono la base dello spazio. Definiamo la funzione d'onda nucleonica $\Psi(x)$ nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi^p(x)\,\chi_p + \Psi^n(x)\,\chi_n = \\ &= \Psi^p(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi^n(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi^p(x) \\ \Psi^n(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.35}$$

La funzione $\Psi(x)$ è una funzione spinoriale ad otto componenti. Nel formalismo appena introdotto la corrente elettromagnetica nucleonica risulta essere la somma di un termine isoscalare, $\mathcal{S}_\mu^{em}(x)$, e di un termine isovettoriale $\mathcal{V}_\mu^{em}(x)$:

$$\begin{aligned} J_\mu^{em}(x) &= \overline{\Psi}_f(x)\,\gamma_\mu \frac{(1+\tau_3)}{2}\Psi_i(x) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{N=p,n}\left[\chi_N^+\overline{\Psi}_f^N(x)\,\gamma_\mu\Psi_i^N(x)\,\chi_N + \chi_N^+\overline{\Psi}_f^N(x)\,\gamma_\mu\tau_3\Psi_i^N(x)\,\chi_N\right] = \\ &= \mathcal{S}_\mu^{em}(x) + \mathcal{V}_\mu^{em}(x) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Osserviamo che per un protone $\chi_N^+\tau_3\chi_N$ è pari ad 1 e l'equazione (2.36) rappresenta la corrente elettromagnetica del protone. Per un neutrone $\chi_N^+\tau_3\chi_N$ è pari a -1 e la corrente neutronica è nulla, in accordo con l'ipotesi di nucleoni puntiformi.

Nello spazio dell'isospin, possiamo combinare le equazioni (2.32) e (2.33) ottenendo, per la corrente debole neutra nucleonica, la seguente espressione:

$$J_\mu^{nc}(x) = -4\sin^2\theta_W \frac{1}{2}\overline{\Psi}_f(x)\,\gamma_\mu\Psi_i(x) + \tag{2.37}$$

$$+\left(2-4\sin^2\theta_W\right)\frac{1}{2}\overline{\Psi}_f(x)\,\gamma_\mu\tau_3\Psi_i(x)+$$
$$-2\overline{\Psi}_f(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau_3}{2}\Psi_i(x)$$

L'equazione (2.37) può essere riscritta in termini di componenti isoscalari e isovettoriali della corrente elettromagnetica:

$$J_\mu^{nc}(x)=-4\sin^2\theta_W\mathcal{S}_\mu^{em}(x)+\left(2-4\sin^2\theta_W\right)\mathcal{V}_\mu^{em}(x)-2\mathcal{V}_\mu^{A}(x) \tag{2.38}$$

Nell'equazione precedente si denota con $\mathcal{V}_\mu^A$ il termine isovettoriale assiale della corrente debole neutra definito da:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\mu^A(x) &= \overline{\Psi}_f(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau_3}{2}\Psi_i(x)= \\ &= \frac{1}{2}\sum_{N=p,n}\chi_N^+\overline{\Psi}_f^N(x)\,\gamma_\mu\gamma_5\tau_3\Psi_i^N(x)\,\chi_N\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.4 Elementi di matrice nucleonici

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto le correnti associate a nucleoni puntiformi. In particolare la corrente elettromagnetica relativa ad un generico nucleone N è stata definita nella seguente maniera:

$$J_\mu^{em;N}(x)=\overline{\Psi}_f^N(x)\,\gamma_\mu\Psi_i^N(x) \tag{2.40}$$

D'altra parte, i nucleoni sono oggetti estesi, dotati di una struttura interna complessa. Nel caso si considerino nucleoni puntiformi, l'accoppiamento è dato dalla matrice γ che compare nella (2.40). Sebbene la conoscenza attuale dell'interazione forte non consenta di calcolare gli effetti generati dalla struttura interna nucleonica, è possibile limitare la forma dell'accoppiamento al vertice adronico ricorrendo a principi di simmetria. A tale scopo si introduce un operatore di corrente $\widehat{J}_\mu^{em;N}(x)$ che agisce su stati nucleonici e si determina la forma dell'operatore imponendo che la corrente adronica conservi le proprietà della corrente elettromagnetica ottenuta nel caso di interazione puntuale. La corrente elettromagnetica adronica ha la seguente espressione generale:

$$J_\mu^{em;N}(x)=\left\langle P'\left|\widehat{J}_\mu^{em;N}(x)\right|P\right\rangle \tag{2.41}$$

L'equazione precedente è stata ricavata supponendo che il nucleone sia rappresentato da una funzione d'onda $|P>$, autostato del momento lineare, (2.2). Utilizzando la formula di traslazione [Sch96], rendiamo indipendente l'elemento di matrice adronico dalla variabile x:

$$J_{\mu}^{em:N}(x) = \left\langle P' \left| \widehat{J}_{\mu}^{em}(0) \right| P \right\rangle e^{-ix\cdot(P-P')} \tag{2.42}$$

Per conservare il carattere vettoriale della corrente elettromagnetica, l'elemento di matrice adronico deve essere costruito a partire da entità che si comportino come vettori sotto trasformazioni di Lorentz, ovvero:

$$\begin{array}{ll} \overline{u}(\mathbf{P}')\gamma_{\mu}u(\mathbf{P}) & (P'-P)^{\nu}\,\overline{u}(\mathbf{P}')\sigma_{\mu\nu}u(\mathbf{P}) \\ (P'+P)_{\mu}\,\overline{u}(\mathbf{P}')u(\mathbf{P}) & (P-P')_{\mu}\,\overline{u}(\mathbf{P}')u(\mathbf{P}) \end{array} \tag{2.43}$$

dove $u(\mathbf{P})$ è uno spinore di Dirac e $\sigma_{\mu\nu}$ è definito come:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\right) \tag{2.44}$$

La decomposizione generale dell'elemento di matrice adronico è data da:

$$< P'|\widehat{J}_{\mu}^{em;N}(0)|P >= \overline{u}(\mathbf{P})\left[\gamma_{\mu}F_1^N\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}F_2^N\left(q^2\right) + q_{\mu}F_3^N\left(q^2\right)\right]u(\mathbf{P}) \tag{2.45}$$

Nell'equazione precedente M_N è la massa nucleonica, $q = (P' - P)$ è il quadrimpulso trasferito e le funzioni scalari $F_1^N(q^2)$, $F_2^N(q^2)$, $F_3^N(q^2)$, dette fattori di forma, riflettono l'estensione spaziale dei nucleoni.
La conservazione della corrente elettromagnetica:

$$\partial^{\mu} J_{\mu}^{em;N}(x) = 0 \tag{2.46}$$

impone che sia:

$$q^{\mu} < P'|\widehat{J}_{\mu}^{em;N}(0)|P >= 0 \tag{2.47}$$

I fattori di forma $F_3^N(q^2)$ devono essere identicamente nulli affinché sia soddisfatta la (2.47). Inoltre, le condizioni di hermiticità e di invarianza sotto inversione temporale, impongono che le funzioni $F_{1,2}^N(q^2)$ siano reali, [Sch96]. L'espressione della corrente elettromagnetica associata ad un nucleone fisico, è quindi:

$$J_{\mu}^{em;N}(x) = \overline{u}(\mathbf{P}')\left[\gamma_{\mu}F_1^N\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}F_2^N\left(q^2\right)\right]u(\mathbf{P})\,e^{-ix\cdot(P-P')} \tag{2.48}$$

Nello spazio dell'isospin, la corrente elettromagnetica nucleonica è data dalla seguente espressione:

$$J_\mu^{em}(x) = \chi_N^+ \overline{u}(\mathbf{P}') \left[\gamma_\mu \left(F_1^s + \tau_3 F_1^v\right) + \frac{i}{2M}\sigma_{\mu\nu} q^\nu \left(F_2^s + \tau_3 F_2^v\right)\right] u(\mathbf{P}) \chi_N e^{-ix\cdot(P-P')} \quad (2.49)$$

Nell'equazione precedente abbiamo ipotizzato che $M_p \approx M_n \approx M$ e abbiamo indicato con $F_{1,2}^s$ i fattori di forma isoscalari e con $F_{1,2}^v$ i fattori di forma isovettoriali, definiti da:

$$F_{1,2}^s = \frac{F_{1,2}^p + F_{1,2}^n}{2} \quad (2.50)$$

$$F_{1,2}^v = \frac{F_{1,2}^p - F_{1,2}^n}{2} \quad (2.51)$$

In maniera analoga al caso elettromagnetico, costruiamo l'operatore di corrente debole neutra che agisce su stati nucleonici. La corrente debole neutra associata ad un nucleone puntiforme è costituita da un termine vettoriale $J_\mu^{V;N}(x)$ e da un termine vettor-assiale $J_\mu^{A;N}(x)$:

$$J_\mu^{V;N}(x) = \overline{\Psi}_f^N(x)\gamma_\mu \Psi_i^N(x) \quad (2.52)$$

$$J_\mu^{A;N}(x) = \overline{\Psi}_f^N(x)\gamma_\mu\gamma_5 \Psi_i^N(x) \quad (2.53)$$

Abbiamo omesso l'apice nc per comodità di scrittura. Siamo interessati al calcolo degli elementi di matrice adronici definiti da:

$$J_\mu^{V;N}(x) = \langle P'|\widehat{J}_\mu^{V;N}(0)|P\rangle e^{-ix\cdot(P-P')} \quad (2.54)$$

$$J_\mu^{A;N}(x) = \langle P'|\widehat{J}_\mu^{A;N}(0)|P\rangle e^{-ix\cdot(P-P')} \quad (2.55)$$

Con $\widehat{J}_\mu^{V;N}$ e $\widehat{J}_\mu^{A;N}$ indichiamo gli operatori di corrente debole neutra vettoriale e vettor-assiale. L'elemento di matrice vettoriale (2.54) ha la stessa decomposizione ottenuta per l'elemento di matrice elettromagnetico, ovvero:

$$\langle P'|\widehat{J}_\mu^{V;N}(0)|P\rangle = \overline{u}(\mathbf{P})\left[\gamma_\mu \widetilde{F}_1^N\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^\nu \widetilde{F}_2^N\left(q^2\right)\right] u(\mathbf{P}) \quad (2.56)$$

con $\widetilde{F}_1^N$ e $\widetilde{F}_2^N$ fattori di forma deboli neutri vettoriali associati ai nucleoni. La corrente debole neutra vettoriale, nello spazio dell'isospin, assume la seguente espressione:

$$J_\mu^{nc}(x) = \chi_N^+ \overline{u}(\mathbf{P}') \left[\gamma_\mu \left(\widetilde{F}_1^s + \tau_3 \widetilde{F}_1^v\right) + \frac{i}{2M}\sigma_{\mu\nu} q^\nu \left(\widetilde{F}_2^s + \tau_3 \widetilde{F}_2^v\right)\right] \chi_N u(\mathbf{P}) e^{-ix\cdot(P-P')} \quad (2.57)$$

Abbiamo definito con $\widetilde{F}^s_{1,2}$ e $\widetilde{F}^v_{1,2}$ i fattori di forma isoscalari e isovettoriali della corrente debole neutra vettoriale:

$$\widetilde{F}^s_{1,2} = \frac{\widetilde{F}^p_{1,2} + \widetilde{F}^n_{1,2}}{2} \tag{2.58}$$

$$\widetilde{F}^v_{1,2} = \frac{\widetilde{F}^p_{1,2} - \widetilde{F}^n_{1,2}}{2} \tag{2.59}$$

Possiamo ora sfruttare la relazione ottenuta in (2.38), che lega le componenti isoscalari e isovettoriali delle correnti elettromagnetica e debole neutra vettoriale. In particolare si ottengono le seguenti relazioni tra i fattori di forma:

$$\widetilde{F}^s_{1,2} = -4\sin^2\theta_W F^s_{1,2} \tag{2.60}$$

$$\widetilde{F}^v_{1,2} = \left(2 - 4\sin^2\theta_W\right) F^v_{1,2} \tag{2.61}$$

Le relazioni (2.60) e (2.61) possono essere riscritte in termini di fattori di forma associati ai singoli nucleoni:

$$\widetilde{F}^{p;n}_{1,2} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) F^{p;n}_{1,2} - F^{n;p}_{1,2} \tag{2.62}$$

Consideriamo la corrente debole neutra vettor-assiale, (2.55). La decomposizione dell'elemento di matrice adronico si effettua in termini di vettori assiali covarianti [Sch96], ottenendo:

$$< P'|\widehat{J}^{A;N}_\mu(0)|P >= \overline{u}(\mathbf{P})\left[\gamma_\mu \widetilde{G}^N_A\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^\nu \widetilde{G}^N_T\left(q^2\right) + q_\mu \widetilde{G}^N_P\left(q^2\right)\right]\gamma_5 u(\mathbf{P}) \tag{2.63}$$

con $\widetilde{G}^N_A(q^2)$, $\widetilde{G}^N_P(q^2)$ e $\widetilde{G}^N_T(q^2)$ fattori di forma assiale, pseudoscalare e tensoriale dei nucleoni. Si può dimostrare che i fattori di forma $\widetilde{G}^N_T(q^2)$ sono nulli se si impone che sia verificata l'invarianza dell'interazione forte sotto l'azione di coniugazione di carica [Sch96]. Definiamo la corrente debole neutra assiale nello spazio dell'isospin:

$$J^A_\mu(x) = \chi^+_N \overline{u}(\mathbf{P}')\left[\gamma_\mu\gamma_5\left(\widetilde{G}^s_A + \tau_3\widetilde{G}^v_A\right) + q_\mu\gamma_5\left(\widetilde{G}^s_P + \tau_3\widetilde{G}^v_P\right)\right]u(\mathbf{P})\chi_N e^{-ix\cdot(P-P')} \tag{2.64}$$

Di nuovo abbiamo introdotto i fattori di forma isoscalari e isovettoriali del termine vettor-assiale della corrente debole neutra con:

$$\widetilde{G}^s_{A,P} = \frac{\widetilde{G}^p_{A,P} + \widetilde{G}^n_{A,P}}{2} \tag{2.65}$$

$$\widetilde{G}^{v}_{A,P} = \frac{\widetilde{G}^{p}_{A,P} - \widetilde{G}^{n}_{A,P}}{2} \tag{2.66}$$

Dalla relazione (2.38) discende che i fattori di forma isoscalari $\widetilde{G}^{s}_{A,P}$ devono essere nulli, imponendo che valga la seguente relazione:

$$\widetilde{G}^{p}_{A,P} = -\widetilde{G}^{n}_{A,P} \tag{2.67}$$

Sostituendo la (2.67) nella (2.66) si ottiene:

$$\widetilde{G}^{v}_{A,P} = -\widetilde{G}^{n}_{A,P} = \widetilde{G}^{p}_{A,P} \tag{2.68}$$

Nell'equazione (2.38) il termine isovettoriale $\mathcal{V}^{A}_{\mu}$ è moltiplicato per un fattore -2. In letteratura [Mus92], [Alb01], è convenzione includere il fattore -2 nella definizione dei fattori di forma. Pertanto utilizzeremo fattori di forma assiali definiti come:

$$^{*}\widetilde{G}^{p,n}_{A,P} = \mp 2\widetilde{G}^{v}_{A,P} \tag{2.69}$$

Per semplicità di scrittura, nel seguito ometteremo il simbolo $*$ intendendo con $\widetilde{G}^{p,n}$ i fattori di forma definiti nella (2.69).
Abbiamo quindi definito gli elementi di matrice associati ad un singolo nucleone:

$$J^{em;N}_{\mu}(x) = \overline{u}(\mathbf{P}') \left[\gamma_{\mu} F^{N}_{1}\left(q^{2}\right) + \frac{i}{2M_{N}} \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} F^{N}_{2}\left(q^{2}\right)\right] u(\mathbf{P})\, e^{-ix\cdot(P-P')} \tag{2.70}$$

$$J^{V;N}_{\mu}(x) = \overline{u}(\mathbf{P}) \left[\gamma_{\mu} \widetilde{F}^{N}_{1}\left(q^{2}\right) + \frac{i}{2M_{N}} \sigma_{\mu\nu} q^{\nu} \widetilde{F}^{N}_{2}\left(q^{2}\right)\right] u(\mathbf{P})\, e^{-ix\cdot(P-P')} \tag{2.71}$$

$$J^{A;N}_{\mu}(x) = \overline{u}(\mathbf{P}) \left[\gamma_{\mu} \widetilde{G}^{N}_{A}\left(q^{2}\right) + q_{\mu} \widetilde{G}^{N}_{P}\left(q^{2}\right)\right] \gamma_{5} u(\mathbf{P})\, e^{-ix\cdot(P-P')} \tag{2.72}$$

I fattori di forma della parte vettoriale della corrente debole neutra sono legati a quelli elettromagnetici dalle relazioni:

$$\widetilde{F}^{p,n}_{1,2} = \left(1 - 4\sin^{2}\theta_{W}\right) F^{p,n}_{1,2} - F^{n,p}_{1,2} \tag{2.73}$$

I fattori di forma assiali sono definiti nella (2.69).

2.5 Fattori di forma strani del nucleone

Dal punto di vista della cromodinamica quantistica (QCD), i nucleoni sono costituiti dai quark di valenza u e d e dalle coppie di quark e antiquark che formano il cosiddetto mare di Dirac. Le sonde interagiscono con tutti i costituenti del sistema, anche con le coppie di quark-antiquark. I fattori di forma elettromagnetici, parametrizzati per riprodurre i dati sperimentali provenienti da processi di diffusione elastica su nucleoni, considerano in maniera effettiva anche l'interazione con le coppie di quark e antiquark del mare.
L'interpretazione dei fattori di forma deboli neutri è più complessa, è necessario pertanto soffermarsi sulla trattazione che ha consentito di ottenere le relazioni (2.73) e (2.69). Lo studio dell'interazione tra particelle puntiformi riveste un ruolo essenziale per la comprensione delle caretteristiche e delle proprietà di un'interazione. Nel Paragrafo 2.3 sono state definite le correnti associate a nucleoni puntiformi. In particolare, il risultato espresso nella (2.38) ha permesso di determinare la struttura della corrente debole neutra nucleonica. Il passo successivo è stato imporre che questa rimanesse invariata nel caso in cui si considerassero nucleoni fisici, permettendo, in questa maniera, di ottenere le (2.73) e (2.69). La (2.38) riveste quindi un ruolo importante per la definizione dei fattori di forma deboli neutri.
Il risultato (2.38) è stato ottenuto basandosi sulla simmetria SU(2) di isospin, considerando il nucleone puntiforme. Nell'utilizzare questa equazione per definire le correnti per nucleoni fisici, si è quindi supposto che la struttura adronica dei nucleoni sia dovuta alla sola presenza dei quark u e d che formano un doppietto di isospin.
Se si considerano in maniera esplicita i contributi dei quark più pesanti di u e d [Wal95], [Mus94], [Don79], all'espressione della corrente debole neutra, definita in (2.38), bisogna aggiungere un termine isoscalare $\mathcal{S}_\mu^q$, rappresentativo della corrente debole neutra generata dalle coppie di quark del mare, che sfugge alla simmetria di isospin:

$$\begin{aligned} J_\mu^{nc}(x) &= -4\sin^2\theta_W \mathcal{S}_\mu^{em}(x) + \left(2 - 4\sin^2\theta_W\right)\mathcal{V}_\mu^{em}(x) - 2\mathcal{V}_\mu^A(x) + \\ &\quad +\mathcal{S}_\mu^q(x) \end{aligned} \tag{2.74}$$

Notiamo che il termine $\mathcal{S}_\mu^q$ è uno scalare nello spazio dell'isospin in quanto i quark più pesanti di u e d hanno numero quantico di isospin nullo. Tutto ciò si ripercuote a livello di fattori di forma; in particolare alle relazioni (2.73) e (2.69) bisogna aggiungere dei fattori di forma $F^q_{1,2}$ e $\widetilde{G}^q_{A,P}$ che considerano il contributo alla corrente nucleonica debole dato dai quark più pesanti di u e d [Mus92], [Mus94], [Alb01]:

$$\widetilde{F}^{p,n}_{1,2} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) F^{p,n}_{1,2} - F^{n,p}_{1,2} - F^q_{1,2} \tag{2.75}$$

$$\widetilde{G}^{p,n}_{A,P} = \mp 2\widetilde{G}^v_{A,P} + \widetilde{G}^q_{A,P} \tag{2.76}$$

Poiché ci limiteremo a considerare regimi energetici al di sotto del GeV il contributo dato dai quark pesanti (c,b,t) è trascurabile. Pertanto i fattori di forma $F^q_{1,2}$ e $\widetilde{G}^q_{A,P}$ sono dovuti alle sole coppie di quark e antiquark dotati di stranezza, per questo motivo chiameremo $F^q_{1,2}$ e $\widetilde{G}^q_{A,P}$ fattori di forma strani del nucleone.

Capitolo 3

Sezione d'urto inclusiva di elettroni polarizzati su nuclei

In questo capitolo deriveremo l'espressione della sezione d'urto associata al processo di diffusione di elettroni polarizzati da nuclei. Come già menzionato nel capitolo precedente, in fisica nucleare, le energie coinvolte sono tali da poter considerare l'elettrone come una particella ultrarelativistica.
L'ampiezza di transizione S_{fi} associata al processo, è data dalla somma delle ampiezze relative allo scambio di un fotone e di un bosone Z^0 tra elettrone e bersaglio nucleare. In particolare, il termine elettromagnetico è proporzionale ad $\frac{\alpha}{4\pi q^2}$ mentre il termine debole neutro a $\frac{G}{2\sqrt{2}}$. La sezione d'urto si ottiene calcolando il modulo quadro dell'ampiezza di transizione S_{fi}. Per valori di quadrimpulso trasferito dell'ordine di qualche centinaia di MeV, si ha che $\left(\frac{\alpha}{4\pi q^2}\right)^2 \sim 10^{-5} \div 10^{-6} GeV^{-2}$ mentre $\left(\frac{G}{2\sqrt{2}}\right)^2 \sim 10^{-10} GeV^{-2}$. Si trascurerà, pertanto, il termine dato dal modulo quadro dell'ampiezza di transizione associata al bosone Z^0. Fenomeni di violazione di parità sono quindi da attribuirsi all'interferenza tra ampiezza elettromagnetica ed ampiezza debole neutra.
Considereremo sezioni d'urto inclusive in cui solo l'elettrone diffuso viene rivelato, quindi nei nostri calcoli supporremo che il nucleo effettui una transizione tra stati caratterizzati da un buon momento angolare. Calcoleremo lo sviluppo in multipoli della sezione d'urto, senza esplicitare le espressioni degli operatori di corrente nucleare.
Nei processi di diffusione inclusivi, viene rivelato il solo elettrone diffuso e non è registrato alcun dato relativo all'orientazione dello spin del bersaglio. Affinché la sezione

d'urto contempli tutte le possibili configurazioni di spin nucleare che possono contribuire al processo, si somma sugli stati di spin finali del nucleo e si media su quelli iniziali. Il discorso è differente per gli elettroni. Si è infatti interessati al caso in cui l'orientazione dello spin dell'elettrone incidente è fissata. Pertanto sommeremo sulle configurazioni di spin dell'elettrone diffuso.
Considerazioni sul comportamento degli operatori vettoriali e vettor-assiali, permetteranno di escludere dalla trattazione i processi in cui l'elettrone cambia stato di polarizzazione a seguito dell'urto.
Poiché il calcolo presenta diversi gradi di complessità, il capitolo è suddiviso in tre sezioni principali. Nella prima si ricava l'espressione generale della sezione d'urto valida per un processo di diffusione inclusivo nell'Approssimazione di Born delle onde piane (PWBA). L'uso della PWBA permette di separare la parte di struttura nucleare, da quella relativa alla cinematica dell'elettrone. Nella seconda sezione si calcola il modulo quadro dell'ampiezza di transizione associata al processo. Nella terza sezione si presenta il risultato conclusivo che è definito nell'equazione (3.90). I testi a cui si è fatto riferimento sono [Wal77], [Wal75].

3.1 Cinematica del processo

La cinematica del processo di diffusione elettrone-nucleo, è schematizzata in Figura 3.1. Abbiamo denotato con θ l'angolo di diffusione dell'elettrone e con $q = p - p' = P' - P$ il quadrimpulso trasferito durante il processo. Nel sistema di riferimento del laboratorio, sistema in cui il bersaglio è a riposo, l'elettrone ed il nucleo sono caratterizzati dai seguenti quadrimpulsi:

$$\begin{aligned} p &= (\epsilon, \mathbf{p}) \qquad & p' = (\epsilon, \mathbf{p}') \\ P &= (M, 0) \qquad & P' = (E', \mathbf{P}') \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nelle relazioni precedenti abbiamo indicato con M la massa a riposo del nucleo.
Poiché tratteremo l'elettrone come una particella ultrarelativistica, introduciamo le ap-

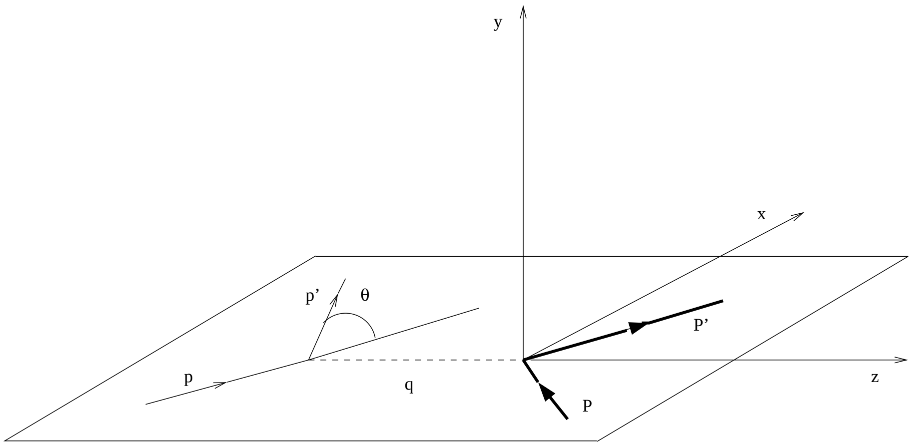

Figura 3.1: Cinematica del processo.

prossimazioni valide in questo regime:

$$|\mathbf{p}| \longrightarrow \epsilon \qquad\qquad |\mathbf{p}'| \longrightarrow \epsilon' \tag{3.2}$$

$$q^2 = (p - p')^2 \longrightarrow -2p \cdot p' = -2\epsilon\epsilon' (1 - \cos\theta) = -4\epsilon\epsilon' \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{3.3}$$

$$p^2 = p'^2 = m^2 \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

Abbiamo fissato il sistema di coordinate del laboratorio $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, in maniera tale che la direzione del vettore unitario $\mathbf{e}_z$ coincida con la direzione del impulso trasferito $\mathbf{q}$, la direzione del vettore $\mathbf{e}_y$ coincida con la direzione fissata da $\mathbf{p}\times\mathbf{p}'$ e il vettore $\mathbf{e}_x$ sia nel piano di diffusione dell'elettrone.

3.2 Espressione generale della sezione d'urto inclusiva

L'espressione generale della sezione d'urto di un processo di diffusione è [Hal84],[Ait84]:

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{F} \rho(\epsilon') \tag{3.5}$$

Nell'equazione precedente, oltre all'ampiezza di transizione S_{fi}, compaiono il flusso degli elettroni incidenti F, e la densità degli stati finali $\rho(\epsilon')$. Secondo la normalizzazione (2.7) per processi di diffusione inclusivi, quest'ultima assume la seguente espressione

[Hal84],[Ait84]:

$$\rho\left(\epsilon'\right) = \frac{V}{\left(2\pi\right)^3 2\epsilon'} d\mathbf{p}' = \frac{V}{\left(2\pi\right)^3 2\epsilon'} \left|\mathbf{p}'\right|^2 d\left|\mathbf{p}'\right| d\Omega \tag{3.6}$$

dove V è il volume di normalizzazione e $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido centrato su θ. Il flusso incidente, calcolato nel sistema di riferimento del laboratorio, è dato da [Hal84]:

$$F = \frac{2\left|\mathbf{p}\right|}{V} \tag{3.7}$$

Introducendo le relazioni (3.6) e (3.7) nella (3.5) otteniamo:

$$d\sigma = \left|S_{fi}\right|^2 \frac{V^2}{4\left(2\pi\right)^3 \epsilon'} \frac{\left|\mathbf{p}'\right|^2}{\left|\mathbf{p}\right|} d\left|\mathbf{p}'\right| d\Omega \tag{3.8}$$

L'ampiezza di transizione S_{fi} associata al processo è stata definita nel capitolo precedente, ed è data dalla seguente espressione:

$$S_{fi} = ie^2 \int j_\mu^{em}\left(x\right) \left(\frac{1}{q^2}\right) J_{em}^\mu\left(x\right) d^4x - i\frac{G}{2\sqrt{2}} \int j_\mu^{nc}\left(x\right) J_{nc}^\mu\left(x\right) d^4x \tag{3.9}$$

Le correnti adroniche $J_{em}^\mu\left(x\right)$ e $J_{nc}^\mu\left(x\right)$ sono, in questo caso, associate al bersaglio nucleare. Consideriamo il vertice leptonico e calcoliamo le correnti elettromagnetica, $j_\mu^{em}\left(x\right)$, e debole neutra, $j_\mu^{nc}\left(x\right)$, associate all'elettrone polarizzato. Indichiamo con $\psi_h\left(x\right)$ e $\psi_{h'}\left(x\right)$ le funzioni d'onda che descrivono l'elettrone incidente e diffuso:

$$\psi_h\left(x\right) = P_h \psi_i\left(x\right) \tag{3.10}$$

$$\psi_{h'}\left(x\right) = P_{h'} \psi_f\left(x\right) \tag{3.11}$$

Anticipiamo che il risultato sarà indipendente dal volume di normalizzazione V che compare nella (2.7). Affinché ciò sia manifesto, è conveniente scrivere le relazioni (3.10) e (3.11) come segue:

$$\psi_h\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{V}} P_h u\left(\mathbf{p}\right) e^{-ip\cdot x} \tag{3.12}$$

$$\psi_{h'}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{V}} P_{h'} u\left(\mathbf{p}'\right) e^{-ip'\cdot x} \tag{3.13}$$

tenendo presente che gli spinori che compaiono nelle equazioni precedenti sono adesso definiti nella seguente maniera:

$$u\left(\mathbf{p}\right) = \sqrt{\epsilon + m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{\epsilon + m}\chi \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

L'espressione precedente viene interpretata come ottenuta normalizzando su un volume V scelto pari all'unità in ogni sistema di riferimento inerziale [Hal84]. Nel seguito adotteremo la convenzione data nella (3.14).
Le funzioni $\psi_h(x)$ e $\psi_{h'}(x)$ sono, in regime ultrarelativistico, autostati dell'operatore elicità, relativi agli autovalori h ed h'. Le espressioni delle correnti leptoniche per elettroni polarizzati, si ottengono dalle relazioni definite nelle (2.28) e (2.31) sostituendo alle funzioni d'onda $\psi_i(x)$ e $\psi_f(x)$, le funzioni $\psi_h(x)$ e $\psi_{h'}(x)$:

$$j_\mu^{em}(x) = \overline{\psi}_{h'}(x)\,\gamma_\mu \psi_h(x) \tag{3.15}$$

$$j_\mu^{nc}(x) = c_V \overline{\psi}_{h'}(x)\,\gamma_\mu \psi_h(x) + c_A \overline{\psi}_{h'}(x)\,\gamma_\mu \gamma_5 \psi_h(x) \tag{3.16}$$

Utilizzando le proprietà di commutazione delle matrici γ definite in Appendice A e le proprietà degli operatori di proiezione date nella (2.14), le espressioni (3.15) e (3.16), diventano:

$$\begin{aligned} j_\mu^{em}(x) &= \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu P_{h'} P_h \psi_i(x) = \\ &= \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu P_h \delta_{hh'} \psi_i(x) \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} j_\mu^{nc}(x) &= c_V \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu P_{h'} P_h \psi_i(x) + c_A \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu \gamma_5 P_{h'} P_h \psi_i(x) = \\ &= c_V \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu P_h \delta_{hh'} \psi_i(x) + c_A \overline{\psi}_f(x)\,\gamma_\mu \gamma_5 P_h \delta_{hh'} \psi_i(x) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Le equazioni (3.17) e (3.18), mostrano che gli operatori γ_μ e $\gamma_\mu\gamma_5$ non connettono stati levogiri a stati destrogiri, quindi nel processo di diffusione l'elicità dell'elettrone incidente è conservata.
Possiamo riscrivere le equazioni (3.17) e (3.18) in termini degli elementi di matrice leptonici l_μ^{em} e l_μ^{nc} che definiamo nella seguente maniera:

$$l_\mu^{em} = \overline{u}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu P_h u(\mathbf{p}) \tag{3.19}$$

$$l_\mu^{nc} = c_V \overline{u}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu P_h u(\mathbf{p}) + c_A \overline{u}(\mathbf{p}')\,\gamma_\mu \gamma_5 P_h u(\mathbf{p}) \tag{3.20}$$

Otteniamo, in definitiva, le seguenti espressioni per le correnti associate all'elettrone polarizzato:

$$\begin{aligned} j_\mu^{em}(x) &= l_\mu^{em} \frac{e^{-i(p-p')\cdot x}}{V} \\ j_\mu^{nc}(x) &= l_\mu^{nc} \frac{e^{-i(p-p')\cdot x}}{V} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Consideriamo adesso il vertice adronico e definiamo con $|i>$ e $|f>$ gli stati iniziale e finale del nucleo, autostati dell'Hamiltoniana nucleare H. Costruiamo la corrente elettromagnetica nucleare $J^{\mu}_{em}(x)$ a partire da un operatore di corrente locale $\widehat{J}^{\mu}_{em}(x)$, che agisca sugli stati nucleari:

$$J^{\mu}_{em}(x) = \left\langle f \left| \widehat{J}^{\mu}_{em}(x) \right| i \right\rangle \tag{3.22}$$

Procedendo in maniera analoga definiamo l'operatore di corrente nucleare debole neutra $\widehat{J}^{\mu}_{nc}(x)$:

$$J^{\mu}_{nc}(x) = \left\langle f \left| \widehat{J}^{\mu}_{nc}(x) \right| i \right\rangle \tag{3.23}$$

Rendiamo esplicita la dipendenza temporale delle correnti nucleari esprimendo gli operatori $\widehat{J}^{\mu}_{em}(x)$ e $\widehat{J}^{\mu}_{nc}(x)$ in rappresentazione di Heisenberg:

$$\begin{aligned} \widehat{J}^{\mu}_{em}(x) &= e^{iHt}\widehat{J}^{\mu}_{em}(\mathbf{r})\, e^{-iHt} \\ \widehat{J}^{\mu}_{nc}(x) &= e^{iHt}\widehat{J}^{\mu}_{nc}(\mathbf{r})\, e^{-iHt} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Gli operatori $\widehat{J}^{\mu}_{em}(\mathbf{r})$ e $\widehat{J}^{\mu}_{nc}(\mathbf{r})$ agiscono sulle sole coordinate spaziali. Sostituendo le relazioni precedenti nelle equazioni (3.22) e (3.23) si ottiene:

$$\begin{aligned} J^{\mu}_{em}(x) &= \left\langle f \left| \widehat{J}^{\mu}_{em}(\mathbf{r}) \right| i \right\rangle e^{-i(E-E')t} = J^{\mu}_{em}(\mathbf{r})\, e^{-i(E-E')t} \\ J^{\mu}_{nc}(x) &= \left\langle f \left| \widehat{J}^{\mu}_{nc}(\mathbf{r}) \right| i \right\rangle e^{-i(E-E')t} = J^{\mu}_{nc}(\mathbf{r})\, e^{-i(E-E')t} \end{aligned} \tag{3.25}$$

Possiamo adesso introdurre le relazioni ottenute in (3.21) e (3.25) nell'espressione generale dell'ampiezza di transizione S_{fi}, che, eliminando la dipendenza temporale mediante integrazione [Bjo64], diventa:

$$S_{fi} = i\frac{2\pi}{V}\delta\left(E' + \epsilon' - E - \epsilon\right)\left[\frac{e^2}{q^2} l^{em}_{\mu} J^{\mu}_{em}(\mathbf{q}) - \frac{G}{2\sqrt{2}} l^{nc}_{\mu} J^{\mu}_{nc}(\mathbf{q})\right] \tag{3.26}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con $J^{\mu}_{em}(\mathbf{q})$ e $J^{\mu}_{nc}(\mathbf{q})$ le trasformate di Fourier delle correnti nucleari $J^{\mu}_{em}(\mathbf{r})$ e $J^{\mu}_{nc}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} J^{\mu}_{em}(\mathbf{q}) &= \int J^{\mu}_{em}(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ J^{\mu}_{nc}(\mathbf{q}) &= \int J^{\mu}_{nc}(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Osserviamo che il termine $\delta(E' + \epsilon' - E - \epsilon)$ che compare nell'espressione dell'ampiezza di transizione è rappresentativo della conservazione dell'energia.
Definendo l'ampiezza invariante di transizione $\mathcal{M}$, nella seguente maniera:

$$\mathcal{M} = \left[\frac{e^2}{q^2} l_\mu^{em} J_{em}^\mu(\mathbf{q}) - \frac{G}{2\sqrt{2}} l_\mu^{nc} J_{nc}^\mu(\mathbf{q})\right] \tag{3.28}$$

possiamo scrivere S_{fi} come:

$$S_{fi} = i\frac{2\pi}{V}\delta(E' + \epsilon' - E - \epsilon)\mathcal{M} \tag{3.29}$$

Sostituendo la (3.29) nella (3.8) otteniamo:

$$d\sigma = \delta(E' + \epsilon' - E - \epsilon)\frac{|\mathcal{M}|^2}{4(2\pi)^2\epsilon'}\frac{|\mathbf{p}'|^2}{|\mathbf{p}|}d|\mathbf{p}'|\,d\Omega \tag{3.30}$$

Ricordiamo che $\epsilon' = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}'|^2}$, pertanto vale la seguente relazione:

$$d\epsilon' = \frac{\partial\epsilon'}{\partial|\mathbf{p}'|}d|\mathbf{p}'| = \frac{|\mathbf{p}'|}{\epsilon'}d|\mathbf{p}'| \tag{3.31}$$

Inseriamo la relazione precedente nella (3.30) e facciamo uso delle approssimazioni valide in regime ultrarelativistico:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega d\epsilon'} = \frac{\epsilon'}{4(2\pi)^2\epsilon}|\mathcal{M}|^2\delta(E' + \epsilon' - E - \epsilon) \tag{3.32}$$

L'energia persa dall'elettrone $\omega = \epsilon - \epsilon'$ è pari all'energia di eccitazione del nucleo $\omega = E' - E$. Per questo motivo nel seguito scriveremo la (3.32) nella seguente maniera:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\epsilon'}{4(2\pi)^2\epsilon}|\mathcal{M}|^2 \tag{3.33}$$

3.3 Sviluppo in multipoli dell'ampiezza di transizione

In questo paragrafo calcoliamo il modulo quadro dell'ampiezza invariante di transizione $\mathcal{M}$ la cui espressione è data da:

$$\mathcal{M} = \left[\frac{e^2}{q^2} l_\mu^{em} J_{em}^\mu(\mathbf{q}) - \frac{G}{2\sqrt{2}} l_\mu^{nc} J_{nc}^\mu(\mathbf{q})\right] \tag{3.34}$$

o equivalentemente da:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{e^2}{q^2}\left[l_0^{em}\int\left\langle f\left|\widehat{J}^0_{em}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} - \mathbf{l}^{em}\cdot\int\left\langle f\left|\widehat{\mathbf{J}}_{em}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\right] + \\ &-\frac{G}{2\sqrt{2}}\left[l_0^{nc}\int\left\langle f\left|\widehat{J}^0_{nc}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} - \mathbf{l}^{nc}\cdot\int\left\langle f\left|\widehat{\mathbf{J}}_{nc}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\right]\end{aligned} \tag{3.35}$$

L'equazione precedente è stata ottenuta rendendo esplicito il prodotto scalare tra i quadrivettori $l_\mu = (l_0, \mathbf{l})$ e $J^\mu(\mathbf{r}) = (J^0(\mathbf{r}), \mathbf{J}(\mathbf{r}))$, e sostituendo alle espressioni $J^\mu(\mathbf{q})$ le trasformate di Fourier di $J^\mu(\mathbf{r})$. L'unica ipotesi su cui si basa la trattazione è che il nucleo effettui una transizione tra stati caratterizzati da definiti valori di momento angolare e parità:

$$|i> \equiv |\Psi_{J_i\,M_i}> \qquad \pi_i \tag{3.36}$$

$$|f> \equiv |\Psi_{J_f\,M_f}> \qquad \pi_f \tag{3.37}$$

Rispetto ad un sistema di coordinate sferiche $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-)$, legato al sistema di coordinate cartesiane $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ dalle seguenti relazioni:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \tag{3.38}$$

$$\mathbf{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \tag{3.39}$$

la parte spaziale degli elementi di matrice leptonici, si decompone come segue:

$$\mathbf{l} = \sum_{\lambda=3,\pm1} l^*_\lambda \mathbf{e}_\lambda \tag{3.40}$$

con $l_\lambda = \mathbf{l}\cdot\mathbf{e}_\lambda$ componente in coordinate sferiche dell'elemento di matrice leptonico. Possiamo riscrivere l'equazione (3.35) nella seguente maniera:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{e^2}{q^2}\left[l_0^{em}\int\left\langle f\left|\widehat{J}^0_{em}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} - \sum_{\lambda=3,\pm1} l^{*em}_\lambda \mathbf{e}_\lambda\cdot\int\left\langle f\left|\widehat{\mathbf{J}}_{em}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\right] + \\ &- \frac{G}{2\sqrt{2}}\left[l_0^{nc}\int\left\langle f\left|\widehat{J}^0_{nc}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} - \sum_{\lambda=3,\pm1} l^{*nc}_\lambda \mathbf{e}_\lambda\cdot\int\left\langle f\left|\widehat{\mathbf{J}}_{nc}(\mathbf{r})\right|i\right\rangle e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\right]\end{aligned} \tag{3.41}$$

Lo sviluppo in multipoli dell'ampiezza invariante di transizione è effettuato con tecniche di calcolo standard [Def66], che sfruttano principalmente le proprietà delle armoniche sferiche $Y_{JM}(\theta,\phi)$, delle armoniche sferiche vettoriali $\mathbf{Y}^M_{l1J}(\theta,\phi)$, delle funzioni di Bessel $j_J(kr)$

e dei coefficenti di Clebsh-Gordan [Edm57]. In particolare, si sostituisce alla funzione d'onda piana $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ l'espressione del suo sviluppo in multipoli data da:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{4\pi}\sum_l i^l j_l\left(kr\right)\sqrt{2l+1}Y_{l0}\left(\theta,\phi\right) \tag{3.42}$$

dove è stato considerato che la direzione dell'asse z è stata scelta parallela all'impulso trasferito $\mathbf{q}$. La funzione di Bessel che compare nell'equazione precedente dipende dal modulo dell'impulso trasferito $k = |\mathbf{q}|$, e dal modulo del vettore spaziale $\mathbf{r}$, r. Effettuando la sostituzione indicata, (i dettagli del calcolo sono dati in Appendice C), l'equazione (3.41) diventa:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \;=\; & \langle\Psi_{J_fM_f}|\frac{e^2}{q^2}\{\sqrt{4\pi}\sum_J i^J\sqrt{2J+1}\left[l_0^{em}M_{J0}^{em} - l_3^{*em}L_{J0}^{em}\right] + \qquad (3.43)\\
& +\sqrt{2\pi}\sum_{J\,\geq 1} i^J\sqrt{2J+1}l_\lambda^{*em}\left[T_{JM}^{em,E} + \lambda T_{JM}^{em,M}\right]\} + \\
& -\frac{G}{2\sqrt{2}}\{\sqrt{4\pi}\sum_J i^J\sqrt{2J+1}\left[l_0^{nc}M_{J0}^{nc} - l_3^{*nc}L_{J0}^{nc}\right] + \\
& +\sqrt{2\pi}\sum_{J\,\geq 1} i^J\sqrt{2J+1}l_\lambda^{*nc}\left[T_{JM}^{nc,E} + \lambda T_{JM}^{nc,M}\right]\}|\Psi_{J_iM_i}\rangle \qquad \lambda = \pm 1
\end{aligned}$$

Nell'equazione (3.43) sono stati introdotti gli operatori multipolari di carica M_{J0}, longitudinale L_{J0}, trasversale elettrico T_{JM}^E e trasversale magnetico T_{JM}^M, associati alle quadri-correnti elettromagnetica e debole neutra, le cui espressioni sono date da:

$$\begin{aligned}
M_{J0}^I\left(k\right) &= \int j_J\left(kr\right)Y_{J0}\left(\theta,\phi\right)\widehat{J}_I^0\left(\mathbf{r}\right)d\mathbf{r} && (3.44)\\
L_{J0}^I\left(k\right) &= \frac{i}{k}\int \nabla j_J\left(kr\right)Y_{J0}\left(\theta,\phi\right)\cdot\widehat{\mathbf{J}}_I\left(\mathbf{r}\right)d\mathbf{r} && (3.45)\\
T_{JM}^{I,E}\left(k\right) &= \frac{1}{k}\int\left[\nabla\times j_J\left(kr\right)\mathbf{Y}_{JJ}^M\left(\theta,\phi\right)\right]\cdot\widehat{\mathbf{J}}_I\left(\mathbf{r}\right)d\mathbf{r} && (3.46)\\
T_{JM}^{I,M}\left(k\right) &= \int j_J\left(kr\right)\mathbf{Y}_{JJ}^M\left(\theta,\phi\right)\cdot\widehat{\mathbf{J}}_I\left(\mathbf{r}\right)d\mathbf{r} \qquad I = em, nc && (3.47)
\end{aligned}$$

La multipolarità J del generico operatore, è vincolata dalla conservazione del momento angolare:

$$|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f \tag{3.48}$$

Gli operatori multipolari definiti nelle equazioni (3.44)-(3.47) sono espressi come prodotto di una parte dipendente da r e una dipendente dalle variabili angolari $\hat{r} = (\theta,\phi)$. Le parti angolari degli operatori sono tensori sferici irriducibilli nello spazio di Hilbert nucleare, la dipendenza dalla terza componente del momento angolare può quindi essere valutata utilizzando il teorema di Wigner-Eckart [Edm57]:

$$\langle J_f, M_f \left| O_{JM} \right| J_i, M_i \rangle = (-)^{J-M} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \left\| O_J \right\| J_i \rangle \tag{3.49}$$

Nell'equazione precedente il termine $\langle J_f \left\| O_J \right\| J_i \rangle$ è l'elemento di matrice ridotto associato alla parte angolare del generico operatore nucleare O_{JM}, calcolato tra autostati del momento angolare.

Lo scopo è quello di esprimere il modulo quadro dell'ampiezza invariante di transizione $\mathcal{M}$, in termini degli elementi di matrice ridotti. Poiché non si è interessati alla polarizzazione del bersaglio, mediamo su tutte le possibili orientazioni dello spin nucleare nello stato iniziale e sommiamo su tutte le possibili orientazioni dello spin nucleare nello stato finale, ovvero:

$$\left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2 = \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left|\mathcal{M}\right|^2 \tag{3.50}$$

Lavorando ancora con il generico operatore O_{JM} otteniamo la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2J_i+1} \quad & \sum_{M_i} \sum_{M_f} \left| \left\langle \Psi_{J_f,M_f} \left| O_{JM} \right| \Psi_{J_i,M_i} \right\rangle \right|^2 = \qquad (3.51) \\ = \quad & \frac{1}{2J_i+1} \sum_{M_i M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & M' & M_i \end{pmatrix} \left| \left\langle \Psi_{J_f} \left\| O_J \right\| \Psi_{J_i} \right\rangle \right|^2 = \\ = \quad & \frac{1}{2J+1} \frac{1}{2J_i+1} \left| \left\langle \Psi_{J_f} \left\| O_J \right\| \Psi_{J_i} \right\rangle \right|^2 \end{aligned}$$

Il simbolo $\left\langle \Psi_{J_f} \left\| O_J \right\| \Psi_{J_i} \right\rangle$ indica che la parte angolare dell'elemento di matrice deve essere calcolata come elemento di matrice ridotto nella definizione (3.49) del teorema di Wigner-Eckart. Applicando al nostro caso il risultato della (3.51) , l'equazione (3.43) diventa:

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2 \quad = \quad & \frac{1}{2J_i+1} |\langle \Psi_{J_f}|| \frac{e^2}{q^2} \{ \sqrt{4\pi} \sum_J i^J \, [l_0^{em} M_J^{em} - l_3^{*em} L_J^{em}] + \qquad (3.52) \\ & + \sqrt{2\pi} \sum_{J \, \geq 1} i^J l_\lambda^{*em} \left[T_J^{em,E} + \lambda T_J^{em,M} \right] \} + \\ & - \frac{G}{2\sqrt{2}} \{ \sqrt{4\pi} \sum_J i^J \, [l_0^{nc} M_J^{nc} - l_3^{*nc} L_J^{nc}] + \\ & + \sqrt{2\pi} \sum_{J \, \geq 1} i^J l_\lambda^{*nc} \left[T_J^{nc,E} + \lambda T_J^{nc,M} \right] \} || \Psi_{J_i} \rangle |^2 \qquad \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$

Escludiamo dal calcolo di $\left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2$ il termine proporzionale a $\left(\frac{G}{2\sqrt{2}}\right)^2$, poiché, alle energie che stiamo considerando, è trascurabile rispetto al termine puramente elettromagnetico prorporzionale ad $\left(\frac{\alpha}{4\pi q}\right)^2$ ed al termine di interferenza proporzionale ad $\frac{\alpha}{4\pi q} \cdot \frac{G}{2\sqrt{2}}$.
È importante a questo punto, definire la parità degli operatori multipolari. Il calcolo della (3.52) è, infatti, reso più agevole se si individuano i termini che possono interferire senza violare le regole di selezione imposte dalla conservazione della parità degli stati nucleari. Ricordiamo, pertanto, che, a causa del carattere V-A dell'interazione debole neutra, l'operatore di quadricorrente nucleare $\widehat{J}^{\mu}_{nc}(\mathbf{r})$, definito nella (3.24), è decomponibile in un termine vettoriale $\widehat{J}^{\mu}_{V}(\mathbf{r})$, ed in un termine vettor-assiale $\widehat{J}^{\mu}_{A}(\mathbf{r})$:

$$\widehat{J}^{0}_{nc}(\mathbf{r}) = \widehat{J}^{0}_{V}(\mathbf{r}) + \widehat{J}^{0}_{A}(\mathbf{r}) \tag{3.53}$$

$$\widehat{\mathbf{J}}_{nc}(\mathbf{r}) = \widehat{\mathbf{J}}_{V}(\mathbf{r}) + \widehat{\mathbf{J}}_{A}(\mathbf{r}) \tag{3.54}$$

Gli operatori $\widehat{J}^{\mu}_{V}(\mathbf{r})$ e $\widehat{J}^{\mu}_{A}(\mathbf{r})$, hanno comportamento opposto sotto l'azione di inversione spaziale. Dalle (3.53) e (3.54) discende che gli operatori multipolari deboli neutri, si decompongono come segue:

$$\begin{aligned} M^{nc}_{J}(k) &= M^{V}_{J}(k) + M^{A}_{J}(k) & (3.55)\\ L^{nc}_{J}(k) &= L^{V}_{J}(k) + L^{A}_{J}(k) & (3.56)\\ T^{nc,E}_{J}(k) &= T^{V,E}_{J}(k) + T^{A,E}_{J}(k) & (3.57)\\ T^{nc,M}_{J}(k) &= T^{V,M}_{J}(k) + T^{A,M}_{J}(k) & (3.58) \end{aligned}$$

La parità degli operatori multipolari elettromagnetici e deboli neutri vettoriali è fissata dalla parità delle armoniche sferiche che compaiono nelle equazioni (3.44)-(3.47). Gli operatori multipolari vettor-assiali, riflettono il comportamento dell'operatore $\widehat{J}^{\mu}_{A}(\mathbf{r})$, pertanto hanno parità opposta a quella degli analoghi operatori deboli neutri vettoriali. In Tabella 3.1 sono riportate le parità dei vari operatori di multipolo.
Malgrado gli operatori $(M^{em}_{J0},\ M^{V}_{J0},\ L^{em}_{J0},\ L^{V}_{J0})$ e $(T^{em,E}_{JM},\ T^{V,E}_{JM})$ abbiano la stessa parità, non possono interferire. Ciò è dovuto al fatto che gli operatori trasversali $(T^{em,E}_{JM},\ T^{V,E}_{JM})$ hanno proiezione lungo l'asse z pari a ± 1, mentre gli operatori $(M^{em}_{J0},\ M^{V}_{J0},\ L^{em}_{J0},\ L^{V}_{J0})$ hanno proiezione nulla lungo l'asse z. Questo significa che gli operatori longitudinali e trasversali inducono transizioni a stati nucleari eccitati che differiscono nel numero quantico M_f.

Tabella 3.1: Parità degli operatori di multipolo

$M_{J0}^{em}, M_{J0}^{V}, L_{J0}^{em}, L_{J0}^{V}, T_{JM}^{em,E}, T_{JM}^{V,E}, T_{JM}^{A,M}$	$(-)^{J}$
$M_{J0}^{A}, L_{J0}^{A}, T_{JM}^{A,E}, T_{JM}^{em,M}, T_{JM}^{V,M}$	$(-)^{J+1}$

Per motivi analoghi gli operatori $(M_{J0}^{A},\ L_{J0}^{A})$ non interferiscono con gli operatori trasversali $(T_{JM}^{A,E},\ T_{JM}^{V,M})$. Ovviamente non c'è interferenza tra operatori di parità differente dato che popolano stati finali con diverse parità.
Da quanto detto risulta che gli operatori $(M_{J0}^{A},\ L_{J0}^{A})$ non interferiscono con gli altri operatori. Poiché noi trascuriamo i termini legati al quadrato dell'interazione debole proporzionali a G^2, nel nostro calcolo non saranno considerate transizioni indotte da questi due termini.

La conservazione della corrente elettromagnetica:

$$\partial_\mu J_{em}^{\mu}(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q_\mu J_{em}^{\mu}(x) = 0 \tag{3.59}$$

impone che valga la seguente relazione:

$$\omega J_{em}^{0}(x) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}_{em} \tag{3.60}$$

dove abbiamo indicato con $\omega = \epsilon - \epsilon' = E' - E$ l'energia persa dall'elettrone. Poiché abbiamo scelto l'asse z coincidente con la direzione dell'impulso trasferito, la (3.60) può essere scritta come:

$$J_{em}^{3} = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} J_{em}^{0} \tag{3.61}$$

Ne consegue che gli operatori multipolari di carica e longitudinale associati alla corrente elettromagnetica sono legati da:

$$L_J^{em}(k) = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} M_J^{em}(k) \tag{3.62}$$

L'ipotesi di corrente vettoriale conservata (CVC) [Wal75], secondo la quale la parte vettoriale della corrente debole neutra soddisfa:

$$\partial_\mu J_V^{\mu}(x) = 0 \tag{3.63}$$

consente di ottenere, in maniera del tutto analoga a quanto visto per la corrente elettromagnetica, la seguente relazione:

$$L_J^V(k) = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} M_J^V(k) \tag{3.64}$$

Utilizzando le relazioni (3.62) e (3.64), e ricordando che nel nostro caso non intervengono gli operatori longitudinali (M_{J0}^A, L_{J0}^A), possimo scrivere la (3.52) come segue:

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2 &= \frac{1}{2J_i+1}|\langle\Psi_{J_f}||\frac{e^2}{q^2}\{\sqrt{4\pi}\sum_J i^J\left[\left(l_0^{*em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*em}\right)M_J^{em}\right] + \\
&+\sqrt{2\pi}\sum_{J\ \geq 1} i^J l_\lambda^{*em}\left[T_J^{em,E} + \lambda T_J^{em,M}\right]\} + \\
&-\frac{G}{2\sqrt{2}}\{\sqrt{4\pi}\sum_J i^J\left[\left(l_0^{*nc} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*nc}\right)M_J^V\right] + \\
&+\sqrt{2\pi}\sum_{J\ \geq 1} i^J l_\lambda^{*nc}\left[T_J^{nc,E} + \lambda T_J^{nc,M}\right]\}||\Psi_{J_i}\rangle|^2 \qquad \lambda = \pm 1
\end{aligned} \tag{3.65}$$

La relazione precedente è stata ottenuta tenendo presente che le componenti temporali degli elementi di matrice leptonici, l_0, sono reali [Hal84], pertanto abbiamo sfruttato la prorpietà per cui $l_0 = l_0^*$.
Calcoliamo adesso il modulo quadro dell'ampiezza di transizione $\widetilde{\mathcal{M}}$, che, trascurando i termini proporzionali a G^2, assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2 = \frac{1}{2J_i+1}\{\frac{e^2}{q^2}[\sum_J\left|l_0^{*em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*em}\right|^2 4\pi|\langle\Psi_{J_f}||M_J^{em}||\Psi_{J_i}\rangle|^2 + \\
&+2\pi\sum_{J\ \geq 1} l_\lambda^{*em}l_\lambda^{em}|\langle\Psi_{J_f}||T_J^{em,E} + \lambda T_J^{em,M}||\Psi_{J_i}\rangle|^2] + \\
&-2Re\frac{Ge^2}{2\sqrt{2}q^2}[4\pi\sum_J(l_0^{*em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*em})(l_0^{*nc} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*nc})^*\langle\Psi_{J_f}||M_J^{em}||\Psi_{J_i}\rangle\langle\Psi_{J_f}||M_J^V||\Psi_{J_i}\rangle|^* + \\
&+2\pi\sum_{J\ \geq 1} l_\lambda^{*em}l_\lambda^{nc}\langle\Psi_{J_f}||T_J^{em,E} + \lambda T_J^{em,M}||\Psi_{J_i}\rangle\langle\Psi_{J_f}||T_J^{nc,E} + \lambda T_J^{nc,M}||\Psi_{J_i}\rangle^*]\} \qquad \lambda = \pm 1
\end{aligned} \tag{3.66}$$

L'equazione precedente può essere ulteriormente semplificata se sfruttiamo la seguente relazione da applicare ai termini trasversali:

$$\sum_{\lambda=\pm 1} v_\lambda^* u_\lambda\,(a + \lambda b)\,(c + \lambda d)^* = (ac^* + bd^*)\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - v_3^* u_3) - i\,(bc^* + ad^*)\,(\mathbf{v}\times\mathbf{u})_3 \tag{3.67}$$

In particolare, nel caso si considerino i termini trasversali elettromagnetici, identifichiamo i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ con $\mathbf{l}^{em}$, i termini $a = c$ con $\langle\Psi_{J_f}||T_J^{em,E}||\Psi_{J_i}\rangle$ e i termini $b = d$

con $\langle\Psi_{J_f}||T_J^{em,M}||\Psi_{J_i}\rangle$; nel caso si considerino i termini trasversali di interferenza identifichiamo i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ con gli elementi di matrice leptonici $\mathbf{l}^{em}$ e $\mathbf{l}^{nc}$, mentre i termini a, b, c e d sono sono rispettivamente rappresentativi degli elementi $\langle\Psi_{J_f}||T_J^{em,E}||\Psi_{J_i}\rangle$, $\langle\Psi_{J_f}||T_J^{em,M}||\Psi_{J_i}\rangle$, $\langle\Psi_{J_f}||T_J^{nc,E}||\Psi_{J_i}\rangle$, $\langle\Psi_{J_f}||T_J^{nc,M}||\Psi_{J_i}\rangle$. In definitiva si ottiene la seguente espressione per $\left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2$:

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\mathcal{M}}\right|^2 &= \frac{e^4}{q^4}\left\{\left|l_0^{*em}-\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*em}\right|^2 F_L(|\mathbf{q}|)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{l}^{em}\cdot\mathbf{l}^{em}-l_3^{*em}l_3^{em}\right)F_T(|\mathbf{q}|)\right\}+ \\ &\quad -4Re\frac{G}{2\sqrt{2}}\frac{e^2}{q^2}\{\left(l_0^{*em}-\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*em}\right)\left(l_0^{*nc}-\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}l_3^{*nc}\right)^* F_L^{AV}(|\mathbf{q}|)+ \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\mathbf{l}^{em}\cdot\mathbf{l}^{nc}-l_3^{*em}l_3^{nc}\right)F_T^{AV}(|\mathbf{q}|)-\frac{i}{2}\left(\mathbf{l}^{em}\times\mathbf{l}^{nc}\right)_3 F_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)\}\end{aligned} \tag{3.68}$$

Nell'equazione precedente abbiamo denotato con $F_L(|\mathbf{q}|)$ e $F_T(|\mathbf{q}|)$ le risposte nucleari elettromagnetiche. In particolare $F_L(|\mathbf{q}|)$ è il fattore di forma longitudinale legato alla distribuzione di carica nucleare e $F_T(|\mathbf{q}|)$ è il fattore di forma trasversale generato della distribuzione di corrente del nucleo:

$$F_L(|\mathbf{q}|) = \frac{1}{2J_i+1}4\pi\sum_J\left|\left\langle\Psi_{J_f}\left\|M_J^{em}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\right|^2 \tag{3.69}$$

$$F_T(|\mathbf{q}|) = \frac{1}{2J_i+1}4\pi\sum_{J\ \geq 1}\left[\left|\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{emE}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{emM}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\right|^2\right] \tag{3.70}$$

Le risposte $F_L^{AV}(|\mathbf{q}|)$, $F_T^{AV}(|\mathbf{q}|)$ ed $F_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)$ sono dovute all'interferenza tra contributo elettromagnetico e contributo debole neutro e sono date dalle seguenti espressioni:

$$F_L^{AV}(|\mathbf{q}|) = \frac{1}{2J_i+1}2\pi\sum_J\left\langle\Psi_{J_f}\left\|M_J^{em}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\left\langle\Psi_{J_f}\left\|M_J^{V}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle^* \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}F_T^{AV}(|\mathbf{q}|) &= \frac{1}{2J_i+1}2\pi\sum_{J\ \geq 1}[\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{em,E}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{V,E}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle^*+ \\ &\quad +\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{em,M}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{V,M}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle^*]\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}F_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|) &= \frac{1}{2J_i+1}2\pi\sum_{J\ \geq 1}[\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{em,M}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{A,E}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle^*+ \\ &\quad +\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{em,E}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle\left\langle\Psi_{J_f}\left\|T_J^{A,M}\right\|\Psi_{J_i}\right\rangle^*]\end{aligned} \tag{3.73}$$

Le informazioni inerenti al nucleo, sono tutte contenute nei fattori di forma nucleari appena definiti.

3.4 Tensore leptonico

In questo paragrafo ci proponiamo di calcolare i termini che compaiono nella (3.68) associati all'elettrone. Gli elementi di matrice leptonici l_μ^{em} e l_μ^{nc} sono stati definiti nelle equazioni (3.19) e (3.20) ed hanno le seguenti espressioni:

$$l_\mu^{em} = \overline{u}\left(\mathbf{p}'\right)\gamma_\mu P_h u\left(\mathbf{p}\right) \tag{3.74}$$

$$l_\mu^{nc} = c_V \overline{u}\left(\mathbf{p}'\right)\gamma_\mu P_h u\left(\mathbf{p}\right) + c_A \overline{u}\left(\mathbf{p}'\right)\gamma_\mu \gamma_5 P_h u\left(\mathbf{p}\right) \tag{3.75}$$

Determiniamo, innanzitutto, le espressioni dei tensori leptonici puramente elettromagnetico $L_{\mu\nu}^{em}$ e di interferenza $L_{\mu\nu}^{em,nc}$ definiti da:

$$L_{\mu\nu}^{em} = l_\mu^{*em} l_\nu^{em} \tag{3.76}$$

$$L_{\mu\nu}^{em,nc} = l_\mu^{*em} l_\nu^{nc} \tag{3.77}$$

In seguito calcoleremo esplicitamente i termini che ci interessano.
Poiché non siamo interessati alla polarizzazione dell'elettrone diffuso, sommiamo sulle possibili configurazioni finali di spin dell'elettrone:

$$L_{\mu\nu}^{em} = \sum_{s'} l_\mu^{*em} l_\nu^{em} \tag{3.78}$$

$$L_{\mu\nu}^{em,nc} = \sum_{s'} l_\mu^{*em} l_\nu^{nc} \tag{3.79}$$

Con $s\prime$ abbiamo denotato la variabile di spin dell'elettrone diffuso. L'introduzione degli operatori di proiezione per la descrizione degli stati polarizzati dell'elettrone è estremamente vantaggiosa. Infatti, possiamo sommare anche sugli stati di spin dell'elettrone incidente perché è l'azione dell'operatore P_h a garantire la selezione degli stati longitudinalmente polarizzati tra tutte le possibili configurazioni iniziali. Questo ci permette di utilizzare le consuete tecniche delle tracce (vedi Appendice A) per calcolare i tensori leptonici. Pertanto lo scopo è di determinare:

$$L_{\mu\nu}^{em} = \sum_{ss'} l_\mu^{*em} l_\nu^{em} \tag{3.80}$$

$$L_{\mu\nu}^{em,nc} = \sum_{ss'} l_\mu^{*em} l_\nu^{nc} \tag{3.81}$$

Chiaramente non si deve mediare sulle configurazioni di spin dell'elettrone incidente, poiché questo si trova in una ben precisa configurazione che è quella determinata da P_h; in particolare avrà spin concorde o opposto al moto a seconda che h sia pari a ± 1. Per il calcolo utilizziamo le proprietà di commutazione delle matrici γ (vedi Appendice A), le proprietà degli operatori di proiezione (vedi (2.14)), e le relazioni di completezza date da:

$$\sum_{ss'} \overline{u}(\mathbf{p})\, u(\mathbf{p}) = \not{p} + m \tag{3.82}$$

Il tensore elettromagnetico assume, pertanto, la seguente espressione:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}^{em} &= \sum_{ss'} \left[\overline{u}(\mathbf{p}')\, \gamma_\mu P_h u(\mathbf{p})\right]^* \left[\overline{u}(\mathbf{p}')\, \gamma_\nu P_h u(\mathbf{p})\right] = \\ &= \sum_{s} u(\mathbf{p})\, \overline{u}(\mathbf{p})\, \gamma_\mu P_h \sum_{s'} u(\mathbf{p}')\, \overline{u}(\mathbf{p}')\, \gamma_\nu P_h = \\ &= tr\left[\not{p}\gamma_\mu \not{p}'\gamma_\nu P_h\right] = \\ &= 2\left[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p') - hi\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p^\alpha p^{\beta\prime}\right] \end{aligned} \tag{3.83}$$

Il risultato precedente è stato ricavato trascurando i termini proporzionali alla massa dell'elettrone. Per il calcolo del tensore leptonico di interferenza osserviamo che il termine $\gamma_\mu \gamma_5 P_h$ che compare nella (3.75) può essere riscritto come segue utilizzando la proprietà $(\gamma_5)^2 = 1$:

$$\gamma_\mu \gamma_5 P_h = \gamma_\mu \gamma_5 \frac{(1 + h\gamma_5)}{2} = h\gamma_\mu P_h \tag{3.84}$$

Inserendo la (3.84) nella (3.75) si ottiene la seguente espressione per l'elemento di matrice leptonico debole neutro:

$$\begin{aligned} l_\mu^{nc} &= (c_V + hc_A)\, \overline{u}(\mathbf{p}')\, \gamma_\mu P_h u(\mathbf{p}) = \\ &= (c_V + hc_A)\, l_\mu^{em} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dalla (3.85) discende che i tensori elettromagnetico e di interferenza sono legati dalla relazione:

$$L_{\mu\nu}^{em,nc} = \sum_{ss'} l_\mu^{*em} l_\nu^{nc} = (c_V + hc_A) \sum_{ss'} l_\mu^{*em} l_\nu^{em} = (c_V + hc_A)\, L_{\mu\nu}^{em} \tag{3.86}$$

L'espressione precedente consente di determinare tutti i termini del tensore elettromagnetico. Il calcolo esplicito dei termini leptonici che compaiono nella (3.68) è presentato in Appendice B. Riportiamo i risultati ottenuti in regime ultrarelativistico per il tensore puramente elettromagnetico. I termini di interferenza si ottengono dagli analoghi elettromagnetici anteponendo il fattore $(c_V + hc_A)$:

$$\sum_{ss'} \quad \left| l_0^{*em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} l_3^{*em} \right|^2 \longrightarrow \frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} 4\epsilon\epsilon' \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{3.87}$$

$$\sum_{ss'} \frac{1}{2} \quad (\mathbf{l}^{em} \cdot \mathbf{l}^{em} - l_3^{*em} l_3^{em}) \longrightarrow 4\epsilon\epsilon' \left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2\,|\mathbf{q}|^2} \cos^2\frac{\theta}{2} \right) \tag{3.88}$$

$$\sum_{ss'} \quad -\frac{i}{2} \left(\mathbf{l}^{em} \times \mathbf{l}^{em}\right)_3 \longrightarrow 4h \frac{\epsilon\epsilon'}{|\mathbf{q}|} \sin\frac{\theta}{2} \left(|\mathbf{q}|^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - q^2 \cos^2\frac{\theta}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.89}$$

L'espressione del modulo quadro di $\widetilde{\mathcal{M}}$ si ottiene dalla banale sostituzione delle relazioni precedenti nella (3.68).

3.5 Sezione d'urto di elettroni longitudinalmente polarizzati su nucleo

A questo punto siamo in grado di dare l'espressione della sezione d'urto del processo di diffusione inclusivo di elettroni longitudinalmente polarizzati da nuclei. Sostituendo i risultati ricavati nei paragrafi precedenti nella relazione (3.33) otteniamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^h &= \sigma_M \{ [v_L F_L(|\mathbf{q}|) + v_T F_T(|\mathbf{q}|)] + \\ -Re \quad (c_V + hc_A) & \frac{G\,|q^2|}{2\pi\alpha\sqrt{2}} \left[v_L F_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + v_T F_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + h v_{T'} F_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|) \right] \} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Nell'espressione precedente abbiamo definito con σ_M la sezione d'urto di Mott associata ad un processo di diffusione su un bersaglio puntiforme di spin nullo:

$$\sigma_M = \left(\frac{\alpha \cos\frac{\theta}{2}}{2\epsilon \sin^2\frac{\theta}{2}} \right)^2 \tag{3.91}$$

I termini v_L, v_T e $v_{T'}$ sono i fattori cinematici associati all'elettrone:

$$v_L = \frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} \tag{3.92}$$

$$v_T = \left(\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2\,|\mathbf{q}|^2} \right) \tag{3.93}$$

$$v_{T'} = \tan\frac{\theta}{2}\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}} \tag{3.94}$$

Come ci si aspettava solo il termine di interferenza è dipendente dallo stato di polarizzazione dell'elettrone incidente. Il termine elettromagnetico è identico a quello che si ottiene nel caso di diffusione di elettroni non polarizzati da nuclei.

Capitolo 4

Modelli nucleari

L'espressione della sezione d'urto presentata nel capitolo precedente, richiede il calcolo degli elementi di matrice di transizione nucleare. Noi descriveremo il nucleo come un sistema non relativistico a molticorpi, ed utilizzeremo il nucleone come entità fondamentale.
In quest'ottica le correnti elettromagnetiche e deboli del nucleo sono somma delle correnti dei singoli nucleoni.
Faremo l'ipotesi che i nucleoni del nucleo interagiscano con la sonda esterna (fotone o Z^0) con le stesse costanti di accoppiamento, fattori di forma, ed operatori, dei nucleoni liberi. Questa approssimazione nota, come Approssimazione degli Impulsi (IA), è la base della descrizione a molticorpi del nucleo. Tutti gli effetti delle interazioni forti sono inseriti nella descrizione a molticorpi degli stati nucleari.
In questo capitolo presenteremo l'espressione non relativistica degli operatori elettromagnetici e deboli e poi i due modelli utilizzati nei nostri calcoli per descrivere lo stato eccitato del nucleo.

4.1 Operatori di corrente nucleare

Nell'Approssimazione degli Impulsi, il generico operatore di corrente nucleare $\hat{J}_{JM}$, è espresso come la somma dei contributi delle correnti dei singoli nucleoni:

$$\hat{J}_{JM}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{A} \int \hat{J}_{JM}(\mathbf{r}_i)\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \tag{4.1}$$

dove $\mathbf{r}_i$ è la coordinata dell'i-esimo nucleone e $\hat{J}_{JM}(\mathbf{r}_i)$ è l'operatore di corrente associato al singolo nucleone.

Nei nostri calcoli utilizzeremo solo operatori elettromagnetici e deboli ad un corpo. Esistono anche operatori elettromagnetici a due corpi dovuti allo scambio di mesoni tra i nucleoni. Fenomeni dovuti a correnti elettromagnetiche di scambio mesonico (MEC), sono stati identificati in sistemi a pochi nucleoni ($A = 2, 3, 4$) [Car98]. L'identificazione di analoghi fenomeni in nuclei più pesanti è ancora argomento di discussione. Sembra comunque assodato che per gli stati eccitati di cui discuteremo, il ruolo delle MEC sia trascurabile [Co90].

Nel nostro calcolo ipotizziamo che gli operatori di corrente nucleare siano dati dalla somma degli operatori di corrente associati a nucleoni liberi. Questi ultimi sono stati definiti nelle equazioni (2.70)-(2.72) ed hanno le seguenti espressioni:

$$< P'|\widehat{J}_\mu^{em;N}(0)|P >= \overline{u}(\mathbf{P})\left[\gamma_\mu F_1^N\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^\nu F_2^N\left(q^2\right)\right]u(\mathbf{P}) \tag{4.2}$$

$$< P'|\widehat{J}_\mu^{V;N}(0)|P >= \overline{u}(\mathbf{P})\left[\gamma_\mu \widetilde{F}_1^N\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^\nu \widetilde{F}_2^N\left(q^2\right)\right]u(\mathbf{P}) \tag{4.3}$$

$$< P'|\widehat{J}_\mu^{A;N}(0)|P >= \overline{u}(\mathbf{P})\left[\gamma_\mu \widetilde{G}_A^N\left(q^2\right) + \frac{i}{2M_N}\sigma_{\mu\nu}q^\nu \widetilde{G}_T^N\left(q^2\right)\right]\gamma_5 u(\mathbf{P}) \tag{4.4}$$

Gli operatori di corrente elettromagnetica, $\widehat{J}_\mu^{em;N}(0)$, di corrente vettoriale debole neutra, $\widehat{J}_\mu^{V;N}(0)$, e di corrente vettor-assiale debole neutra, $\widehat{J}_\mu^{A;N}(0)$, agiscono sugli stati nucleonici $|P>$, che descrivono il moto relativistico libero di una particella fermionica. Poiché i modelli nucleari che descriveremo trattano i nucleoni in maniera non relativistica, è necessario ottenere l'espressione degli operatori di corrente nucleonica valida in regime non relativistico.

Il confronto con le sezioni d'urto sperimentali è più immediato se si utilizzano i fattori di forma di Sachs.

Il legame tra i fattori di forma di Sachs $G_E^N(q^2)$, $G_M^N(q^2)$, $\widetilde{G}_E^N(q^2)$ e $\widetilde{G}_M^N(q^2)$ e quelli di Dirac-Pauli $F_1^N(q^2)$, $F_2^N(q^2)$, $\widetilde{F}_1^N(q^2)$, $\widetilde{F}_2^N(q^2)$ è dato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} G_E^N &= F_1^N - \tau F_2^N & \qquad \tau = \frac{|q^2|}{4M_N^2} \\ G_M^N &= F_1^N + F_2^N & \qquad N = p; n \end{aligned} \tag{4.5}$$

Relazioni identiche valgono per i fattori di forma di Sachs deboli neutri vettoriali $\widetilde{G}_E^N\left(q^2\right)$ e $\widetilde{G}_M^N\left(q^2\right)$ e per i fattori di forma strani $G_E^q\left(q^2\right)$ e $G_M^q\left(q^2\right)$. Pertanto la relazione definita in (2.75) diventa:

$$\widetilde{G}_{E,M}^{p,n} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) G_{E,M}^{p,n} - G_{E,M}^{n,p} - G_{E,M}^{q} \tag{4.6}$$

Usando i fattori di forma di Sachs, nello spazio degli impulsi, le espressioni non relativistiche degli operatori di corrente dell'i-esimo nucleone sono date da [Ama96]:

$$\hat{J}_0^{em;N}(\mathbf{q}) = G_E^N\left(q^2\right) \tag{4.7}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{em;N}(\mathbf{q}) = G_E^N\left(q^2\right)\frac{2\mathbf{P}_i+\mathbf{q}}{2M_N} + iG_M^N\left(q^2\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}_i\times\mathbf{q}}{2M_N} \tag{4.8}$$

$$\hat{J}_0^{V;N}(\mathbf{q}) = \widetilde{G}_E^N\left(q^2\right) \tag{4.9}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{V;N}(\mathbf{q}) = \widetilde{G}_E^N\left(q^2\right)\frac{2\mathbf{P}_i+\mathbf{q}}{2M_N} + i\widetilde{G}_M^N\left(q^2\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}_i\times\mathbf{q}}{2M_N} \tag{4.10}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{A;N}(\mathbf{q}) = G_A^N\left(q^2\right)\boldsymbol{\sigma}_i \tag{4.11}$$

Queste espressioni sono state ottenute sviluppando gli elementi di matrice (4.2)-(4.4) in potenze di $\frac{q}{2M}$ e $\frac{P}{2M}$ e considerando i termini al primo ordine. Dobbiamo notare che la procedura non è priva di ambiguità [Bot02], anche se sulle espressioni (4.7)-(4.11) ottenute al primo ordine c'è accordo tra i vari metodi utilizzati. Osserviamo che gli operatori vettoriali $\hat{\mathbf{J}}^{em;N}(\mathbf{q})$ e $\hat{\mathbf{J}}^{V;N}(\mathbf{q})$ sono costituiti da un termine di tipo convettivo proporzionale a G_E^N o $\widetilde{G}_E^N$ e da un termine di magnetizzazione proporzionale a G_M^N o $\widetilde{G}_M^N$.

Possiamo adesso costruire gli operatori nucleari utilizzando la relazione (4.1):

$$\hat{J}_0^{em}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{A}\left(G_E^p\frac{1+\tau_3^i}{2} + G_E^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}}^{em}(\mathbf{q}) = & -i\sum_{i=1}^{A}\left(G_E^p\frac{1+\tau_3^i}{2} + G_E^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\frac{\nabla_i}{2M_i}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} + \\ & + \sum_{i=1}^{A}\left(G_M^p\frac{1+\tau_3^i}{2} + G_M^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\frac{\nabla_i\times\boldsymbol{\sigma}_i}{2M_i}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\hat{J}_0^{V}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{A}\left(\widetilde{G}_E^p\frac{1+\tau_3^i}{2} + \widetilde{G}_E^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{J}}^V(\mathbf{q}) &= -i\sum_{i=1}^{A}\left(\widetilde{G}_E^p\frac{1+\tau_3^i}{2}+\widetilde{G}_E^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\frac{\nabla_i}{2M_i}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}+ \qquad (4.15)\\
&+\sum_{i=1}^{A}\left(\widetilde{G}_M^p\frac{1+\tau_3^i}{2}+\widetilde{G}_M^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\frac{\nabla_i\times\boldsymbol{\sigma}_i}{2M_i}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}\\
\hat{\mathbf{J}}^A(\mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^{A}\left(\widetilde{G}_A^p\frac{1+\tau_3^i}{2}+\widetilde{G}_A^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)\int\boldsymbol{\sigma}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

dove negli operatori di corrente abbiamo identificato l'operatore $i\nabla$ con l'impulso trasferito $\mathbf{q}$ come indicato in [Wal95].
Nelle equazioni precedenti gli operatori $\frac{1+\tau_3^i}{2}$ e $\frac{1-\tau_3^i}{2}$ determinano la natura dello stato di singola particella. In particolare, agiscono sugli spinori di Pauli dello spazio dell'isospin e quindi sono pari, rispettivamente ad 1 e 0 se lo stato è protonico ed a 0 e 1 se lo stato è neutronico. Nel seguito indicheremo semplicemente con $G_{E,M}^N$ e $\widetilde{G}_{E,M,A}^N$ i termini definiti in parentesi tonde ricordando che la struttura operatoriale corretta è data da $\left(G^p\frac{1+\tau_3^i}{2}+G^n\frac{1-\tau_3^i}{2}\right)$.

4.2 Espressione degli operatori multipolari

La specificazione degli operatori di corrente nucleare permette di determinare le espressioni degli operatori di multipolo definiti nelle equazioni (3.44)-(3.47).
Questi sono ottenuti sostituendo le relazioni (4.12) -(4.16) nelle espressioni (3.44)-(3.47). Utilizzando le proprietà delle armoniche sferiche definite in Appendice C, otteniamo le seguenti espressioni per gli operatori di multipolo elettromagnetici:

$$\begin{aligned}
M_{J0}^{em}(k) &= \sum_{i=1}^{A}G_E^N\left(k^2\right)j_J(kr_i)\,Y_{JM}(\hat{r}_i) \qquad (4.17)\\
T_{JM}^{em,E}(k) &= \sum_{i=1}^{A}[-\frac{G_E^N(k^2)}{M_N}\sum_{s=\pm1}\frac{s\sqrt{J+\delta_{s,-1}}}{\hat{J}}j_{J+s}(kr_i)\,\mathbf{Y}_{J+s,J}(\hat{r}_i)\cdot\nabla_i+ \qquad (4.18)\\
&+k\frac{G_M^N(k^2)}{M_N}j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}(\hat{r}_i)\cdot\boldsymbol{\sigma}_i]\\
T_{JM}^{em,M}(k) &= \sum_{i=1}^{A}[-i\frac{G_E^N(k^2)}{M_N}j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}(\hat{r}_i)\cdot\nabla_i+ \qquad (4.19)\\
&-ik\frac{G_M^N(k^2)}{2M_N}\sum_{s=\pm1}\frac{s\sqrt{J+\delta_{s,-1}}}{\hat{J}}j_{J+s}(kr_i)\,\mathbf{Y}_{J+s,J}(\hat{r}_i)\cdot\boldsymbol{\sigma}_i]
\end{aligned}$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo denotato con il simbolo $\hat{J}$ il fattore $\sqrt{2J+1}$, inoltre abbiamo utilizzato la convenzione $q^2 = \omega^2 - |\mathbf{q}|^2 = \omega^2 - k^2$. Abbiamo indicato la dipendenza dei fattori di forma G dal momento come k^2. In realtà la dipendenza è da q^2. Dato che nei nostri calcoli l'energia trasferita ω, rimarrà costante per ogni singolo stato eccitato che considereremo, i fattori di G dipendono solo da k^2.
Abbiamo trascurato di definire le espressioni degli operatori di multipolo vettoriali associati alla corrente debole neutra (M_{J0}^V, $T_{JM}^{V,E}$ e $T_{JM}^{V,M}$), poiché si ottengono dalle relazioni (4.17)-(4.19) sostituendo ai fattori di forma $G_{E,M}^N$ i fattori di forma $\widetilde{G}_{E,M}^N$.

Calcoliamo le espressioni degli operatori di multipolo trasversali $T_{JM}^{A,E}$ e $T_{JM}^{A,M}$, associati alla corrente vettor-assiale debole neutra. A tale scopo ricordiamo che le espressioni degli operatori di multipolo trasversali elettrico e magnetico definiti nelle (3.44)-(3.47) per operatori puntiformi, sono:

$$
\begin{aligned}
T_{JM}^{E}(k) &= \frac{1}{k}\int \left[\nabla\times j_J(kr)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r})\right]\cdot \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \qquad (4.20)\\
T_{JM}^{M}(k) &= \int j_J(kr)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r})\cdot \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Per ottenere gli operatori multipolari $T_{JM}^{A,E}$ e $T_{JM}^{A,M}$ dobbiamo inserire nelle equazioni precedenti l'espressione dell'operatore di corrente nucleare $\widehat{\mathbf{J}}^A(\mathbf{r})$ definito nell'equazione (4.16) ottenendo per l'operatore $T_{JM}^{A,E}$, la seguente espressione:

$$
T_{JM}^{A,E}(k) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{A}\widetilde{G}_A^N\left(k^2\right)\int\left[\nabla\times j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r}_i)\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{r} \qquad (4.22)
$$

Utilizziamo la relazione (C.7), avendo identificato il vettore $\mathbf{a}$ con $\boldsymbol{\sigma}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$ ed il vettore $\mathbf{b}$ con $j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r}_i)$:

$$
\begin{aligned}
T_{JM}^{A,E}(k) &= \sum_{i=1}^{A}[\frac{1}{k}\widetilde{G}_A^N\left(k^2\right)\{\int\left[\nabla\cdot j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r}_i)\right]\times\boldsymbol{\sigma}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{r} \qquad (4.23)\\
&\quad + \int\left[j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r}_i)\right]\cdot\nabla\times\boldsymbol{\sigma}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{r}\}]
\end{aligned}
$$

Dalla relazione (C.12) discende che il primo membro dell'equazione precedente è nullo. Pertanto l'espressione generale dell'operatore $T_{JM}^{A,E}(k)$ è data da:

$$
T_{JM}^{A,E}(k) = \sum_{i=1}^{A}\frac{1}{k}\widetilde{G}_A^N\left(k^2\right)\int\left[j_J(kr_i)\,\mathbf{Y}_{JJ}^{M}(\hat{r}_i)\right]\cdot\nabla\times\boldsymbol{\sigma}_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{r} \qquad (4.24)
$$

Calcoliamo adesso l'espressione dell'operatore di multipolo trasversale magnetico $\left(T_{JM}^{em,M}(k)\right)_{mag}$ associato alla corrente elettromagnetica di magnetizzazione. Questa si ottiene inserendo nella (4.21) l'espressione dell'operatore di corrente nucleare elettromagnetica di magnetizzazione, definita nella (4.13):

$$\left(T_{JM}^{em,M}(k)\right)_{mag} = \sum_{i=1}^{A} \frac{G_M^N(k^2)}{2M_N} \int j_J(kr_i)\, \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{r}_i) \cdot \nabla_i \times \boldsymbol{\sigma}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\, d\mathbf{r} \tag{4.25}$$

Dalle (4.24) e (4.25) discende la seguente relazione:

$$T_{JM}^{A,E}(k) = \frac{2M_N}{k} \frac{\widetilde{G}_A^N(k^2)}{G_M^N(k^2)} \left(T_{JM}^{em,M}(k)\right)_{mag} \tag{4.26}$$

Consideriamo adesso l'operatore di multipolo trasversale magnetico $T_{JM}^{A,M}(k)$. Sostituendo la relazione (4.16) nella (4.21) e integrando in $d\mathbf{r}$ otteniamo:

$$T_{JM}^{A,M}(k) = \sum_{i=1}^{A} \widetilde{G}_A^N\left(k^2\right) j_J(kr_i)\, \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{r}_i) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \tag{4.27}$$

Calcoliamo esplicitamente l'espressione dell'operatore $\left(T_{JM}^{em,E}(k)\right)_{mag}$ che si ottiene sostituendo la definizione di corrente elettromagnetica di magnetizzazione (vedi equazione (4.13)) nella (4.20). Prima di effettuare tale sostituzione, semplifichiamo la forma dell'operatore $T_{JM}^{E}(k)$ definito nella (4.20), che, utilizzando la relazione (C.11), diventa:

$$T_{JM}^{E}(k) = -i \sum_{s=\pm 1} s \frac{\sqrt{J+\delta_{s,-1}}}{\hat{J}} \int \left[j_{J+s}(kr)\, \mathbf{Y}_{J+s,J}^M(\hat{r})\right] \cdot \widehat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \tag{4.28}$$

Effettuando adesso la sostituzione indicata e integrando per parti otteniamo:

$$\left(T_{JM}^{em,E}(k)\right)_{mag} = \sum_{i=1}^{A} -i \frac{G_M^N(k^2)}{2M_N} \sum_{s=\pm 1} s \frac{\sqrt{J+\delta_{s,-1}}}{\hat{J}} \nabla_i \times \left[j_{J+s}(kr_i)\, \mathbf{Y}_{J+s,J}^M(\hat{r}_i)\right] \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \tag{4.29}$$

Utilizzando nuovamente la relazione (C.11), l'equazione precedente diventa:

$$\left(T_{JM}^{em,E}(k)\right)_{mag} = \sum_{i=1}^{A} k \frac{G_M^N(k^2)}{2M_N} j_J(kr_i)\, \mathbf{Y}_{JJ}^M(\hat{r}_i) \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \tag{4.30}$$

Dalle relazioni (4.27) e (4.30) discende che:

$$T_{JM}^{A,M}(k) = \frac{2M_N}{k} \frac{\widetilde{G}_A^N(k^2)}{G_M^N(k^2)} \left(T_{JM}^{em,E}(k)\right)_{mag} \tag{4.31}$$

Le relazioni (4.26) e (4.31), mostrano che gli operatori di multipolo trasversali associati alla corrente vettor-assiale debole neutra, possono essere espressi in termini degli operatori di multipolo elettromagnetici.

4.3 Modello a particelle indipendenti

Nei paragrafi precedenti abbiamo definito le espressioni degli operatori da utilizzare nell'ambito della descrizione del nucleo come sistema non relativistico a molticorpi. Nei paragrafi che seguono specifichiamo i due modelli nucleari utilizzati nei calcoli. L'Hamiltoniana non relativistica che descrive un sistema composto da A nucleoni interagenti è data da:

$$H = \sum_{i=1}^{A} T_i + \sum_{i<j} V_{i,j} \tag{4.32}$$

nell'equazione precedente abbiamo denotato con T_i l'energia cinetica dell'i-esima particella e con $V_{i,j}$ l'interazione tra due nucleoni. Non consideriamo la presenza di interazioni a tre o più corpi. Sommando e sottraendo il termine ad un corpo U_i, che descrive l'interazione tra l'i-esimo nucleone ed un generico campo medio, la (4.32) può essere riscritta come:

$$H = H_0 + V_{res} \tag{4.33}$$

dove abbiamo indicato con H_0 la parte ad un corpo dell'Hamiltoniana nucleare e con V_{res} l'interazione residua, termini dati rispettivamente da:

$$H_0 = \sum_{i=1}^{A} h_i = \sum_{i=1}^{A} (T_i + U_i) \tag{4.34}$$

$$V_{res} = \sum_{i<j} V_{i,j} - \sum_{i=1}^{A} U_i \tag{4.35}$$

Le Hamiltoniane h_i , generano una base ortonormale di funzioni d'onda di singola particella $|\phi_i>$:

$$h_i|\phi_i> = \epsilon_i|\phi_i> \tag{4.36}$$

dove abbiamo indicato con ϵ_i l'energia di singola particella.

Nel modello a strati il nucleo è descritto dalla sola Hamiltoniana H_0 per cui l'equazione di Schrödinger è:

$$H_0|\Phi_n>=E_n|\Phi_n> \tag{4.37}$$

Nell'equazione precedente la funzione d'onda nucleare $|\Phi_n>$, dipendente dalle A coordinate nucleoniche, è data dal prodotto antisimmetrizzato di funzioni $|\phi_i>$, detto determinante di Slater:

$$|\Phi_n>=\frac{1}{\sqrt{A!}}\prod_{i=1}^{A}|\phi_i> \tag{4.38}$$

Il modello a campo medio riesce a riprodurre la sequenza di numeri magici, i momenti angolari dei nuclei pari-dispari, le energie di singola particella e la sequenza dei livelli di singola particella vicino alla superficie di Fermi. Un potenziale medio U_i, che riesce a descrivere tutte queste proprietà ha la seguente espressione generale:

$$U_i=U\left(r_i\right)+U_{LS}\left(r_i\right)\mathbf{l}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}_i+U_C\left(r_i\right) \tag{4.39}$$

dove $U\left(r_i\right)$ rappresenta un termine puramente scalare, il secondo termine della (4.39) è detto termine di spin-orbita e l'ultimo è il termine Coulombiano attivo solo nel caso in cui il nucleone considerato sia un protone.

Nei nostri calcoli abbiamo usato un andamento tipo Woods-Saxon per il termine scalare:

$$U\left(r_i\right)=\frac{V_0}{1+\exp\left(r_i-R\right)/a_0} \tag{4.40}$$

dove R, che rappresenta il raggio nucleare, V_0 ed a_0 sono parametri da fissare. Per il termine di spin-orbita è stata scelta la seguente parametrizzazione:

$$U_{LS}\left(r_i\right)=\frac{1}{m_\pi^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{V_{LS}}{1+\exp\left(r_i-R_{LS}\right)/a_{LS}}\right) \tag{4.41}$$

dove abbiamo indicato con m_π la massa del pione. Anche in questo caso V_{LS}, R_{LS} e a_{LS} sono parametri da fissare.

Per il potenziale Coulombiano abbiamo utilizzato il potenziale generato da una distribuzione di carica uniforme di raggio R_C e carica totale $(Z-1)\,e$.

Con questa scelta di potenziale le funzioni d'onda di singola particella $|\phi_i>$, autostati simultaneamente degli operatori $\hat{l}^2$, $\hat{s}^2$, $\hat{j}^2$ e $\hat{j}_z$, sono caratterizzate dai numeri quantici di momento angolare orbitale, l, di spin, s, di momento angolare totale, j, e da m, la sua proiezione sull'asse z. Inoltre per gli stati discreti bisogna specificare il numero quantico principale n:

$$\begin{aligned} < & \mathbf{r}_i|\phi_i >=< \mathbf{r}_i|nlsjm >= R_{nlj}(r_i) < \mathbf{r}_i|lsjm >= \\ = & R_{nlj}(r_i)\,\mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}_i) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con $R_{nlj}(r_i)$ la parte radiale della funzione e con $\mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}_i)$ l'armonica sferica di spin, data da [Edm57]:

$$\mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}_i) = \sum_{\mu\ s_z} \langle l\mu s s_z|jm\rangle\, Y_{l\mu}(\hat{r}_i)\,\chi_{s_z} \tag{4.43}$$

dove abbiamo denotato con $Y_{l\mu}(\hat{r}_i)$ l'armonica sferica, con s_z la proiezione sull'asse z dello spin e con χ_{s_z} gli spinori di Pauli.

Siamo interessati al caso in cui il nucleo effettua un transizione tra stati con definiti valori di momento angolare e parità. Dato che considereremo solo nuclei pari-pari con doppia shell chiusa (nuclei doppio magici), supporremo che il nucleo sia inizialmente nello stato fondamentale caraterizzato da momento angolare nullo e parità $\pi_i = 1$:

$$\begin{aligned} |i &> = |J_i, M_i >= |0,0> \qquad \pi_i \\ |f &> = |J_f, M_f >= |J, M> \qquad \pi_f \end{aligned} \tag{4.44}$$

Nel modello a particelle indipendenti, la funzione $|0,0>$ è data dall'espressione (4.38), ovvero:

$$|0,0>= |\Phi_0>= \frac{1}{\sqrt{A!}} \prod_{i=1}^{A} |\phi_i> \tag{4.45}$$

La funzione $|\Phi_0>$ rappresenta la situazione in cui tutti i nucleoni occupano livelli di singola particella al di sotto della superficie di Fermi. Lo stato eccitato $|J, M>$, qualora sia dovuto all'eccitazione di un singolo nucleone, è descritto da:

$$|\Phi_{J,M}>= a_p^+ a_h |0,0> \tag{4.46}$$

Nell'equazione precedente abbiamo denotato con a_p^+ l'operatore che crea uno stato di particella al di sopra del livello di Fermi e con a_h l'operatore che distrugge uno stato di particella al di sotto del livello di Fermi. Gli indici p e h denotano l'insieme di numeri quantici che caratterizzano gli stati di singola particella $|\phi_p>$ e $|\phi_h>$:

$$p = (n_p, l_p, s, j_p, m_p) \qquad h = (n_h, l_h, s, j_h, m_h) \tag{4.47}$$

con:

$$\begin{aligned} < \mathbf{r}_i|\phi_p> &= R_{nl_pj_p}(r_i)\,\mathcal{Y}_{l_pj_pm_p}(\hat{r}_i) \\ < \mathbf{r}_i|\phi_h> &= R_{nl_hj_h}(r_i)\,\mathcal{Y}_{l_hj_hm_h}(\hat{r}_i) \end{aligned} \tag{4.48}$$

La conservazione del momento angolare e della parità mette in relazione la multipolarità della transizione con i momenti angolari e le parità delle funzioni d'onda di singola particella. Nello specifico devono essere soddisfatte le seguenti relazioni:

$$|j_p - j_h| < J < j_p + j_h \tag{4.49}$$

$$(-1)^{l_p+l_h} = \pi_p\pi_h = \pi_f \tag{4.50}$$

dove abbiamo già considerato che $J_i = 0$ e $\pi_i = 1$.

Un generico operatore nucleare ad un corpo $\hat{O}_{JM}$, dipendente dalle A coordinate nucleoniche, si può scrivere come:

$$\hat{O}_{JM} = \sum_{i=1}^{A} \hat{o}_{JM}(\mathbf{r}_i) \tag{4.51}$$

dove abbiamo indicato con $\hat{o}_{JM}(\mathbf{r}_i)$ l'operatore di singola particella. In maniera equivalente, possiamo scrivere l'operatore nucleare utilizzando il formalismo della Rappresentazione dei Numeri di Occupazione [Rin80]:

$$\hat{O}_{JM} = \sum_{\alpha\,\beta} \langle\alpha|\hat{o}_{JM}|\beta\rangle\, a^+_\alpha a_\beta \tag{4.52}$$

L'elemento di matrice di singola particella $\langle\alpha|\hat{o}_{JM}|\beta\rangle$ è definito come:

$$\langle\alpha|\hat{o}_{JM}|\beta\rangle = \int d^3r_i\phi^*_\alpha(\mathbf{r}_i)\,\hat{o}_{JM}(\mathbf{r}_i)\,\phi_\beta(\mathbf{r}_i) \tag{4.53}$$

dove $\phi_\alpha(\mathbf{r}_i)$ e $\phi_\beta(\mathbf{r}_i)$ sono le funzioni d'onda di singola particella definite nello spazio delle coordinate e caratterizzate dagli insiemi di numeri quantici α e β.

Utilizziamo la definizione di stato eccitato di singola particella data nella (4.46) e calcoliamo l'elemento di matrice nucleare $\left\langle \Phi_{J,M}|\hat{O}_{JM}|\Phi_0 \right\rangle$:

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_{J,M}|\hat{O}_{JM}|\Phi_0 \right\rangle &= < \Phi_0|a_h^+ a_p \sum_{\alpha\,\beta} \langle\alpha|\hat{o}_{JM}|\beta\rangle\, a_\alpha^+ a_\beta|\Phi_0 >= \\ &= \sum_{\alpha\,\beta} \langle\alpha|\hat{o}_{JM}|\beta\rangle\, \delta_{\alpha p}\delta_{\beta h} = \\ &= \langle p|\hat{o}_{JM}|h\rangle \end{aligned} \tag{4.54}$$

La relazione precedente è stata ottenuta sfruttando le proprietà degli operatori di creazione e distruzione [Rin80]. L'equazione (4.54) mostra che nel modello a strati, il calcolo degli elementi di matrice nucleari si riduce al calcolo degli elementi di matrice di singola particella.

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti, che gli operatori che generano la transizione possono essere separati in un termine che dipende solo dal modulo di $\mathbf{r}_i$ ed in un termine che dipende solo dalle coordinate angolari $\hat{r}_i$:

$$\hat{O}_{JM} = \sum_{i=1}^{A} F_{JM}\left(r_i\right) A_{JM}\left(\hat{r}_i\right) \tag{4.55}$$

Utilizzando le espressioni (4.46) delle funzioni d'onda di singola particella, l'elemento di matrice di transizione (4.54) assume l'espressione:

$$\left\langle \Phi_{J,M}|\hat{O}_{JM}|\Phi_0 \right\rangle = \int drr^2 R_p^*\left(r\right) F_{JM}\left(r_i\right) R_h\left(r\right) \langle l_p j_p m_p\left|A_{JM}\left(\hat{r}_i\right)\right| l_h j_h m_h\rangle \tag{4.56}$$

Nel Paragrafo 3.3 abbiamo mostrato come fosse possibile eliminare la dipendenza dalla terza componente del momento angolare utilizzando il teorema di Wigner-Eckart e, nel modulo quadro dell'elemento di matrice, l'ortogonalità e la completezza dei simboli $3j$ di Wigner. Il termine angolare da calcolare è l'elemento di matrice tra lo stato fondamentale e quello eccitato. Si può applicare la (4.54) al quadrato dell'elemento di matrice arrivando quindi alla conclusione che quello che si deve calcolare è l'elemento di matrice ridotto di:

$$\langle l_p j_p m_p\left|A_{JM}\left(\hat{r}_i\right)\right| l_h j_h m_h\rangle \qquad \longrightarrow \qquad \langle l_p j_p\left\|A_J\left(\hat{r}_i\right)\right\| l_h j_h\rangle \tag{4.57}$$

Riscriviamo la (4.54) come:

$$\left\langle \Phi_{J,M}|\hat{O}_{JM}|\Phi_0 \right\rangle = \langle p\left\|\hat{o}_J\right\| h\rangle \tag{4.58}$$

intendendo che la parte angolare dell'elemento di matrice deve essere calcolata come elemento di matrice ridotto. Le espressioni degli elementi di matrice (4.58) per gli operatori definiti nel Capitolo 4.1 sono presentate in Appendice D.

4.4 La Random Phase Approximation

Il modello a strati, o campo medio, trascura la presenza dell'interazione residua dell'Hamiltoniana nucleare. Questo implica che le eccitazioni collettive del nucleo, a cui contribuiscono coerentemente numerose eccitazioni di particella-buca, non sono correttamente previste dal modello. L'esempio comunemente citato è l'incapacità del modello a campo medio di prevedere i primi stati eccitati 3^- dei nuclei doppio magici.
Al momento, la teoria più sofisticata che permette di superare le limitazioni del modello a campo medio nella descrizione delle eccitazioni di un sistema a molti corpi è la Random Phase Approximation, o meglio, RPA. L'idea base è di descrivere lo stato eccitato come combinazione lineare di eccitazioni particella-buca e buca-particella:

$$|\Psi_f >= \sum_{p\,h} \left(X_{ph} a_p^+ a_h + Y_{ph} a_h^+ a_p \right) |\Psi_0 > \tag{4.59}$$

Lo stato fondamentale $|\Psi_0 >$ non è lo stato fondamentale del modello a campo medio $|\Phi_0 >$, ma è uno stato in cui già esistono delle eccitazioni particella-buca. La teoria in cui $|\Psi_0 >= |\Phi_0 >$ prende il nome di Tamm-Dankoff Approximation (TDA), e negli stati eccitati non contribuiscono i termini legati agli operatori $a_h^+ a_p$. La TDA ha problemi di autoconsistenza dal punto di vista formale, e produce risultati peggiori rispetto a quelli ottenuti con la RPA.
I termini X_{ph} e Y_{ph} sono numeri chiamati ampiezze, che vengono calcolate risolvendo le equazioni:

$$\begin{aligned}
(\epsilon_p - \epsilon_h - E)\, X_{ph} + \sum_{p'\,h'} \left(\langle ph \,|V_{res}|\, p'h' \rangle \, X_{p'h'} + \langle pp' \,|V_{res}|\, hh' \rangle \, Y_{p'h'} \right) &= 0 \qquad (4.60) \\
(\epsilon_p - \epsilon_h + E)\, Y_{ph} + \sum_{p'\,h'} \left(\langle ph \,|V_{res}|\, p'h' \rangle \, Y_{p'h'} + \langle pp' \,|V_{res}|\, hh' \rangle \, X_{p'h'} \right) &= 0
\end{aligned}$$

Le equazioni precedenti sono ottenute utilizzando approcci molto diversi. Uno di questi consiste nel linearizzare le equazioni del moto e utilizzare l'approssimazione quasi-bosonica

[Rin80]. Un altro consiste nel calcolare le perturbazioni armoniche alla posizione di equilibrio in un approccio Hartree-Fock dipendente dal tempo [Row70]. Infine le stesse equazioni possono essere ottenute risolvendo al primo ordine perturbativo le equazioni di Dyson generalizzate per funzioni di Green a due corpi [Fet71].
Nelle equazioni RPA abbiamo indicato con ϵ_p ed ϵ_h le energie di singola particella e con $\langle \alpha\beta \left| V_{res} \right| \gamma\delta \rangle$ gli elementi di matrice dell'interazione residua V_{res} a due corpi, tra funzioni d'onda di singola particella. L'interazione residua descrive l'interazione effettiva tra due nucleoni. Tale interazione contiene dei parametri fissati per riprodurre alcune proprietà nucleari. Discuteremo i dettagli nel Capitolo 5.

Nei nostri calcoli utilizzeremo una base discreta di funzioni d'onda di singola particella. Questo implica che le equazioni (4.60) formino un sistema lineare omogeneo di equazioni con incognite X_{ph} e Y_{ph}. Si hanno soluzioni differenti da quella ovvia solo per valori specifici dell'energia E che annullano il determinante dei termini noti. Nel limite in cui V_{res} tende a zero, le equazioni RPA hanno soluzione diversa dalla banale, solo per $E = (\epsilon_p - \epsilon_h)$ quindi riproducono il modello a campo medio.
Le ampiezze X_{ph} e Y_{ph} sono normalizzate in maniera tale che:

$$\sum_{p\,h} \left(X_{ph}^2 - Y_{ph}^2 \right) = 1 \tag{4.61}$$

Quello che è importante per i nostri scopi è il calcolo della probabilità di transizione indotta da un operatore esterno. L'espressione di tale probabilità, considerando l'accoppiamento dei momenti angolari, risulta essere:

$$\left\langle J|\hat{O}_J|0\right\rangle = \sum_{p\,h} X_{ph}^J \left\langle p \left\|\hat{o}_J\right\| h\right\rangle + (-1)^{J+j_p-j_h}\, Y_{ph}^J \left\langle h \left\|\hat{o}_J\right\| p\right\rangle \tag{4.62}$$

dove il simbolo $\langle \alpha \left\|\hat{o}_J\right\| \beta\rangle$ indica che le parti angolari degli elementi di matrice devono essere calcolate come elementi di matrice ridotti.
Al di là delle ampiezze X_{ph} e Y_{ph}, gli elementi fondamentali del calcolo sono le transizioni di singola particella, identiche a quelle calcolate nel modello a strati, le cui espressioni sono date in Appendice C.

Capitolo 5

Asimmetria nel processo di diffusione di elettroni polarizzati su nuclei doppio magici

L'Asimmetria, definita come il rapporto tra la somma e la differenza tra sezioni d'urto per elettroni destrogiri ed elettroni levogiri, permette di determinare l'ordine di grandezza dell'effetto di violazione di parità nell'interazione elettrone-nucleo. Questo è dovuto all'interferenza tra le ampiezze di transizione associate allo scambio di un fotone e di un bosone Z^0. Pertanto si seleziona il termine della sezione d'urto in cui compaiono i contributi generati dall'interazione debole neutra. Saremo quindi in grado di investigare la natura delle correnti deboli neutre nucleari.
Noi considereremo il caso specifico in cui il nucleo effettua una transizione ad uno stato eccitato dello spettro discreto. In particolare, focalizzeremo l'attenzione sui nuclei doppio magici, caratterizzati quindi, nello stato fondamentale, da momento angolare nullo. Questa scelta implica la partecipazione al processo di una sola multipolarità. In relazione al momento angolare ed alla parità possiamo distinguere due tipi di transizioni: le transizioni elettriche e magnetiche. Ciò comporta una semplificazione dell'espressione della sezione d'urto e conseguentemente dell'Asimmetria associata al processo, permettendo quindi di avere una visione più chiara della fisica sottesa al fenomeno che stiamo studiando.
Il nostro scopo è stabilire la sensibilità dell'Asimmetria ai fattori di forma strani dei nucleoni definiti nel Paragrafo 2.5. È necessario, pertanto, studiare le caratteristiche generali dell' Asimmetria per valutare le circostanze favorevoli all'analisi che ci proponiamo

di effettuare. Per avere una visione d'insieme completa, abbiamo deciso di analizzare il comportamento dell'Asimmetria in nuclei leggeri ed in nuclei pesanti, scegliendo come rappresentante della prima categoria il nucleo ^{16}O e come rappresentante della seconda il ^{208}Pb.

Valuteremo l'ordine di grandezza, l'andamento con l'angolo di diffusione e con differenti valori di impulso trasferito dell'Asimmetria, considerando in maniera esplicita le transizioni di tipo elettrico e di tipo magnetico. Poiché ci aspettiamo delle variazioni minime dell'Asimmetria rispetto all'introduzione dei fattori di forma strani del nucleone, è necessario verificare che questa sia stabile rispetto a differenti scelte di modelli nucleari e rispetto a differenti parametrizzazioni dei fattori di forma non strani dei nucleoni. Se queste condizioni sono verificate, passeremo allo studio della sensibilità dell'Asimmetria ai fattori di forma strani dei nucleoni.

5.1 Asimmetria nel processo di diffusione di elettroni longitudinalmente polarizzati su nuclei

La sezione d'urto del processo di diffusione di elettroni polarizzati su nuclei è stata calcolata nel Capitolo 3. In particolare abbiamo ottenuto la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^h \quad &= \quad \sigma_M\{[v_L F_L(|\mathbf{q}|) + v_T F_T(|\mathbf{q}|)] + \\ -Re \quad (c_V + hc_A) \quad &\frac{G\,|q^2|}{2\pi\alpha\sqrt{2}} \left[v_L F_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + v_T F_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + hv_{T'} F_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)\right]\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove $h = \pm 1$ denota lo stato di polarizzazione dell'elettrone incidente. Le costanti c_V e c_A sono state definite nelle (2.29) e (2.30) ed hanno i seguenti valori:

$$c_V = -1 + 4\sin^2\theta_W \cong -0.092 \tag{5.2}$$

$$c_A = 1 \tag{5.3}$$

L'Asimmetria $\mathcal{A}$ è definita come:

$$\mathcal{A} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^+ - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^-}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^+ + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^-} \tag{5.4}$$

Pertanto è data dalla seguente espressione:

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}_0 \frac{c_A \left[v_L F_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + v_T F_T^{AV}(|\mathbf{q}|) \right] + c_V v_{T'} F_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{v_L F_L(|\mathbf{q}|) + v_T F_T(|\mathbf{q}|)} \tag{5.5}$$

Nell'equazione precedente il termine $\mathcal{A}_0$ è definito come:

$$\mathcal{A}_0 = \frac{G\,|q^2|}{2\pi\alpha\sqrt{2}} \tag{5.6}$$

Alle energie degli elettroni che stiamo considerando, dell'ordine delle centinaia di MeV, la variabile $\mathcal{A}_0$ è dell'ordine di 10^{-6}.
Osserviamo che il contributo di interferenza alla sezione d'urto del processo, ovvero quello proporzionale a $\sigma_M \mathcal{A}_0$, è costituito da un termine conservativo (indipendente da h) e da un termine non conservativo (dipendente da h) sotto l'azione di inversione spaziale. L'osservabile Asimmetria permette di selezionare il solo contributo di violazione di parità nell'interazione elettrone-nucleo. Un'analisi della parte conservativa dell'interazione debole neutra è possibile solo considerando processi di diffusione di neutrini da nuclei. Infatti nei processi indotti da elettroni il contributo debole conservativo è completamente mascherato dall'interazione elettromagnetica.
È conveniente ridefinire i fattori di forma nucleari adattandoli al nostro caso specifico. In particolare la conservazione del momento angolare impone la seguente regola di selezione:

$$|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f \tag{5.7}$$

dove abbiamo indicato con J_i e J_f i numeri quantici di momento angolare degli stati iniziale ed eccitato del nucleo, e con J la multipolarità della transizione. Poiché nel nostro caso $J_i = 0$ ne consegue che interviene una sola multipolarità nel processo; inoltre lo stato eccitato è caratterizzato dal numero quantico $J_f = J$. Questo implica che le espressioni (3.69)-(3.73), possono essere riscritte come:

$$R_L(|\mathbf{q}|) = 4\pi \left|\langle J \,\|M_J^{em}\|\, 0\rangle\right|^2 \tag{5.8}$$

$$R_T(|\mathbf{q}|) = 4\pi \left[\left|\left\langle J \left\|T_J^{em,E}\right\| 0\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle J \left\|T_J^{em,M}\right\| 0\right\rangle\right|^2 \right] \qquad J \neq 0 \tag{5.9}$$

Procedendo in maniera analoga al caso elettromagnetico, lavorando questa volta sulle relazioni (3.71)-(3.73), introduciamo le risposte nucleari di interferenza longitudinale,

$R_L^{AV}(|\mathbf{q}|)$, e trasversali, $R_T^{AV}(|\mathbf{q}|)$, $R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)$, includendo nella definizione le costanti $-c_V$ e $-c_A$ che compaiono nell'espressione data nella (5.1):

$$
\begin{aligned}
R_L^{AV}(|\mathbf{q}|) &= -c_A 2\pi \langle J \| M_J^{em} \| 0\rangle \left\langle J \left\| M_J^V \right\| 0\right\rangle^* && (5.10)\\
R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) &= -c_A 2\pi [\left\langle J \left\| T_J^{em,E} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{V,E} \right\| 0\right\rangle^* + && (5.11)\\
&\quad + \left\langle J \left\| T_J^{em,M} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{V,M} \right\| 0\right\rangle^*] \qquad J \neq 0 \\
R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|) &= -c_V 2\pi [\left\langle J \left\| T_J^{em,M} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{A,E} \right\| 0\right\rangle^* + && (5.12)\\
&\quad + \left\langle J \left\| T_J^{em,E} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{A,M} \right\| 0\right\rangle^*] \qquad J \neq 0
\end{aligned}
$$

In definitiva l'osservabile Asimmetria assume nel nostro caso la seguente espressione:

$$
\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{v_L R_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + v_T R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + v_{T'} R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{v_L R_L(|\mathbf{q}|) + v_T R_T(|\mathbf{q}|)} = \mathcal{A}_0 \frac{W^{pv}}{W^{em}} \tag{5.13}
$$

Nell'equazione precedente abbiamo denotato con W^{pv} e W^{em} i termini di violazione di parità ed elettromagnetico della sezione d'urto.
Ricordiamo che i termini v_L, v_T e $v_{T'}$ sono rappresentativi della cinematica associata all'elettrone incidente ed hanno le seguenti espressioni:

$$
\begin{aligned}
v_L &= \frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4} && (5.14)\\
v_T &= \left(\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2|\mathbf{q}|^2}\right) && (5.15)\\
v_{T'} &= \tan\frac{\theta}{2}\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}} && (5.16)
\end{aligned}
$$

5.2 Transizioni elettriche e magnetiche

Il vantaggio nel considerare nuclei nello stato iniziale caratterizzato da momento angolare nullo è che interviene una sola multipolarità nel processo, permettendo in questa maniera di avere un'espressione semplificata della sezione d'urto.
La situazione è ulteriormente agevolata se si osserva che è possibile distinguere tra transizioni di tipo elettrico o di parità naturale, caratterizzate da parità $\pi = (-1)^J$, e transizioni di tipo magnetico o di parità non-naturale, caratterizzate da parità $\pi = (-1)^{J+1}$. Nel

primo caso intervengono gli operatori di multipolo con parità $(-1)^J$ mentre nel secondo la transizione è data dagli operatori di multipolo con parità $(-1)^{J+1}$ (vedi Tabella (3.1)). Definiamo quindi, per comodità di esposizione, le risposte nucleari che intervengono nelle transizioni di tipo elettrico e magnetico:

Transizioni Elettriche: $\pi = (-1)^J$

Risposte nucleari:

$$\begin{aligned}
{}^{E}R_L\left(|\mathbf{q}|\right) &= 4\pi \left|\langle J \left\| M_J^{em} \right\| 0\rangle\right|^2 && (5.17)\\
{}^{E}R_T\left(|\mathbf{q}|\right) &= 4\pi \left|\left\langle J \left\| T_J^{em,E} \right\| 0\right\rangle\right|^2 \qquad J \neq 0 && (5.18)\\
{}^{E}R_L^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) &= -c_A 2\pi \langle J \left\| M_J^{em} \right\| 0\rangle \left\langle J \left\| M_J^{V} \right\| 0\right\rangle^* && (5.19)\\
{}^{E}R_T^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) &= -c_A 2\pi \left\langle J \left\| T_J^{em,E} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{V,E} \right\| 0\right\rangle^* \qquad J \neq 0 && (5.20)\\
{}^{E}R_{T'}^{VA}\left(|\mathbf{q}|\right) &= -c_V 2\pi \left\langle J \left\| T_J^{em,M} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{A,E} \right\| 0\right\rangle^* \qquad J \neq 0 && (5.21)
\end{aligned}$$

Transizioni Magnetiche: $\pi = (-1)^{J+1}$

Risposte nucleari:

$$\begin{aligned}
{}^{M}R_L\left(|\mathbf{q}|\right) &= 0 && (5.22)\\
{}^{M}R_T\left(|\mathbf{q}|\right) &= 4\pi \left|\left\langle J \left\| T_J^{em,M} \right\| 0\right\rangle\right|^2 \qquad J \neq 0 && (5.23)\\
{}^{M}R_L^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) &= 0 && (5.24)\\
{}^{M}R_T^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) &= -c_A 2\pi \left\langle J \left\| T_J^{em,M} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{V,M} \right\| 0\right\rangle^* \qquad J \neq 0 && (5.25)\\
{}^{M}R_{T'}^{VA}\left(|\mathbf{q}|\right) &= -c_V 2\pi \left\langle J \left\| T_J^{em,E} \right\| 0\right\rangle \left\langle J \left\| T_J^{A,M} \right\| 0\right\rangle^* \qquad J \neq 0 && (5.26)
\end{aligned}$$

Vediamo adesso l'espressione assunta dall'Asimmetria nei due casi considerati:

Transizioni Elettriche: $\pi = (-1)^J$

Asimmetria ${}^{E}\mathcal{A}$:

$$ {}^{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{v_L\ {}^{E}R_L^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) + v_T\ {}^{E}R_T^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) + v_{T'}\ {}^{E}R_{T'}^{VA}\left(|\mathbf{q}|\right)}{v_L\ {}^{E}R_L\left(|\mathbf{q}|\right) + v_T\ {}^{E}R_T\left(|\mathbf{q}|\right)} \tag{5.27}$$

Transizioni Magnetiche: $\pi = (-1)^{J+1}$

Asimmetria ${}^{M}\mathcal{A}$:

$$ {}^{M}\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{v_T\ {}^{M}R_T^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right) + v_{T'}\ {}^{M}R_{T'}^{VA}\left(|\mathbf{q}|\right)}{v_T\ {}^{M}R_T\left(|\mathbf{q}|\right)} \tag{5.28}$$

Da una prima analisi delle espressioni precedenti risulta che le transizioni di tipo magnetico sono favorite per la nostra analisi poiché intervengono meno risposte nucleari nel processo e quindi l'Asimmetria assume un'espressione più semplice.

5.3 Cinematica del processo

Consideriamo adesso la cinematica del processo. Questa è contenuta nei fattori v_L, v_T e $v_{T'}$. Innanzitutto osserviamo che per processi dovuti allo scambio di un bosone vettore virtuale, vale la seguente condizione:

$$q^2 = \omega^2 - |\mathbf{q}|^2 < 0 \tag{5.29}$$

dove abbiamo indicato con q il quadrimpulso associato al bosone di scambio tra elettrone e nucleo. Possiamo pertanto riscrivere le (5.14) nella seguente maniera:

$$v_L = \left|\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right|^2 \tag{5.30}$$

$$v_T = \left(\tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{|q^2|}{2\,|\mathbf{q}|^2}\right) \tag{5.31}$$

$$v_{T'} = \tan\frac{\theta}{2}\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2} + \frac{|q^2|}{|\mathbf{q}|^2}} \tag{5.32}$$

Consideriamo la definizione di Asimmetria data nella (5.13) e moltiplichiamo e dividiamo per v_T:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{\frac{v_L}{v_T} R_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + \frac{v_{T'}}{v_T} R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{\frac{v_L}{v_T} R_L(|\mathbf{q}|) + R_T(|\mathbf{q}|)} \tag{5.33}$$

Calcoliamo adesso i termini $\frac{v_L}{v_T}$ e $\frac{v_{T'}}{v_T}$:

$$\frac{v_L}{v_T} = 2\left|\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right|\xi \tag{5.34}$$

$$\frac{v_{T'}}{v_T} = \sqrt{1-\xi^2} \tag{5.35}$$

Nelle relazioni precedenti abbiamo indicato con ξ la seguente variabile cinematica:

$$\xi = \left[1 + 2\left|\frac{|\mathbf{q}|^2}{q^2}\right|\tan^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1} \tag{5.36}$$

In particolare valgono le seguenti approssimazioni:

$$\xi \rightarrow 1 \qquad per \qquad \theta \rightarrow 0^o \tag{5.37}$$

$$\xi \rightarrow 0 \qquad per \qquad \theta \rightarrow 180^o \tag{5.38}$$

Possiamo adesso studiare l'andamento dell'osservabile Asimetria in funzione dell'angolo θ di diffusione. Facciamo come al solito la distinzione tra transizioni elettriche e magnetiche:

Transizioni Elettriche: $\pi = (-1)^J$

Asimmetria ${}^E\mathcal{A}$:

$$^E\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{2\left|\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right| \xi \; {}^E R_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + \; {}^E R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + \sqrt{1-\xi^2} \; {}^E R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{2\left|\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right| \xi \; {}^E R_L(|\mathbf{q}|) + \; {}^E R_T(|\mathbf{q}|)} \tag{5.39}$$

Dalle relazioni definite nelle (5.37) e (5.38) discende che l'Asimmetria ha il seguente comportamento asintotico per $\theta \rightarrow 0^o$ e $\theta \rightarrow 180^o$:

$$^E\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{2\left|\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right| \; {}^E R_L^{AV}(|\mathbf{q}|) + \; {}^E R_T^{AV}(|\mathbf{q}|)}{2\left|\frac{q^2}{|\mathbf{q}|^2}\right| \; {}^E R_L(|\mathbf{q}|) + \; {}^E R_T(|\mathbf{q}|)} \qquad \theta \rightarrow 0^o \tag{5.40}$$

$$^E\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{{}^E R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + \; {}^E R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{{}^E R_T(|\mathbf{q}|)} \qquad \theta \rightarrow 180^o \tag{5.41}$$

Osserviamo che per grandi valori di angolo di diffusione diventano importanti i contributi trasversali della sezione d'urto. Mentre per valori piccoli di angolo di diffusione il ruolo dei termini longitudinali diventa significativo.

Transizioni Magnetiche: $\pi = (-1)^{J+1}$

Asimmetria ${}^M\mathcal{A}$:

$$^M\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{{}^M R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + \sqrt{1-\xi^2} \; {}^M R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{{}^M R_T(|\mathbf{q}|)} \tag{5.42}$$

Anche in questo caso utilizziamo le relazioni definite nelle (5.37) e (5.38) per studiare il comportamento asintotico dell'Asimmetria per $\theta \rightarrow 0^o$ e $\theta \rightarrow 180^o$, ottenendo i seguenti risultati:

$$^M\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{{}^M R_T^{AV}(|\mathbf{q}|)}{{}^M R_T(|\mathbf{q}|)} \qquad \theta \rightarrow 0^o \tag{5.43}$$

$$^M\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \frac{{}^M R_T^{AV}(|\mathbf{q}|) + \; {}^M R_{T'}^{VA}(|\mathbf{q}|)}{{}^M R_T(|\mathbf{q}|)} \qquad \theta \rightarrow 180^o \tag{5.44}$$

Osserviamo che nel caso si considerino transizioni di tipo magnetico, è evidente aspettersi un aumento in valore assoluto dell'Asimmetria all'aumentere dell'angolo di diffusione θ. Infatti il numeratore della (5.44) è maggiore rispetto al numeratore della (5.43). Per quanto riguarda le transizioni di tipo elettrico sarà necessario valutare l'effetto della risposta longitudinale elettromagnetica ${}^{E}R_L\left(|\mathbf{q}|\right)$ rispetto alla risposta di interferenza longitudinale ${}^{E}R_L^{AV}\left(|\mathbf{q}|\right)$ come si può osservare dalle (5.40) e (5.41).

In questi primi paragrafi abbiamo definito gli strumenti necessari per lo studio dell'Asimmetria. Una prima analisi sulle caratteristiche generali dell'Asimmetria ci permetterà di stabilire quali siano le condizioni favorevoli per lo studio che vogliamo effettuare.

5.4 Stati nucleari

I nuclei che sono stati scelti per l'analisi sono i nuclei doppio magici dell' ${}^{16}O$ e del ${}^{208}Pb$. La descrizione degli stati nucleari è stata definita nel Capitolo 4. Diamo ora i dettagli del calcolo che ha consentito di generare la base di funzioni d'onda di singola particella. Il potenziale medio utilizzato è quello definito nella (4.39). Riportiamo le espressioni delle parametrizzazioni dei potenziali di tipo Woods-Saxon, di spin-orbita e di Coulomb.

$$U\left(r_i\right) = \frac{V_0}{1+\exp\left(r_i - R\right)/a_0} \tag{5.45}$$

$$U_{LS}\left(r_i\right) = \frac{1}{m_\pi^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{V_{LS}}{1+\exp\left(r_i - R_{LS}\right)/a_{LS}}\right) \tag{5.46}$$

Il potenziale generato da una distribuzione uniforme di carica di raggio R_C è:

$$U_C\left(r_i\right) = \frac{Ze^2}{2R_C}\left[3-\left(\frac{r}{R_C}\right)^2\right] \qquad r \leq R_C \tag{5.47}$$

$$U_C\left(r_i\right) = \frac{Ze^2}{r} \qquad r \geq R_C \tag{5.48}$$

I parametri che compaiono nelle equazioni precedenti sono riportati nelle Tabelle 5.1 e 5.2 per i nuclei dell'${}^{16}O$ e ${}^{208}Pb$. I dati relativi all'${}^{16}O$ sono stati presi da [Co85], mentre quelli relativi al ${}^{208}Pb$ da [Rin78] . La prima linea si riferisce a stati di singola particella protonici (π) e la seconda a stati di singola particella neutronici (ν).

	V_0(MeV)	V_{LS}(MeV)	a_0(fm)	a_{LS}(fm)	R(fm)	R_{LS}(fm)	R_C(fm)
π	-52.50	-7.00	0.53	0.53	3.2	3.2	3.2
ν	-52.50	-6.54	0.53	0.53	3.2	3.2	0.0

Tabella 5.1: Parametri del potenziale di Woods-Saxon per il nucleo dell'^{16}O.

Il calcolo RPA è stato effettuato utilizzando la base di funzioni d'onda di singola particella generata con i potenziali sopra descritti. Per l'interazione residua V_{res} abbiamo utilizzato un'interazione di contatto di tipo Landau-Migdal (LM) [Mig67] data da:

$$V_{res}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right) = C_0 \left[f_0\left(\rho\right) + f_0'\left(\rho\right) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + g_0 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + g_0'\left(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\right)\left(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2\right)\right] \delta^3\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) \tag{5.49}$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\tau}$ gli operatori di spin ed isospin di singola particella.
I paramerti f_0 e $f_0^{'}$ hanno una dipendenza dalla densità del tipo:

$$f_0\left(\rho\left(r\right)\right) = f_0^{ext} + \left(f_0^{int} - f_0^{ext}\right)\rho\left(r\right) \tag{5.50}$$

Il termine $\rho\left(r\right)$ è un'interpolazione di densità che ha l'andamento dato da:

$$\rho\left(r\right) = \frac{1}{1 + \exp\left(r - R_{int}\right)/a} \tag{5.51}$$

dove R_{int} è il raggio di interpolazione [Co85], [Rin78]. I risultati ottenuti con questa scelta di interazione residua saranno denotati nel seguito con l'indice LM. Nei nostri calcoli utilizzeremo i valori dei parametri f_0, $f_0^{'}$, g_0 e $g_0^{'}$ fissati in [Rin78] per riprodurre le energie del 3^- del ^{208}Pb e gli spostamenti isotopici dello spettro di eccitazione dell'atomo di Piombo. Tali valori sono stati riportati in Tabella 5.3.
Anche il valore della costante C_0 definita nella seguente maniera

$$C_0 = \frac{16}{9}\pi r_0^3 \epsilon_F \tag{5.52}$$

	V_0(MeV)	V_{LS}(MeV)	a_0(fm)	a_{LS}(fm)	R(fm)	R_{LS}(fm)	R_C(fm)
π	-60.40	-6.754	0.79	0.59	7.46	7.20	7.4062
ν	-44.32	-6.0844	0.66	0.64	7.46	6.96	0.0

Tabella 5.2: Parametri del potenziale di Woods-Saxon per il nucleo del ^{208}Pb.

f_0^{int}	f_0^{ext}	$f_0^{int\prime}$	$f_0^{ext\prime}$	g_0	$g_0^{\prime}$
0.2	−2.45	1.5	1.5	0.55	0.7

Tabella 5.3: Parametri per l'interazione residua di tipo Landau-Migdal (LM).

è stato fissato per riprodurre l'energia dello stato 3^- del ^{208}Pb. Questo corrisponde a $\epsilon_F = 40$ MeV. Per ottenere l'energia dello stato 3^- dell'^{16}O a 6.13 MeV, il valore di ϵ_F è stato fissato a 50 MeV.

L'interazione di tipo Landau-Migdal è un'interazione di contatto. Per considerare il raggio finito dell'interazione, si implementa la forza nucleare di Landau-Migdal con l'introduzione di potenziali di scambio mesonico. In particolare l'interazione residua di Jülich-Stony-Brook (JSB) [Spe80] prevede una parte di interazione a lungo raggio generata dallo scambio dei mesoni π e ρ. Pertanto il potenziale V_{res} assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} V_{res}\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right) &= C_0 \left[f_0\left(\rho\right) + f_0^{\prime}\left(\rho\right) \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + g_0 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + g_0^{\prime} \left(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\right) \left(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2\right) \right] \delta^3 \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) + \\ & + V_\pi \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) + V_\rho \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right) \end{aligned} \tag{5.53}$$

La presenza di V_π e V_ρ richiede un cambiamento dei valori dei parametri di Landau per riuscire a riprodurre i primi stati 3^- di ^{16}O e ^{208}Pb. In Tabella 5.4 riportiamo i nuovi valori dei parametri di Landau. Nel seguito indicheremo i risultati ottenuti con questa scelta di interazione residua con l'indice JSB.

Dal confronto tra risposte o fattori di forma nucleari calcolati e sezioni d'urto misurate si stabilisce la validità del modello scelto. Ad esempio, gli stati 3^- sono collettivi e il modello a strati non riesce a descrivere la sezione d'urto sperimentale. In [Co90] sono stati considerati gli stati eccitati 1^+ e 12^- del ^{208}Pb, che presentano una struttura di transizione particella-buca piuttosto semplice. Le transizioni in esame sono di tipo magnetico. L'analisi è stata condotta studiando il comportamento del fattore di forma magnetico $^M R_T\left(|\mathbf{q}|\right)$ rispetto a differenti scelte di base di funzioni d'onda di singola par-

f_0^{int}	f_0^{ext}	$f_0^{int\prime}$	$f_0^{ext\prime}$	g_0	$g_0^{\prime}$
0.21	−1.8	0.65	1.65	0.7	0.7

Tabella 5.4: Parametri per l'interazione residua di tipo Jülich-Stony-Brook (JSB).

ticella; mentre gli stati eccitati sono descritti dapprima con una configurazione costituita da due stati di singola particella. In seguito si utilizza il modello RPA con interazione residua Jülich-Stony-Brook. I risultati mostrano che il fattore di forma magnetico ${}^{M}R_{T}\left(|\mathbf{q}|\right)$ è dipendente dalle varie modellizzazioni introdotte. Il confronto con i dati sperimentali evidenzia le incertezze attualmente esistenti riguardo la struttura nucleare. Questa analisi è stata fatta per processi di diffusione di elettroni non polarizzati.
Nel nostro studio la variabile da investigare è l'Asimmetria, definita come il rapporto tra sezioni d'urto. La speranza è che la sensibilità ai modelli nucleari delle sezioni d'urto si riduca enormemente nelle Asimmetrie, in modo da poter attribuire le eventuali discrepanze tra esperimento e teoria ai fattori di forma del nucleone.

5.5 Parametrizzazione dei fattori di forma elettromagnetici del nucleone

I fattori di forma elettromagnetici dei nucleoni sono parametrizzati per riprodurre i dati sperimentali provenienti da processi di diffusione elastica di elettroni non polarizzati su nucleoni. I fattori di forma di Sachs elettrico G_E^p e magnetico G_M^p del protone, definiti nella (4.5), si ottengono dal confronto con le sezioni d'urto misurate per il processo di diffusione elastica di elettroni su protoni. La sezione d'urto di tale processo è data dalla formula di Rosenbluth [Bha88]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_M \frac{\epsilon'}{\epsilon} \left[\frac{G_E^p + \tau G_M^p}{1+\tau} + 2\tau \left(G_M^p\right)^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \tag{5.54}$$

Nell'equazione precedente indichiamo con σ_M la sezione d'urto di Mott; il termine τ è stato definito nella (4.5) ed è dato da:

$$\tau = \frac{|q^2|}{4M_p^2} \tag{5.55}$$

La stessa formula è valida per i neutroni. La determinazione dei fattori di forma neutronici è sperimentalmente più difficile poiché non esistono bersagli costituiti da neutroni liberi; le informazioni relative ai fattori di forma sono dedotte dai processi di diffusione su nuclei leggeri. In questo caso è necessario tenere in conto gli effetti dati dall'interazione forte tra nucleoni all'interno del nucleo.

I momenti magnetici dei nucleoni sono noti accuratamente dagli esperimenti indotti da fotoni reali ($q^2 = 0$), pertanto i fattori di forma magnetici sono normalizzati a tali valori:

$$\begin{aligned} G_M^p(0) &= \mu_p = 2.7928\mu_B \\ G_M^n(0) &= \mu_n = -1.9131\mu_B \end{aligned} \tag{5.56}$$

dove il magnetone nucleare, μ_B, è definito come:

$$\mu_B = \frac{e}{2M_p} \tag{5.57}$$

I fattori di forma elettrici, per valori di $q^2 \to 0$, hanno i seguenti valori in unità di carica e:

$$\begin{aligned} G_E^p(0) &= 1 \\ G_E^n(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Il metodo di separazione di Rosenbluth [Bha88], permette di ottenere i valori sperimentali di $G_E^N(q^2)$ e $G_M^N(q^2)$ per differenti valori di quadrimpulso trasferito. Ci sono varie parametrizzazioni dei fattori di forma che riproducono con diversi gradi di accuratezza i valori sperimentali. La paramertizzazione più semplice e più comunemente usata è quella di dipolo. In particolare i fattori di forma sono dati da:

$$\begin{aligned} G_E^p\left(q^2\right) &= \left(1 - \frac{q^2}{\lambda^2}\right)^{-2} \\ G_M^p\left(q^2\right) &= \mu_p\left(1 - \frac{q^2}{\lambda^2}\right)^{-2} \\ G_E^n\left(q^2\right) &= 0 \\ G_M^n\left(q^2\right) &= \mu_n\left(1 - \frac{q^2}{\lambda^2}\right)^{-2} \end{aligned} \tag{5.59}$$

Nella equazioni precedenti il termine λ^2 è definito come:

$$\lambda^2 = 18.1 fm^{-2} \tag{5.60}$$

Per valutare la sensibilità dell'Asimmetria rispetto a diverse scelte di parametrizzazioni per i fattori di forma elettromagnetici, abbiamo deciso di confrontare l'andamento di

dipolo con la parametrizzazione ottenuta in [Hoe76]. Questa parametrizzazione è più accurata di quella di dipolo, ad esmpio il fattore di forma elettrico del neutrone $G_E^n(q^2)$ è una funzione di q^2 diversa da zero.
I fattori di forma deboli neutri vettoriali si ottengono dalla relazione definita nella (4.6) trascurando il contributo dato dai fattori di forma strani del nucleone:

$$\widetilde{G}_{E,M}^{p,n} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) G_{E,M}^{p,n} - G_{E,M}^{n,p} \tag{5.61}$$

L'equazione (2.69) permette di ottenere i fattori di forma neutri assiali $\widetilde{G}_A^{p,n}$ dei singoli nucleoni dal fattore di forma isovettoriale:

$$\widetilde{G}_A^{p,n} = \mp 2\widetilde{G}_A^v \tag{5.62}$$

Considerazioni sulla invarianza isotopica dell'interazione forte permettono di legare il fattore di forma isovettoriale che interviene nei processi deboli neutri, $\widetilde{G}_A^v$, con il fattore di forma $\widetilde{G}_A^{v,CC}$ che interviene nei processi deboli di carica [Alb01]. In particolare, secondo le convenzioni che abbiamo usato, il legame è stabilito da:

$$\widetilde{G}_A^v = \frac{1}{2}\widetilde{G}_A^{v,CC} \tag{5.63}$$

La parametrizzazione del fattore di forma $\widetilde{G}_A^{v,CC}$ si ottiene dal confronto con i dati sperimentali provenienti da processi di diffusione di neutrini su deutoni, e da processi di elettroproduzione di pioni da protoni. I dati sono ragionevolmente riprodotti da un andamento di dipolo:

$$\widetilde{G}_A^{v,CC} = 1.23\left(1 - \frac{q^2}{M_A^2}\right)^{-2} \tag{5.64}$$

Nell'equazione precedente la massa assiale M_A ha un valore sperimentale pari a $1.0^{+0.12}_{-0.16}$ GeV [Bha88].

5.6 Analisi dei risultati

Il nostro scopo è investigare se dallo studio dell'Asimmetria nel processo di diffusione di elettroni polarizzati su nuclei, si possano ricavare informazioni sui fattori di forma nucleonici. Questo significa valutare se l'Asimmetria è sensibile ai fattori di forma nucleonici ed in che misura. Ricordiamo che l'ordine di grandezza dell'Asimmetria, considerando regimi energetici inferiori al GeV, è di 10^{-6}. Quindi è richiesto un alto grado di accuratezza sperimentale. Supponendo che si possano effettuare esperimenti con il grado di risoluzione richiesto e supponendo che l'Asimmetria si riveli sensibile ai fattori di forma nucleonici, è necessario escludere la dipendenza dalla modellizzazione nucleare. È quindi importante che l'Asimmetria sia stabile rispetto a differenti scelte di modello nucleare affinché si possano estrarre informazioni sui fattori di forma nucleonici.

Nella nostra analisi consideriamo l'Asimmetria in processi di diffusione anelastica su nuclei doppio magici. Il nucleo, a seguito dell'interazione, effettua una transizione ad uno stato eccitato dello spettro discreto. I nuclei scelti sono quelli ^{16}O e ^{208}Pb. Questa scelta ci permette di studiare il comportamento dell'Asimmetria in nuclei pesanti ed in nuclei leggeri. Crediamo che la possibilità di distinguere tra transizioni di tipo elettrico e transizioni di tipo magnetico sia un vantaggio per l'analisi che ci proponiamo di effettuare.

Nei paragrafi precedenti abbiamo descritto quelle che sono le caratteristiche generali dell'Asimmetria ed abbiamo definito i dettagli del calcolo. Nei paragrafi che seguono presentiamo i risultati ottenuti.

5.6.1 Dipendenza dal modello nucleare

Da una prima analisi generale abbiamo deciso di trascurare dalla trattazione gli stati eccitati altamente collettivi come lo stato eccitato 3^- del ^{208}Pb. Nella Figura 5.1 è mostrata l'Asimmetria per differenti valori dell'angolo di diffusione θ in funzione dell'impulso trasferito ($\mathbf{q}$) per valori compresi tra 0 e $3fm^{-1}$. I risultati sono stati ottenuti utilizzando il modello RPA con interazione residua di Landau-Migdal (nel seguito RPA-LM) e il modello RPA con interazione residua di Jülich-Stony-Brook (nel seguito RPA-JSB), per lo stato eccitato 3^- del ^{208}Pb.

Una prima osservazione riguarda la dipendenza dal modello che non è molto pronunciata. Bisogna d'altra parte ricordare che i parametri dell'interazione che stiamo utilizzando sono stati fissati per riprodurre l'energia sperimentale di questo stato ($E = 2.63$ MeV). La seconda osservazione riguarda il grande numero di oscillazioni a qualsiasi valore dell'angolo di diffusione.

Per comprendere l'origine di questo comportamento dell'Asimmetria abbiamo studiato i

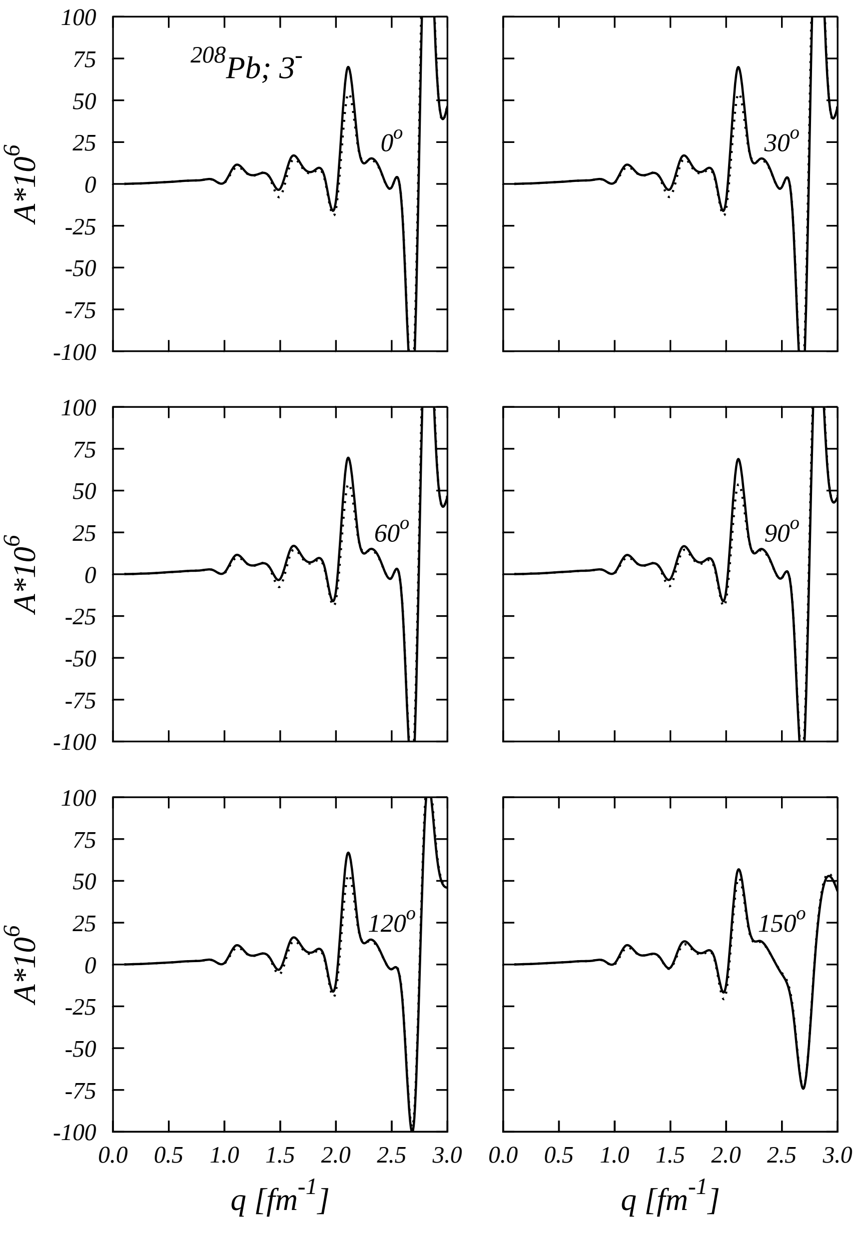

Figura 5.1: Asimmetria nello stato eccitato 3^- del ^{208}Pb calcolata con modello RPA-LM (linea continua) e con modello RPA-JSB (linea punteggiata).

termini di violazione di parità, W^{pv}, ed elettromagnetico, W^{em}, della sezione d'urto definiti nell'equazione (5.13). I risultati sono presentati nella Figura 5.2 e mostrano che la sezione d'urto del processo presenta vari punti di minimo. La profondità dei minimi è accentuata dal fatto che stiamo descrivendo il processo di diffusione in PWBA . Poiché le funzioni d'onda che descrivono il moto degli elettroni sono onde piane, le risposte nucleari sono trasformate di Fourier di elementi di matrice di transizione. Questo significa che le risposte in PWBA si annullano per specifici valori di $\mathbf{q}$. Questo fatto non è evidente nelle Figure perché numericamente il calcolo viene effettuato su una griglia discreta di valori di $\mathbf{q}$, ed è quindi altamente improbabile trovare il valore per cui le risposte si annullano. In una trattazione DWBA, in cui si considera la distorsione provocata dal campo Coulombiano del nucleo sulle funzioni d'onda dell'elettrone, la sezione d'urto non ha zeri, quindi i minimi sono meno profondi [Ann95].
È evidente la necessità di utilizzare una descrizione DWBA nell'eventuale confronto con i dati sperimentali. D'altra parte nelle zone lontane dai minimi il rapporto tra le sezioni d'urto dovrebbe minimizzare gli effetti dovuti all'uso delle onde distorte.
È evidente, da quanto presentato che il grande numero di oscillazioni rende l'Asimmetria degli stati collettivi, come il 3^-, poco utile per lo studio dei fattori di forma nucleonici. Per questo motivo nella nostra analisi abbiamo trascurato gli stati eccitati collettivi e ci siamo limitati allo studio di stati caratterizzati da poche componenti di particella-buca. Un esempio di tali stati non collettivi sono gli stati eccitati magnetici 4^- dell'^{16}O e 12^- del ^{208}Pb, che abbiamo utilizzato per verificare se l'Asimmetria ha un comportamento differente a seconda che il nucleo sia un nucleo leggero o pesante. Ci aspettiamo che, a parità di condizioni ovvero scegliendo uno stesso tipo di transizione e di configurazione dello stato eccitato, l'Asimmetria abbia un comportamento simile nelle due categorie di nuclei. Ciò è dovuto al fatto che la nostra osservabile è per definizione un rapporto tra sezioni d'urto. Affinchè il confronto sia scevro da possibili fraintendimenti abbiamo utilizzato in entrambi i casi la parametrizzazione definita per i fattori di forma nucleonici in [Hoe76]. Inoltre, gli stati eccitati sono stati descritti come dovuti all'eccitazione di singola particella. Nelle Figure 5.3 e 5.4 è rappresentata l'Asimmetria per gli stati eccitati 4^- dell'^{16}O e 12^- del ^{208}Pb. Le configurazioni di singola particella sono entrambe di natura protonica, in particolare lo stato 4^- dell'^{16}O, ad energia $E = 18.89$ MeV, è descritto dalla

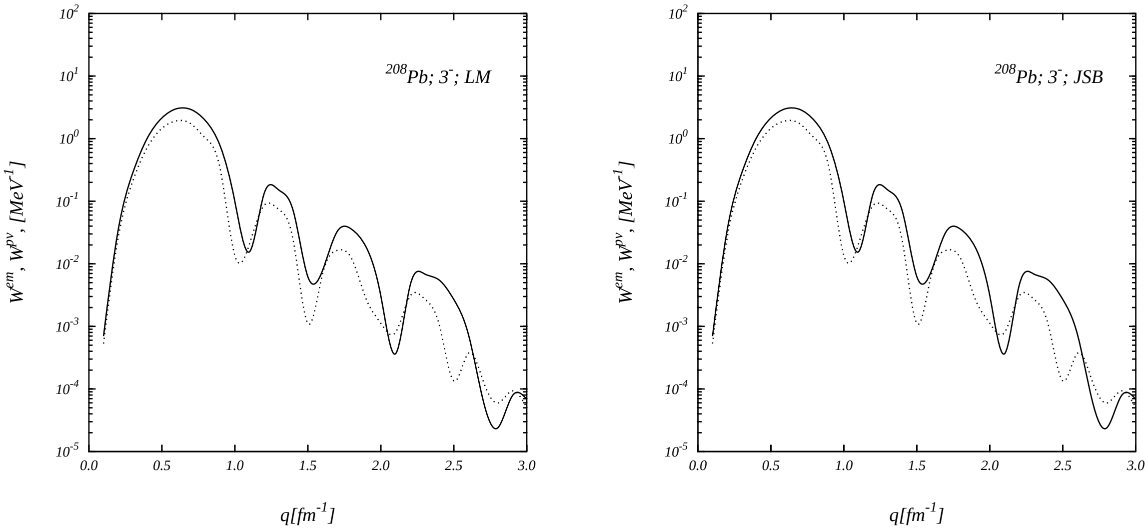

Figura 5.2: A sinistra: termine di violazione di parità W_{pv}, (linea punteggiata); termine elettromagnetico W_{em}, (linea continua) nello stato eccitato 3^- del ^{208}Pb calcolati con modello RPA-LM. A destra: termine di violazione di parità W_{pv}, (linea punteggiata); termine elettromagnetico W_{em}, (linea continua) nello stato eccitato 3^- del ^{208}Pb calcolati con modello RPA-JSB; l'angolo di diffusione θ, é fissato a 30^o.

configurazione:

$$\pi : \left(1d_{5/2}\right) \left(1p_{3/2}\right)^{-1} \tag{5.65}$$

e lo stato 12^- del ^{208}Pb, ad energia $E = 7.933$ MeV dalla configurazione:

$$\pi : \left(1i_{13/2}\right) \left(1h_{11/2}\right)^{-1} \tag{5.66}$$

Le Figure 5.3 e 5.4 mostrano che l'Asimmetria ha un andamento simile nei due casi considerati. In particolare osserviamo che l'andamento di $\mathcal{A}$ aumenta, in valore assoluto, con l'aumento dell'impulso trasferito. Ciò è legato principalmente alla presenza del fattore moltiplicativo $\mathcal{A}_0 \sim |q^2|$ che compare nella (5.13). In entrambi i casi l'$\mathcal{A}$ assume un valore massimo dell'ordine di -25×10^{-6}. L'andamento di $\mathcal{A}$ con θ è crescente in valore assoluto, come indicato dalle (5.44) e (5.43). Questo comportamento è più facilmente visibile se si rappresenta la differenza tra l'Asimmetria calcolata in $\theta^o = 0^o$ e calcolata per un generico valore di θ^o ovvero:

$$\Delta\mathcal{A}\left(\theta\right) = \mathcal{A}\left(0^o\right) - \mathcal{A}\left(\theta^o\right) \tag{5.67}$$

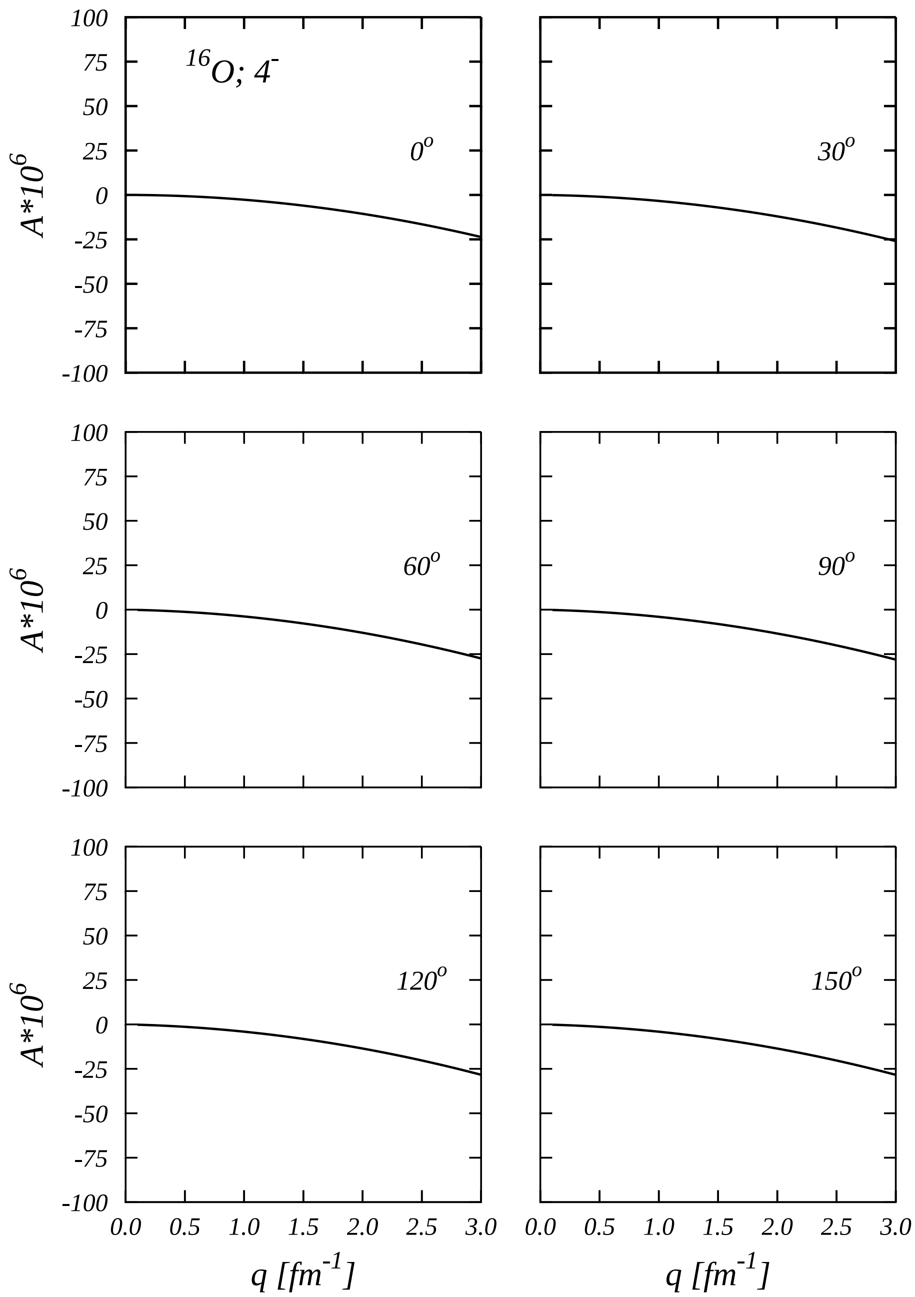

Figura 5.3: Asimmetria nello stato eccitato 4^- dell'^{16}O; stato di singola particella protonico.

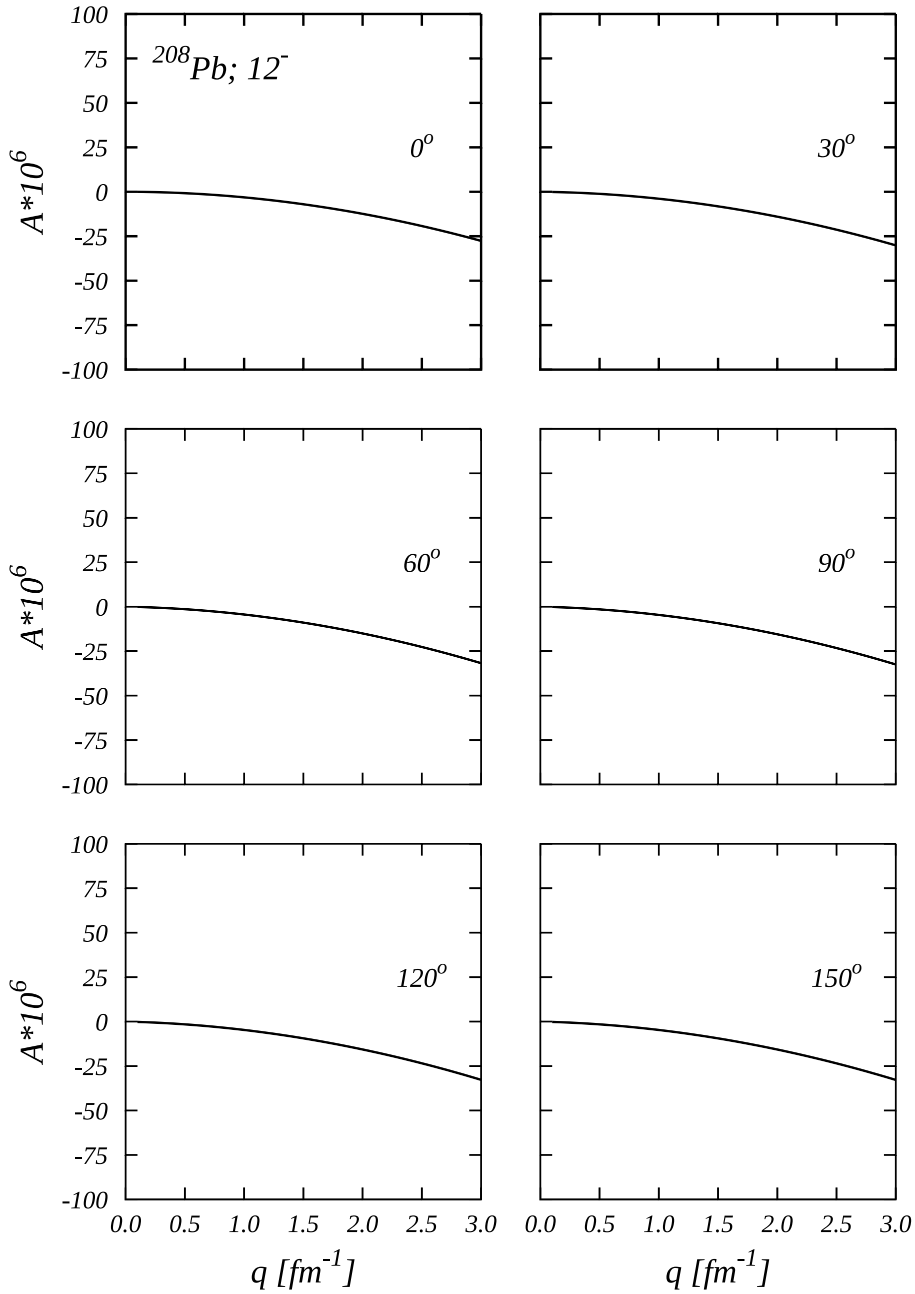

Figura 5.4: Asimmetria nello stato eccitato 12^- del ^{208}Pb; stato di singola particella protonico.

Il risultato è mostrato nella Figura 5.5 per gli stati eccitati 4^- dell'^{16}O e 12^- del ^{208}Pb. Da questa prima analisi possiamo dire che, come ci aspettavamo, l'$\mathcal{A}$ risulta indipendente dal nucleo considerato, in accordo con il fatto che è definita come rapporto tra sezioni d'urto.

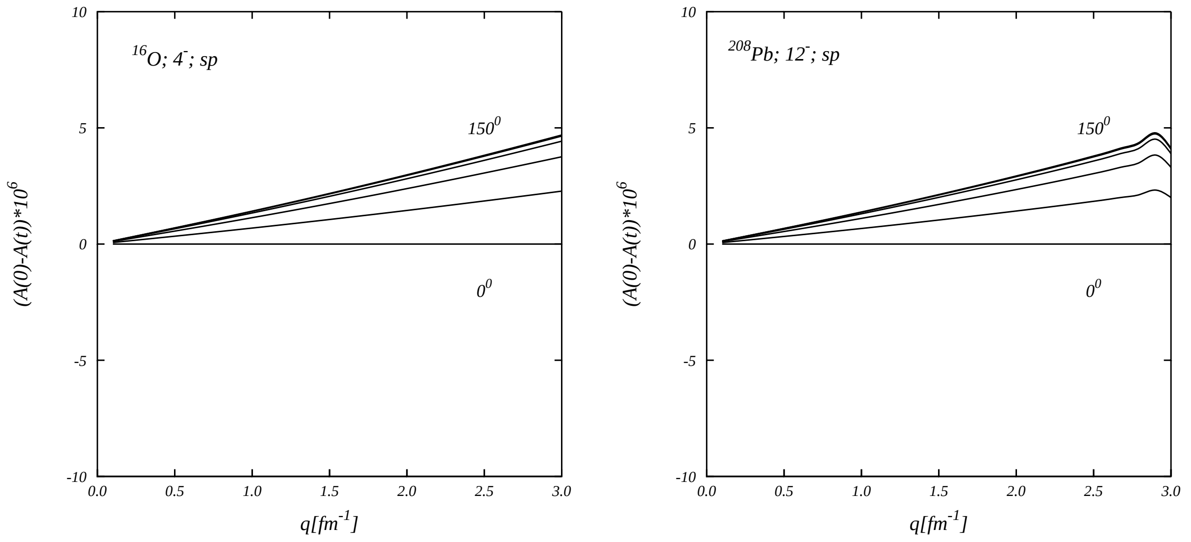

Figura 5.5: Variazione in θ dell'Asimmetria in transizioni di tipo magnetico, a sinistra per il nucleo di ^{16}O, a destra per il nucleo del ^{208}Pb. Le varie linee tra 0^o e 150^o rappresentano, in ordine crescente, i valori di θ, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o, 150^o. Le linee per $\theta = 120^o$ e 150^o sono sovrapposte.

È interessante a questo punto presentare il caso in cui lo stato eccitato sia descritto da una configurazione di tipo neutronico di singola particella. Trattiamo ancora gli stati eccitati 4^- dell'^{16}O e 12^- del ^{208}Pb. Utilizziamo questa volta la configurazione che segue per lo stato 4^- dell'^{16}O ad energia $E = 18.89$ MeV:

$$\nu : \left(1d_{5/2}\right)\left(1p_{3/2}\right)^{-1} \tag{5.68}$$

e per lo stato 12^- del ^{208}Pb, ad energia $E = 6.76$ MeV, la configurazione data da:

$$\nu : \left(1j_{15/2}\right)\left(1i_{13/2}\right)^{-1} \tag{5.69}$$

Il risultato ottenuto per $\mathcal{A}$ è riportato nelle Figure 5.6 e 5.7. Notiamo che il valore massimo dell'Asimmetria è dell'ordine di -50×10^{-6}, circa il doppio rispetto a quello ottenuto per la configurazione di tipo protonico. Per capire l'origine di tale comportamento

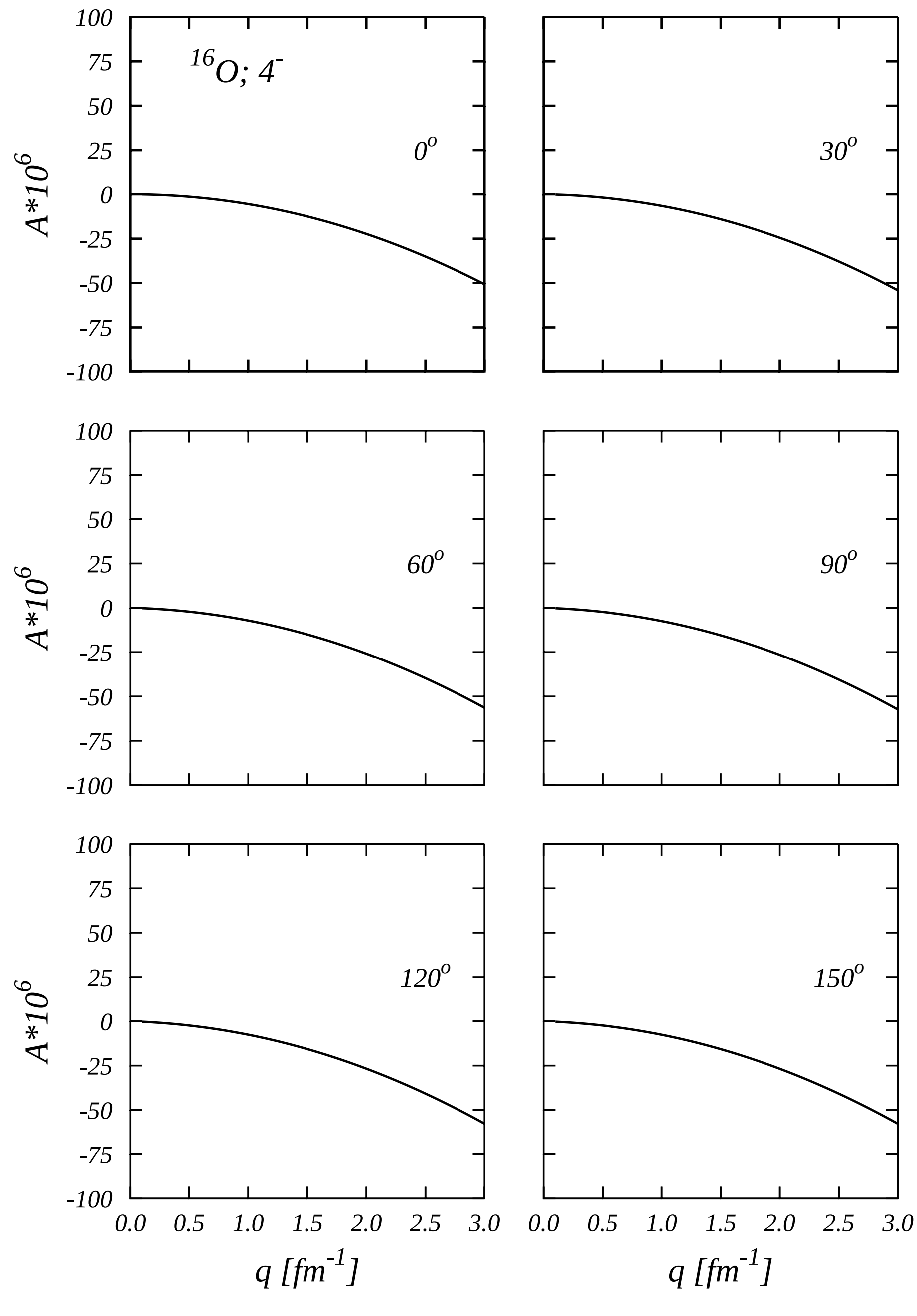

Figura 5.6: Asimmetria nello stato eccitato 4^- del ^{16}O; stato di singola particella neutronico.

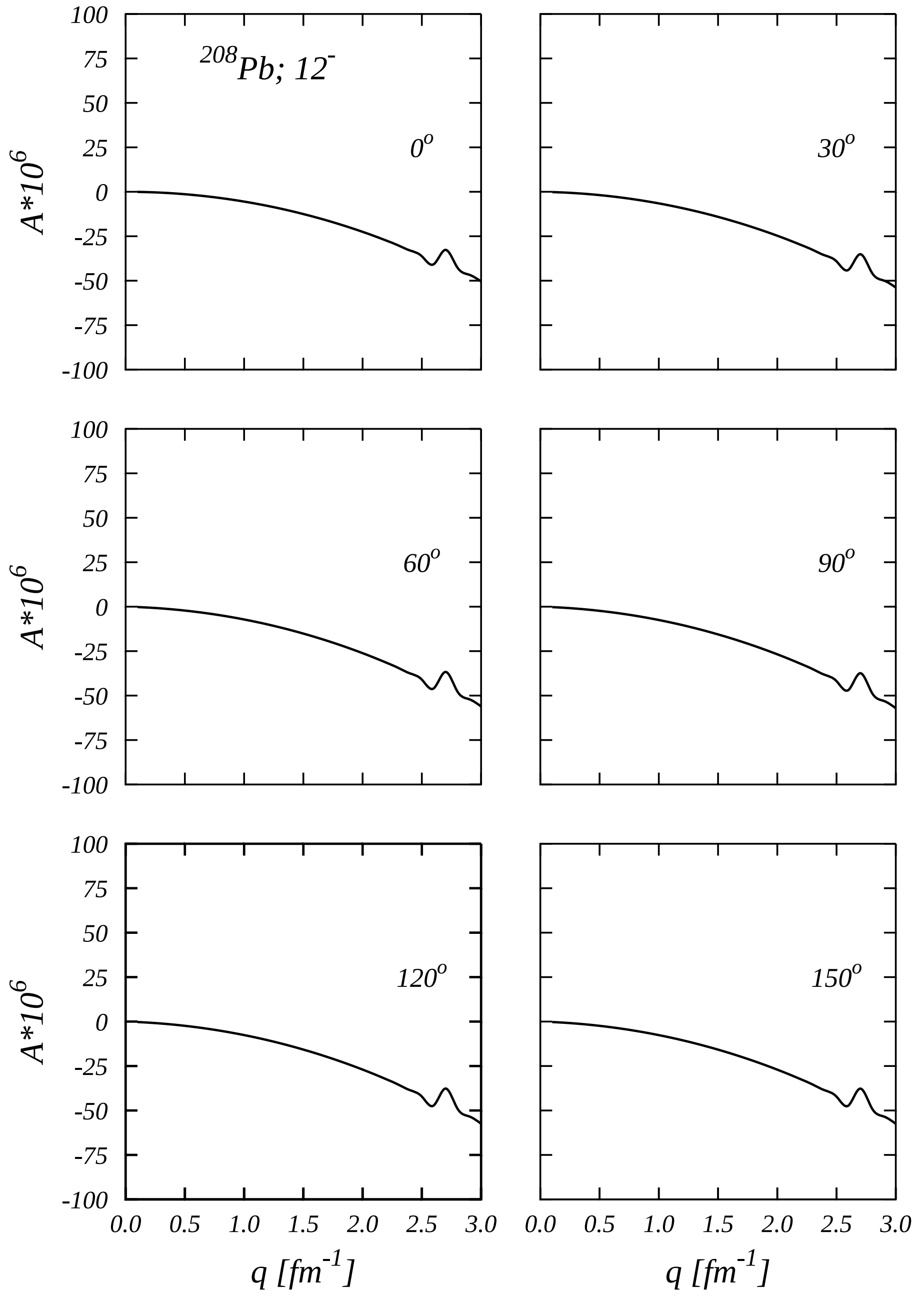

Figura 5.7: Asimmetria nello stato eccitato 12^- del ^{208}Pb; stato di singola particella neutronico.

è necessario ricorrere all'analisi delle singole risposte nucleari o fattori di forma nucleari. Poiché la transizione che stiamo considerando è di tipo magnetico, la definizione delle risposte nucleari è quella data nelle equazioni (5.22)-(5.26) mentre l'espressione dell'A-simmetria è stata definita nella (5.42). Abbiamo analizzato la singole risposte nucleari ed il risultato è esposto nella Figura 5.8 per la transizione allo stato 4^- dell'^{16}O e nella Figura 5.9 per la transizione allo stato 12^- del ^{208}Pb.

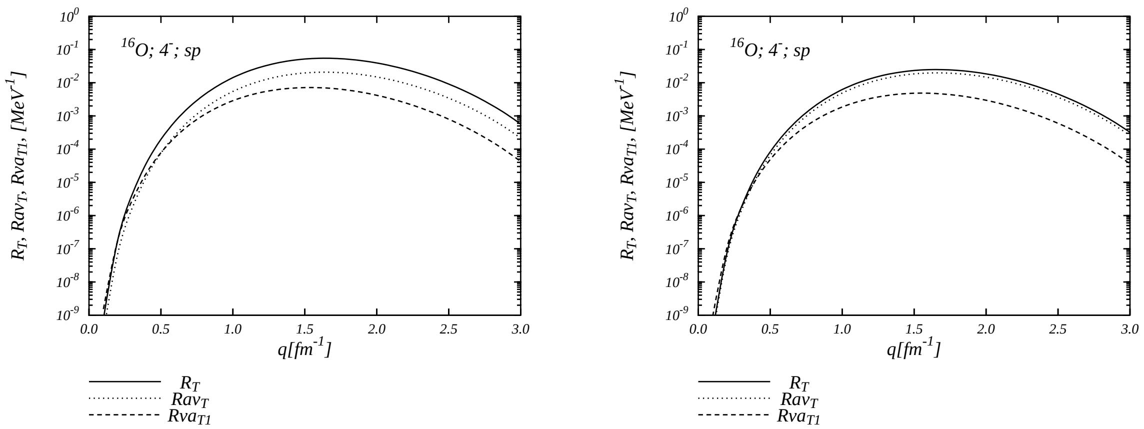

Figura 5.8: Risposte nucleari nello stato eccitato 4^- del ^{16}O. A sinistra per lo stato di singola particella protonico, a destra per lo stato di singola particella neutronico.

Le Figure mostrano che le risposte trasversali elettromagnetiche R_T sono sensibilmente maggiori nel caso di configurazione di tipo protonico rispetto al caso di configurazione di tipo neutronico. Questo implica un aumento del denominatore della (5.42) con conseguente diminuzione dell'Asimmetria in configurazioni di tipo protonico. Questo comportamento è da attribuirsi al ruolo svolto dai fattori di forma elettromagnetici nella risposta nucleare R_T. La risposta trasversale elettromagnetica R_T è generata dalle correnti di convezione e di magnetizzazione presenti all'interno del nucleo. Le prime sono proporzionali ai fattori di forma nucleonici G_E^N, mentre le seconde ai fattori di forma G_M^N.
Dalle equazioni definite nelle (5.59) risulta evidente che la corrente di convezione è nulla per i neutroni. In realtà noi abbiamo utilizzato la parametrizzazione data in [Hoe76], ciò non toglie che i fattori di forma elettrici dei neutroni siano piccoli confrontati con i fattori di forma elettrici dei protoni. Questo comportamento si riflette ovviamente sulle rispo-

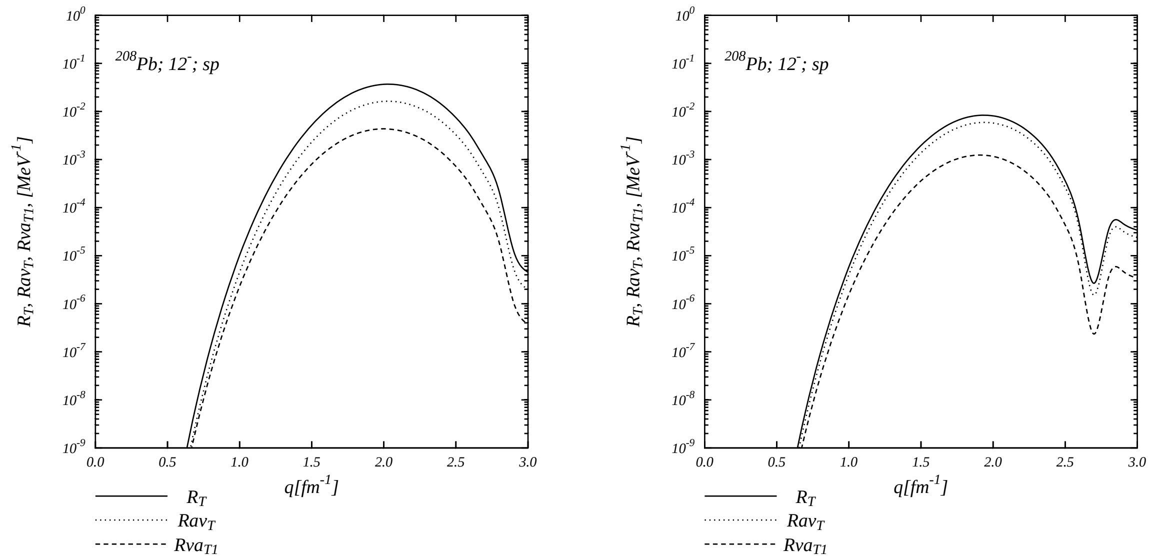

Figura 5.9: Risposte nucleari nello stato eccitato 12^- del ^{208}Pb. A sinistra per lo stato di singola particella protonico, a destra per lo stato di singola particella neutronico.

ste nucleari ed in particolare la risposta trasversale elettromagnetica, calcolata per una configurazione neutronica, risulta inferiore rispetto a quella calcolata per configurazioni protoniche.

Dopo aver analizzato transizioni di tipo magnetico, consideriamo adesso le transizioni di tipo elettrico. Ricordiamo che in questo caso le risposte nucleari assumono le espressioni definite nelle equazioni (5.17)-(5.21), mentre l'Asimmetria è data dalla relazione (5.39). Anche in questo caso è necessario distinguere tra configurazioni di tipo protonico e di tipo neutronico.

Abbiamo considerato per le transizioni di tipo elettrico la transizione allo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb ad energia $E = 6.10$ MeV. In particolare abbiamo descritto lo stato eccitato come dovuto all'eccitazione di singola particella protonica:

$$\pi : \left(1j_{13/2}\right)\left(1h_{11/2}\right)^{-1} \tag{5.70}$$

L'Asimmetria calcolata è stata rappresentata in Figura 5.10. Notiamo che anche in questo caso il valore massimo raggiunto da $\mathcal{A}$ è dell'ordine di -25×10^{-6}.

In analogia a quanto visto per le transizioni di tipo magnetico, abbiamo valutatato la variazione dell'Asimmetria con θ in transizioni di tipo elettrico. I risultati ottenuti sono

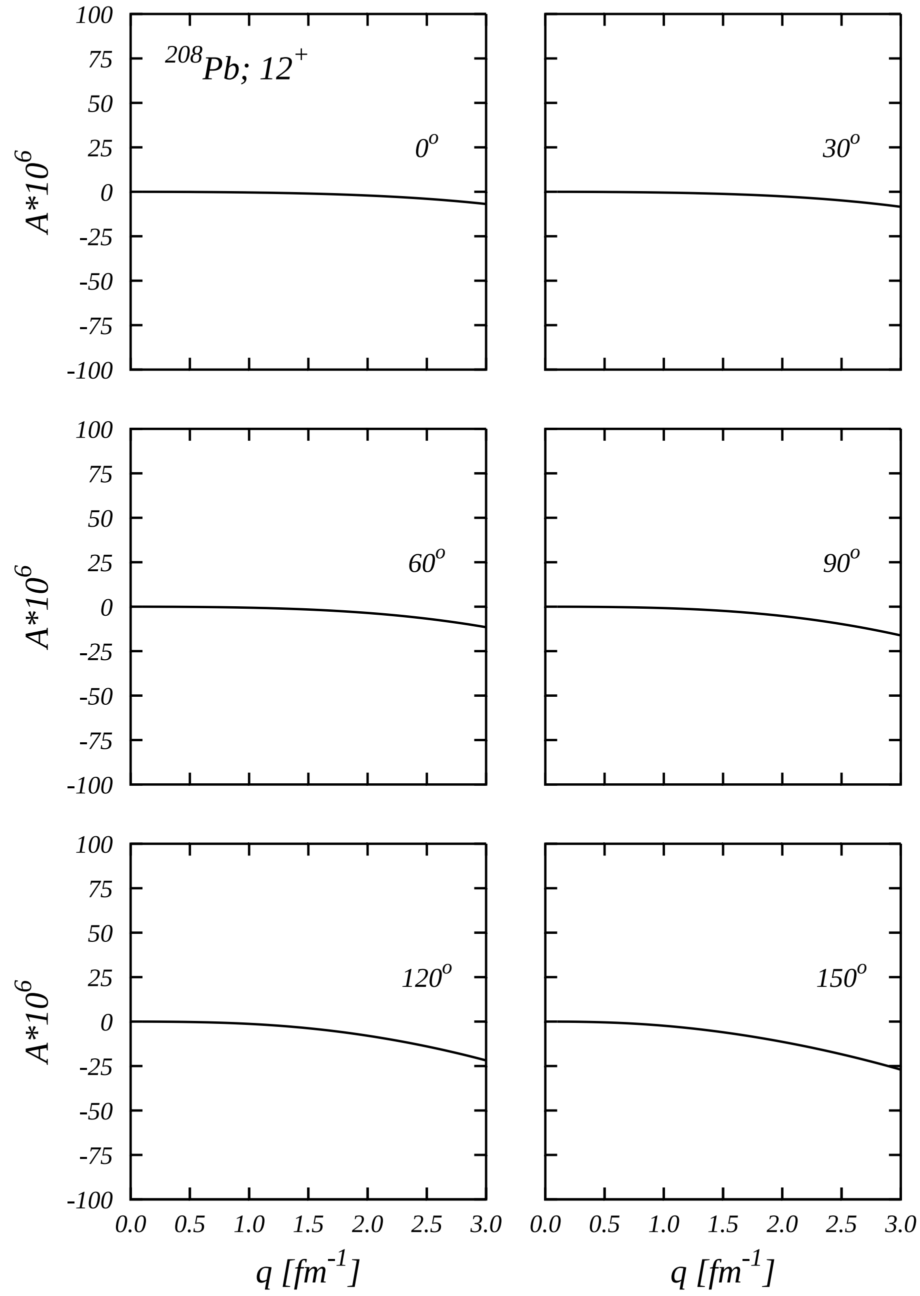

Figura 5.10: Asimmetria nello stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb; stato di singola particella protonico.

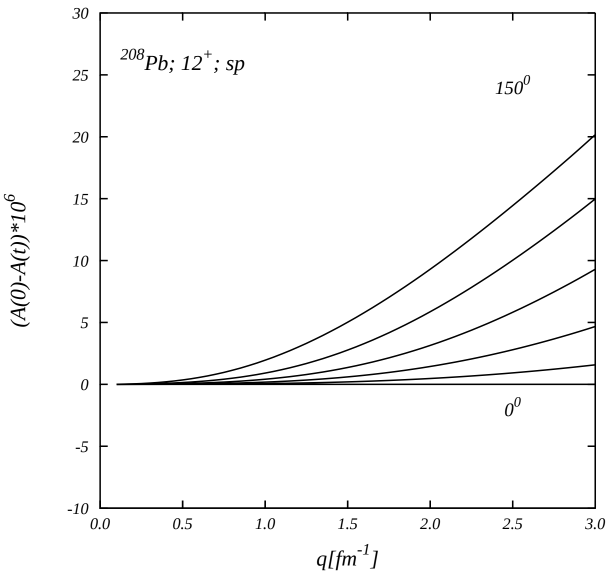

Figura 5.11: Variazione in θ dell'Asimmetria in transizioni di tipo elettrico, stato di singola particella di tipo protonico.

rappresentati in Figura 5.11.

Dalla Figura 5.11 discende che la variazione dell'Asimmetria con θ è maggiore per transizioni di tipo elettrico rispetto a transizioni di tipo magnetico. In questo caso specifico, il comportamento appena descritto è da ascriversi alla cinematica del processo che è tale da amplificare, per bassi valori di angoli di diffusione θ, i termini longitudinali, come si può osservare dalla (5.40). In particolare, la presenza, nel denominatore dell'equazione (5.40), del termine longitudinale elettromagnetico R_L, è responsabile dei bassi valori assunti dall'Asimmetria per piccoli angoli di diffusione. Affinché ciò sia manifesto è utile mostrare le singole risposte nucleari che intervengono nel processo. In Figura 5.12 si vede che il termine longitudinale elettromagnetico R_L gioca un ruolo importante per bassi valori di angoli di diffusione, valori per cui risulta amplificato.

Nel momento in cui si considerano grandi angoli di diffusione, i termini longitudinali sono attenuati dalle condizioni cinematiche, mentre diventano significativi i termini trasversali (vedi equazione (5.41)), con conseguente aumento dell'Asimmetria.

Descriviamo adesso lo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb ad energia $E = 6.10$ MeV con una

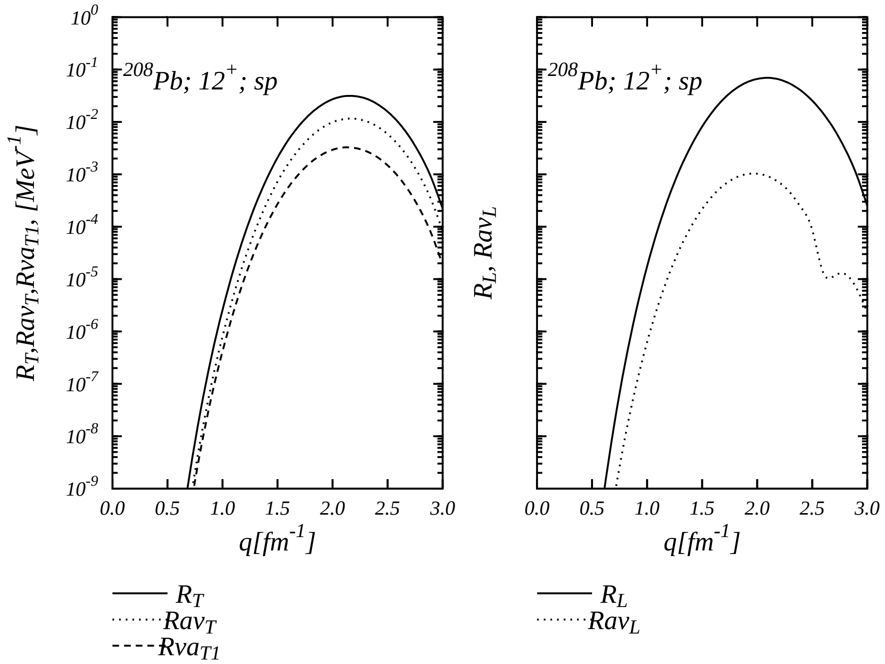

Figura 5.12: Risposte nucleari nello stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb; stato di singola particella protonico.

configurazione di singola particella di tipo neutronico data da:

$$\nu : \left(1i_{11/2}\right)\left(1i_{13/2}\right)^{-1} \tag{5.71}$$

L'Asimmetria in questa particolare transizione è stata rappresentata in Figura 5.13. Vediamo che, anche in questo caso, si ha un aumento dell'Asimmetria in valore assoluto; in particolare i valori massimi raggiunti dall'Asimmetria sono dell'ordine di -50×10^{-6}. Questo comportamento è da attribuirsi alla presenza nel denominatore dell'equazione (5.39) della risposta trasversale elettromagnetica R_T, che per i motivi esposti nello studio degli stati eccitati 4^- dell'^{16}O e 12^- del ^{208}Pb, è maggiore nel caso di eccitazione protonica che nel caso di eccitazione neutronica.

Inoltre il termine longitudinale elettromagnetico è in questo caso molto più piccolo rispetto al caso protonico (vedi dicussione seguente), quindi il denominatore della (5.39) è sensibilmente inferiore rispetto al caso in cui lo stato di singola particella sia di natura protonica.

È interessante mostrare le singole risposte nucleari ottenute utilizzando la configurazione

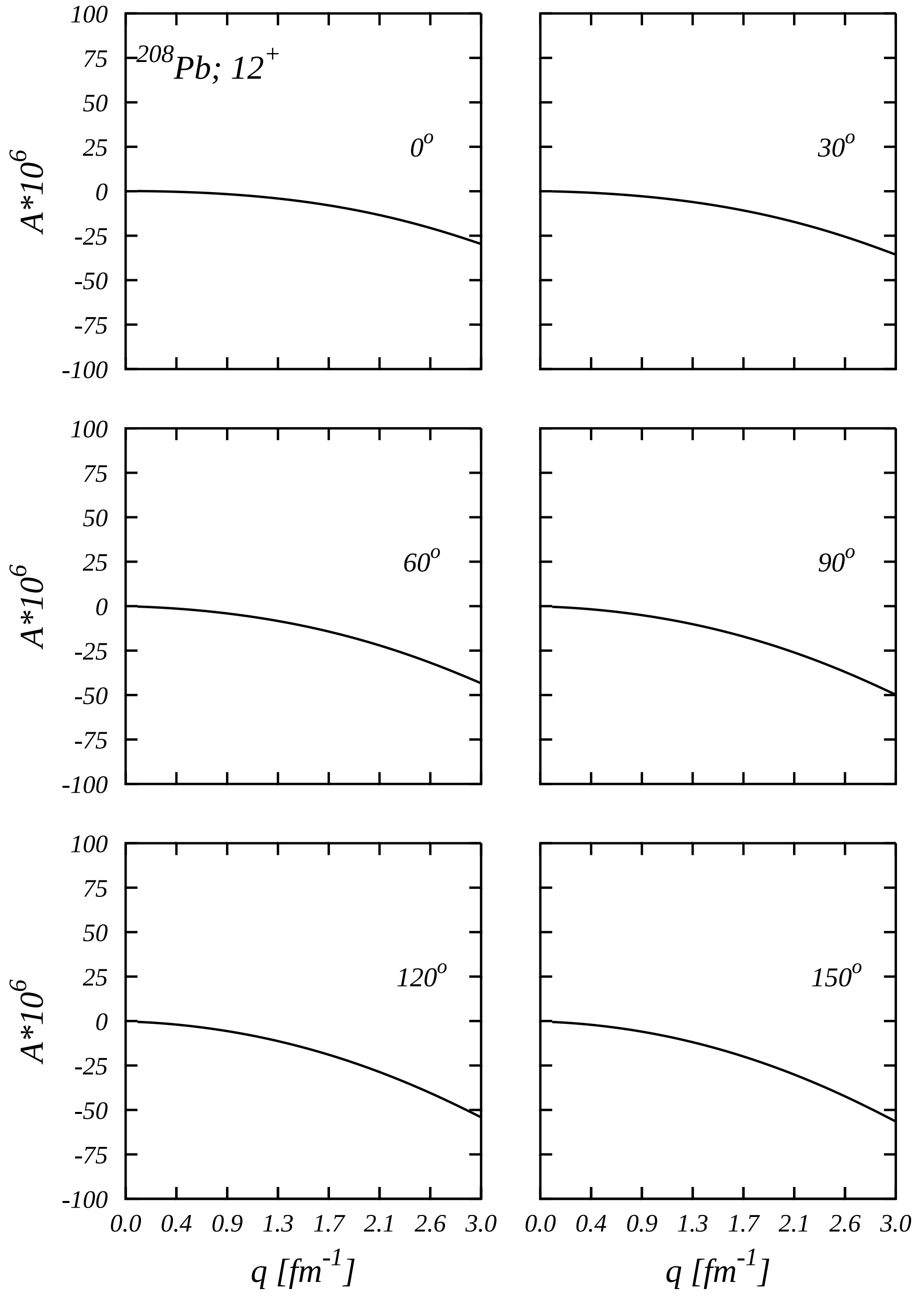

Figura 5.13: Asimmetria nello stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb; stato di singola particella neutronico.

di singola particella neutronica. Queste sono rappresentate in Figura 5.14. La risposta

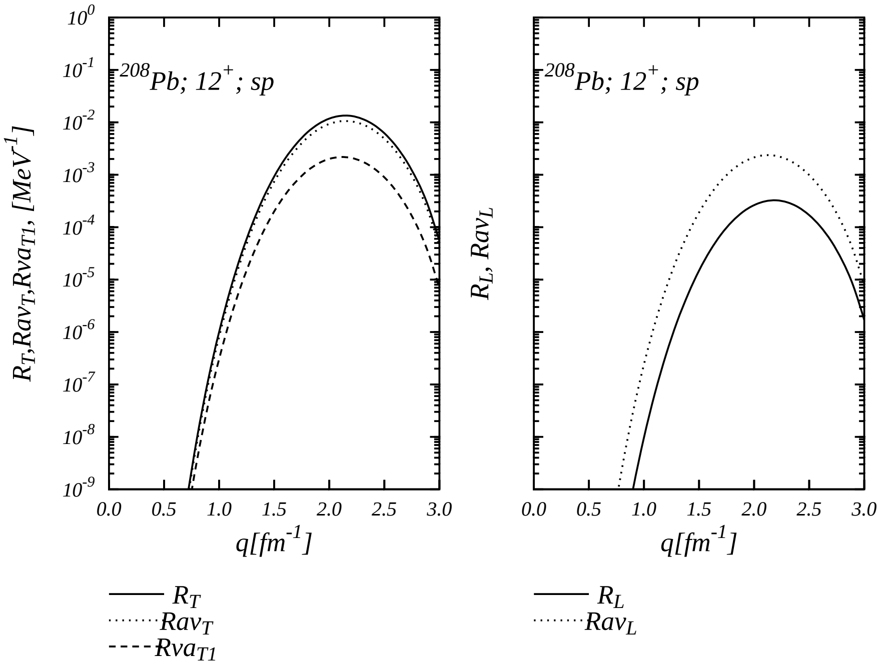

Figura 5.14: Risposte nucleari nello stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb; stato di singola particella neutronico.

trasversale elettromagnetica R_T risulta, come previsto, inferiore rispetto al caso di eccitazione protonica (vedi Figura 5.12). Ciò è legato al fatto che la corrente di convenzione è, nella transizione di tipo neutronico, trascurabile. Inoltre, da un confronto tra le Figure 5.12 e 5.14 possiamo osservare come le risposte lungitudinali elettromagnetiche R_L siano sensibili alla natura dello stato di singola particella. Infatti queste sono rappresentative della carica presente all'interno dei nuclei quindi sono legate ai fattori di forma G_E^N. Ovviamente il termine longitudinale di carica è maggiore per stati di natura protonica.
Un altro aspetto interessante riguarda la risposta longitudinale di interferenza R_L^{AV}, la cui espressione è stata definita nell'equazione (5.19). Da un confronto tra le Figure 5.12 e 5.14 si può osservare come anche le risposte lungitudinali di interferenza siano sensibili alla natura dello stato di singola particella considerato. In particolare osserviamo che per eccitazioni di tipo protonico (vedi Figura 5.12) la risposta R_L^{AV} è più piccola rispetto a quella calcolata in eccitazione di tipo neutronico (vedi Figura 5.14). Il valore massimo

della risposta è $\sim 1.5 \times 10^{-3}$ nel caso neutronico contro $\sim 1 \times 10^{-3}$ nel caso protonico. Questo comportamento riflette la struttura dei fattori di forma deboli neutri elettrici $\widetilde{G}_E^{p,n}$, definiti nell'equazione (4.6) come:

$$\widetilde{G}_E^{p,n} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) G_E^{p,n} - G_E^{n,p} \tag{5.72}$$

Poiché il valore assunto dalla costante $(1 - 4\sin^2\theta_W)$ è 0.092, possiamo in prima approssimazione affermare che:

$$\widetilde{G}_E^{p,n} \sim -G_E^{n,p} \tag{5.73}$$

Questo significa che il fattore di forma elettrico associato alla corrente debole neutra è, in valore assoluto, maggiore nei neutroni che nei protoni, contrariamente al caso elettromagnetico.

Dalla (5.19) discende che la risposta longitudinale di interferenza R_L^{AV}, è proporzionale al prodotto dei fattori di forma $G_E^{p,n}$ e $\widetilde{G}_E^{p,n}$. Per cui la risposta longitudinale di interferenza risulta essere maggiore per eccitazioni di singola particella di tipo neutronico, in accordo con quanto osservato nelle Figure 5.12 e 5.14. Da questa, analisi risulta evidente che la natura dello stato di singola particella considerato giochi un ruolo fondamentale nella determinazione delle risposte nucleari. Questo comportamento si riflette anche nell'osservabile Asimmetria.

Osserviamo che, mentre la configurazione di tipo neutronico per lo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb ad energia $E = 6.10$ MeV è stata sperimentalmente trovata [Con92], la configurazione di tipo protonico è stata utilizzata semplicemente per studiare la sensibilità dell'Asimmetria rispetto a tutto l'apparato teorico utilizzato per la descrizione del processo in esame.

Abbiamo, per adesso, esaminato i due tipi di transizione: elettrica e magnetica. Per la descrizione degli stati eccitati abbiamo considerato le configurazioni di singola particella valutando le differenze tra stati di natura protonica e stati di natura neutronica. I risultati ottenuti mostrano che non è possibile alcuna generalizzazione, ma è necessario uno studio particolareggiato dei singoli casi, vista la forte dipendenza dal modello teorico utilizzato. Per questo motivo abbiamo ritenuto opportuno studiare degli stati eccitati ben noti dal punto di vista sperimentale scegliendo in particolare gli stati eccitati 12^- del ^{208}Pb ad energie 7.933 MeV [Lin79] e 6.76 MeV [Lin79] per le transizioni di tipo magnetico, e lo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb ad energia $E = 6.10$ MeV [Con92], per le transizioni di tipo elettrico.

La nostra analisi prosegue quindi nel considerare la sensibilità del'Asimmetria, nelle transizioni appena indicate, ai modelli utilizzati per la descrizione degli stati eccitati. Abbiamo condotto questo studio calcolando l'Asimmetria con i tre modelli nucleari descritti in precedenza; il modello a campo medio e l'RPA utilizzando le due interazioni residue. Nei calcoli RPA lo spazio delle funzioni d'onda viene discretizzato diagonalizzando il potenziale di Woods-Saxon in una base di oscillatore armonico [Bis00].
I calcoli in ^{208}Pb sono fatti utilizzando tutti gli stati di buca di singola particella ed eccitazioni fino a $4\hbar\omega$ al di sopra della superficie di Fermi. Consideriamo per prime le transizioni di tipo elettrico. Quindi esaminiamo la transizione allo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb. Abbiamo implementato la descrizione di eccitazione di singola particella di tipo neutronico, utilizzado il modello RPA con interazione residua di tipo Landau-Migdal (RPA-LM), e con interazione residua di tipo Jülich-Stony-Brook (RPA-JSB). Il calcolo RPA per il 12^+ produce 25 eccitazioni di singola particella. Le configurazioni calcolate con modello RPA-LM sono state riportate nella Tabella (E.1), mentre quelle ottenute con modello RPA-JSB sono date in Tabella (E.2).

Nelle Figure 5.15 e 5.16 mostriamo il confronto tra Asimmetria calcolata con modello di singola particella (linea continua) ed Asimmetria calcolata con uno dei modelli RPA (linea punteggiata). Notiamo che la differenza tra le due curve è più pronunciata per bassi valori di angolo di diffusione θ.
Poiché stiamo trattando transizioni di tipo elettrico, sappiamo che, in questo caso, a bassi valori di θ sono i termini longitudinali a determinare il comportamento dell'Asimmetria. Quindi ci aspettiamo che la variazione di $\mathcal{A}$ sia prodotta da una variazione dei termini longitudinali.
Per verificare questa ipotesi è, ancora una volta, necessario risalire al comportamento delle singole risposte nucleari.
Queste sono state rappresentate nelle Figure 5.17 e 5.18. Il confronto va effettuato con le risposte ottenute con configurazione di singola particella neutronica, rappresentate nella Figura 5.14. Notiamo come il termine longitudinale elettrico R_L, passi da $\sim 2 \times 10^{-4}$, valo-

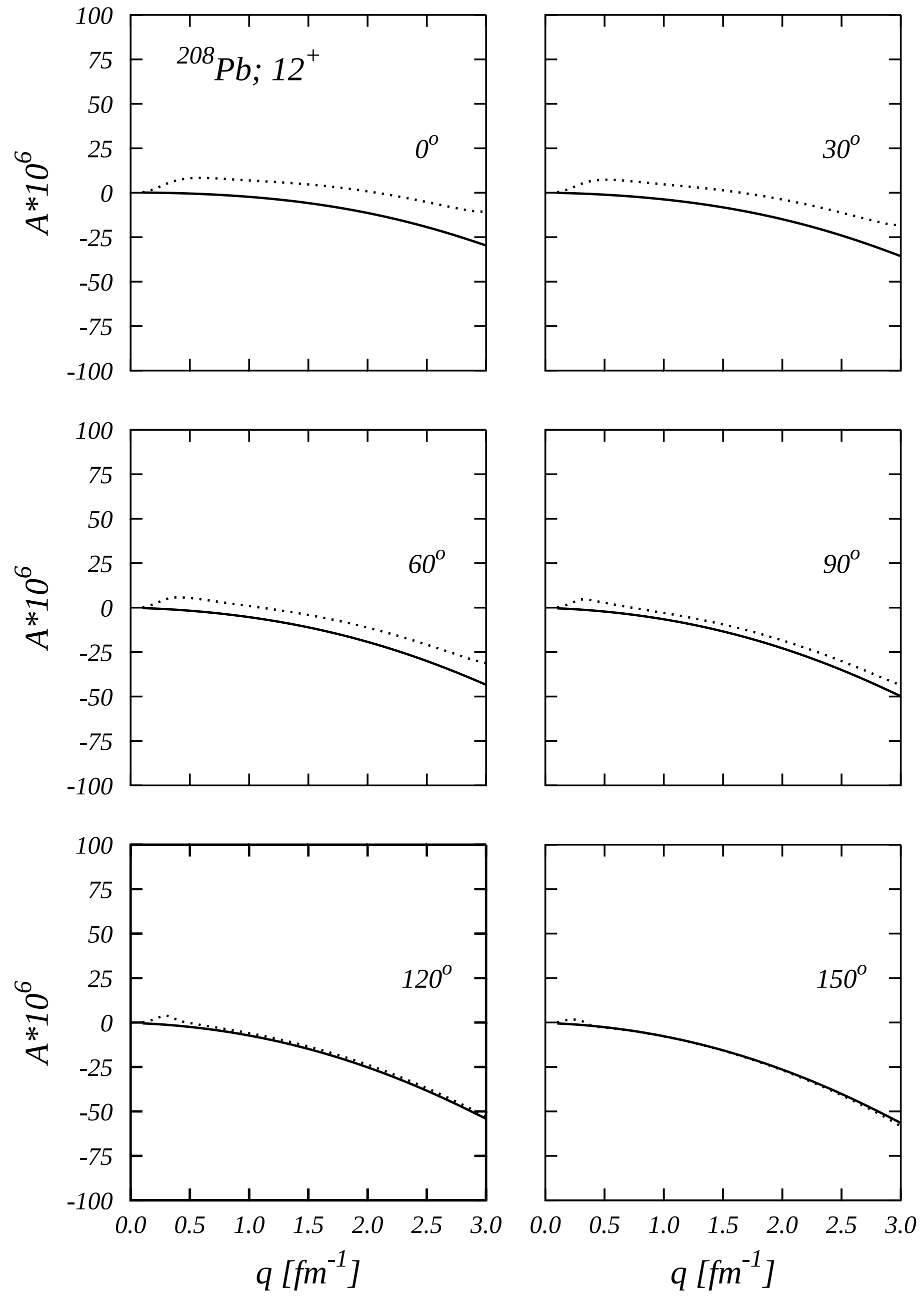

Figura 5.15: Asimmetria nella transizione elettrica allo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb calcolata con modello singola particella (linea continua) e con modello RPA-LM (linea punteggiata).

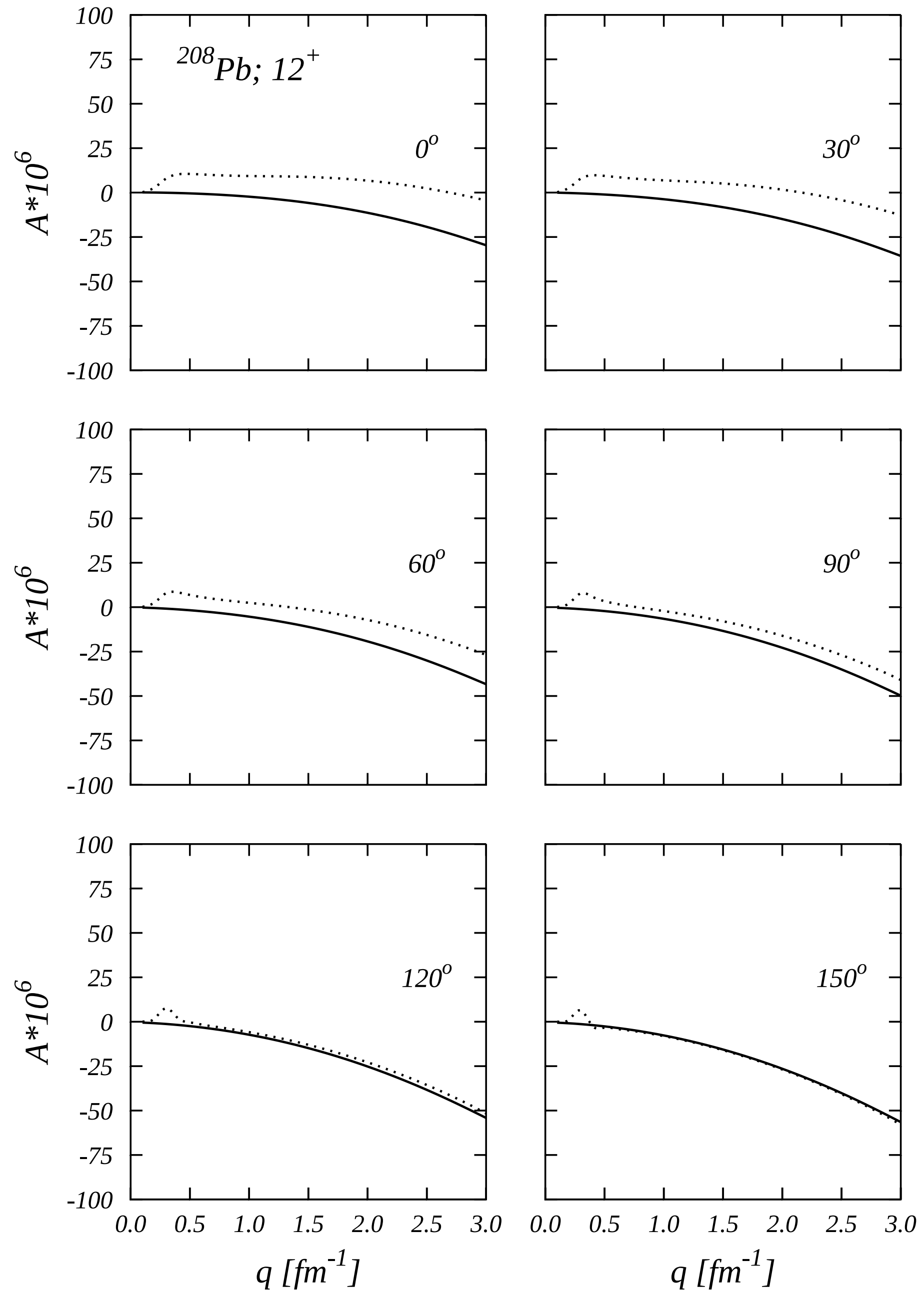

Figura 5.16: Asimmetria nella transizione elettrica allo stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb calcolata con modello singola particella (linea continua) e con modello RPA-JSB (linea punteggiata).

re massimo osservato per configurazione di singola particella, a $\sim 1\times 10^{-3}$, valore massimo osservato per configurazione RPA. Per comprendere tale comportamento analizziamo le configurazioni date nelle Tabelle (E.1) e (E.2). Osserviamo che le configurazioni RPA sono dominate dallo stato di tipo neutronico $\nu : \left(1i_{11/2}\right)\left(1i_{13/2}\right)^{-1}$, che è ovviamente lo stato utilizzato per la descrizione di eccitazione di singola particella.
Gli altri stati, sia protonici che neutronici, intervengono con pesi trascurabili. Nonostante ciò, il 'mixing' è tale da modificare sensibilmente le risposte longitudinali elettromagnetiche R_L e questo comportamento si riflette a livello di Asimmetria.

Per quantificare la variazione di $\mathcal{A}$ rispetto a differenti scelte di modello abbiamo rap-

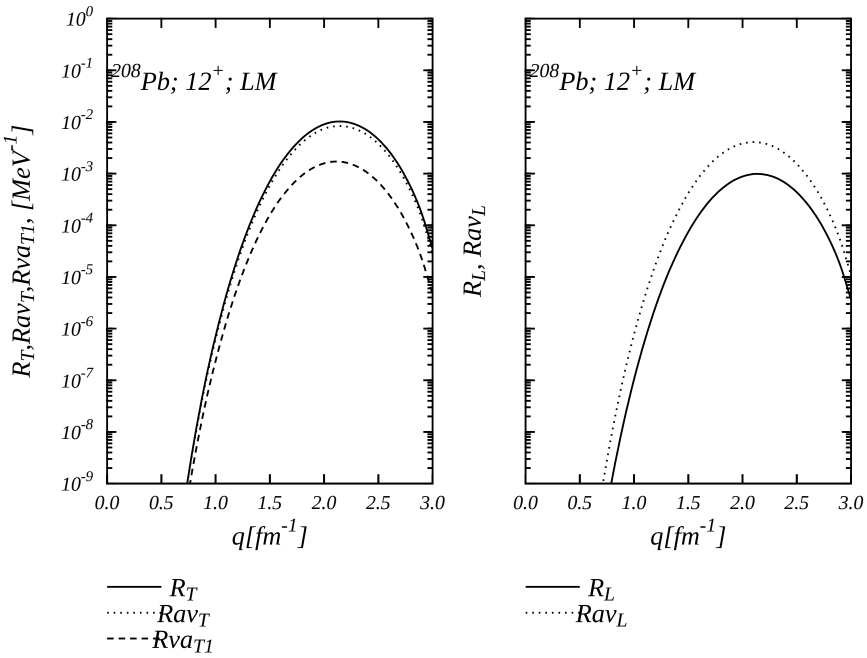

Figura 5.17: Risposte nucleari nello stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb calcolate con modello RPA-LM.

presentato la differenza tra Asimmetria calcolata con modello di singola particella (sp) e calcolata con uno dei modelli RPA, ovvero:

$$\Delta\mathcal{A}\left(modello\right) = \mathcal{A}\left(sp\right) - \mathcal{A}\left(RPA\right) \tag{5.74}$$

I risultati sono mostrati nella Figura 5.19 ottenute fissando θ a 60^o. Nella stessa Figura in basso, Figura è rappresentata la variazione di $\mathcal{A}$ rispetto ai due modelli RPA. Questa

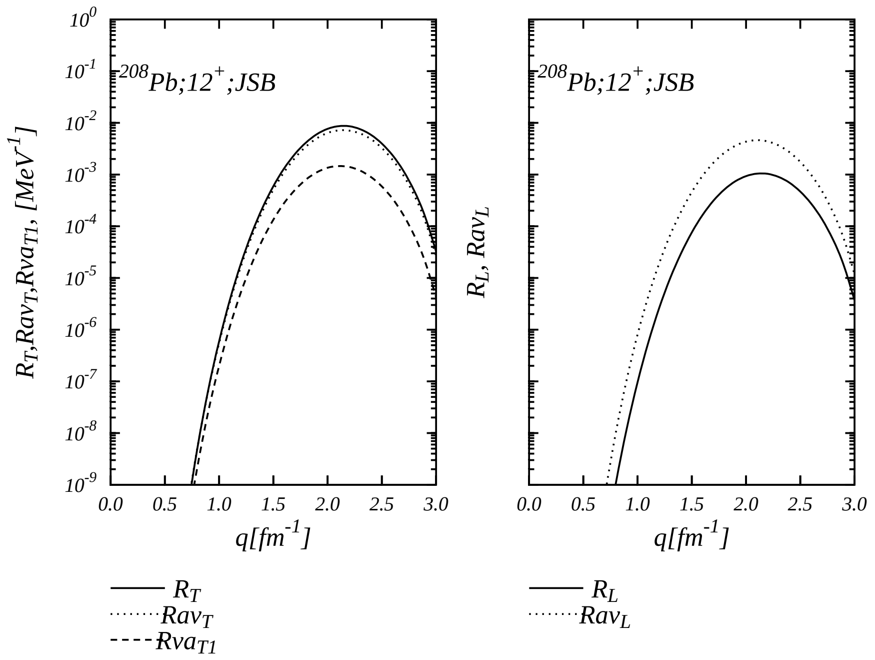

Figura 5.18: Risposte nucleari nello stato eccitato 12^+ del ^{208}Pb calcolate con modello RPA-JSB.

analisi mostra che, il termine longitudinale elettromagnetico è estremamente sensibile al modello nucleare considerato e tale comportamanto si riflette sulla nostra osservabile. Per ottenere risultati stabili bisognerebbe considerare processi a grandi angoli di diffusione, per cui le condizioni cinematiche sono tali da attenuare i termini longitudinali, responsabili dell'instabilità dell'Asimmetria. Resta da valutare quanto sia conveniente, dal punto di vista puramente sperimentale, considerare processi a grandi angoli di diffusione. Possimo però affermare che per la nostra analisi sono sconsigliate le transizioni di tipo elettrico in cui intervengono i termini longitudinali.

Consideriamo le transizioni di tipo magnetico. Abbiamo scelto di analizzare le transizioni allo stato eccitato 12^- del ^{208}Pb. Sono stati individuati sperimentalmente due stati con tale momento angolare [Lin79], uno ad energia $E = 6.43$ MeV e uno ad energia $E = 7.06$ MeV. Precedentemente abbiamo descritto questi stati come dovuti all'eccitazione di singola particella (vedi Figura 5.9). In particolare lo stato ad energia $E = 6.43$ MeV è dovuto all'eccitazione di uno stato di tipo neutronico, mentre lo stato ad energia $E = 7.06$ MeV all'eccitazione di uno stato di natura protonica.

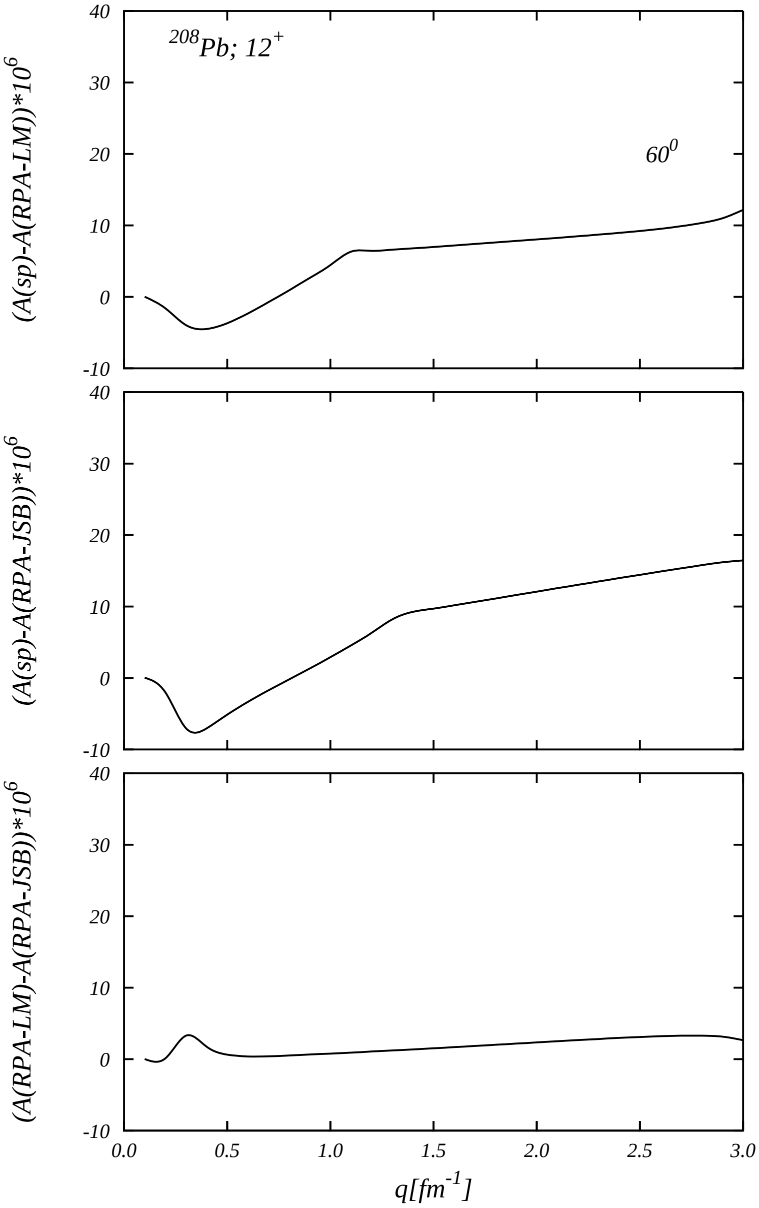

Figura 5.19: Dipendenza dal modello. In alto: confronto tra Asimmetria nello stato 12^+ del ^{208}Pb calcolata con modello singola particella e modello RPA-LM. Al centro: confronto tra Asimmetria nello stato 12^+ del ^{208}Pb calcolata con modello singola particella e modello RPA-JSB. In basso: confronto tra Asimmetria nello stato 12^+ del ^{208}Pb calcolata con modello RPA-LM e modello RPA-JSB.

Gli stessi stati, descritti nell'ambito del modello RPA, sono dovuti alla partecipazione di 26 coppie di stati di particella-buca date nelle Tabelle (E.3) e (E.4). I calcoli RPA per gli stati magnetici sono stati fatti con l'interazione JSB.

Abbiamo rappresentato l'Asimmetria ottenuta utilizzando l'eccitazione di singola particella e il modello RPA per lo stato ad energia $E = 6.43$ MeV. In Figura 5.20 è riportato il risultato ottenuto. Notiamo che rispetto alle transizioni di tipo elettrico l'Asimmetria si presenta più stabile. Nella Figura 5.21 rappresentiamo la variazione dell'Asimmetria nei due casi considerati, avendo fissato l'angolo di diffusione θ a 60^o. Dalle Tabelle E.3 e E.4 risulta evidente come l'eccitazione dei due stati 12^- sia prodotta essenzialmente da una combinazione delle eccitazioni:

$$\nu : (1i_{11/2})(1i_{13/2})^{-1} \tag{5.75}$$

$$\pi : (1j_{13/2})(1h_{11/2})^{-1} \tag{5.76}$$

Per semplicità, nei calcoli successivi abbiamo descritto i due stati protonico e neutronico come combinazione lineare di queste due configurazioni con le ampiezze date nelle Tabelle E.5 e E.6. Il confronto tra i risultati ottenuti con questo modello a due stati e quelli dati dall'RPA-JSB è presentato nelle Figure 5.22 e 5.23 e notiamo l'ottimo accordo tra i due calcoli.

Vediamo come nell'eccitazione del 12^- l'assenza del termine longitudinale comporti una stabilità dell'Asimmetria. Le uniche differenze tra la transizione magnetica allo stato ad energia 6.43 MeV e allo stato ad energia 7.933 MeV, sono da attribuirsi unicamente alla natura dello stato considerato. Però non vi è sostanziale differenza tra i risultati ottenuti con la configurazione di singola particella, il modello a due configurazioni e l'RPA.

Per questo motivo utilizzeremo le transizioni magnetiche ad alti valori del momento angolare per lo studio della sensibilità dell'Asimmetria ai fattori di forma del nucleone.

5.6.2 Dipendenza dalle parametrizzazioni dei fattori di forma non strani dei nucleoni

Nella sezione precedente abbiamo identificato negli stati eccitati 12^- del nucleo del ^{208}Pb ad energie $E = 6.43$ MeV e $E = 7.933$ MeV due situazioni ottimali per la nostra indagine. Vogliamo ora osservare la sensibilità dell'$\mathcal{A}$ a differenti parametrizzazioni dei fattori

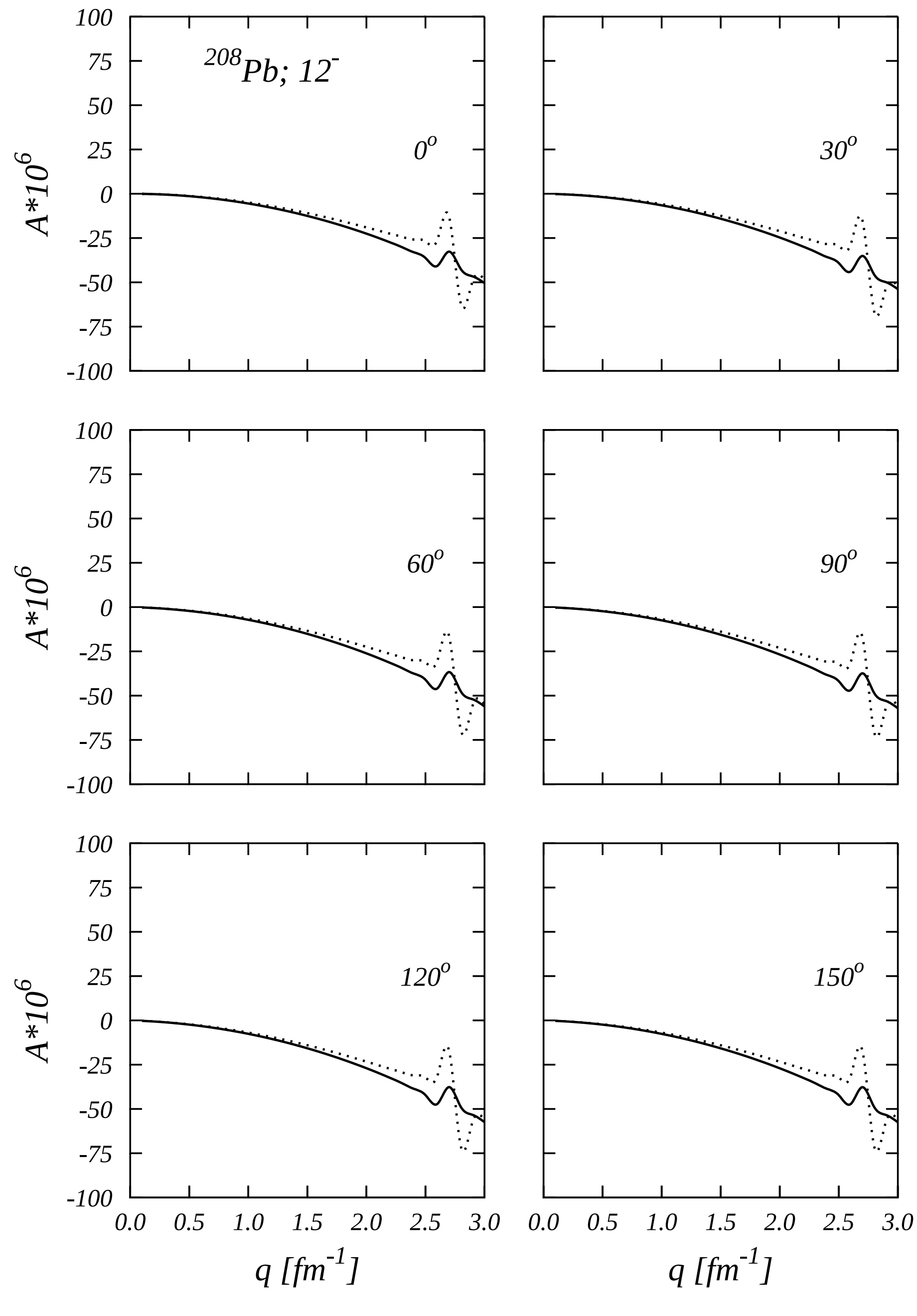

Figura 5.20: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E = 6.43$ MeV del ^{208}Pb calcolata con configurazione singola particella (linea continua) e con modello RPA (linea punteggiata).

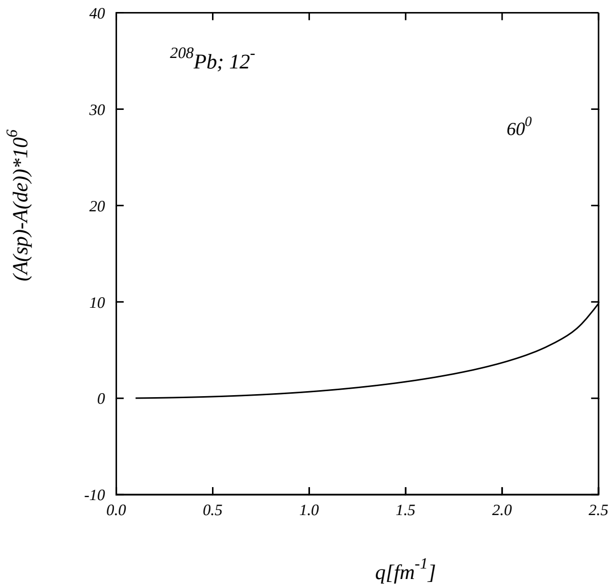

Figura 5.21: Dipendenza dal modello: confronto tra Asimmetria nello stato 12^- del ^{208}Pb ad energia $E = 6.43$ calcolata con modello singola particella e modello RPA.

di forma elettromagnetici del nucleone. Poiché abbiamo osservato una certa stabilità dell'$\mathcal{A}$ rispetto a differenti scelte di modello nucleare, descriveremo gli stati eccitati con la configurazione data da due stati di singola particella. In Figura 5.24 è riportata l'$\mathcal{A}$ nel caso di stato protonico (E = 7.933 MeV), calcolata con la parametrizzazione di dipolo e con la parametrizzazione di [Hoe76] per i fattori di forma elettromagnetici e fissando a zero i fattori di forma strani. Vediamo che le linee sono praticamente indistinguibili. Abbiamo ottenuto risultati analoghi anche per lo stato neutronico (E = 6.43 MeV). La stabilità di $\mathcal{A}$ rispetto a differenti parametrizzazioni dei fattori di forma non strani dei nucleoni, permette di proseguire la nostra analisi e di verificare la sensibilità di $\mathcal{A}$ rispetto all'introduzione dei fattori di forma strani del nucleone.

5.6.3 Parametrizzazione dei fattori di forma strani dei nucleoni

Dopo aver identificato gli stati nucleari da studiare definiamo le parametrizzazioni utilizzate per i fattori di forma strani del nucleone. A tale scopo ricordiamo che questi sono stati definiti nelle equazioni (2.75)-(2.76), che riportiamo:

$$\widetilde{F}^{p,n}_{1,2} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) F^{p,n}_{1,2} - F^{n,p}_{1,2} - F^{q}_{1,2} \tag{5.77}$$

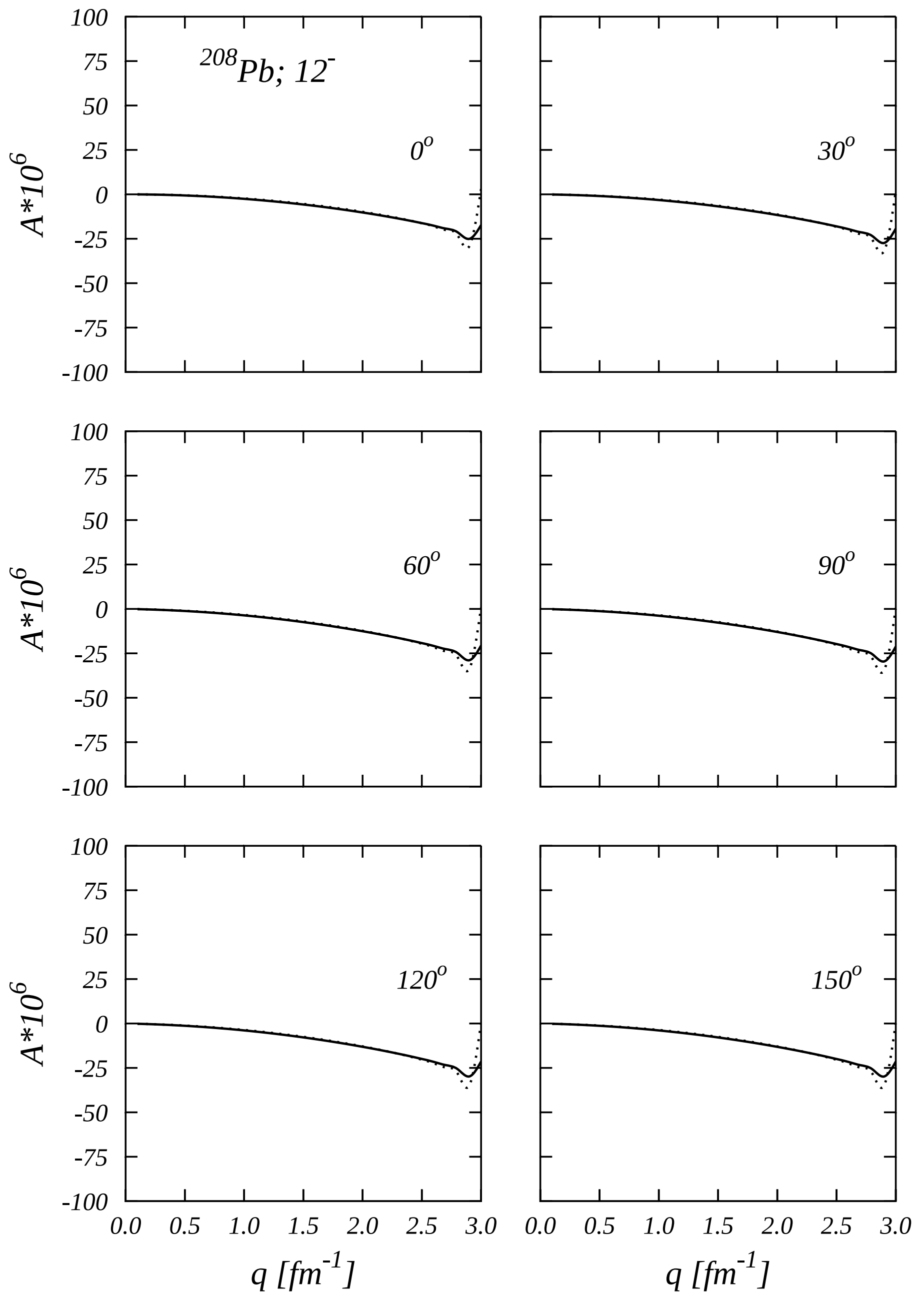

Figura 5.22: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E = 7.933$ MeV del ^{208}Pb calcolata con configurazione due stati (linea continua) e con modello RPA (linea punteggiata).

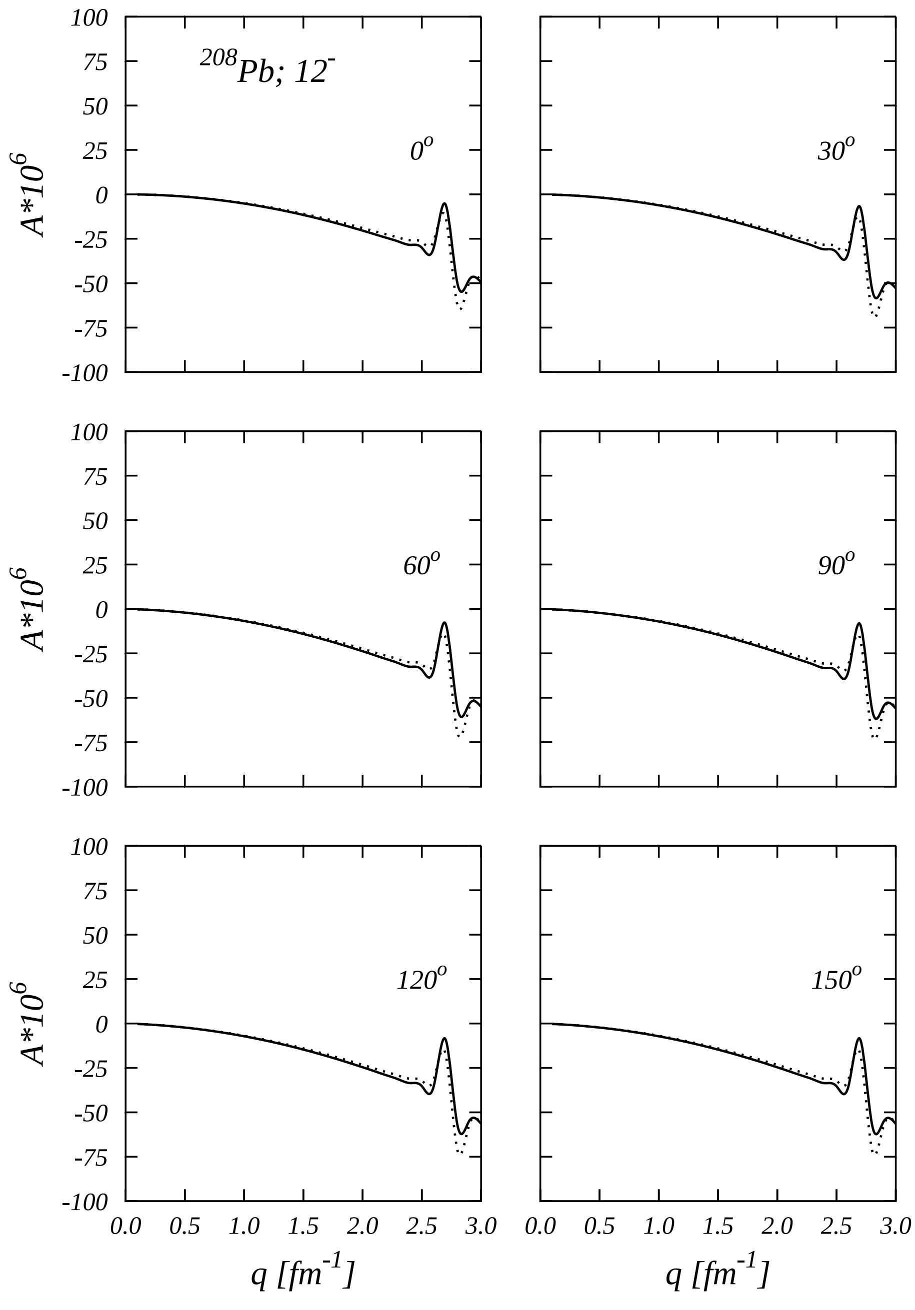

Figura 5.23: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E = 6.76$ MeV del ^{208}Pb calcolata con configurazione due stati (linea continua) e con modello RPA (linea punteggiata).

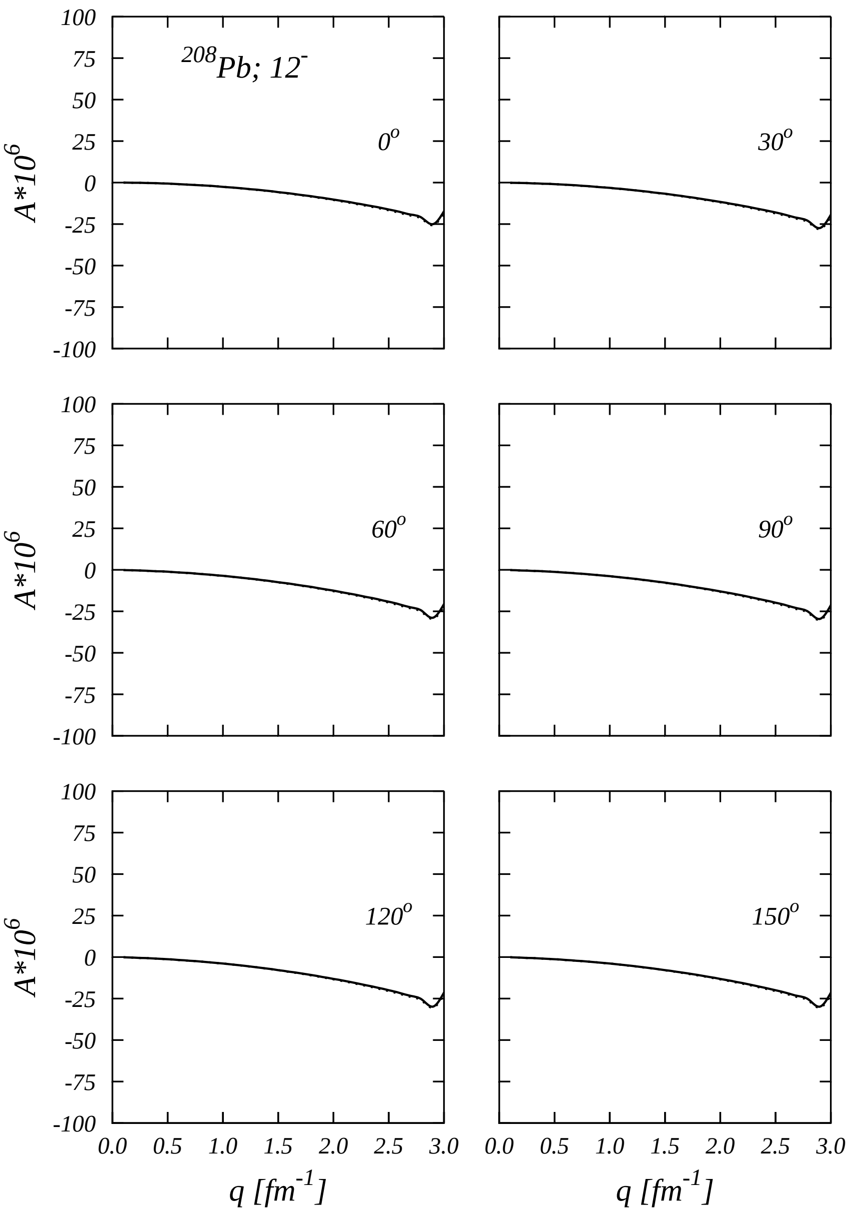

Figura 5.24: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E = 7.933$ MeV del ^{208}Pb calcolata con parametrizzazione di [Hoe76] (linea continua) e con parametrizzazione di dipolo (linea punteggiata).

$$\widetilde{G}_A^{p,n} = \mp 2\widetilde{G}_A^v + \widetilde{G}_A^q \tag{5.78}$$

Poiché stiamo lavorando con i fattori di forma di Sachs, l'equazione (5.77), espressa in termini di questi ultimi è:

$$\widetilde{G}_{E,M}^{p,n} = \left(1 - 4\sin^2\theta_W\right) G_{E,M}^{p,n} - G_{E,M}^{n,p} - G_{E,M}^q \tag{5.79}$$

Supporemo che la dipendenza da q dei fattori di forma strani elettrico G_E^q e magnetico G_M^q sia del tipo di dipolo, in analogia con quanto visto per i fattori di forma elettromagnetici dei nucleoni [Alb01], [Mus94]:

$$G_E^q(q) = \rho_E^s \tau \left(\frac{1}{1+\lambda_E^s \tau}\right)\left(1 - \frac{q^2}{\lambda^2}\right)^{-2} \tag{5.80}$$

$$G_M^q(q) = \mu_M^s \left(\frac{1}{1+\lambda_M^s \tau}\right)\left(1 - \frac{q^2}{\lambda^2}\right)^{-2} \tag{5.81}$$

Nelle equazioni precedenti il termine τ è definito come:

$$\tau = \frac{|q^2|}{4M_p^2} \tag{5.82}$$

e λ_E^s, λ_M^s, ρ_E^s e μ_M^s sono parametri da determinare. Per λ usiamo lo stesso valore che si utilizza per la parametrizzazione di dipolo dei fattori di forma elettromagnetici dei nucleoni (vedi equazione (5.59)). Le costanti ρ^s e μ^s sono rappresentative della distribuzione di stranezza e del momento magnetico strano del nucleone. In particolare nel limite in cui $q \longrightarrow 0$ le equazioni (5.80) e (5.81), si riducono a:

$$G_E^q(0) = 0 \tag{5.83}$$

$$G_M^q(0) = \mu_M^s \tag{5.84}$$

La ragione per cui G_E^q è nullo per $q \longrightarrow 0$ è che il nucleone non ha numero quantico di stranezza. A parte il valore assunto da G_E^q in $q = 0$, gli altri parametri sono tutti da fissare. In letteratura esistono al momento diversi modelli teorici utilizzati per la determinazione dei parametri ρ^s e μ^s [Jaf89], [Dub01], che prevedono valori che differiscono sia nel segno che nella magnitudine. Noi abbiamo scelto di utilizzare i valori adottati da [Ama96] e [Alb01]. In particolare si distinguono due tipi di parametrizzazioni una detta 'modest

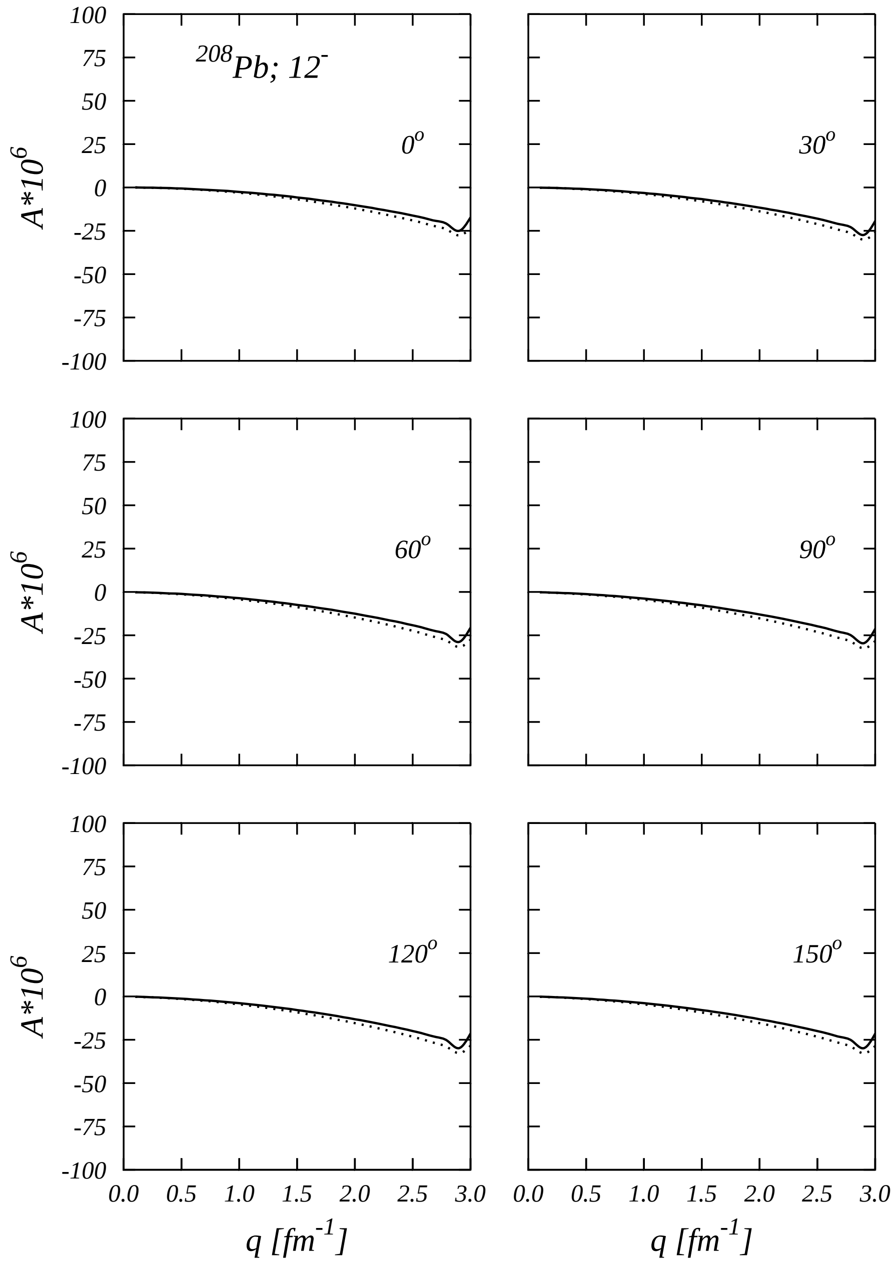

Figura 5.25: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E =$ 7.933 MeV del ^{208}Pb calcolata con fattori di forma strani di tipo mes (linea punteggiata) e senza fattori di forma strani (linea continua).

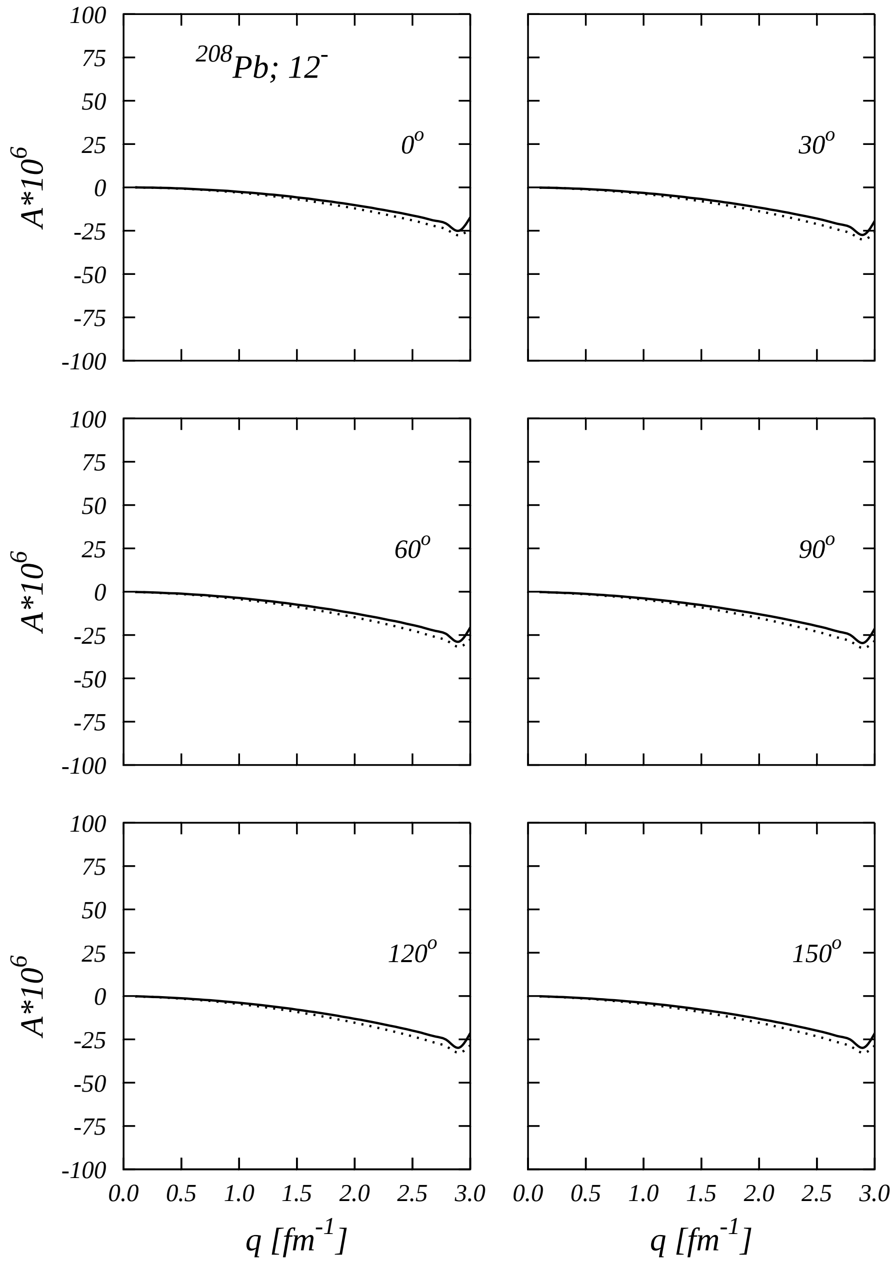

Figura 5.26: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E =$ 7.933 MeV del ^{208}Pb calcolata con fattori di forma strani di tipo *les* (linea punteggiata) e senza fattori di forma strani (linea continua).

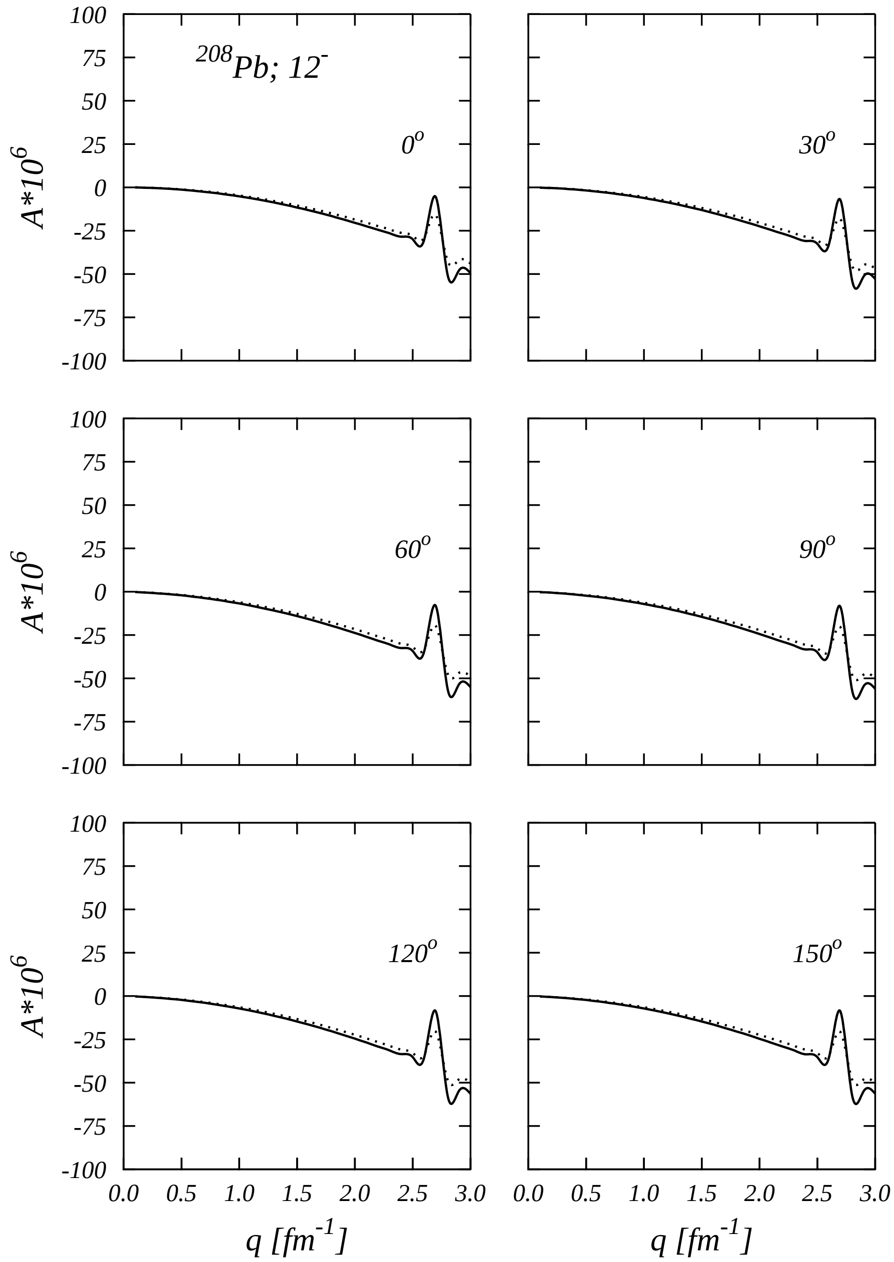

Figura 5.27: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E = 6.43$ MeV del ^{208}Pb calcolata con fattori di forma strani di tipo mes (linea punteggiata) e senza fattori di forma strani (linea continua).

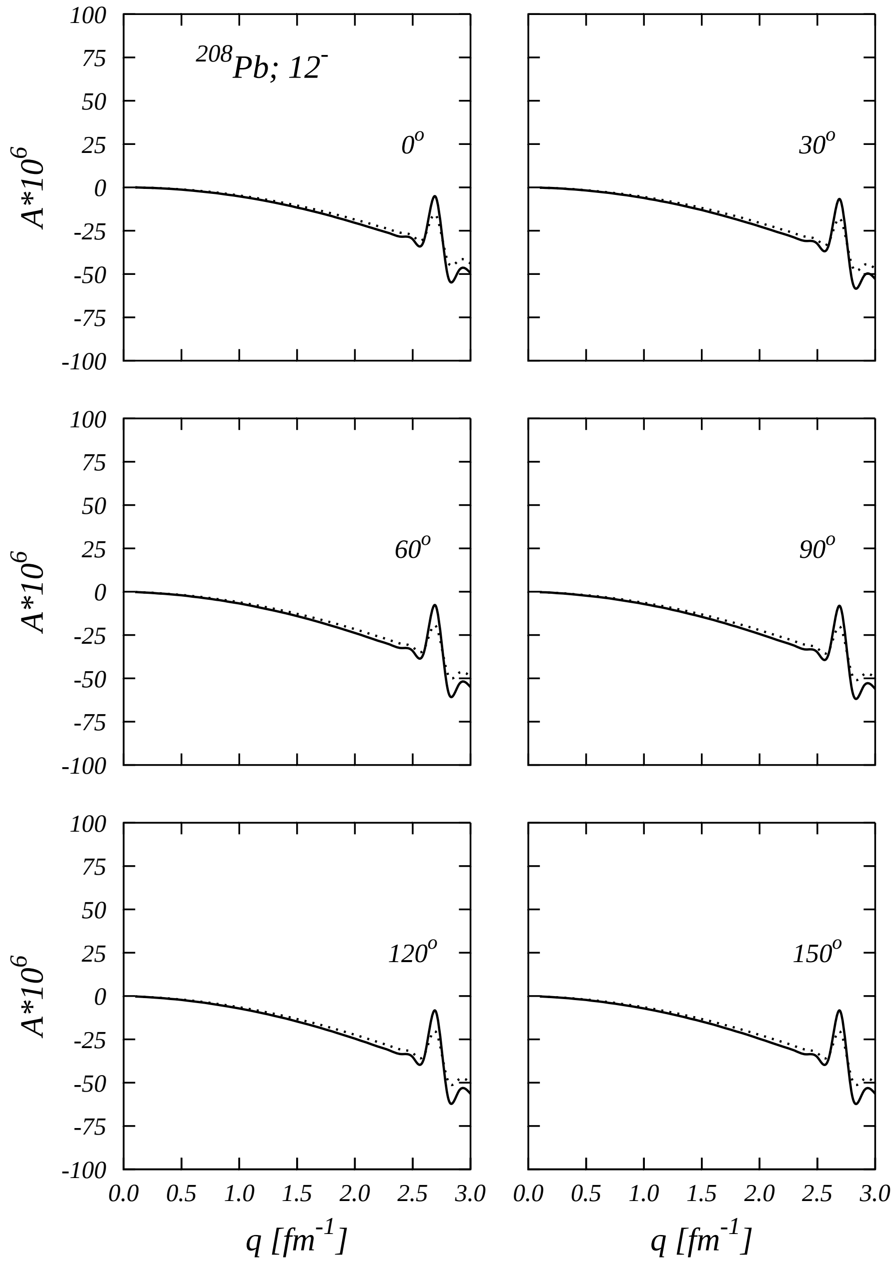

Figura 5.28: Asimmetria nella transizione magnetica allo stato eccitato 12^- ad energia $E = 6.43$ MeV del ^{208}Pb calcolata con fattori di forma strani di tipo les (linea punteggiata) e senza fattori di forma strani (linea continua).

	ρ^s	μ^s	λ_E^s	λ_M^s	G_A	λ_A^s
mes	-3.0	-0.35	0.0	0.0	-0.15	0.0
les	-3.0	-0.35	5.6	-0.0	-0.15	0.0

Tabella 5.5: Parametri utilizzati per i fattori di forma srtani del nucleone.

electric strangeness' (nel seguito *mes*) e l'altra detta 'large electric strangeness' (nel seguito *les*). Nella Tabella (5.6.3) abbiamo riportato i valori delle costanti utilizzate.

La parametrizzazione del fattore di forma assiale strano G_A^q, ha il seguente andamento:

$$G_A^q(q) = G_A^s(0) \left(\frac{1}{1 + \lambda_A^s \tau} \right) \left(1 - \frac{q^2}{M_A^2} \right)^{-2} \tag{5.85}$$

Nell'equazione precedente M_A^2 è la massa assiale definita nella (5.64). Noi abbiamo fissato il valore di M_A^2 pari a 1 GeV. Il valore di $G_A^s(0)$ è fissato dal confronto con i dati sperimentali provenienti da processi di diffusione di neutrini da protoni [Mus94]. Noi utilizzeremo il valore dato in [Mus94] e ottenuto nell'esperimento BNL ovvero -0.15 ± 0.09. Nella nostra analisi abbiamo utilizzato, per i fattori di forma elettromagnetici, la parametrizzazione data in [Hoe76].

Nelle Figure 5.25 e 5.26 mostriamo l'$\mathcal{A}$ calcolata senza fattori di forma strani e con fattori di forma strani *mes* e *les*, nello stato eccitato ad energia $E = 7.933$ MeV. I risultati di calcoli analoghi per lo stato eccitato ad energia $E = 6.43$ MeV sono presentati nelle Figure 5.27 e 5.28. Le Figure mostrano come la variazione dell'Asimmetria rispetto ai fattori di forma strani sia minima. Per visualizzare tale dipendenza abbiamo misurato la differenza tra $\mathcal{A}$ calcolata senza fattori di forma strani e con fattori di forma strani ottenendo la Figura 5.29. Notiamo come la variazione di $\mathcal{A}$ sia inferiore o al più confrontabile con la variazione di $\mathcal{A}$ dal modello (vedi Figura 5.21).

Quest'ultimo risultato è dimostrativo di come sia estremamente difficoltosa l'estrazione di informazioni riguardo i fattori di forma strani del nucleone dall'osservazione dell'Asimmetria, almeno nelle transizioni che abbiamo considerato.

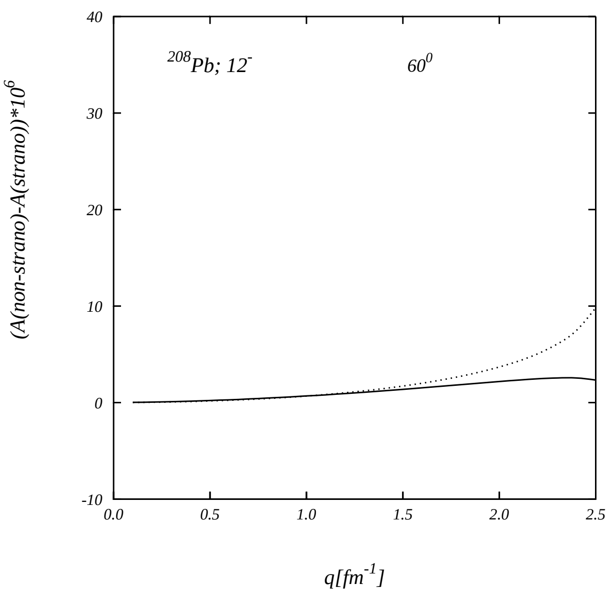

Figura 5.29: Sensibilità di $\mathcal{A}$ ai fattori di forma strani del nucleone (linea continua) confrontata con la sensibilità di $\mathcal{A}$ al modello (linea punteggiata).

Capitolo 6

Conclusioni

Lo scopo di questa tesi era quello di verificare la possibilità di utilizzare la diffusione di elettroni polarizzati su nuclei per ottenere informazioni sui fattori di forma elettromagnetici e deboli dei nucleoni.
Il regime energetico che abbiamo considerato è quello della fisica nucleare. Le energie degli elettroni sono dell'ordine del centinaio di MeV.
Le approssimazioni su cui abbiamo basato il nostro lavoro sono quelle comunemente utilizzate in fisica nucleare (PWBA, IA). Questo significa che abbiamo descritto il moto degli elettroni con funzioni d'onda dell'equazione di Dirac per una particella libera. Le correnti nucleari sono state costruite come somma di correnti dovute ai singoli nucleoni.
Nel caso della diffusione di elettroni non polarizzati la sola interazione che viene considerata è quella elettromagnetica. Nel nostro caso abbiamo considerato anche la presenza dell'interazione debole che, violando la parità, genera una differenza tra le sezioni d'urto di elettroni levogiri e destrogiri.
Abbiamo reso manifesto l'effetto di violazione di parità nel processo di interazione elettrone polarizzato-nucleo, introducendo l'osservabile Asimmetria, il rapporto tra la differenza e la somma delle due sezioni d'urto sopra menzionate, che è stata l'oggetto del nostro studio.
Il nostro interesse si è focalizzato su processi di diffusione in cui il nucleo, a seguito dell'interazione, effettua una transizione ad uno stato eccitato nello spettro discreto, ed abbiamo considerato solo nuclei doppio magici.
Questa scelta ci ha permesso di utilizzare modelli nucleari relativamente semplici; il mo-

dello a campo medio e la RPA.
L'aspetto su cui abbiamo fissato la nostra attenzione riguarda la determinazione delle correnti nucleari, che nella nostra costruzione teorica, sono dipendenti dai fattori di forma del nucleone. In particolare, abbiamo voluto verificare se dallo studio dell'Asimmetria fosse possibile ricavare informazioni tali da poter aggiungere nuovi gradi di libertà ai fattori di forma nucleonici. Recenti studi indicano che tali nuovi gradi di libertà sono legati alla presenza di coppie di quark all'interno dei nucleoni, che generano delle correnti deboli neutre parametrizzate da quelli che abbiamo definito fattori di forma strani del nucleone.
Affinché si possano effettivamente mettere in relazione le variazioni dell'Asimmetria alle modifiche delle parametrizzazioni utilizzate per i fattori di forma del nucleone, è stato necessario individuare situazioni in cui le incertezze sui modelli nucleari fossero trascurabili.
Dopo aver analizzato alcuni stati dello spettro dei nuclei di ^{16}O e ^{208}Pb abbiamo trovato nelle transizioni magnetiche agli stati 12^- del ^{208}Pb una situazione favorevole alla nostra analisi. L'Asimmetria si presenta nei casi menzionati estremamente stabile a differenti scelte di modello nucleare e a differenti parametrizzazioni dei fattori di forma elettromagnetici dei nucleoni.
La nostra analisi è quindi proseguita nel valutare se ci fosse una sensibilità significativa dell'Asimmetria all'introduzione dei fattori di forma strani del nucleone. I risultati che abbiamo ottenuto, mostrano che la variazione dell'Asimmetria, dovuta all'introduzione dei fattori di forma strani del nucelone, è confrontabile se non inferiore, alla variazione dovuta a differenti scelte del modello nucleare. Quindi non è possibile stabilire se eventuali discrepanze con i dati sperimentali siano da attribuire ad incertezze legate alla struttura nucleare oppure ai fattori di forma del nucleone.
I risultati presentati non sono affatto conclusivi, anche se la tecnica di indagine è stata ben definita. Si tratta di ricercare nello spettro discreto di eccitazione del nucleo, quegli stati scarsamente sensibili al modello nucleare, quindi utilizzare fattori di forma con e senza contributo di stranezza per il calcolo dell'Asimmetria. Dalla nostra analisi risulta che gli stati che meglio si prestano a questo studio sono stati magnetici ad alto spin. Nel ^{208}Pb ci sono altri stati di questo tipo oltre ai 12^- che abbiamo analizzato. Sono noti ad esmpio un 14^- ed alcuni stati 10^- e 8^-. Inoltre stati di questo tipo sono presenti anche nello spettro di altri nuclei doppio magici come ^{16}O, ^{40}Ca e ^{48}Ca.

Nella nostra analisi abbiamo volutamente trascurato i casi in cui l'Asimmetria fosse estremamente sensibile al modello nucleare. Ricordiamo che le transizioni di tipo elettrico sono quelle per cui abbiamo osservato una forte dipendenza dal modello. Modificando la prospettiva dello studio si potrebbe pensare di sfruttare questa sensibilità dell'Asimmetria per studiare, ad esempio, problemi di struttura nucleare o per analizzare le meno note correnti deboli neutre e transizioni nucleari non accessibili ad interazioni puramente elettromagnetiche.

Appendice A

Notazioni

A.1 Matrici di Pauli

Le matrici 2×2 di Pauli σ_i sono definite in maniera tale che l'operatore di spin $\mathbf{s}$ associato ad una particella non relativistica di spin $\frac{1}{2}$ sia dato da:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{A.1}$$

Nella rappresentazione fondamentale le matrici σ_i hanno le seguenti espressioni:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

Le componenti dell'operatore $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfano le seguenti regole di commutazione e anticommutazione:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i2\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.3}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} I \tag{A.4}$$

dove con I indichiamo la matrice unità 2×2 definita come:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

Un'identità utile è:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \tag{A.6}$$

con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ operatori che commutano con $\boldsymbol{\sigma}$, ma non necessariamente tra di loro.

Gli spinori di Pauli $\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autostati della terza componente dell'operatore $\boldsymbol{\sigma}$ relativi agli autovalori ± 1:

$$\sigma_3 \chi^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi^1 \tag{A.7}$$

$$\sigma_3 \chi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\chi^2 \tag{A.8}$$

A.2 Matrici di Dirac

L'Hamiltoniana di Dirac che descrive il moto di una particella relativistica di spin $\frac{1}{2}$, massa m e impulso $\mathbf{p}$, è data da:

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \tag{A.9}$$

L'operatore β e le componenti dell'operatore $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\{\alpha_i, \alpha_j\}_{i \neq j} = \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ &(\alpha_i)^2 = (\beta)^2 = I \\ &\alpha_i^+ = \alpha_i \qquad \beta^+ = \beta \end{aligned} \tag{A.10}$$

Le equazioni precedenti impongono che gli operatori $\boldsymbol{\alpha}$ e β siano delle matrici $2n \times 2n$ a traccia nulla, con $n > 1$. In particolare in rappresentazione di Dirac ($n = 2$) assumono le seguenti espressioni:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

Le matrici γ di Dirac sono definite come:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}) = \left(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}\right) \tag{A.12}$$

pertanto hanno le seguenti espressioni:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

Le proprietà delle matrici γ, discendono dalle proprietà degli operatori $\boldsymbol{\alpha}$ e β definite nella (A.10):

$$\begin{aligned} &\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \\ &(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \\ &\left(\gamma^0\right)^2 = I_4 \\ &\left(\gamma^k\right)^2 = -I_4 \qquad\qquad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Nelle equazioni precedenti abbiamo indicato con I_4 la matrice unità 4×4 definita come:

$$I_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

La matrice γ^5 ha la seguente espressione:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.16}$$

e gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} &\left\{\gamma^\mu, \gamma^5\right\} = 0 \\ &\left(\gamma^5\right)^+ = \gamma^5 \\ &\left(\gamma^5\right)^2 = I_4 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Il tensore antisimmetrico $\sigma^{\mu\nu}$ è definito come:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = \\ &= i\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{A.18}$$

Detto a_μ un generico vettore, indichiamo con $\not{a}$ il seguente prodotto scalare:

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} \tag{A.19}$$

A.3 Teoremi sulle tracce

Il calcolo dei tensori leptonici $L^{em}_{\mu\nu}$ e $L^{em,nc}_{\mu\nu}$ definiti nelle equazioni (3.80) e (3.81) è riconducibile al calcolo della traccia di una matrice prodotto di matrici γ (vedi equazione

(3.83)). I teoremi che diamo qui di seguito [Hal84], [Bjo64], consentono di determinare la traccia della matrice prodotto senza effettuare un calcolo matriciale esplicito:

$$
\begin{aligned}
tr \quad & (\not{a}\ \not{b}) = 4a \cdot b \\
tr \quad & (\not{a}\ \not{b}\ \not{c}\ \not{d}) = 4\left[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)\right] \\
tr \quad & \left(\gamma^5\right) = 0 \\
tr \quad & (\gamma_5\ \not{a}\ \not{b}) = 0 \\
tr \quad & (\gamma_5\ \not{a}\ \not{b}\ \not{c}\ \not{d}) = 4i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\sigma \\
tr \quad & (\gamma^\mu\ \not{a}\gamma^\nu\ \not{b}) = 4\left[a^\mu b^\nu + a^\nu b^\mu - (a \cdot b)\, g^{\mu\nu}\right]
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

Nelle equazioni precedenti il tensore antisimmetrico di Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ è pari a ± 1 a seconda che gli indici μ, ν, λ, σ siano una permutazione pari o dispari dei numeri 0, 1, 2, 3; se due degli indici sono ripetuti allora $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ è nullo.

Appendice B

Calcolo dei tensori leptonici

Nel Paragrafo 3.4 abbiamo definito i tensori leptonici elettromagnetico $L_{\mu\nu}^{em}$ e di interferenza $L_{\mu\nu}^{em,nc}$. In particolare abbiamo ottenuto le seguenti espressioni:

$$L_{\mu\nu}^{em} = \sum_{ss'} l_\mu^{*em} l_\nu^{em} = 2\left[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - g_{\mu\nu}\left(p\cdot p'\right) - hi\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p^\alpha p^{\beta\prime}\right] \tag{B.1}$$

$$L_{\mu\nu}^{em,nc} = \sum_{ss'} l_\mu^{*em} l_\nu^{nc} = \left(c_V + hc_A\right) L_{\mu\nu}^{em} \tag{B.2}$$

In quest'Appendice siamo interessati a determinare le espressioni dei termini leptonici che compaiono nella definizione di modulo quadro dell'ampiezza invariante di transizione data nella (3.68). Poiché nella nostra trattazione stiamo considerando l'elettrone come una particella ultrarelativistica, faremo uso delle approsimazioni valide in questo regime e definite nelle relazioni (3.2)-(3.4).

I termini leptonici a cui siamo interessati sono:

$$A = \sum_{ss'} \left| l_0^{*em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} l_3^{*em} \right|^2 \tag{B.3}$$

$$B = \sum_{ss'} \frac{1}{2}\left(\mathbf{l}^{em}\cdot\mathbf{l}^{em} - l_3^{*em} l_3^{em}\right) \tag{B.4}$$

$$C = \sum_{ss'} \left(l_0^{*em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} l_3^{*em}\right)\left(l_0^{*nc} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} l_3^{*nc}\right)^* \tag{B.5}$$

$$D = \sum_{ss'} \frac{1}{2}\left(\mathbf{l}^{em}\cdot\mathbf{l}^{nc} - l_3^{*em} l_3^{nc}\right) \tag{B.6}$$

$$E = \sum_{ss'} -\frac{i}{2}\left(\mathbf{l}^{em}\times\mathbf{l}^{nc}\right)_3 \tag{B.7}$$

Facendo uso della relazione ottenuta nella (3.85):

$$l_\mu^{nc} = (c_V + hc_A)\, l_\mu^{em} \tag{B.8}$$

le equazioni (B.3)-(B.7) diventano:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{ss'} \left[l_0^{*em} l_0^{em} + \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} l_3^{*em} l_3^{em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \left(l_0^{*em} l_3^{em} + l_3^{*em} l_0^{em} \right) \right] = & \text{(B.9)}\\
&= L_{00}^{em} + \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} L_{33}^{em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \left[L_{03}^{em} + L_{30}^{em} \right] \\
B &= \frac{1}{2} [L_{11}^{em} + L_{22}^{em} + L_{33}^{em} - L_{33}^{em}] & \text{(B.10)}\\
C &= \sum_{ss'} \left[l_0^{*em} l_0^{*nc} + \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} l_3^{*em} l_3^{nc} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \left(l_0^{*em} l_3^{nc} + l_3^{*em} l_0^{nc} \right) \right] = & \text{(B.11)}\\
&= (c_V + hc_A) \left[L_{00}^{em} + \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} L_{33}^{em} - \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \left[L_{03}^{em} + L_{30}^{em} \right] \right] = (c_V + hc_A)\, A \\
D &= (c_V + hc_A)\, \frac{1}{2} \left[L_{11}^{em} + L_{22}^{em} + L_{33}^{em} - L_{33}^{em} \right] = (c_V + hc_A)\, B & \text{(B.12)}\\
E &= -\frac{i}{2} (c_V + hc_A) \left[L_{12}^{em} - L_{21}^{em} \right] & \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

Calcoliamo le componenti del tensore elettromagnetico che compiano nelle equazioni precedenti ricordando che abbiamo definito la direzione dell'asse z coincidente con la direzione dell'impulso $\mathbf{q}$:

$$L_{00}^{em} = 2\left(2p_0 p_0' - p \cdot p'\right) \to 2\epsilon\epsilon' (1 + \cos\theta) = 4\epsilon\epsilon' \cos^2\frac{\theta}{2} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
L_{33}^{em} &= 2\left(2p_3 p_3' + p \cdot p'\right) = 2 \left(2 \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2} + p_0 p_0' - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' \right) \to & \text{(B.15)}\\
\to\ & \frac{2}{|\mathbf{q}|^2} \left[2 \left(\epsilon^2 - \epsilon\epsilon' \cos\theta \right) \left(\epsilon\epsilon' \cos\theta - \epsilon'^2 \right) + \left(\epsilon^2 + \epsilon'^2 - 2\epsilon\epsilon' \cos\theta \right) \epsilon\epsilon' (1 - \cos\theta) \right] = \\
&= \frac{2}{|\mathbf{q}|^2} \epsilon\epsilon' \left(\epsilon^2 + \epsilon'^2 - 2\epsilon\epsilon' \right) (1 + \cos\theta) = 4 \frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2} \epsilon\epsilon' \cos^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{03}^{em} + L_{30}^{em} &= 4\left(p_0 p_3' + p_3 p_0'\right) - 2hi \left(\epsilon_{\alpha 0 \beta 3} + \epsilon_{\alpha 3 \beta 0}\right) p^\alpha p^{\beta\prime} = & \text{(B.16)}\\
&= \frac{4}{|\mathbf{q}|} \left(\epsilon \mathbf{p}'\cdot\mathbf{q} + \epsilon' \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \right) \to \frac{4}{|\mathbf{q}|} \left[\epsilon \left(\epsilon\epsilon' \cos\theta - \epsilon'^2 \right) + \epsilon' \left(\epsilon^2 - \epsilon\epsilon' \cos\theta \right) \right] = \\
&= \frac{4}{|\mathbf{q}|} \epsilon\epsilon' \left[(\epsilon - \epsilon') (1 + \cos\theta) \right] = 8 \frac{\omega}{|\mathbf{q}|} \epsilon\epsilon' \cos^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{11}^{em}+L_{22}^{em}+L_{33}^{em} &= 2\left(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'+3p\cdot p'\right)=2\left(3p_0p_0'-\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'\right)\rightarrow \\
&\rightarrow 4\epsilon\epsilon'\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12}^{em}-L_{21}^{em} &= ih4\epsilon_{\alpha1\beta2}p^\alpha p^{\beta\prime}=ih4\left(p_0p_3'-p_3p_0'\right)= \\
&= \frac{ih4}{|\mathbf{q}|}\left(\epsilon\mathbf{p}'\cdot\mathbf{q}-\epsilon'\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\right)\rightarrow-\frac{ih8}{|\mathbf{q}|}\epsilon\epsilon'\left(\epsilon+\epsilon'\right)\sin^2\frac{\theta}{2}= \\
&= -\frac{ih8}{|\mathbf{q}|}\epsilon\epsilon'\sin\frac{\theta}{2}\left(\left(\epsilon+\epsilon'\right)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}= \\
&= -\frac{ih8}{|\mathbf{q}|}\epsilon\epsilon'\sin\frac{\theta}{2}\left[\left(\omega^2+4\epsilon\epsilon'\right)\left(1-\cos\theta\right)\right]^{\frac{1}{2}}= \\
&= -\frac{ih8}{|\mathbf{q}|}\epsilon\epsilon'\sin\frac{\theta}{2}\left[\omega^2\sin^2\frac{\theta}{2}-q^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}= \\
&= -ih8\frac{\epsilon\epsilon'}{|\mathbf{q}|}\sin\frac{\theta}{2}\left(|\mathbf{q}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}-q^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

Sostituendo le relazioni precedenti nelle (B.9)-(B.13), otteniamo le seguenti espressioni per i termini leptonici:

$$
\begin{aligned}
A &= L_{00}^{em}+\frac{\omega^2}{|\mathbf{q}|^2}L_{33}^{em}-\frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\left[L_{03}^{em}+L_{30}^{em}\right]= \\
&= \frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4}4\epsilon\epsilon'\cos^2\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}[L_{11}^{em}+L_{22}^{em}+L_{33}^{em}-L_{33}^{em}]= \\
&= 4\epsilon\epsilon'\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2\,|\mathbf{q}|^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

$$
C = \left(c_V+hc_A\right)\frac{q^4}{|\mathbf{q}|^4}4\epsilon\epsilon'\cos^2\frac{\theta}{2}
\tag{B.21}
$$

$$
D = \left(c_V+hc_A\right)4\epsilon\epsilon'\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{q^2}{2\,|\mathbf{q}|^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)
\tag{B.22}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{i}{2}\left(c_V+hc_A\right)[L_{12}^{em}-L_{21}^{em}]= \\
&= \left(c_V+hc_A\right)h4\frac{\epsilon\epsilon'}{|\mathbf{q}|}\sin\frac{\theta}{2}\left(|\mathbf{q}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}-q^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{B.23}
$$

Appendice C

Armoniche sferiche

C.1 Definizioni e formule utili

Vettori unitari sferici:

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z \tag{C.1}$$

$$\mathbf{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y\right) \tag{C.2}$$

Proprietà:

$$\mathbf{e}^*_\lambda = (-)^\lambda\,\mathbf{e}_{-\lambda} \tag{C.3}$$

$$\mathbf{e}^*_{\lambda'} \cdot \mathbf{e}_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{C.4}$$

Vettori in coordinate sferiche:

$$\mathbf{v} = \sum_{\lambda=-1}^{1} v_\lambda \mathbf{e}^*_\lambda = \sum_{\lambda=-1}^{1} v^*_\lambda \mathbf{e}_\lambda \tag{C.5}$$

Prodotto scalare:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \sum_{\lambda=-1}^{1} a^*_\lambda \mathbf{e}_\lambda \sum_{\lambda=-1}^{1} b_{\lambda'}\mathbf{e}^*_{\lambda'} = \\ &= \sum_{\lambda=-1}^{1} a^*_\lambda b_{\lambda'}\delta_{\lambda,\lambda'} = \\ &= \sum_{\lambda=-1}^{1} a^*_\lambda b_\lambda = \sum_{\lambda=-1}^{1} (-)^\lambda\, a_{-\lambda} b_\lambda\end{aligned} \tag{C.6}$$

Operazioni vettoriali:

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \tag{C.7}$$

Sviluppo in multipoli della funzione esponenziale $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l.m} i^l j_l\left(qx\right) Y^*_{lm}\left(\widehat{q}\right) Y_{lm}\left(\widehat{x}\right) \tag{C.8}$$

Armoniche sferiche vettoriali:

$$\mathbf{Y}^M_{lJ}\left(\widehat{x}\right) = \sum_{m'\lambda'} \left\langle lm'1\lambda'|JM\right\rangle Y_{lm'}\left(\widehat{x}\right) \tag{C.9}$$

Proprietà:

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\nabla j_J\left(qx\right) Y_{JM}\left(\widehat{x}\right) &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J+1}\left(qx\right) \mathbf{Y}^M_{J+1J}\left(\widehat{x}\right) + \\ &\quad + \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{j-1}\left(qx\right) \mathbf{Y}^M_{J-1J}\left(\widehat{x}\right)\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\nabla\times j_J\left(qx\right) \mathbf{Y}^M_{JJ}\left(\widehat{x}\right) &= i\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}\left(qx\right) \mathbf{Y}^M_{J-1J} + \\ &\quad - i\sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{j+1}\left(qx\right) \mathbf{Y}^M_{J+1J}\left(\widehat{x}\right)\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\nabla \cdot \phi\left(x\right) \mathbf{Y}^M_{JJ}\left(\widehat{x}\right) = 0 \tag{C.12}$$

C.2 Sviluppo in multipoli

Inseriamo nell'equazione (C.8) le seguenti relazioni:

$$1 = \sum_{m'\lambda'} \delta_{mm'}\delta_{\lambda\lambda'} = \sum_{m'\lambda'}\sum_{JM} \left\langle lm1\lambda|JM\right\rangle \left\langle lm'1\lambda'|JM\right\rangle \tag{C.13}$$

$$Y^*_{lm}\left(\widehat{q}\right) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0} \tag{C.14}$$

La relazione precedente è valida scegliendo la direzione dell'asse z coincidente con la direzione di $\mathbf{q}$. In questa maniera la funzione d'onda esponenziale assume la seguente espressione:

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} &= 4\pi \sum_{l.m} i^l j_l(qx) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} Y_{lm}(\widehat{x}) = \\
&= \sqrt{4\pi} \sum_{l} i^l j_l(qx) \sqrt{2l+1} Y_{l0}(\widehat{x})
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

Lo sviluppo in multipoli del termine $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda$, con $\lambda = \pm 1, 0$, è ottenuto calcolando:

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda &= 4\pi \sum_{l.m} i^l j_l(qx) Y^*_{lm}(\widehat{q}) \sum_{JM} \langle lm1\lambda|JM\rangle \sum_{m'\lambda'} \langle lm'1\lambda'|JM\rangle Y_{lm'}(\widehat{x}) \\
&= \sqrt{4\pi} \sum_{l.m} i^l j_l(qx) \sqrt{2l+1} \delta_{m0} \sum_{JM} \langle lm1\lambda|JM\rangle \mathbf{Y}^M_{lJ}(\widehat{x}) \\
&= \sqrt{4\pi} \sum_{l} i^l j_l(qx) \sqrt{2l+1} \sum_{JM} \langle l01\lambda|JM\rangle \mathbf{Y}^M_{lJ}(\widehat{x})
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

Esplicitiamo la somma su l tenendo presente che $|J-1| < l < J+1$:

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda &= \sqrt{4\pi}\{ i^{J-1}\sqrt{2(J-1)+1} j_{J-1}(qx) \sum_{JM} \langle J-101\lambda|JM\rangle \mathbf{Y}^M_{J-1J}(\widehat{x}) + \\
&+ i^J \sqrt{2J+1} j_J(qx) \sum_{JM} \langle J01\lambda|JM\rangle \mathbf{Y}^M_{JJ}(\widehat{x}) + \\
&+ i^{J+1}\sqrt{2(J+1)+1} j_{J+1}(qx) \sum_{JM} \langle J+101\lambda|JM\rangle \mathbf{Y}^M_{J+1J}(\widehat{x})\}
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

Consideriamo il caso $\lambda = 0$; affinché i coefficienti di Clebsh-Gordan non siano nulli deve essere $M = 0$:

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_0 &= \sqrt{4\pi}\{ i^{J-1}\sqrt{2(J-1)+1} j_{J-1}(qx) \sum_{J} \langle J-1010|J0\rangle \mathbf{Y}^0_{J-1J}(\widehat{x}) + \\
&+ i^J \sqrt{2J+1} j_J(qx) \sum_{J} \langle J010|J0\rangle \mathbf{Y}^0_{JJ}(\widehat{x}) + \\
&+ i^{J+1}\sqrt{2(J+1)+1} j_{J+1}(qx) \sum_{J} \langle J+1010|J0\rangle \mathbf{Y}^0_{J+1J}(\widehat{x})\}
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

I coefficenti di Clebsch-Gordan che compaiono nell'equazione precedente sono stati calcolati utilizzando le relazioni definite in [Eis70, App.A,Tab.1], ottenendo i seguenti valori:

$$\langle J-1010|J0\rangle = \sqrt{\frac{J}{J(J-1)+1}} \tag{C.19}$$

$$\langle J010|J0\rangle = 0 \tag{C.20}$$

$$\langle J+1010|J0\rangle = -\sqrt{\frac{J}{J(J+1)+1}} \tag{C.21}$$

sostistuendo le relazioni precedenti nella (C.18) si ottiene:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_0 = \sqrt{4\pi}\,(-i)\sum_J i^J\{j_{J-1}\,(qx)\,\sqrt{J}\mathbf{Y}^0_{J-1J}\,(\widehat{x}) + j_{J+1}\,(qx)\,\mathbf{Y}^0_{J+1J}\,(\widehat{x})\} \tag{C.22}$$

La relazione precedente può essere ulteriormente semplificata utilizzando la relazione (C.10), ottenendo:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{e}_0 = \sqrt{4\pi}\frac{-i}{q}\sum_J i^J\sqrt{2J+1}\nabla j_J\,(qx)\,Y_{J0}\,(\widehat{x}) \tag{C.23}$$

Consideriamo adesso il caso $\lambda = \pm 1$; affiché i coefficenti di Clebsh-Gordan non siano nulli devono valere le seguenti relazioni $\lambda = M$, $J \neq 0$:

$$\begin{aligned}
e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}e_\lambda &= \sqrt{4\pi}\sum_{\lambda,J\ \geq 1}\{i^{J-1}\sqrt{\frac{(J+1)}{2}}j_{J-1}\,(qx)\,\mathbf{Y}^\lambda_{J-1J}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad + i^J\,(-\lambda)\sqrt{\frac{2J+1}{2}}j_J\,(qx)\,\mathbf{Y}^\lambda_{JJ}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad + i^{J+1}\sqrt{\frac{J}{2}}j_{J+1}\,(qx)\,\mathbf{Y}^\lambda_{J+1J}\,(\widehat{x})\} = \\
&= -\sqrt{2\pi}\sum_{\lambda,J\ \geq 1} i^J\sqrt{2J+1}\{\lambda j_J\,(qx)\,\mathbf{Y}^\lambda_{JJ}\,(\widehat{x}) + \\
&\quad + \frac{1}{q}\nabla\times j_J\,(qx)\,\mathbf{Y}^\lambda_{JJ}\,(\widehat{x})\}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

L'equazione precedente è stata ricavata inserendo i valori dei coefficenti di Clebsh-Gordan:

$$\langle J-101\lambda|J\lambda\rangle = \sqrt{\frac{J\,(J+1)}{[2\,(J-1+1)]\,[2\,(J-1)+2]}} \tag{C.25}$$

$$\langle J01\lambda|J\lambda\rangle = \frac{-\lambda}{\sqrt{2}} \tag{C.26}$$

$$\langle J+101\lambda|J\lambda\rangle = \sqrt{\frac{J}{2\,[2\,(J+1)+1]}} \tag{C.27}$$

Inoltre, è stata utilizzata la relazione data in (C.11).

Appendice D

Elementi di matrice ridotti di singola particella

In quest'Appendice diamo le espressioni degli elementi di matrice di singola particella. Utilizziamo la notazione del Paragrafo 4.4 in cui $\langle p \| O_J \| h \rangle$ significa che il calcolo della parte angolare dell'elemento di matrice deve essere fatto sull'elemento di matrice ridotto. Come osservato nel Paragrafo 4.4 è sufficiente definire le espressioni degli elementi di matrice elettromagnetici dato che i termini assiali possono essere espressi in funzione di questi ultimi.
Indicheremo con gli indici *conv* e *mag* gli operatori di multipolo associati rispettivamente alle correnti elettromagnetiche di convezione e di magnetizzazione, le cui espressioni sono state definte nelle (4.7). Queste espressioni corrispondono a quelle di [Ama96] che abbiamo controllato.

$$\langle p \| M_J^{em} \| h \rangle = G_E^N \frac{(-1)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi}} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{J} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xi\left(l_p + l_h + J\right) \tag{D.1}$$
$$\int dr r^2 j_J(kr) R_p(r) R_h(r)$$
$$\left\langle p \left\| T_J^{em,E} \right\| h \right\rangle_{conv} = \frac{G_E^N}{2M_N} \frac{(-1)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi J(J+1)}} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{J} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xi\left(l_p + l_h + J\right)$$
$$\frac{1}{k} \int dr r j_J(kr) \left[\left(\chi + J(J+1)\right) R_p(r) \frac{dR_h(r)}{dr} + \left(\chi - J(J+1)\right) R_h(r) \frac{dR_p(r)}{dr} \right]$$
$$\left\langle p \left\| T_J^{em,E} \right\| h \right\rangle_{mag} = \frac{G_M^N}{2M_N} k \frac{(-1)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi J(J+1)}} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{J} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xi\left(l_p + l_h + J\right)$$

$$\left(\chi_p - \chi_h\right) \int drr^2 j_J\left(kr\right) R_p\left(r\right) R_h\left(r\right)$$

$$\left\langle p \left\| T_J^{em,M} \right\| h \right\rangle_{conv} = -i\frac{G_E^N}{2M_N}\frac{\left(-1\right)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi J\left(J+1\right)}}\hat{j}_p\hat{j}_h\hat{J}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\xi\left(l_p+l_h+J+1\right)$$

$$\int drrj_J\left(kr\right) R_p\left(r\right) R_h\left(r\right)\left[\left(\chi_p+\chi_h\right)\left(1+\chi_p+\chi_h\right) - J\left(J+1\right)\right]$$

$$\left\langle p \left\| T_J^{em,M} \right\| h \right\rangle_{mag} = -i\frac{G_M^N}{2M_N}\frac{\left(-1\right)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi J\left(J+1\right)}}\hat{j}_p\hat{j}_h\hat{J}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\xi\left(l_p+l_h+J+1\right)$$

$$\int drr^2 j_J\left(kr\right)\left[\frac{J\left(J+1\right)}{r} + \left(\chi_p+\chi_h\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\right] R_p\left(r\right) R_h\left(r\right)$$

Nelle relazioni precedenti abbiamo fatto uso delle seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} \hat{j} &= \sqrt{2j+1} \\ \chi_p &= \left(-1\right)^{l_p+j_p+\frac{1}{2}}\left(j_p+\frac{1}{2}\right) = \left(l_p+j_p\right)\left(2j_p+1\right) \\ \chi_h &= \left(-1\right)^{l_h+j_h+\frac{1}{2}}\left(j_h+\frac{1}{2}\right) = \left(l_h+j_h\right)\left(2j_h+1\right) \\ \chi &= \left(\chi_p-\chi_h\right)\left(\chi_p+\chi_h+1\right) \\ & \xi\left(l_p+l_h+J\right) = \frac{1+\left(-1\right)^{l_p+l_h+J}}{2} \end{aligned} \tag{D.2}$$

Inoltre abbiamo denotato con r la coordinata che identifica l'i-esimo nucleone. La parte radiale delle funzioni d'onda di singola particella $|p>$ e $|h>$ è rappresentata dalle funzioni $R_p\left(r\right)$ e $R_h\left(r\right)$; gli indici p ed h denotano gli insiemi di numeri quantici che caratterizzano lo stato di singola particella:

$$p = \left(n_p l_p \frac{1}{2} j_p\right) \qquad h = \left(n_h l_h \frac{1}{2} j_h\right) \tag{D.3}$$

Gli elementi di matrice ridotti deboli neutri vettoriali si ottengono dalle (D.1) sostituendo ai fattori di forma $G_{E,M}^N$, i fattori di forma $\widetilde{G}_{E,M}^N$. Gli elementi associati alla corrente vettor-assiale debole neutra si ottengono dalle relazioni (4.26) e (4.31). In particolare, hanno le seguenti espressioni:

$$\left\langle p \left\| T_J^{A,E} \right\| h \right\rangle = -\frac{i}{k}\widetilde{G}_A^N\frac{\left(-1\right)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi J\left(J+1\right)}}\hat{j}_p\hat{j}_h\hat{J}\begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\xi\left(l_p+l_h+J+1\right) \tag{D.4}$$

$$\int drr^2 j_J\left(kr\right)\left[\frac{J\left(J+1\right)}{r} + \left(\chi_p+\chi_h\right)\left(\frac{1}{r}+\frac{d}{dr}\right)\right] R_p\left(r\right) R_h\left(r\right)$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle p \left\| T_J^{A,M} \right\| h \right\rangle &= \widetilde{G}_A^N \frac{(-1)^{j_p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi J (J+1)}} \hat{j}_p \hat{j}_h \hat{J} \begin{pmatrix} j_p & j_h & J \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xi (l_p + l_h + J) \\
& (\chi_p - \chi_h) \int drr^2 j_J (kr) R_p (r) R_h (r)
\end{aligned}
$$

Appendice E

Configurazioni *RPA*

In questa appendice abbiamo riportato le configurazioni RPA per gli stati eccitati del ^{208}Pb. Abbiamo evidenziato la configurazioni di singola particella di tipo protonico e neutronico che hanno maggior peso.
I 4 numeri che compaiono nella seconda e nella quarta colonna delle tabelle che seguono, sono rappresentativi rispettivamente del tipo di stato considerato (1 = stato di particella, 0 = stato di buca), della natura dello stato (1 = stato protonico, 0 = stato neutronico), del numero quantico principale, e del numero quantico di momento angolare orbitale dello stato di singola particella considerato.
Nella terza e quinta colonna è riportato il numero quantico di momento angolare totale, mentre le ultime due colonne sono relative alle ampiezze degli stati di singola particella.

Tabella E.1: Configurazione dello stato 12^+ del ^{208}Pb calcolata con modello RPA-LM

```
Pb  A=208  Z=82  NSPS=100  B= 2.440  XCUT=  20.00000  NPOIN= 200  H=0.100


  JTOT=12  PAR= 1  E=  6.661237
  NPHS= 25
---------------------------------------------------------
   1    1117  13/2   0115  11/2      -0.044193    0.019832
---------------------------------------------------------
   2    1117  15/2   0115  11/2      -0.026526   -0.011016
   3    1118  15/2   0114   9/2       0.006905   -0.004043
   4    1118  17/2   0114   7/2      -0.023205    0.015746
   5    1118  17/2   0114   9/2       0.009975    0.006464
   6    1119  17/2   0113   7/2      -0.000534    0.000333
   7    1119  17/2   0115  11/2       0.000663   -0.000364
---------------------------------------------------------
   8    1016  11/2   0016  13/2       0.996383   -0.006656
---------------------------------------------------------
   9    1026  11/2   0016  13/2      -0.020426    0.002992
  10    1026  13/2   0016  13/2      -0.006668   -0.003082
  11    1017  13/2   0015  11/2       0.055116    0.003016
  12    1027  13/2   0015  11/2      -0.011832   -0.000366
  13    1017  15/2   0015   9/2       0.048323    0.051097
  14    1017  15/2   0015  11/2       0.020015    0.008897
  15    1027  15/2   0015   9/2       0.000208   -0.005096
  16    1027  15/2   0015  11/2      -0.001375   -0.001067
  17    1018  15/2   0014   9/2      -0.022529   -0.001760
  18    1018  15/2   0016  13/2       0.030470    0.003817
  19    1018  17/2   0014   7/2      -0.003779   -0.020676
  20    1018  17/2   0014   9/2      -0.003759   -0.005195
  21    1018  17/2   0016  13/2       0.013513    0.008201
  22    1019  17/2   0013   7/2       0.000836    0.000068
  23    1019  17/2   0023   7/2      -0.000784   -0.000238
  24    1019  17/2   0015   9/2      -0.000454   -0.000105
  25    1019  17/2   0015  11/2      -0.001102   -0.000161
```

Tabella E.2: Configurazione dello stato 12^{+} del ^{208}Pb calcolata con modello RPA-JSB

Pb A=208 Z=82 NSPS=100 B= 2.440 XCUT= 20.00000 NPOIN= 200 H=0.100

JTOT=12 PAR= 1 E= 6.317894
NPHS= 25

1	1117	13/2	0115	11/2	0.037375	-0.030727
2	1117	15/2	0115	11/2	0.031712	0.014551
3	1118	15/2	0114	9/2	-0.005912	0.005825
4	1118	17/2	0114	7/2	0.035167	-0.013937
5	1118	17/2	0114	9/2	-0.011764	-0.008325
6	1119	17/2	0113	7/2	0.000431	-0.000432
7	1119	17/2	0115	11/2	-0.000356	0.000587
8	1016	11/2	0016	13/2	-0.987356	0.026021
9	1026	11/2	0016	13/2	0.011020	-0.000327
10	1026	13/2	0016	13/2	0.004586	0.000558
11	1017	13/2	0015	11/2	-0.030724	-0.010561
12	1027	13/2	0015	11/2	0.006676	0.002044
13	1017	15/2	0015	9/2	-0.150963	-0.030136
14	1017	15/2	0015	11/2	-0.002048	-0.002174
15	1027	15/2	0015	9/2	0.002064	0.003063
16	1027	15/2	0015	11/2	0.000643	0.000292
17	1018	15/2	0014	9/2	0.012708	0.005264
18	1018	15/2	0016	13/2	-0.021347	-0.007688
19	1018	17/2	0014	7/2	0.013028	0.012096
20	1018	17/2	0014	9/2	-0.000010	0.001634
21	1018	17/2	0016	13/2	-0.003579	-0.003133
22	1019	17/2	0013	7/2	-0.000475	-0.000187
23	1019	17/2	0023	7/2	0.000473	0.000293
24	1019	17/2	0015	9/2	0.000089	0.000090
25	1019	17/2	0015	11/2	0.000784	0.000330

Tabella E.3: Configurazione dello stato 12^- ad energia $E = 7.933$ MeV del ^{208}Pb calcolata con modello RPA-JSB

```
Pb  A=208  Z=82  NSPS=100  B= 2.440  XCUT=  20.00000  NPOIN= 200  H=0.100


  JTOT=12  PAR=-1  E=  7.933748
  NPHS= 26
----------------------------------------------------------
   1    1116  13/2   0115  11/2      -0.980101   -0.048891
----------------------------------------------------------
   2    1126  13/2   0115  11/2       0.009979   -0.005295
   3    1117  15/2   0114   9/2      -0.052469    0.023654
   4    1118  15/2   0115  11/2       0.001859    0.001026
   5    1118  17/2   0113   7/2       0.021243   -0.013334
   6    1118  17/2   0115  11/2      -0.027988    0.014038
   7    1119  17/2   0114   7/2       0.000063   -0.000038
   8    1119  17/2   0114   9/2      -0.000072   -0.000053
   9    1025  11/2   0016  13/2      -0.012595    0.002669
  10    1035  11/2   0016  13/2       0.001967   -0.000727
  11    1026  13/2   0015  11/2       0.010632   -0.005385
  12    1017  13/2   0016  13/2      -0.009687   -0.001791
  13    1027  13/2   0016  13/2       0.002297    0.000708
  14    1017  15/2   0014   9/2      -0.045547    0.018373
----------------------------------------------------------
  15    1017  15/2   0016  13/2      -0.188770   -0.019288
----------------------------------------------------------
  16    1027  15/2   0014   9/2       0.003532   -0.002102
  17    1027  15/2   0016  13/2      -0.003857    0.001571
  18    1018  15/2   0015   9/2       0.003012   -0.003160
  19    1018  15/2   0015  11/2      -0.001179   -0.001116
  20    1018  17/2   0013   7/2       0.015850   -0.009784
  21    1018  17/2   0023   7/2      -0.025866    0.008708
  22    1018  17/2   0015   9/2      -0.018202   -0.006626
  23    1018  17/2   0015  11/2      -0.018762    0.008968
  24    1019  17/2   0014   7/2      -0.000516    0.000338
  25    1019  17/2   0014   9/2       0.000268    0.000159
  26    1019  17/2   0016  13/2      -0.000310   -0.000163
```

Tabella E.4: Configurazione dello stato 12^- ad energia $E = 6.76$ MeV del ^{208}Pb calcolata con modello RPA-JSB

```
 Pb  A=208  Z=82  NSPS=100  B= 2.440  XCUT=  20.00000  NPOIN= 200  H=0.100


  JTOT=12  PAR=-1  E=  6.767626
  NPHS= 26
---------------------------------------------------------
   1    1116  13/2   0115  11/2       0.190668   -0.006063
---------------------------------------------------------
   2    1126  13/2   0115  11/2       0.000134   -0.000039
   3    1117  15/2   0114   9/2      -0.005222    0.003134
   4    1118  15/2   0115  11/2       0.000379    0.000124
   5    1118  17/2   0113   7/2       0.002411   -0.001961
   6    1118  17/2   0115  11/2      -0.004478    0.002730
   7    1119  17/2   0114   7/2      -0.000309    0.000208
   8    1119  17/2   0114   9/2       0.000021    0.000027
   9    1025  11/2   0016  13/2       0.005487   -0.001702
  10    1035  11/2   0016  13/2       0.004444   -0.001931
  11    1026  13/2   0015  11/2       0.003229   -0.001779
  12    1017  13/2   0016  13/2      -0.014840   -0.005548
  13    1027  13/2   0016  13/2       0.002173    0.001081
  14    1017  15/2   0014   9/2      -0.026430    0.012491
---------------------------------------------------------
  15    1017  15/2   0016  13/2      -0.981085   -0.020706
---------------------------------------------------------
  16    1027  15/2   0014   9/2       0.001855   -0.001202
  17    1027  15/2   0016  13/2      -0.002982    0.001411
  18    1018  15/2   0015   9/2      -0.003177    0.001839
  19    1018  15/2   0015  11/2       0.004764    0.002860
  20    1018  17/2   0013   7/2       0.009734   -0.006587
  21    1018  17/2   0023   7/2      -0.021273    0.008682
  22    1018  17/2   0015   9/2      -0.010509   -0.004350
  23    1018  17/2   0015  11/2      -0.017200    0.008948
  24    1019  17/2   0014   7/2       0.000106   -0.000074
  25    1019  17/2   0014   9/2      -0.000181   -0.000112
  26    1019  17/2   0016  13/2       0.000420    0.000215
```

Tabella E.5: Configurazione dello stato 12^- ad energia $E = 7.933$ MeV del ^{208}Pb

```
Pb  A=208  Z=82  NSPS=100  B= 2.440  XCUT=  20.00000  NPOIN= 200  H=0.100

 JTOT=12  PAR=-1  E=  7.933748
 NPHS=  2

  1    1116  13/2   0115  11/2       -0.997540    0.000000
  2    1017  15/2   0016  13/2       -0.070000    0.000000
```

Tabella E.6: Configurazione dello stato 12^- ad energia $E = 7.933$ MeV del ^{208}Pb

```
Pb  A=208  Z=82  NSPS=100  B= 2.440  XCUT=  20.00000  NPOIN= 200  H=0.100

 JTOT=12  PAR=-1  E=  6.767626
 NPHS=  2

  1    1116  13/2   0115  11/2        0.100000    0.000000
  2    1017  15/2   0016  13/2       -0.990000    0.000000
```

Appendice F

Abbreviazioni

DWBA - Distorted Wave Born Approximation

IA - Impulse Approximation

JSB - Jülich-Stony-Brook

LM - Landau-Migdal

MEC - Meson Exchange Current

PWBA - Plane Wave Born Approximation

QCD - Quantum Cromodynamics

QED - Quantum Electrodynamics

RPA - Random Phase Approximation

TDA - Tamm Dankoff Approximation

V-A - Vector-Axial

Bibliografia

[Ait84] I.J.R.Aitchinson, A.J.G.Hey - Gauge theories in particle physics, Adam Hilger LTD., Bristol, (1982).

[Alb01] W.M.Alberico *et al.*, Phys. Rep. 358 (2002) 227.

[Ama96] J.E.Amaro *et al.*, Nucl. Phys. A602 (1996) 263.

[Ann95] R.Anni, G.Co', P.Pellegrino, Nucl.Phys. A584 (1995) 35;
R.Anni, G.Co', Nucl. Phys. A588 (1995) 463.

[Bha88] R.K.Bhaduri, Models of the nucleon, Addison-Wesley Publishing Company Inc., New York, (1988).

[Bis00] C.Bisconti, Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Lecce, (2000).

[Bjo64] J.D.Bjorken, S.D.Drell - Relativistic quantum mechanics, McGraw-Hill Book Company, New York, (1964).

[Bot02] A.Botrugno, comunicazione privata.

[Car98] J.Carlson, R.Schiavilla, Rev. Mod. Phys. 70 (1998) 743.

[Co85] G.Co', S.Krewald, Nucl. Phys. A433 (1985) 392.

[Cog85] G.Co', A.M.Lallena, T.W.Donnelly, Nucl. Phys. A469 (1987) 392.

[Co90] G.Co', A.M.Lallena, Nucl. Phys. A510 (1990) 139.

[Con92] J.P.Connelly *et al.*, Phys. Rev. C45 (1992) 2711.

[Def66] T. de Forest, J.D.Walecka, Adv. Phys. 12 (1996) 1.

[Don79] T.W.Donnelly, R.D.Peccei - Neutral current effects in nuclei, North Holland Pubblishing Company, Amsterdam, (1979).

[Don92] T.W. Donnelly *et al.*, Nucl. Phys. A541 (1992) 525.

[Dub01] S.Dubnicka, A.Z.Dubnickova, P.Weisenpacher, hep-ph/0102171

[Edm57] A.R.Edmonds - Angular Momentum in Quantum Mechanics, Priceton University Press, Princeton, (1957).

[Eis70] J.M.Eisenberg, W.Greiner - Exitation mechanism of the nucleus, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1970).

[Fet71] A.L.Fetter, J.D.Walecka - Quantum Theory of Many-Particle Systems, McGraw Hill Book Company, New York, (1971).

[Hal84] F.Halzen, A.D.Martin - Quark and Lepton, John Wiley and Sons, New York, (1984).

[Hei89] W.Heil *et al.*, Nucl. Phys. B327 (1989) 1.

[Hoe76] G.Hoeler *et al.* Nucl. Phys. B114 (1976) 505.

[Jaf89] R.L.Jaffe, Phys. Lett. B229 (1989) 275.

[Lin79] J.Linchtenstadt *et al.*, Phys. Rev. C20 (1979) 497.

[Mig67] A.B.Migdal - Theory of finite Fermi systems and applications to atomic nuclei, Wiley, New York, (1967).

[Mus92] M.J.Musolf and T.W.Donnelly, Nucl. Phys. A546 (1992) 509.

[Mus94] M.J.Musolf *et al.*, Phys. Rep. 239 (1994) 1.

[Rin80] P.Ring, P.Schuck - The Nuclear Many-body Problem, Springer, Berlin-Heidelberg, (1980).

[Rin78] G.Rinker, J.Speth, Nucl. Phys. A306 (1978) 360.

[Row70] D.J.Rowe - Nuclear Collettive Motion, Mathuen and Co. LTD., London, (1970).

[Sch96] F.Scheck - Electroweak and Strong Interactions, Springer, Berlin-Heidelberg (1996).

[Sou90] P.A.Souder*et al.*, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 694.

[Spe80] J.Speth, V.Klemt, J.Wambach, G.E.Brown, Nucl.Phys. A343 (1980) 382.

[Wal75] J.D.Walecka - Muon Physics, vol.2, Academy Press, London, (1975).

[Wal77] J.D.Walecka, Nucl. Phys. A285 (1977) 349.

[Wal95] J.D.Walecka - Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, Oxford University Press, Oxford, (1995).

[Zup00] M.Zuppa, Tesi di Laurea in Fisica, Università degli Studi di Lecce, (2000).