UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

CATTURA MUONICA DA NUCLEI

Relatore:

Prof.Giampaolo Có

Laureando:

Giuseppe Lorusso

Anno Accademico 2001-2002

Indice

Intoduzione

L'interesse per il processo di cattura muonica nell'ambito degli studi di struttura nucleare è giustificato dal dettaglio con il quale esso è noto sia dal punto di vista teorico che da quello sperimentale, e dalla sensibilità dei tassi di cattura dal modello nucleare che si usa per descriverli.

Nel processo in esame, il muone che si trova su un'orbita atomica, viene poi catturato dal nucleo, con la conseguente emissione di un neutrino.

Il processo è dovuto all'interazione debole ed è mediato dallo scambio del vettore $W^{\pm}$. L'energia cinetica del muone è dell'ordine dell'elettronvolt, quindi l'energia che nucleo e neutrino si dividono è essenzialmente quella della massa a riposo del muone circa 100 MeV.

Ci troviamo quindi in regime perturbativo per la descrizione dell'interazione debole. Il meccanismo di reazione è quindi sotto controllo dal punto di vista teorico. L'incertezza nella descrizione del processo è dovuta al modello nucleare utilizzato.

L'accordo tra tassi osservati e misurati è ottimo nei sistemi nucleari a pochi corpi, come ^3He [7].

In questi calcoli sono stati utilizzati i valori delle costanti di accoppiamento e dei fattori di forma nucleonici misurati nel vuoto. Gli stati dei nuclei implicati nella transizione ^3He e ^3H sono stati descritti risolvendo l'equazione di Schrödinger per tre nucleoni senza fare alcuna approssimazione.

Visti i risultati ottenuti in sistemi nucleari a pochi corpi, è evidente che il processo di cattura muonica può essere utilizzato per verificare la validità dei modelli nucleari usati nei nuclei medio pesanti dove l'equazione di Schrödinger viene risolta facendo notevoli approssimazioni.

Scopo di questa tesi è stato quello di ricavare le espressioni dei tassi di cattura da parte dei nuclei medio pesanti, in modo da poter utilizzare vari modelli che descrivano l'eccitazione nucleare.

Per l'applicazione numerica utilizzeremo un modello nucleare a strati in cui lo stato finale del sistema ha un nucleone nel continuo. Il confronto con i dati sperimentali mostra l'inadeguatezza di questo modello. In conclusione mostreremo, a titolo di esempio, risultati ottenuti con un modello nucleare più elaborato.

Capitolo 1

Fenomenologia della cattura muonica

Questo capitolo mira a presentare la situazione sperimentale in cui si studia il processo di cattura muonica e a descrivere brevemente il comportamento del muone all'interno della materia. Questo ci permetterà, con riferimento ad alcune grandezze come la vita media del muone e quella degli stati atomici degli atomi muonici, di giustificare alcune ipotesi utilizzate nei capitoli seguenti, e di avere un'idea chiara dell'importanza giocata dalla cattura muonica nucleare in confronto agli altri processi che possono coinvolgere il muone nella materia: transizioni tra livelli atomici e decadimanto in elettrone.

1.1 Cattura muonica

Il muone è un leptone di massa $m_\mu = 105.6\ MeV/c^2$ che decade con la vita media τ_μ di 2.2 μs secondo il processo:

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_{e^-} + \nu_{\mu^-} \tag{1.1}$$

I diversi impianti esistenti per la produzione di muoni sfruttano fasci di protoni ad alta energia (400-900 MeV) che incidendo su bersagli di nuclei leggeri come berillio o carbonio, producono elettroni, muoni e pioni. La maggior parte degli elettroni proviene dalla conversione dei fotoni prodotti dal decadimento elettromagnetico di π^0. I muoni sono prodotti invece dal decadimento in volo dei pioni carichi.

Perché i muoni possano essere catturati in orbite atomiche, devono essere rallentati fino ad energie "termiche" al massimo dell'ordine di qualche decina di eV. Si utilizzano per questo "moderatori" costituiti da strati di grafite o polietilene con diversi spessori. La loro funzione è anche quella di assorbire gran parte dei pioni del fascio. Essi hanno infatti un libero cammino medio nella materia molto più piccolo di quello dei muoni e degli elettroni.

Il fascio ottenuto all'uscita dei moderatori ha bassa energia, momento selezionato, e contiene muoni ed elettroni facilmente discriminabili che incidono su un bersaglio e vengono in parte assorbiti.

L'apparato sperimentale che permette di identificare l'evento di cattura muonica è costituito da un sistema di due rivelatori posti prima e dopo il bersaglio rispetto alla direzione del fascio. Un muone che s'arresta nel bersaglio dà segnale nel primo ma non nel secondo rivelatore.

La cattura atomica del muone avviene in generale in orbite atomiche o molecolari esterne; segue, qualora il muone non decada, la diseccitazione che avviene in tempi dell'ordine di $10^{-13}s$ prevalentemente per emissione di elettroni Auger fino al livello $n = 5$, e di raggi-X nei livelli inferiori. Tutte le informazioni necessarie per lo studio degli atomi muonici sono contenute per lo più nelle proprietà degli elettroni e dei raggi X emessi.

Una volta catturato, il muone può decadere oppure interagire col nucleo secondo il seguente processo:

$$\mu^- + \ {}^A_Z X_N \longrightarrow \ {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + \nu_\mu$$

che avviene in tempi decisamente più grandi di quelli che caratterizzano le transizioni atomiche. Ad esempio gli ordini di grandezza di riferimento per ${}^{12}C$,${}^{16}O$,${}^{40}Ca$ sono rispettivamente $10^{-4}s$, $10^{-5}s$, $10^{-7}s$ [11]. Il confronto tra i tempi medi di vita, di transizione atomica e di cattura nucleare giustifica l'ipotesi che in seguito adotteremo di ritenere il muone nello stato 1s all'istante della cattura.

Giustificheremo nel prossimo capitolo che il muone catturato può considerarsi inoltre a riposo; l'energia scambiata nel processo è uguale quindi alla massa del muone ed è suddivisa tra l'energia del neutrino uscente e quella di eccitazione del nucleo. Lo spettro energetico del neutrino che chiarirebbe molti aspetti del meccanismo di reazione di cattura muonica non è disponibile sperimentalmente a causa delle difficoltà legate alla rivelazione dei neutrini.

La quantità sperimentale a disposizione è il tasso di cattura ovvero la probabilità per unità di tempo che un muone venga catturato.

Nel processo di cattura il nucleo può rimanere eccitato in uno stato dello spettro discreto, oppure nel continuo. Nel primo caso, che ad esempio per ^{16}O avviene con una probabilità di circa 10%, il nucleo decade nel suo stato fondamentale emettendo fotoni. Nel secondo caso il nucleo si disintegra emettendo nucleoni o anche particelle α.

Per esemplificare quanto detto sopra consideriamo il processo

$$\mu^- +^{28} Si \longrightarrow^{28} Al^* + \nu_\mu$$

ben studiato dal punto di vista sperimentale [8].

Il muone nello stato atomico 1s, decade secondo la (1.1) nel 34% dei casi, mentre nel restante 66% viene catturato dal nucleo di Silicio. Nel 36% dei casi il nucleo ^{28}Al viene eccitato in uno stato discreto. Quando viene eccitato nel continuo, il nucleo di ^{28}Al decade principalmente emettendo neutroni e più specificatamente nel 49% dei casi 1 neutrone, nel 14% due neutroni e nel rimanente 1% circa tre neutroni.

Esistono in generale altri modi di decadimento con probabilità inferiore all'1% come l'emissione di neutroni accompagnata da produzione di fotoni, oppure emissione di particelle cariche come protoni, deutoni, particelle alfa o nuclei di deuterio e trizio.

Capitolo 2

Hamiltoniana debole

In questo capitolo costruiamo l'operatore densità di hamiltoniana di interazione debole per il processo di cattura muonica. Nell'ipotesi di interazione puntiforme, i suoi elementi fondamentali sono la costante di Fermi, la corrente leptonica e quella adronica o nucleare. Gran parte del capitolo è dedicato alla seconda, costruita a partire da quella di singolo nucleone in termini di fattori di forma.

2.1 Hamiltoniana di interazione debole

Il processo che vogliamo descrivere è schematizzato in Fig.2.1. Considerando che il bosone $W^{\pm}$ è scambiato tra leptoni e singoli nucleoni, a livello nucleonico il processo elementare, schematizzato in Fig.2.1, è:

$$\mu^- + p \longrightarrow n + \nu_\mu. \tag{2.1}$$

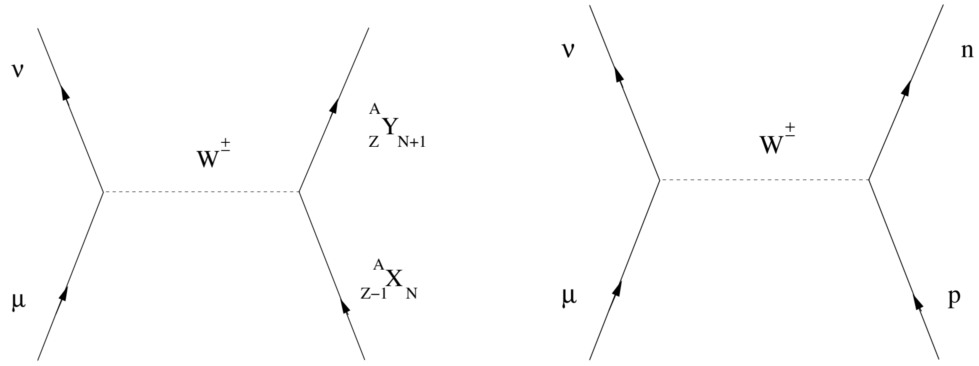

Fig.2.1A Fig.2.1B

Figura 2.1: Processo di cattura muonica (A) a livello nucleonico (B).

Utilizzando unità naturali ($\hbar = c = 1, \; e^2 = \alpha$) nell'ambito del modello standard della fisica delle particelle elementari, la densità d'hamiltoniana di interazione può essere scritta come [5]:

$$H = i\left[-ig\bar{\psi}_\nu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_\mu\right]\left[\frac{i(-g^{\alpha\beta}+q^\alpha q^\beta/M_B^2)}{q^2-M_B^2}\right](-ig\bar{\psi}_Y\Gamma_\beta\psi_X) \qquad (2.2)$$

in cui g è la costante adimensionale di accoppiamento debole, q è il quadri-momento trasferito, M_B è la massa del bosone vettore $W^\pm$ (80 GeV) e Γ_β è un operatore che espliciteremo nel prossimo paragrafo e che parametrizza la corrente nucleonica come somma delle matrici γ definite in appendice A1.
Nell'equazione precedente ψ_μ rappresenta la funzione d'onda del muone, ψ_ν quella del neutrino e ψ_X e ψ_Y quella dei nuclei X e Y.
Nelle situazioni cinematiche di nostro interesse si ha: $q^2 << M_B^2$ quindi:

$$\frac{i(-g^{\alpha\beta} + q^{\alpha}q^{\beta}/M_B^2)}{q^2 - M_B^2} \approx \frac{ig^{\alpha\beta}}{M_B^2} \tag{2.3}$$

in questo caso si pone:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W} \tag{2.4}$$

dove G è la costante di Fermi. La (2.2) diventa:

$$H = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_{\nu}\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5)\psi_{\mu}\right] g^{\alpha\beta}(\bar{\psi}_Y \Gamma_{\beta} \psi_X). \tag{2.5}$$

che descrive il processo nel modello di interazione *puntiforme* in cui i campi fermionici sono connessi nello stesso punto dello spazio di Minkowski. Il modello è realistico per le interazioni deboli, che hanno un raggio dell'ordine di 10^{-3}fm.

2.2 Corrente leptonica

Abbiamo già introdotto la corrente leptonica nel paragrafo precedente come combinazione dei termini $\bar{\psi}_f \gamma^{\alpha} \psi_i$ e $\bar{\psi}_f \left(\gamma^{\alpha}\gamma_5\right) \psi_i$.

Ipotizzata quindi la forma strutturale della corrente leptonica, la sua costruzione segue dalla specificazione delle funzioni d'onda delle particelle coinvolte al vertice leptonico. Il neutrino non risente dell'interazione elettromagnetica, e quella debole è a raggio così corto che in punto qualsiasi diverso dal vertice d'interazione, il neutrino si può considerare libero. Indicando con k_ν il suo quadri-impulso, la funzione d'onda del neutrino (appendice A2) è:

$$\psi_\nu(x) = u(\mathbf{k}_\nu)e^{-ik_\nu x} \tag{2.6}$$

Il muone è descritto invece dalla soluzione dell'equazione di Dirac per potenziali coulombiani la cui struttura è però molto complessa. D'altro canto il muone atomico risulta legato al nucleo con un'energia molto piccola. Nel ^{16}O è di circa 200 KeV lo *0.2%* circa della sua massa. Costruiamo dunque la funzione d'onda a partire dalla parte spinoriale della funzione d'onda libera, dalla parte temporale tipica dei problemi stazionari e dalla generica parte spaziale $R(\mathbf{r})$ (appendice A.5):

$$\psi_\mu(x) = R(\mathbf{r})u(\mathbf{k}_\mu)e^{i\varepsilon t}. \tag{2.7}$$

La corrente leptonica è quindi:

$$J^\alpha(x) = R(\mathbf{r})\left\{\bar{u}(\mathbf{k}_\nu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mathbf{k}_\mu)\right\}e^{+i(k_\nu x-\varepsilon t)}. \tag{2.8}$$

2.3 Corrente debole di singolo nucleone

I nucleoni sono composti da quark che interagiscono per scambio di gluoni. La corrente debole associata al vertice adronico deve tener conto del fatto che i nucleoni hanno una struttura interna.

Il problema si affronta in analogia al caso di diffusione elastica di elettroni su nucleoni. In questo caso, la corrente elettromagnetica adronica $j_\alpha(x)$ è costruita nella forma più generale permessa dalla conservazione di parità e dall'invarianza temporale [5]:

$$j_\alpha(x) = \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\gamma_\alpha F_1 + \frac{i}{2m} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2 + q_\alpha F_3 \right] u(\mathbf{p}) e^{-i(p-p')x} \tag{2.9}$$

dove m è la massa del nucleone e $\sigma_{\alpha\beta}$ è definito da:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha). \tag{2.10}$$

Abbiamo considerato che il moto dei nucleoni sia descritto da funzioni d'onde piana. Le funzioni F_i sono scalari di Lorentz, e quindi dipendono solo da quantità scalari come p'^2, p^2, q^2. Tuttavia, l'unica variabile indipendente è q^2 visto che le altre sono fissate dalla relazione $p'^2 = p^2 = m^2$. Le F_i dipendono quindi solo da q^2 e sono reali come si dimostra imponendo per l'elemento (2.9) le condizioni di hermicità e di invarianza sotto inversione temporale.

La conservazione della carica elettromagnetica:

$$\partial^\alpha \left(j_\alpha\right)_{fi} = i q^\alpha \left(j_\alpha\right)_{fi} = 0 \tag{2.11}$$

implica poi che il fattore di forma F_3 sia nullo per qualsiasi valore di q^2. Inserendo infatti la (2.9) nella (2.11) si ha:

$$\bar{u}(\mathbf{p}') \left[{}^\alpha \gamma_\alpha F_1 + q^\alpha \frac{i}{2m} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta F_2 + q^\alpha q_\alpha F_3 \right] u(\mathbf{p}) = 0 \tag{2.12}$$

in cui il termine in F_1 si annulla perché gli spinori $u(\mathbf{p})$ soddisfano l'equazione di Dirac e la quantità: $\bar{u}(\mathbf{p}')\left[q^\alpha\gamma_\alpha\right]u(\mathbf{p})$ diventa:

$$\bar{u}(\mathbf{p}')\not{q}\,u(\mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}')\left[\not{p}\,u(\mathbf{p}) - \not{p}\,'u(\mathbf{p})\right] = 0. \tag{2.13}$$

Il termine in F_2 si annulla per l'antisimmetria del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$

$$q^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta = \frac{i}{2}q^\alpha\left[\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right]q^\beta = i\left[q^2 - q^2\right] = 0 \tag{2.14}$$

e dalla (2.12) si ha quindi $F_3 = 0$. La (2.9) diventa allora:

$$j_\alpha(x) = \bar{u}(\mathbf{p}')\left[\gamma_\alpha F_1(q^2) + \frac{i}{2m}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(q^2)\right]u(\mathbf{p})e^{-i(p'-p)x} \tag{2.15}$$

in cui i due fattori di forma $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ si determinano sperimentalmente in processi di diffusione elastica di elettroni su nucleoni. In questi casi, poste ε e ε' le energie iniziali e finali dell'elettrone, la sezione d'urto assume l'espressione [3]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left[\frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1+\tau} + 2\tau G_M^2(q^2)tan^2\frac{\theta}{2}\right] \tag{2.16}$$

dove la sezione d'urto di Mott nel caso $\varepsilon >> m_e$ è definita come:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2 sin^4\theta/2}. \tag{2.17}$$

I fattori di forma elettrici e magnetici di Sachs $G_E(q^2)$ e $G_M(q^2)$ che risultano legati a $F_1(q^2)$ e $F_2(q^2)$ dalle relazioni:

$$G_E = F_1 - \frac{|q^2|}{4m^2}F_2 \tag{2.18}$$

$$G_M = F_1 + F_2 \tag{2.19}$$

sono ottenuti facendo esperimenti a q^2 fissato per diversi valori di θ. L'andamento dei fattori di forma di Sachs è riprodotto in modo soddisfacente, sia per i protoni che per i neutroni dalla cosiddetta forma *di dipolo*:

$$G_E^p(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{\eta}\right)^{-2} \tag{2.20}$$

$$G_M^p(q^2) = \mu_p \left(1 - \frac{q^2}{\eta}\right)^{-2} \tag{2.21}$$

$$G_E^n(q^2) = 0 \tag{2.22}$$

$$G_M^n(q^2) = \mu_n \left(1 - \frac{q^2}{\eta}\right)^{-2} \tag{2.23}$$

in cui $\eta = 0.71\ (GeV/c)^2$ e μ_p e μ_n sono i momenti magnetici rispettivamente del protone e del neutrone.

In termini del formalismo di isospin, il protone ed il neutrone si identificano con gli stati χ_p e χ_n, autostati della terza componente dell'operatore di isospin, $\mathbf{I}_3$, relativi ad autovalori $\pm\frac{1}{2}$. Nella rappresentazione fondamentale, l'operatore di isospin è definito da:

$$\mathbf{I}_i = \frac{\tau_i}{2}$$

dove τ_i sono le matrici di Pauli e χ_p, χ_n gli spinori a due componenti di Pauli. Gli stati χ_p e χ_n costituiscono la base dello spazio. Definiamo la funzione d'onda nucleonica $\Psi(x)$ nel seguente modo:

$$\Psi(x) = \psi^p(x)\chi_p + \psi^n(x)\chi_n = \tag{2.24}$$

$$= \psi^p(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi^n(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi^p(x) \\ \psi^p(x) \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

La funzione d'onda di nucleone $\Psi(x)$ risulta avere quindi otto componenti, mentre ψ^p, ψ^n sono spinori a quattro componenti.

Nel formalisomo appena introdotto, la corrente elettromegnatica si suddivide in un termine isoscalare $(j_\alpha)_{fi}^{(I=0)}$ e in uno isovettoriale $(j_\alpha)_{fi}^{(I=1)}$ separatamente conservati. Nell'ipotesi di nucleoni puntiformi si ha per esempio:

$$(j_\alpha)_{fi}(x) = \bar{\Psi}_f(x)\gamma_\alpha \frac{1}{2}\left(1+\tau^3\right)\Psi_i(x)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{N=p,n}\left[\chi_N^+\psi_f^N(x)\gamma_\alpha\psi_i^N(x) + \chi_N^+\psi_f^N(x)\gamma_\alpha\tau_3\psi_i^N(x)\chi_N\right] \tag{2.26}$$

$$= (j_\alpha)_{fi}^{(I=0)}(x) + (j_\alpha)_{fi}^{(I=1)}(x).$$

Per un protone $\chi_N^+\tau_3\chi_N$ è pari ad 1 e l'equazione (2.26) rappresenta la corrente elettromagnetica del protone. Per un neutrone $\chi_N^+\tau_3\chi_N$ è pari a -1 e la corrente neutronica è nulla, in accordo con l'ipotesi si nucleoni puntiformi.

Nello spazio di isospin la (2.15) assume l'espressione:

$$
\begin{aligned}
j_\alpha^N(x) &= \chi_N^+ \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\gamma_\alpha \left(F_1^S + \tau_3 F_1^V \right) + \right. \\
&\left. + \frac{i}{2m} \sigma_{\alpha\beta} q^\beta \left(F_2^S + \tau^3 F_2^V \right) \right] \chi_N u(\mathbf{p}) e^{-i(p'-p)x}. \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

Nell'equazione precedente abbiamo ipotizzato che $m_p \approx m_n \approx m$ e abbiamo indicato con F_i^S e F_i^V (i = 1,2) i fattori di forma isoscalare e isovettoriale, definiti da:

$$F_i^S = \frac{F_i^p + F_i^n}{2} \qquad (2.28)$$

$$F_i^V = \frac{F_i^p - F_i^n}{2} \qquad (2.29)$$

La corrente debole adronica è in generale somma dei due termini:

$$H_\alpha = J_\alpha cos\theta_c + S_\alpha sin\theta_c \qquad (2.30)$$

Il termine con J_α agisce sugli stati adronici conservando la stranezza e cambiando sia la carica che l'isospin di una unità. Il termine con S_α invece cambia la stranezza di una unità, la carica e l'isospin di $\frac{1}{2}$. Abbiamo indicato con θ_c infine l'angolo di mixing di Cabibbo con valore empirico di 13° circa. Nel processo di cattura muonica non si ha variazione di stranezza quindi consideriamo solo all'operatore J_α.

La corrente debole carica adronica si può scomporre in un contributo vettoriale e in uno assiale che possono essere trattati entrambi mediante decomposizione covariante in analogia a quanto abbiamo fatto per la corrente elettromagnetica. Definita la terna sferica:

$$\tau^{\pm} = \mp \frac{\tau^1 \pm i\tau^2}{\sqrt{2}} \qquad \qquad \tau^3 = \tau^0 \tag{2.31}$$

l'operatore τ^- trasforma lo stato di protone in quello di neutrone. Per la parte vettoriale della corrente di abbassamento carica scriviamo dunque:

$$\begin{aligned} J_\alpha^V(x) &= \bar{u}(\mathbf{p}')\chi_{N'}^+ \left[\gamma_\alpha F_V + \frac{i}{2m}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_M + q_\alpha F_S\right] \cdot \\ &\quad \tau^- \chi_N u(\mathbf{p}) e^{-i(p-p')x} \end{aligned} \tag{2.32}$$

dove il termine $\chi_{N'}^+ \tau^- \chi_N$ è non nullo solo se $N = p$ e $N' = n$. I fattori di forma F_V, F_M,F_S sono legati a quelli elettromagnetici dall'ipotesi CVC della corrente-vettoriale-conservata (CVC) di Gell-Mann e Feynman nella quale la componente vettoriale della corrente carica debole e quella elettromagnetica isovettoriale formano un tripletto di isospin. La corrente debole vettoriale in analogia a quella elettromagnetica si conserva:

$$\partial^\alpha \left(J_\alpha^V\right)_{fi} = 0. \tag{2.33}$$

Dall'ipotesi CVC discende che i fattori F_V e F_M sono identici ai fattori di forma elettromagnetici isovettoriali (2.29). Dalla conservazione della corrente discende che $F_S = 0$. I primi due termini sono infatti a divergenza nulla.

La parte assiale della corrente debole si costruisce in modo analogo a quella vettoriale, ma utilizzando oltre ai quadrimomenti indipendenti q, p i prodotti delle matrici $\gamma_\alpha\gamma_5$:

$$\begin{aligned} J^A_\alpha(x) &= \bar{u}(p')\chi^+_{N'}\left[\gamma_\alpha\gamma_5 F_A + \frac{i}{2m}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\gamma_5 F_T + \right. \\ &\left. + \, q_\alpha\gamma_5 F_P\right]\tau^-\chi_N u(p)e^{-i(p-p')x}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Anche in questo caso le proprietà dei fattori di forma sono determinate dal comportamento delle correnti sotto operazioni di simmetria. Applicando gli operatori di inversione temporale e di coniugazione di carica si può dimostrare che i fattori di forma F_A, F_P sono reali mentre F_T è identicamente nullo. Il termine di corrente legato al fattore di forma pseudoscalare F_P è collegato ai vertici pionici e sotto alcune ipotesi (conservazione parziale della corrente assiale o PCAC) è possibile collegare F_P e F_A mediante la relazione di Goldberger-Treiman:

$$F_P(q^2) = \frac{2mF_A(q^2)}{m_\pi^2 - q^2} \tag{2.35}$$

dove m_π è la massa del pione.

Il fattore di forma F_A è stato determinato dai risultati sperimentali su sezioni d'urto di reazioni neutrino-nucleo e, in analogia ai fattori di forma di Sachs, è parametrizzato in una forma di dipolo estratta dai dati sperimentali dei processi di diffusione neutrino-deutone e di elettroproduzione di pioni da protoni. I dati sperimentali sono ben riprodotti da un andamento del tipo:

$$F_A(q^2) = \frac{-g_A}{(1 - q^2/M_A^2)^2} \tag{2.36}$$

dove g_A è la carica assiale e M_A un parametro detto massa assiale di dipolo. Dall'analisi di dati di diffusione di neutrini su bersagli di Freon o Freon-propano si ha il valore [9]:

$$M_A = 1.05 \pm 0.03 GeV \tag{2.37}$$

Delle incertezze permangono tuttavia su questo valore non essendo facile calcolare su di esso gli effetti nucleari. Il valore di g_A è stato determinato invece con molta precisione in esperimenti di decadimento β del neutrone:

$$g_A = 1.259 \pm 0.017. \tag{2.38}$$

2.4 Corrente debole nucleare e riduzione non relativistica

Nel regime energetico di nostro interesse, la corrente nucleare può essere scritta come somma delle correnti di singolo nucleone:

$$\tilde{J}_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{A} J_\alpha(\mathbf{r}_i)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.39}$$

dove $\tilde{J}_\alpha(\mathbf{r})$ indica la corrente nucleare, $J_\alpha(\mathbf{r}_i)$ l'operatore di corrente di singolo nucleone, e $\mathbf{r}_i$ la coordinata dell'i-esimo nucleone. L'esperessione (2.39) non considera l'esistenza di correnti nucleari a molticorpi come quelle prodotte dallo scambio mesonico.

L'operatore di corrente di singolo nucleone è in principio quello definito dalle (2.32) e (2.34). Poichè i modelli nucleari si basano però su una descrizione non relativistica del moto dei nucleoni, è necessario utilizzare un'espressione non relativistica della corrente debole. A questo scopo si riscrivono le (2.32) e la (2.34) in serie di potenze di $|p|/m$ e si considerano solo le componenti superiori degli spinori e i termini fino a $|p|^2/m^2$. Posto $p'-p=q$, i risultati di tale riduzione non relativistica sono [13]:

$$J_0^V(x) = F_V(q^2)\chi^+_{N'}\tau^-\chi_N e^{-i(p-p')x} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} J^V(x) &= \chi^+_{N'}\left\{\left[F_V(q^2)+F_M(q^2)\right]\frac{i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q}}{2m}+\right. \\ &\left.+F_V(q^2)\left(\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m}\right)\right\}\tau^-\chi_N e^{-i(p-p')x} \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} J_0^A(x) &= \chi^+_{N'}\left[F_A(q^2)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(2\mathbf{p}+\mathbf{q})}{2m}+\right. \\ &\left.-F_P(q^2)\frac{q^0\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot q)}{2m}\right]\tau^-\chi_N e^{-i(p-p')x} \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} J^A(x) &= \chi^+_{N'}\left[F_A(q^2)\boldsymbol{\sigma}-F_P(q^2)\frac{\mathbf{q}\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot q)}{2m}\right]\cdot \\ &\tau^-\chi_N e^{-i(p-p')x} \end{aligned} \tag{2.43}$$

dove $\tau=|q^2|/4m^2$ e $N=p,n$.

Capitolo 3

Tasso di cattura muonica

In questo capitolo definiamo il tasso di cattura muonica mediante la regola d'oro di Fermi. Nell'ipotesi che il nucleo compia transizioni tra stati di definito momento angolare e parità, sviluppiamo le ampiezze di transizione in multipoli. Otterremo una espressione finale del tasso indipendente dal modello nucleare.

3.1 Tasso di cattura muonica

Nel sistema di riferimento del laboratorio (solidale col bersaglio), il processo

$$\mu^- + \, {}^{A}_{Z}X_N \longrightarrow \, {}^{A}_{Z-1}Y_{N+1} + \nu \tag{3.1}$$

è descritto dall'evoluzione dello stato iniziale legato nucleo-muone a riposo in quello finale in cui un neutrino è emesso in direzione opposta a qualla di rinculo del nucleo ${}^{A}_{Z-1}Y_{N+1}$ con energia compresa tra zero e la massa del muone.

Il muone si trova sull'onda 1s atomica e si muove con energia di circa 200 KeV. E' quindi plausibile considerare nullo il suo impulso $\mathbf{k}_\mu$. Trascurando il rinculo del bersaglio, le variabili cinematiche del problema sono vincolate dalle seguenti equazioni di conservazione:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}_\nu \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_\mu + E_i = (m_\mu - \varepsilon_b) + E_i = E_f + \varepsilon_\nu \tag{3.3}$$

dove abbiamo indicato:

$\mathbf{q}$; trimomento trasferito dal muone al bersaglio

$\mathbf{k}_\nu$; trimomento del neutrino

ε_ν ; energia del neutrino uscente

m_μ ; massa del muone

ε_b ; energia di legame del muone nello stato 1s

E_i, E_f ; energia iniziale e finale del nucleo

Supponendo che il nucleo compia transizioni tra due stati di momento angolare definito, l'ampiezza di transizione S_{fi} del processo (3.1), si costruisce a partire dall'hamiltoniana di interazione (2.5) e dalle correnti (2.8) e (2.39):

$$\begin{aligned} & S_{fi} = \int d^4x \, \langle f | \, \mathcal{H}(x) \, | i \rangle = \\ = \; & \frac{-i}{\sqrt{V}} \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(\mathbf{k}_\nu) \gamma^\alpha \left(1 - \gamma_5\right) u(\mathbf{k}_\mu) \int d^4x \phi_{1s}(\mathbf{r}) e^{+ik_\nu x} e^{i\varepsilon_\mu t} \langle J_f M_f | \, \tilde{J}_\alpha(x) \, | J_i M_i \rangle \\ = \; & -\frac{2\pi i}{\sqrt{V}} \delta(E_f + \varepsilon_\mu - E_i - \varepsilon_\nu) M_{fi} \end{aligned} \tag{3.4}$$

nell'ultimo passaggio abbiamo espresso l'operatore di corrente nucleare in rappresentazione di Heisenberg:

$$\tilde{J}_\alpha(x) = e^{iHt}\tilde{J}_\alpha(\mathbf{r})e^{-iHt}$$

e si è definita la quantità:

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}}\bar{u}(\mathbf{k}_\nu)\gamma^\alpha\left(1-\gamma_5\right)u(\mathbf{k}_\mu)\int d\mathbf{r}\phi_{1s}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_\nu\mathbf{r}}\left\langle J_f M_f\right|\tilde{J}_\alpha(\mathbf{r})\left|J_i M_i\right\rangle . \tag{3.5}$$

Usando la regola d'oro di Fermi definiamo il tasso di cattura muonica come:

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon_\mu V}\left|M_{fi}\right|^2\varrho\left(\varepsilon_\nu\right) \tag{3.6}$$

in cui T è la probabilità di cattura per unità di tempo, e $\varrho\left(\varepsilon\right)$ da densità degli stati finali nello spazio delle fasi che, trascurando il rinculo del bersaglio è quella del neutrino:

$$\varrho\left(\varepsilon_\nu\right) = \frac{4\pi\varepsilon_\nu^2 V}{\left(2\pi\right)^3 2\varepsilon_\nu} \tag{3.7}$$

Dato che non consideriamo stati di polarizzazione, ridefiniamo il tasso mediando sugli stati iniziali e sommando su quelli finali:

$$T = \frac{\varepsilon_\nu}{4\pi\varepsilon_\mu}\frac{1}{2}\sum_{s_\mu}\frac{1}{2J_i+1}\sum_{M_i,M_f}\left|M_{fi}\right|^2 \tag{3.8}$$

dove J e M sono il momento angolare nucleare e la sua terza componente, mentre s_μ è la terza componente dello spin del muone.

3.2 Sviluppo in multipoli del tasso di cattura muonica

Indichiamo con l^α l'elemento di matrice leptonico $\bar{u}(\mathbf{k}_\nu)\gamma^\alpha (1-\gamma_5)\, u(\mathbf{k}_\mu)$ e sviluppiamo l'ampiezza di transizione M_{fi} sostituendo alla parte vettoriale di l^α il suo sviluppo sulla base dei versori sferici $\{\mathbf{e}_\lambda\}_{\lambda=\pm1,3}$:

$$\mathbf{e}_{\pm1} = \mp\frac{\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{k}_\nu}{|\mathbf{k}_\nu|}. \tag{3.10}$$

Sviluppiamo poi l'esponenziale $e^{-i\mathbf{k}_\nu \mathbf{r}}$ in onde piane definendo $k = |\mathbf{k}_\nu|$:

$$e^{-i\mathbf{k}_\nu \mathbf{r}} = \sqrt{4\pi}\sum_J (-i)^J \sqrt{2J+1} j_J(kr) Y_{J0}(\vartheta,\varphi) \tag{3.11}$$

dove abbiamo indicato con $j_J(kr)$ la funzione sferica di Bessel dipendente dal modulo del trimomento del neutrino e dal modulo di $\mathbf{r}$. L'ampiezza di transizione può essere scritta allora come:

$$\begin{aligned} M_{fi} = {} & \frac{G}{\sqrt{2}}\int d\mathbf{r}\phi_{1s}(\mathbf{r})\sum_{J=0}^{\infty}\left[4\pi\,(2J+1)\right]^{1/2}(-i)^J\, j_J(kr)Y_{J0}(\vartheta,\varphi) \\ & \left[l^0\langle J_f M_f \left| \tilde{J}_0(\mathbf{r}) \right| J_i M_i\rangle - \sum_{\lambda=\pm1,3} l_\lambda e_\lambda^\dagger \langle J_f M_f \left| \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \right| J_i M_i\rangle\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Definiamo i seguenti operatori di multipolo:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{JM}(k) &= \int d\mathbf{r}\, \phi_{1s}(\mathbf{r}) j_J(kr) Y_{JM}(\vartheta,\varphi) \tilde{J}_0(\mathbf{r}) && (3.13)\\
\mathfrak{L}_{JM}(k) &= \frac{i}{k}\int d\mathbf{r}\, \phi_{1s}(\mathbf{r}) \nabla j_J(kr) Y_{J0}(\vartheta,\varphi) \tilde{J}(\mathbf{r}) && (3.14)\\
\mathfrak{D}_{JM}(k) &= \frac{1}{k}\int d\mathbf{r}\, \phi_{1s}(\mathbf{r}) \left[\nabla \times \left(j_J(kr)\mathcal{Y}^M_{JJ}\right)\right] \tilde{J}(\mathbf{r}) && (3.15)\\
\mathfrak{M}_{JM}(k) &= \int d\mathbf{r}\, \phi_{1s}(\mathbf{r}) j_J(kr) \mathcal{Y}^M_{JJ} \tilde{J}(\mathbf{r}) && (3.16)
\end{aligned}
$$

detti rispettivamnete coulombiano (o di carica), longitudinale, trasversale magnetico e trasversale elettrico della corrente $\tilde{J}_\alpha\,(\mathbf{r})$. Col simbolo $\mathcal{Y}^\lambda_{JJ}$ abbiamo indicato l'armonica sferica vettoriale (appendice B).

La multipolarità degli operatori è vincolata dalla conservazione delmomento angolare

$$
|J_f - J_i| \leq J \leq J_f + J_i \qquad (3.17)
$$

L'ampiezza di transizione si può scrivere nella forma:

$$
\begin{aligned}
M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} \Bigg\{ &\langle J_f M_f | \sum_{J=0}^{\infty} \left[4\pi\,(2J+1)\right]^{1/2} (-i)^J \left[l^0 \mathfrak{C}_{J0}(k) - l_3 \mathfrak{L}_{J0}(k)\right] + \\
&- \sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda \sum_{J\geq 1}^{\infty} \left[2\pi\,(2J+1)\right]^{1/2} (-i)^J \left[\mathfrak{D}_{J,\lambda}(k) - \lambda \mathfrak{M}_{J,\lambda}(k)\right] |J_i M_i\rangle \Bigg\} \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Utilizzando il teorema di Wigner-Eckart possiamo scrivere il termine generico $\langle J_f M_f\,|O_{J,M}|\,J_i M_i\rangle$ in cui $O_{J,M}$ è un tensore sferico irriducibile nel modo seguente:

$$\langle J_f, M_f \left| O_{J,M} \right| J_i, M_i \rangle = (-)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \left\| O_J \right\| J_i \rangle \quad (3.19)$$

e tenendo conto della seguente proprietà dei simboli 3-j:

$$\sum_{M_i M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & M' & M_i \end{pmatrix} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \frac{1}{2J+1} \quad (3.20)$$

dalla (3.18) si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{M_i M_f} \left| M_{fi} \right|^2 &= \frac{G^2}{2} \left[\sum_{\lambda=\pm 1} l_\lambda l_\lambda^* \sum_{J \geq 1}^{\infty} 2\pi \left| \langle J_f \left\| \mathfrak{D}_J(k) + \lambda \mathfrak{M}_J(k) \right\| J_i \rangle \right|^2 + \right. \\ & + \sum_{J=0}^{\infty} 4\pi l_3 l_3^* \left| \langle J_f \left\| \mathfrak{L}_J(k) \right\| J_i \rangle \right|^2 + l_0 l_0^* \left| \langle J_f \left\| \mathfrak{C}_J(k) \right\| J_i \rangle \right|^2 + \\ & \left. - \sum_{J=0}^{\infty} 2 Re l_3 l_0^* \langle J_f \left\| \mathfrak{L}_J(k) \right\| J_i \rangle \langle J_f \left\| \mathfrak{C}_J(k) \right\| J_i \rangle^* \right] \quad (3.21) \end{aligned}$$

nella quale sono nulli i termini di interferenza tra la parte longitudinale e trasversale dello sviluppo multipolare, e quello di interferenza tra le parti trasversali con $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

L'asserto segue dalla proprietà (3.20) visto che l'operatore longitudinale e quelli trasversali contribuiscono nella (3.21) con diversi M. Il primo con $M = \lambda = 0$, gli altri con $M = \lambda = \pm 1$. Gli operatori longitudinali e di carica inducono quindi rispetto a quelli trasversali transizioni a stati nucleari con diverso M.

Sono nulli inoltre i termini di interferenza tra operatori con parità diversa e quindi ad una transizione di definito momento angolare e parità non possono contribuitre operatori di multipolo con parità diverse.

Il teorema di Wigner-Eckart viene applicato alle parti angolari degli elementi di matrice. Nell'equazione precedente con il simbolo $\langle J_f \| O_J \| J_i \rangle$ intendiamo sottintesa l'integrazione sulle variabili radiali.

Utilizzando la seguente relazione tra numeri complessi:

$$\sum_{\lambda=\pm 1} l l_\lambda^* \left| a - \lambda b \right|^2 = \left(l_x l_x^* + l_y l_y^* \right) \left(|a|^2 + |b|^2 \right) + i \left(l_x l_y^* - l_y l_x^* \right) 2Re\left(a^* b\right) \quad (3.22)$$

la (3.21) diventa:

$$\begin{aligned} \sum_{M_i M_f} |M_{fi}|^2 &= 2\pi G^2 \Bigg\{ \Bigg[\sum_{J\geq 1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(l_x l_x^* + l_y l_y^* \right) \left| \langle J_f \| \mathfrak{M}_J(k) \| J_i \rangle \right|^2 + \left| \langle J_f \| \mathfrak{D}_J(k) \| J_i \rangle \right|^2 \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(l_1 l_2^* - l_2 l_1^* \right) 2Re \langle J_f \| \mathfrak{M}_J(k) \| J_i \rangle \langle J_f \| \mathfrak{D}_J(k) \| J_i \rangle^* \Bigg] \\ &\quad + \sum_{J=0}^{\infty} \Big[l_3 l_3^* \left| \langle J_f \| \mathfrak{L}_J(k) \| J_i \rangle \right|^2 + l_0 l_0^* \left| \langle J_f \| \mathfrak{C}_J(k) \| J_i \rangle \right|^2 + \\ &\quad - \sum_{J=0}^{\infty} 2Re l_3 l_0^* \langle J_f \| \mathfrak{L}_J(k) \| J_i \rangle \langle J_f \| \mathfrak{C}_J(k) \| J_i \rangle^* \Big] \Bigg\} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Il calcolo dei prodotti di elementi di matrice leptonica nel limite di $\frac{\mathbf{k}}{\varepsilon} \longrightarrow 0$ dà (appendice C):

$$\begin{aligned} \sum_{M_i M_f} |M_{fi}|^2 &= 16\pi G^2 \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu \Bigg[\sum_{J\geq 1}^{\infty} \left| \langle f \| \mathfrak{M}_J(k) - \mathfrak{D}_J(k) \| i \rangle \right|^2 + \\ &\quad + \sum_{J=0}^{\infty} \left| \langle f \| \mathfrak{L}_J(k) - \mathfrak{C}_J(k) \| i \rangle \right|^2 \Bigg] . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Inserendo ora questo risultato nella (3.8) otteniamo:

$$\begin{aligned} T &= 2\frac{G^2\varepsilon_\nu^2}{(2J_i+1)}\left[\sum_{J\geq 1}^{\infty}\left|\langle J_f \left\| \mathfrak{M}_J(k) - \mathfrak{D}_J(k) \right\| J_i\rangle\right|^2 + \right. \\ &\left. + \sum_{J=0}^{\infty}\left|\langle J_f \left\| \mathfrak{L}_J(k) - \mathfrak{C}_J(k) \right\| J_i\rangle\right|^2\right] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Un'ulteriore semplificazione della (3.25) può essere fatta notando come nel capitolo precedente che $\phi_{1s}(\mathbf{r})$ varia poco su distanze comparabili con le dimensioni nucleari. Almeno nella zona di sovrapposizione delle funzioni d'onda muonica e nucleare scriviamo:

$$\phi_{1s}(\mathbf{r}) = \phi_{1s}(\mathbf{0}) \tag{3.26}$$

e valutiamo $\phi_{1s}(\mathbf{0})$ a partire dalla funzione d'onda atomica calcolata per nuclei puntiformi $\phi_{1s}^0(\mathbf{0})$ tenendo conto della distribuzione di carica nucleare mediante la parametrizzazione [12]:

$$\phi_{1s}(\mathbf{0}) = B\phi_{1s}^0(\mathbf{0}). \tag{3.27}$$

I valori di B riportati in Tab.1. per alcuni nuclei sono ottenuti risolvendo numericamente l'equazione di Dirac per potenziali generati dalla distribuzione di carica nucleare dello stato fondamentale.

La (3.25) diventa quindi:

$$\begin{aligned} T &= 2B\frac{G^2\varepsilon_\nu^2}{(2J_i+1)}\left|\bar{\phi}_{1s}\right|^2\left[\sum_{J\geq 1}^{\infty}\left|\langle J_f \left\| M_J(k) - D_J(k) \right\| J_i\rangle\right|^2 + \right. \\ &\left. + \sum_{J=0}^{\infty}\left|\langle J_f \left\| L_J(k) - C_J(k) \right\| J_i\rangle\right|^2\right] \end{aligned} \tag{3.28}$$

dove gli operatori M, D, C, L nella (3.28) sono quelli definiti dalle (3.13)-(3.16) a meno del fattore $\phi_{1s}(\mathbf{r})$ estratto dall'integrando e [12]:

$$\left|\bar{\phi}_{1s}\right|^2 \equiv B\left|\phi_{1s}^0(0)\right|^2 = B\frac{(Z\alpha m_\mu)^3}{\pi}\left(\frac{M}{M+m_\mu}\right)^3 \tag{3.29}$$

con M massa del nucleo.

Tab.1

	^{12}C	^{16}O	^{40}Ca
B	0.86	0.79	0.44

3.3 Elementi di matrice ridotti

La corrente nucleare si può decomporre in una parte assiale ed una vettoriale:

$$\tilde{J}(\mathbf{r}) = \tilde{J}^A(\mathbf{r}) + \tilde{J}^V(\mathbf{r}) \tag{3.30}$$

che utilizzate singolarmente nelle (3.13)-(3.16) definiscono gli operatori di multipolo rispettivamente assiali e vettoriali. La parità di questi ultimi dipende da quella delle correnti e da quella delle armoniche sferiche. Hanno parità naturale o $(-1)^J$ gli operatori L^V, C^V, D^V, M^A mentre parità $(-1)^{J+1}$o non naturale L^A, C^A, D^A, M^V. In questa sezione sviluppiamo l'equazione (3.28) separando gli operatori di multipolo con parità diverse.

Utilizziamo inoltre la seguente espressione che deriva dalla conservazione della parte vettoriale della corrente (teoria CVC):

$$\langle J_f \left\| C_J^V(k) \right\| J_i\rangle = \frac{\omega}{|\mathbf{q}|}\langle J_f \left\| L_J^V(k) \right\| J_i\rangle \tag{3.31}$$

in cui ω indica l'energia trasferita nell'interazione. La (3.23) diventa:

$$\sum_{M_i M_f} |M_{fi}|^2 = 16\pi G^2 \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu \left\{ \sum_{J\geq 1}^{\infty} \left[\left|\langle J_f \left\| D_J^V(k) \right\| J_i \rangle\right|^2 + \left|\langle J_f \left\| M_J^V(k) \right\| J_i \rangle\right|^2 + \right.\right.$$

$$- 2Re\langle J_f \left\| D_J^V(k) \right\| J_i\rangle \langle J_f \left\| M_J^A(k) \right\| J_i\rangle^* + \left|\langle J_f \left\| D_J^A(k) \right\| J_i \rangle\right|^2 +$$

$$\left. + \left|\langle J_f \left\| M_J^A(k) \right\| J_i \rangle\right|^2 - 2Re\langle J_f \left\| D_J^A(k) \right\| J_i\rangle \langle J_f \left\| M_J^V(k) \right\| J_i\rangle^* \right]$$

$$\left. + \sum_{J=0}^{\infty} \left[\left|\langle J_f \left\| L_J^A(k) - C_J^A(k) \right\| J_i \rangle\right|^2 + \left(1 + \frac{\omega^2}{k^2} + 2\frac{\omega}{k}\right) \left|\langle J_f \left\| C_J^V(k) \right\| J_i \rangle\right|^2 \right] \right\}$$

Riscriviamo gli operatori di multipolo, inserendo le (2.40)-(2.43) in (2.39) e quest'ultima nelle (3.13)-(3.16). Gli operatori di multipolo della corrente vettoriale risultano:

$$C_{J0}^V(k, \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{A} \int d\mathbf{r} j_J(kr) Y_{J0}(\vartheta\varphi) F_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{3.32}$$

$$M_{J,\lambda}^V(k) = \sum_{i=1}^{A} \int d\mathbf{r}\; j_J(kr) Y_{JJ}^\lambda(\vartheta\varphi)$$
$$\left[\frac{-iF_V}{2m} \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\nabla + \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right) - \frac{F_M + F_V}{2m} \boldsymbol{\sigma} \times \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] \tag{3.33}$$

$$D_{J,\lambda}^V(k) = i \sum_{i=1}^{A} \int d\mathbf{r} \left(\frac{\sqrt{J+1}}{\sqrt{2J+1}} j_{J-1}(kr) \mathcal{Y}_{JJ-1}^\lambda(\vartheta\varphi) + \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2J+1}} j_{J+1}(kr) \mathcal{Y}_{J,J+1}^\lambda(\vartheta\varphi) \right)$$
$$\left[\frac{-iF_V}{2m} \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\nabla + \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}) \right) - \frac{F_M + F_V}{2m} \boldsymbol{\sigma} \times \nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right] \tag{3.34}$$

$$L^V_{J0}(k) = i\sum_{i=1}^{A}\int d\mathbf{r}\left(\frac{\sqrt{J+1}}{\sqrt{2J+1}}j_{J+1}(kr)\mathcal{Y}^0_{J,J+1}(\vartheta\varphi)+\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2J+1}}j_{J-1}(kr)\mathcal{Y}^0_{J,J-1}(\vartheta\varphi)\right)$$
$$\left[\frac{-iF_V}{2m}\left(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\nabla+\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\right)-\frac{F_M+F_V}{2m}\boldsymbol{\sigma}\times\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\right] \quad (3.35)$$

mentre gli assiali:

$$C^A_{J0}(k) = \sum_{i=1}^{A}\int d\mathbf{r}\; j_J(kr)Y_{J0}(\vartheta\varphi)$$
$$\left[\frac{F_A}{2m}\boldsymbol{\sigma}\left(\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\nabla+\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\right)-\frac{iF_Pq^0}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\right]$$

$$M^A_{J,\lambda}(k) = \sum_{i=1}^{A}\int d\mathbf{r}j_J(kr)Y^\lambda_{JJ}(\vartheta\varphi)\left[F_A\boldsymbol{\sigma}+\frac{F_P}{2m}\nabla\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \quad (3.36)$$

$$D^A_{J,\lambda}(k) = i\sum_{i=1}^{A}\int d\mathbf{r}\left(\frac{\sqrt{J+1}}{\sqrt{2J+1}}j_{J-1}(kr)\mathcal{Y}^\lambda_{JJ-1}(\vartheta\varphi)\right.$$
$$\left.-\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2J+1}}j_{J+1}(kr)\mathcal{Y}^\lambda_{J,J+1}(\vartheta\varphi)\right)\left[F_A\boldsymbol{\sigma}+\frac{F_P}{2m}\nabla\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \quad (3.37)$$

$$L^A_{J0}(k) = i\sum_{i=1}^{A}\left(\int d\mathbf{r}\frac{\sqrt{J+1}}{\sqrt{2J+1}}j_{J+1}(kr)\mathcal{Y}^0_{J,J+1}(\vartheta\varphi)+\right.$$
$$\left.\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2J+1}}j_{J-1}(kr)\mathcal{Y}^0_{J,J-1}(\vartheta\varphi)\right)\left[F_A\boldsymbol{\sigma}+\frac{F_P}{2m}\nabla\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\right)\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)$$

Per determinare infine gli elementi di matrice ridotta degli operatori appena costruiti, facciamo riferimento ai risultati di appendice D.

Capitolo 4

Modelli nucleari

Le espressioni ottenute nei capitoli precedenti non facevano alcun tipo di ridereimnento alla struttura struttura nucleare. L'unica ipotesi è quella che il nucleo compia una transizione tra due stati con momento angolare e parità definite.
Per ottenere stime quantitative dei tassi di cattura è necessario specificare il modello nucleare che descrive la transizione. In questo capitolo descriviamo il modello a strati che abbiamo utilizzato per i nostri calcoli.
Presentiamo brevemente anche le idee di base della teoria Random Phase Approxsimation (RPA) i cui risultati saranno utilizzati per trarre indicazioni qualitative sulla validità della descrizione del tasso, ma soprattutto in prospettiva della ricerca futura.

4.1 Modello a strati

L'hamiltoniana di un nucleo atomico ad A nucleoni può essere scritta come:

$$H = \sum_{i=1}^{A} T_i + \frac{1}{2}\sum_{i\neq i} V_{ij} \tag{4.1}$$

in cui T_i è l'energia cinetica dell'i-esimo nucleone, e V_{ij} l'interazione tra l'i-esimo e j-esimo nucleone. In questa espressione abbiamo trascurato l'eventuale presenza di interazione a tre o più corpi.

Riscriviamo la precedente hamiltoniana sommando e sottraendo un potenziale ad un corpo U_i

$$H = \sum_{i=1}^{A} (T_i + U_i) + \frac{1}{2}\sum_{i\neq i} V_{ij} - \sum_{i=1}^{A} U_i = \sum_{i=1}^{A} h_i + V_{res} = H_0 + V_{res} \tag{4.2}$$

Isoliamo il contributo a due corpi dell'interazione definendo l'interazione residua come:

$$V_{res} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq i} V_{ij} - \sum_{i=1}^{A} U_i \tag{4.3}$$

Il termine H_0

$$H_0 = \sum_{i=1}^{A} (T_i + U_i) = \sum_{i=1}^{A} h_i \tag{4.4}$$

rappresenta l'hamiltoniana degli A singoli nucleoni che si muovono indipendentemente uno dall'altro, nel potenziale medio U_i.

Nel modello a strati si trascura l'interazione residua e gli stati nucleari vengono descritti dall'equazione:

$$H_0\Phi(r_1, r_2, ...r_A) = E\Phi(r_1, r_2, ...r_A). \tag{4.5}$$

Data la struttura a un corpo dell'hamiltoniana, le autofunzioni possono essere descritte come determinante di Slater delle A funzioni d'onda di singola particella che soddisfano l'equazione di Schrödinger ad un corpo:

$$h_i \phi_i = \varepsilon_i \phi_i \tag{4.6}$$

con h_i definite nella (4.2). Gli stati nucleari sono allora:

$$\Phi(r_1, r_2, ...r_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \prod_{i=1}^{A} \phi_i(r_i). \tag{4.7}$$

La validità dell'approssimazione di campo medio è legata alla scelta del potenziale U_i. Un buon potenziale suggerito dall'esperienza è:

$$U_i = U(r_i) + U_{LS}(r_i)\mathbf{l}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + U_C(r_i) \tag{4.8}$$

in cui $U(r_i)$ è il potenziale di Wood-Saxon:

$$U(r_i) = \frac{-U_0(r)}{1 + exp\left[\frac{r_i - R}{a}\right]} \tag{4.9}$$

con R raggio nucleare, U_0 e a parametri legati alla distribuzione di carica e materia del nucleo. Il secondo termine detto di spin orbita, è parametrizzato nella forma:

$$U_{LS}(r_i) = \frac{1}{m_\pi^2} \frac{d}{rdr} \left(\frac{U_{LS}}{1 + exp\left[\frac{r_i - R_{LS}}{a_{LS}}\right]} \right) \tag{4.10}$$

dove m_π è la massa del pione e U_{LS}, R_{LS} e a_{LS} sono dei parametri.

L'ultimo termine nella (4.8) è il potenziale coulombiano generato da una distribuzione sferica di carica $(Z-1)e$ e di raggio R_C.

Le funzioni d'onda di singola particella nelle (4.6) sono autofunzioni simultanee dell'insieme di osservabili H, L^2, S^2, J^2, J_z e si possono scrivere nella forma:

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{nlj}(r) \sum_{\mu,l} \langle l\mu \frac{1}{2} s \mid jm \rangle Y_{l\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \chi_s^{1/2} = R_{nlj}(r) \mathcal{Y}_{lj}^{m}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{4.11}$$

dove abbiamo indicato con $\mathcal{Y}_{lj}^{m}$ le armoniche sferiche di spin [4]. I livelli energetici di singola particella sono etichettati dagli autovalori n, l, j e sono $(2j+1)$ volte degeneri.

4.2 Transizioni nucleari nel modello a strati

Limiteremo la nostra attenzione a nuclei pari-pari con doppia shell chiusa. Descriveremo il processo di cattura muonica considerando che il nucleo effettuino transizioni tra stati di definito momento angolare e parità. Supponiamo inoltre che lo stato iniziale del nucleo sia quello fondamentale. Nel modello a strati questo significa che tutti i nucleoni sono al di sotto della superficie di Fermi. Per i nuclei specificati ha momento angolare nullo e parità $\pi_i = 1$:

$$|i\rangle = |J_i, M_i\rangle = |0,0\rangle \tag{4.12}$$

Nel modello a strati lo stato eccitato è descritto come transizione di singola particella, rappresentata dall'operatore:

$$\left[a^{+}_{j_p} \otimes a_{j_h}\right]^{J}_{M} = \sum_{m_p,m_h} \langle j_p\, m_p\, j_h\, m_h |\, JM\rangle\, a^{+}_{j_p,m_p} a_{j_h,m_h} \tag{4.13}$$

Abbiamo indicato con $a^{+}_{j_p,m_p}$ l'operatore di creazione di uno stato al di sopra del livello di Fermi (stato di particella) con numeri quantici $(n_p, l_p, s_p, j_p, m_h)$ e con a_{j_h,m_h} l'operatore di distruzione di uno al di sotto (stato buca) con numeri quantici $(n_h, l_h, s_h, j_h, m_h)$.
L'operatore $\left[a^{+}_{j_p} \otimes a_{j_h}\right]^{J}_{M}$ crea uno stato di particella e uno di buca rispettando le regole di accoppiamento dei momenti angolari:

$$|j_p - j_h| \;<\; J < |j_p + j_h| \tag{4.14}$$

$$(-)^{l_p+l_h} \;=\; \pi_p \pi_h = \pi_f \tag{4.15}$$

Nel nostro caso le transizioni nucleari si devono all'operatore di corrente nucleare che essendo ad un corpo possiamo scrivere in termini di elementi di matrice di singolo nucleone:

$$\tilde{J}_{\lambda\nu} = \sum_{\alpha,\beta} \left[a^{+}_{j_\alpha} \otimes a_{j_\beta}\right]^{\lambda}_{\nu} \langle\alpha|\, J\, |\beta\rangle \tag{4.16}$$

dove abbiamo definito

$$\langle\alpha|\, J\, |\beta\rangle = \int d\mathbf{r}\ \phi^{*}_{\alpha}(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}) \phi_{\beta}(\mathbf{r}) \tag{4.17}$$

ϕ_αe ϕ_β sono le funzioni d'onda di singolo nucleone descritte dai numeri quantici α e β.

La probabilità di transizione tra gli stati del nucleo è riconducibile a quelle di singola particella grazie alla struttura (4.16) della corrente nucleare. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \langle J,M|\, \tilde{J}_{\nu\lambda}\, |0,0\rangle &= \langle 0,0|\, \left[a^+_{j_h} \otimes a_{j_p}\right]^J_M \sum_{\alpha,\beta} \langle\alpha|\, J\, |\beta\rangle \left[a^+_{j_\alpha} \otimes a_{j_\beta}\right]^\nu_\lambda |0,0\rangle & (4.18)\\ &= \sum_{\alpha,\beta} \langle\alpha|\, J\, |\beta\rangle\, \delta_{\alpha p}\delta_{\beta h}\delta_{M\lambda}\delta_{J\lambda} = & (4.19)\\ &= \langle p|\, J\, |h\rangle\,. & (4.20) \end{aligned}$$

4.3 Random Phase Approssimation (RPA)

Il modello a strati descrive l'eccitazione del nucleo come eccitazione di una sola particella al di sopra della superficie di Fermi. Inevitabilmente si trascurano così eccitazioni collettive dovute a più transizioni coerenti di particella-buca e i cui effetti si evidenziano in stati eccitati non previsti dal modello a strati.

Il modello RPA invece tiene conto delle eccitazioni collettive descrivendo lo stato eccitato come cambinazione lineare di eccitazioni particella-buca e buca-particella:

$$|\Psi_{JM}\rangle = \sum_{p,h} \left(X^{JM}_{ph} \left[a^+_{j_p} \otimes a_{j_h}\right]^M_J + Y^{JM}_{ph} \left[a^+_{j_h} \otimes a_{j_p}\right]^M_J \right) |\Psi_{00}\rangle\,. \qquad (4.21)$$

Lo stato fondamentale $|\Psi_{00}\rangle$ non è esplicito come nel caso del modello a strati. In principio è semplicemente uno stato in cui non tutti gli stati di buca sono occupati, e non tutti quelli di particella vuoti, ed è definito operativamente come lo stato che soddisfa la seguente equazione:

$$\sum_{p,h}\left(X_{ph}^{*JM}\left[a_{j_p}^{+}\otimes a_{j_h}\right]_J^M+Y_{ph}^{*JM}\left[a_{j_p}^{+}\otimes a_{j_h}\right]_J^M\right)|\Psi_{00}\rangle=0. \tag{4.22}$$

I termini X_{ph}^{JM} e Y_{ph}^{JM} detti *ampiezze* risolvono le equazioni:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_p-\varepsilon_h-E)\,X_{ph}^{JM}+&\\ +\sum_{p'h'}\left[\langle ph|\,V_{res}\,|p'h'\rangle\,X_{p'h'}^{JM}+\langle pp'|\,V_{res}\,|hh'\rangle\,Y_{p'h'}^{JM}\right]&=0\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon_p-\varepsilon_h+E)\,Y_{ph}^{JM}+&\\ +\sum_{p'h'}\left[\langle ph|\,V_{res}\,|p'h'\rangle\,Y_{p'h'}^{JM}+\langle pp'|\,V_{res}\,|hh'\rangle\,X_{p'h'}^{JM}\right]&=0\end{aligned} \tag{4.24}$$

in cui ε_p e ε_h.sono le energie di singola particella e V_{res} l'interazione residua definita in (4.3). La probabilità di transizione tra stati nucleari è:

$$\langle J\|\,\tilde{J}_J\,\|0\rangle=\sum_{ph}X_{ph}^{J}\,\langle p\|\,J\,\|h\rangle+(-1)^{J+j_p-j_h}Y_{ph}^{J}\,\langle h\|\,J\,\|p\rangle \tag{4.25}$$

e si valuta quindi a partire dalle transizioni di singola particella. La fase presente al secondo membro è il risultato dell'accoppiamneto dei momenti angolari delle transizioni che si combinano nello stato finale.

Capitolo 5

Risultati

Il modello descritto nei capitoli precedenti è stato applicato allo studio della cattura muonica nei nuclei di ^{12}C, ^{16}O, ^{40}Ca, ^{48}Ca. Mostreremo in questo capitolo i risultati ottenuti utilizzando il modello a strati. I parametri del potenziale medio usato per i vari nuclei considerati sono presentati nella tabella 5.1. Questi parametri sono stati fissati in modo da riprodurre al meglio raggi di carica ed energie di singola particella attorno alla superficie di Fermi [1].

Le funzioni d'onda di buco sono state ottenute diagonalizzando il potenziale di Wood-Saxson in una base di oscillatore armonico [2]. Le funzioni d'onda di particella sono onde nel continuo che descrivono la diffusione del nucleone dal potenziale medio generato dagli altri nucleoni. Queste funzioni d'onda sono ottenute risolvendo con tecniche standard l'equazione differenziale con le appropriate condizioni al contorno.

Nucleo		U_0	U_{LS}	$R = R_{LS} = R_C$	$a = a_{LS}$
^{12}C	p	62.00	3.20	2.86	0.57
	n	60.00	3.15	2.86	0.57
^{16}O	p	52.50	7.00	3.20	0.53
	n	52.50	6.54	3.20	0.53
^{40}Ca	p	57.50	11.11	4.10	0.53
	n	55.50	8.50	4.10	0.53
^{48}Ca	p	59.50	8.55	4.36	0.53
	n	50.00	7.74	4.36	0.53

Tabella 5.1: Coefficienti del potenziale Coulombiano, di spin orbita e di Wood-Saxon.

.

Nella tabella 5.2 presentiamo i tassi totali di cattura da noi calcolati (th) e li confrontiamo con i valori sperimentali (exp). Il nostro modello prevede che il nucleo, dopo la cattura del muone, faccia una transizione al continuo. In realtà esiste anche la possibilità che il nucleo compia una transizione ad uno stato discreto e poi decada nello stato fondamentale emettendo γ.
I valori dei tassi sperimentali di ^{12}C, ^{16}O sono stati ottenuti sottraendo il contributo delle transizioni nucleari agli stati discreti che corrisponde rispettivamente al 16% e al 10% del tasso totale. Il valore del tasso del ^{40}Ca ^{48}Ca sono invece quelli totali.

Nucleo	exp	th
^{12}C	32.0±1.0	7.05
^{16}O	92.0±1.0	25.9
^{40}Ca	2500±140	759
^{48}Ca	—-	720

Tabella 5.2: Tassi di cattura globali in $10^3\mathrm{sec}^{-1}$ teorici e sperimentali [11]

.

I tassi calcolati sono circa un terzo dei valori osservati. Nella tabella 5.3 mostriamo il contributo percentuale al tasso globale dei vari multipoli.

Nel continuo contribuisce un numero infinito di multipoli, come mostra l'equazione (3.28). La tabella mostra la convergenza della somma. Il contributo di J=4 è già al di sotto dell'un percento. Solo il 4^- nel ^{40}Ca ha un comportamento anomalo.

La transizione 1^+ è quella che dà il maggiore contributo in tutti i nuclei considerati. Le altre transizioni danno contributi che variano da nucleo a nucleo. Queste variazioni sono legate alla specifica struttura di ogni singolo nucleo e quindi devono essere analizzate caso per caso.

È interessante notare alcune tendenze generali rivelabili in tutti i nuclei analizzati. Una di queste è il fatto che le transizioni a parità positiva danno contributi maggiori di quelli a parità negativa. Particolarmente notevole è la differenza tra i contributi dei multipoli 3^+ e 3^-. Solo nel caso del ^{48}Ca

i contributi sono simili, altrimenti il contributo del 3^+ è notevolmente più grande di quello di 3^-, specialmente nei nuclei più leggeri.

Il contributo percentuale al tasso globale legato soprattutto a multipoli con basso valore del momento angolare è dovuto al valore relativamente basso del momento trasferito che è di circa 0.5fm^{-1}.

Studiamo adesso la distribuzione energetica dei tassi di transizione. Nella Fig 5.1 i tassi totali di cattura sono presentati in funzione dell'energia di eccitazione del nucleo. Questa è calcolata come differenza tra massa del nucleo e energia del neutrino.

È interessante notare come i maggiori contributi sono concentrati nella regione di eccitazione al di sotto dei 40 MeV. La tabella 5.4 mostra che l'energia media di emissione del neutrino è dell'ordine di 80 MeV. Nelle Figure 5.2-5.5 mostriamo i contributi dei multipoli fino a J=3.

Le transizioni 1^+ danno il contributo maggiore. In ^{12}C e ^{16}O la distribuzione energetica di 1^+ e 1^- è molto simile, mentre è notevole la differenza in ^{40}Ca e ^{48}Ca. Il contributo delle transizioni 2^+ presenta vari picchi tranne che in ^{12}C. La ecciteazione 2^- contribuiscono meno e hanno distribuzioni energetiche relativamente piatte.

Per dare una visione dei vari contributi mostriamo in Fig.5.6 la somma progressiva dei vari contributi fino a raggiungere le distribuzioni globali rappresentate in grassetto.

	0^+	0^-	1^+	1^-	2^+	2^-	3^+	3^-	4^+	4^-
^{12}C	1.8	6.1	29.7	21.7	12.7	15.5	11.9	0.2	0.0	0.2
^{16}O	1.4	3.0	25.8	16.6	20.9	7.6	24.0	0.5	0.0	0.7
^{40}Ca	2.7	1.7	37.9	8.7	21.0	8.1	12.1	2.6	0.2	4.8
^{48}Ca	3.3	1.8	48.6	9.0	17.0	10.8	8.3	8.7	0.0	0.1

Tabella 5.3: Contributi percentuali al tasso di cattura delle varie ecciteazioni di multipolo

	^{12}C	^{16}O	^{40}Ca	^{48}Ca
$\langle\varepsilon_\nu\rangle$	82.7	78.7	84.7	80.5

Tabella 5.4: Energia media di emissione del neutrino nello stato finale

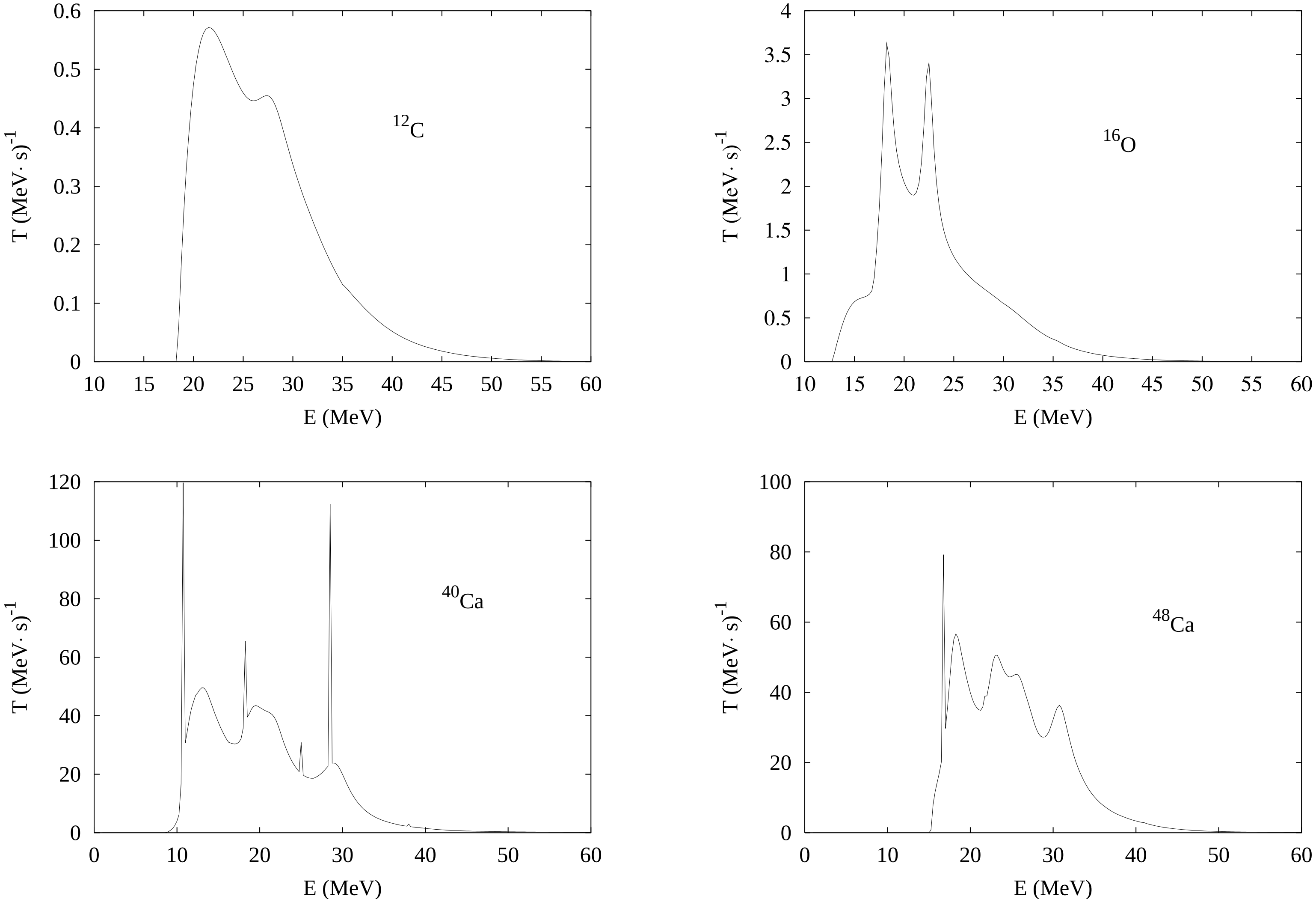

Figura 5.1: Tasso di cattura globale

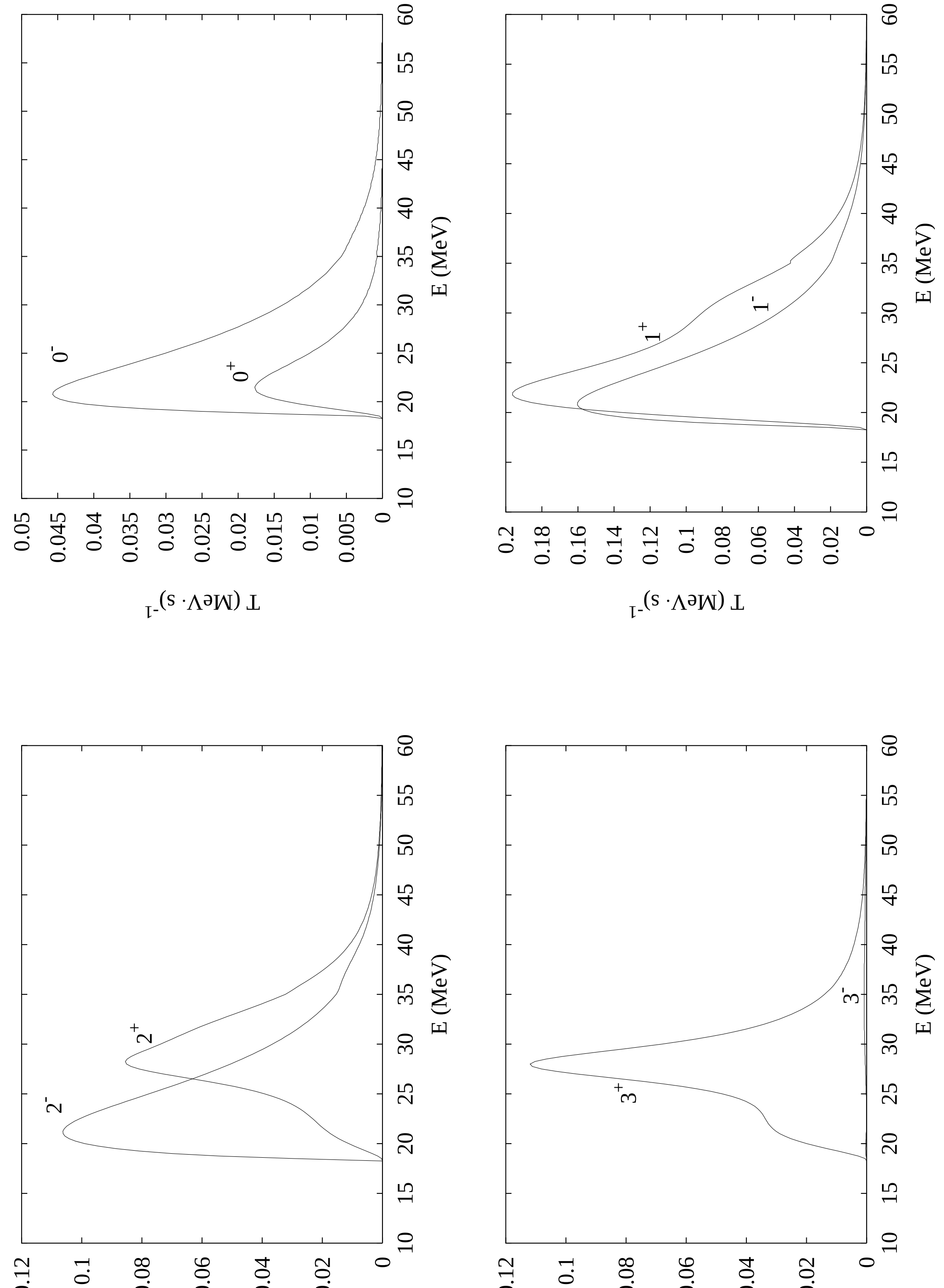

Figura 5.2: Contributo dei multipoli con stesso J e parità opposta per il nucleo ^{12}C

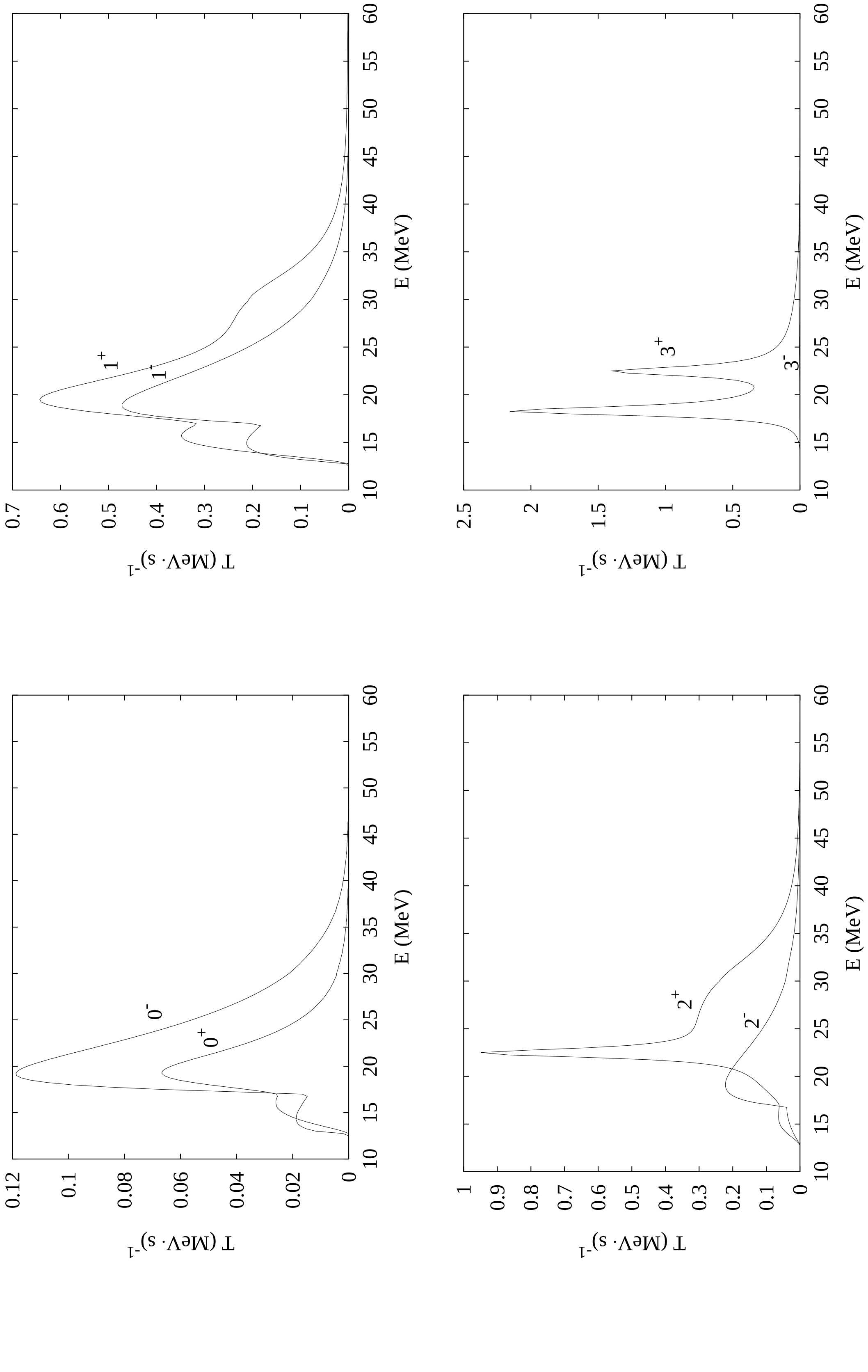

Figura 5.3: Contributo dei multipoli con stesso J e parità opposta per il nucleo ^{16}O

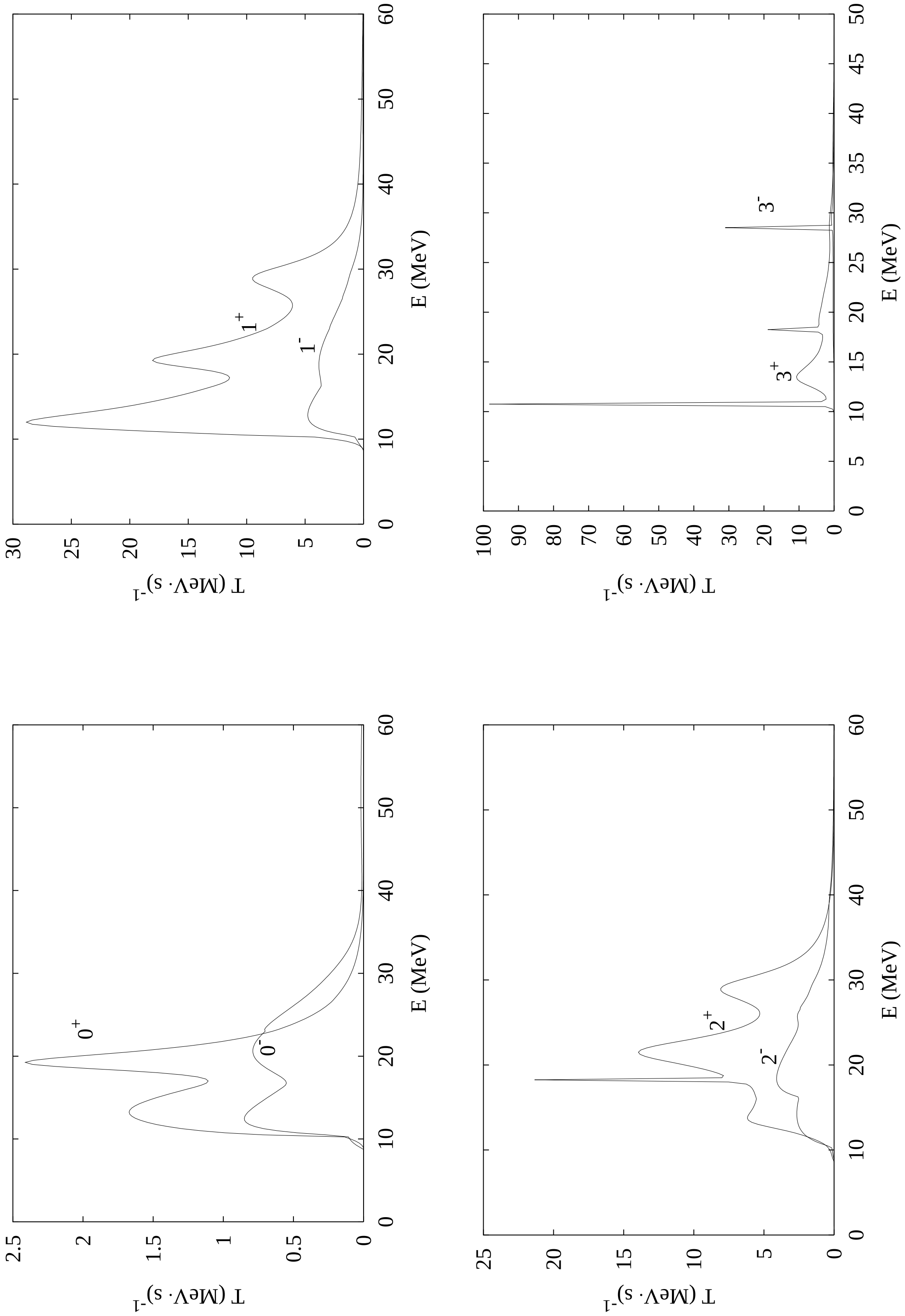

Figura 5.4: Contributo dei multipoli con stesso J e parità opposta per il nucleo ^{40}Ca

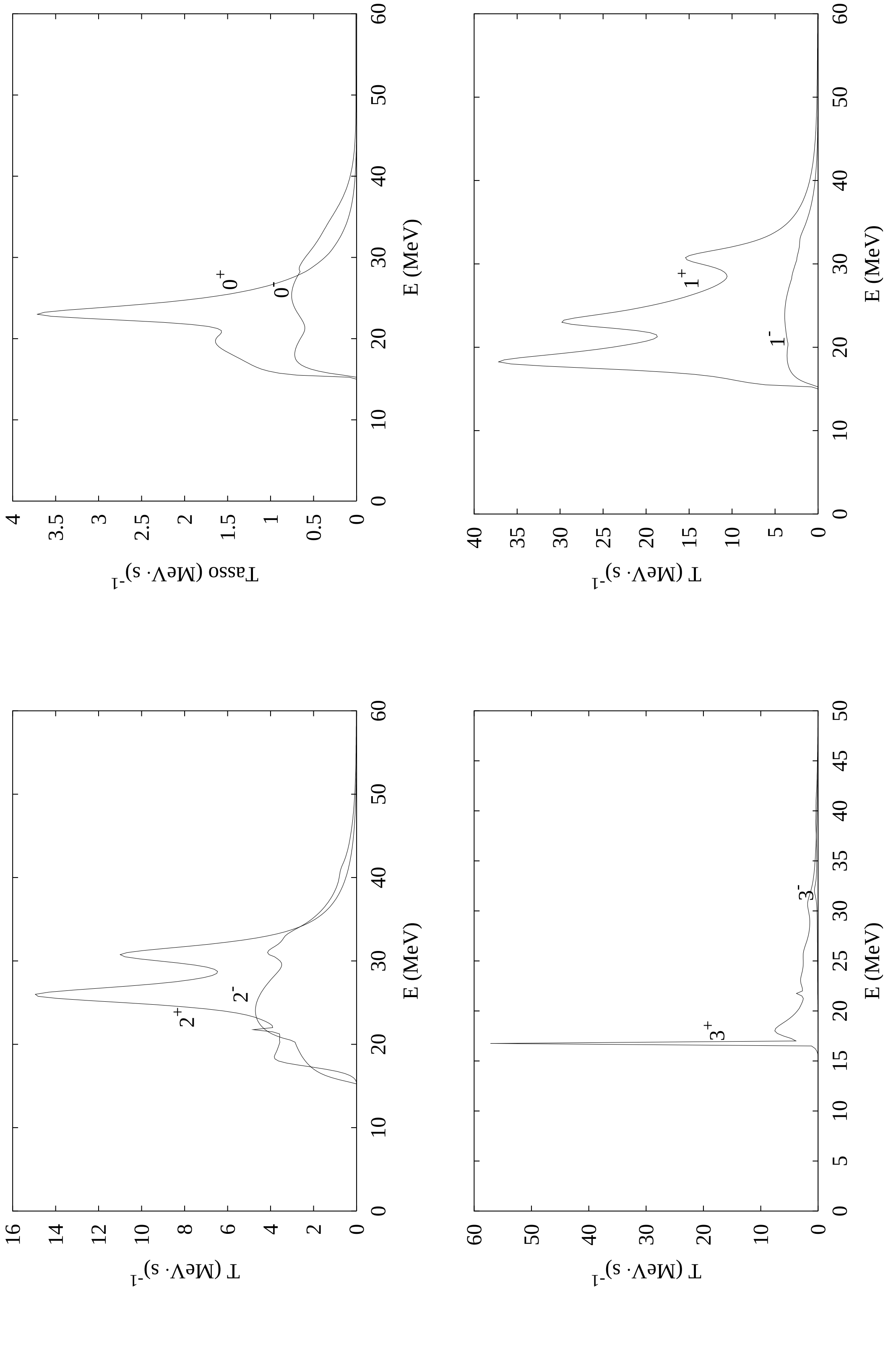

Figura 5.5: Contributo dei multipoli con stesso J e parità opposta per il nucleo ^{48}Ca

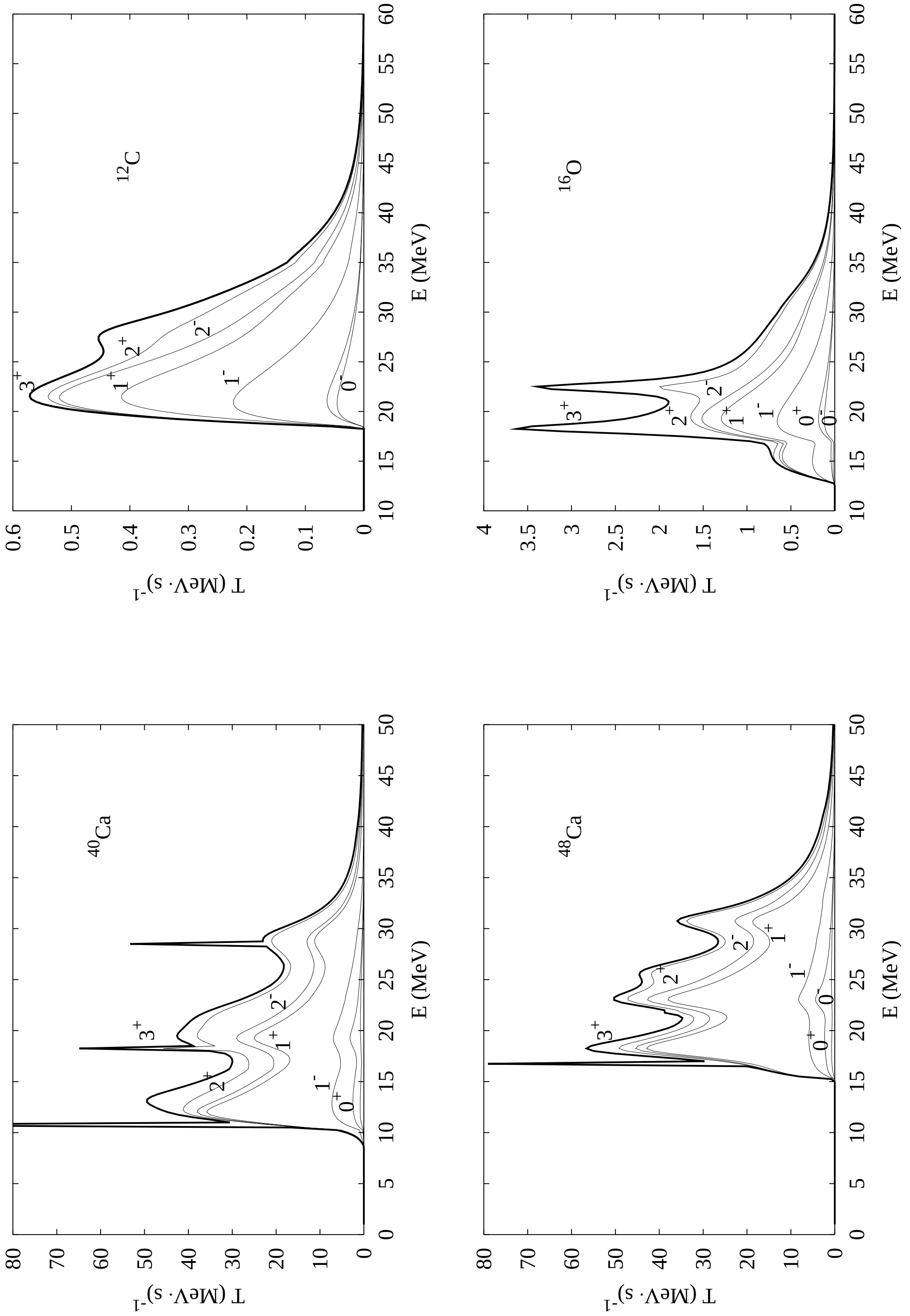

Figura 5.6: Somma sui multipoli. La curva in grassetto rappresenta làndamento del tasso globale.

Conclusioni

Lo scopo di questa tesi era quello di elaborare un modello per la descrizione della cattura muonica da parte di nucleli doppio-magici. Il modello consiste nella descrizione del meccanismo di reazione basato sul modello standard delle interazioni elettrodeboli. Il tutto è costruito per poter esaminare la validità di modelli nucleari che descrivano transizioni del nucleo con cambio carica a stati nel continuo. Questi modelli nucleari potranno poi essere utilizzati per la descrizione dei processi indotti da neutrini.

E' evidente che se lo scopo del progetto è quello di selezionare i vari modelli nucleari, i parametri legati alla descrizione del meccanismo di reazione devono essere ben controllati.

E' opportuno ricordare e commentare le approssimazioni fatte nella descrizione del processo di cattura.

Abbiamo supposto che il muone catturato dal nucleo si trovi sul livello atomico ad energia più bassa, lo stato 1s atomico. Il tempo medio di vita degli stati atomici è $10^{-13}s$ contro i $10^{-6}s$ della vita media del muone e i $10^{-4}s$ del tempo di cattura da parte del nucleo.

Il muone è stato trattato non relativisticamente, ma anche questa ipotesi è ampiamente giustificata dal fatto che la massa costituisce per il muone nello stato 1s, il 99.8% della sua energia. Non banale invece è l'utilizzo nell'approssimazione non relativistica della funzione d'onda $\phi_{1s}(x)$ soluzione dell'equazione di Schrödinger per potenziali coulombiani con nucleo puntiforme come parte radiale. Il raggio medio dell'orbita 1s è infatti inversamente proporzionale al numero atomico e in nuclei molto pesanti il muone può in principio orbitare all'interno del nucleo. L'approssimazione non relativistica è ancora possibile, ma il potenziale da utilizzare è diverso e $\phi_{1s}(x)$ non è più quella tipica. Nel nucleo di ^{40}Ca che è il più pesante che abbiamo studiato, il raggio medio dell'orbita muonica 1s è 20 fm, quindi l'ipotesi risulta ancora applicabile, ma per nuclei più pesanti si dovrebbero valutare delle correzioni.
Un'altra ipotesi è legata alla massa del bosone W$^{\pm}$ che abbiamo ritenuto infinita. L'approssimazione comportato nella somma $q^2 - M^2$ un errore dell'ordine di 10^{-4}%.
Esiste poi un'incertezza del 10% sul valore riferito per la massa assiale definita nel cap.2. In ogni caso tale variazione si produce in una variazione del tasso inferiore allo 0.6% come dimostrano i calcoli riportati in Tab.5.5 in cui il tasso è stato ricalcolato facendo variare la massa assiale del $\pm$10%.

Chiarite le ipotesi fondamentali della descrizione che abbiamo dato del processo di cattura muonica, l'applicazione del modello a strati risulta inadeguata. Il maggiore contributo è a energia di circa 25 MeV nella regione delle

Nucleo	ΔT ($\Delta M_A = +10\%$)	T ($\Delta M_A = -10\%$)
^{12}C	0.3	-0.3
^{16}O	0.4	-0.4
^{40}Ca	0.6	-0.6
^{48}Ca	0.4	-0.4

Tabella 5.5: Variazioni percentuali del tasso calcolate in funzione di variazioni di massa assiale.

risonanze giganti che il modello descrive male. I risultati ottenuti però non mostrano comportamenti che non potrebbero essere imputati al modello a strati e questo è l'unico modo, certo non definitivo, per controllare la nostra descrizione in assenza di un modello nucleare più realistico.

Qui termina il nostro lavoro, e la conclusione che il modello elaborato sia corretto è confortata dall'applicazione alla cattura muonica del modello RPA per ^{16}O. Esso non permette ancora valutazioni quantitative per via dello stato embrionale in cui versa l'apparato di calcolo che in programmi paralleli si sta costruendo.

Il confronto tra l'andamento dei tassi globali calcolati con i due modelli è riportato in fig 5.7. Notiamo che molti più stati partecipano al processo con incremento sensibile del tasso di cattura. Nelle Fig. 5.8 e Fig.5.9 confroniamo invece i tassi parziali per i multipoli J$^+$ e J$^-$. In assenza del riscontro quantitativo, il confronto tra i J$^+$ dei due modelli non è significativo, mentre quello tra i J$^-$ lo è perché conferma il risultato secondo cui i multipoli 1^- e

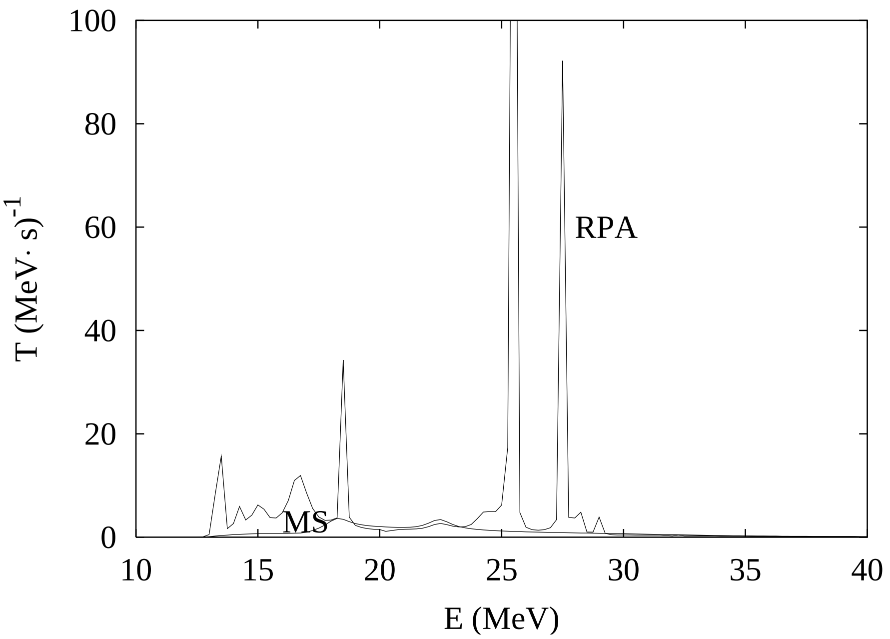

Figura 5.7: confronto del tasso globale di cattura per ^{16}O tra modello a strati e RPA

2^- contribuiscono al processo di cattura muonica in modo considerevole [6].

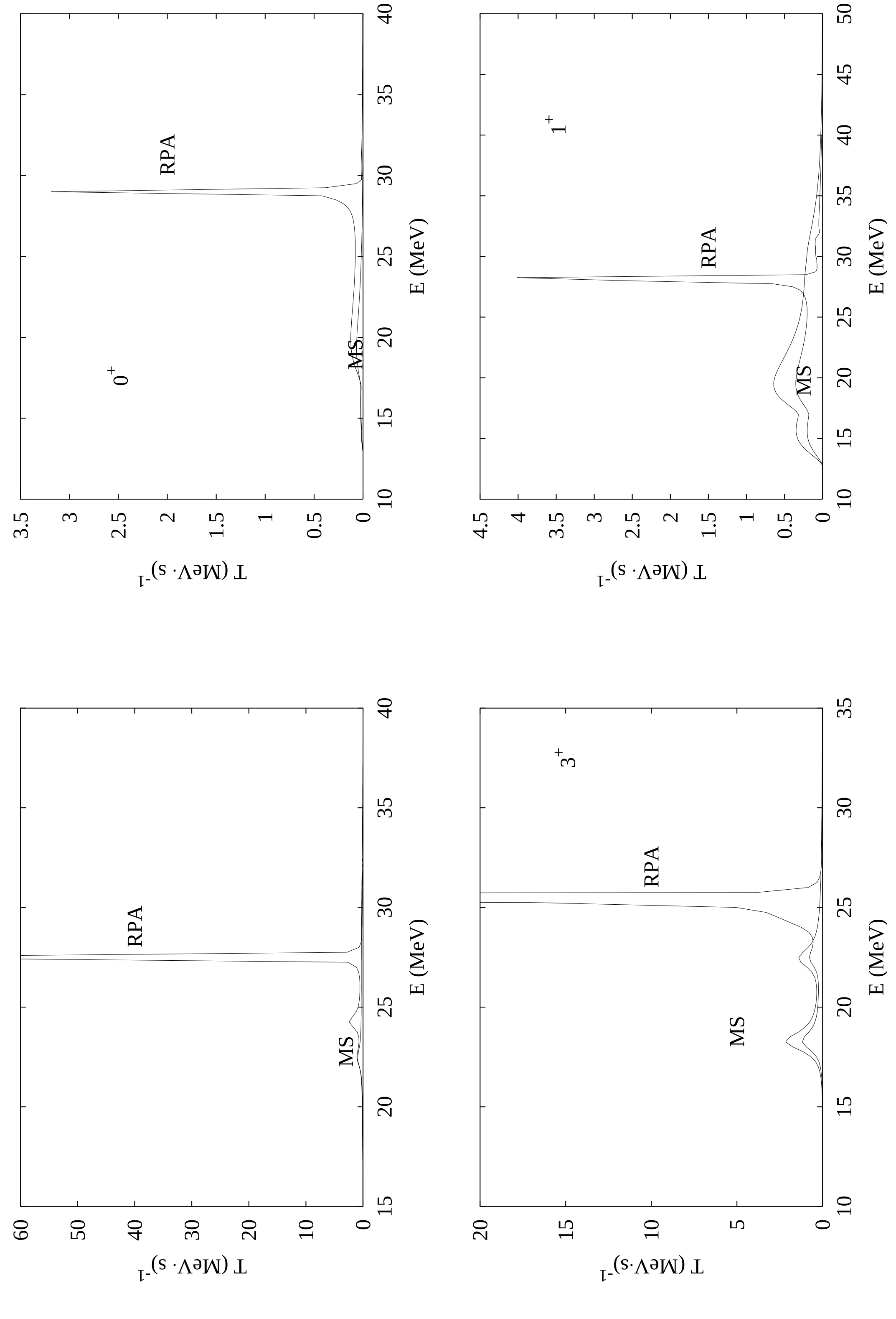

Figura 5.8: Confronto tra i multipoli J$^+$ calcolati con il modello a strati e quello RPA.

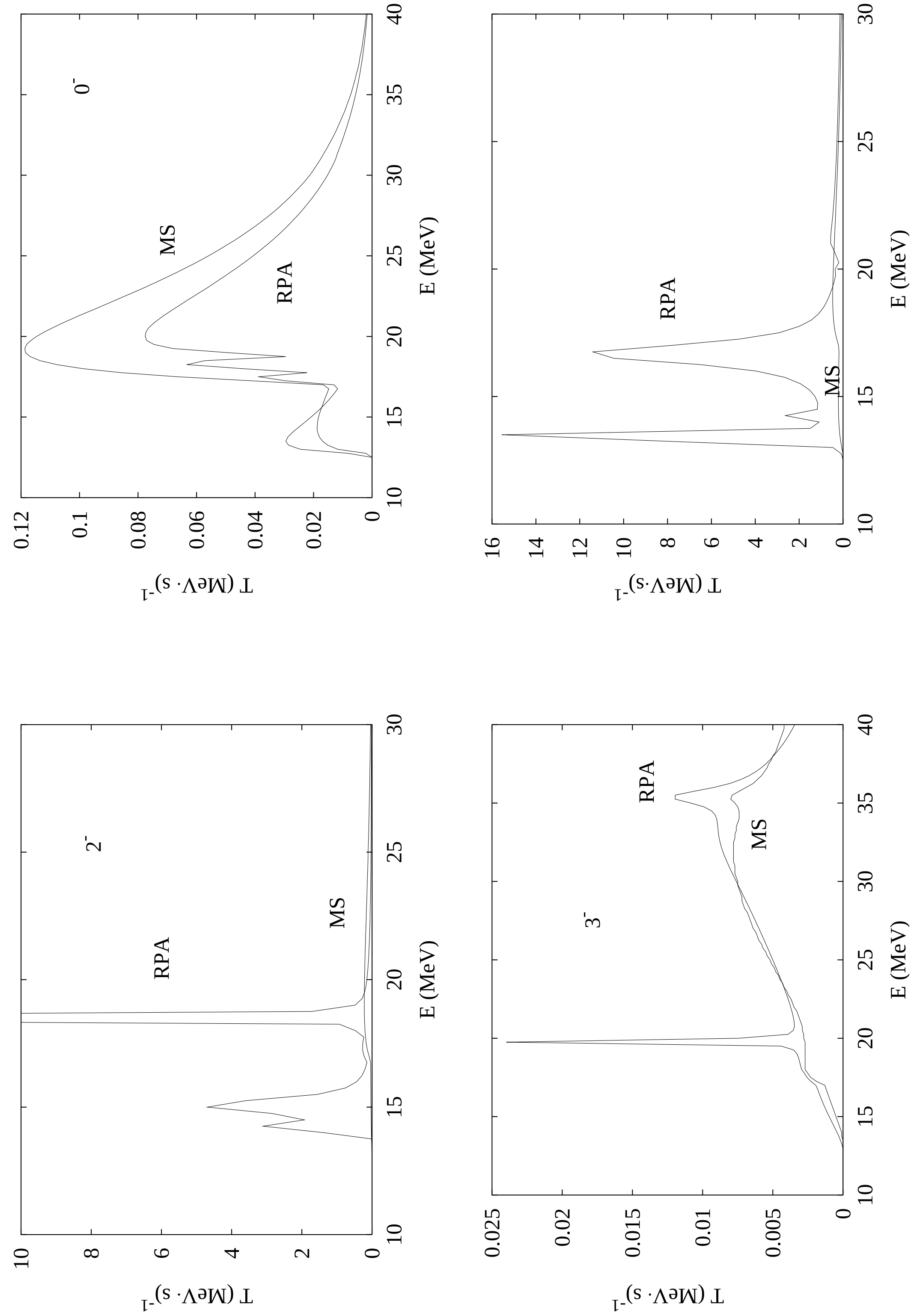

Figura 5.9: Confronto tra i multipoli J^- calcolati con il modello a strati e quello RPA

Appendice A

Elementi di teoria relativistica

In questa appendice discutiamo in sezioni separate i seguenti argomenti:

1) Metrica dello spazio di Minkowski
2) Le matrici γ
3) Teoremi sulle tracce
4) Soluzioni dell'equazione di Dirac libera e normalizzazione covariante

A.1 La metrica dello spazio di Minkowski

Col simbolo x^μ detto quadrivettore controvariante indichiamo:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}) \tag{A.1}$$

il corrispetivo quadrivettore covariante è

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\mathbf{x}). \tag{A.2}$$

Analiticamente i due quadrivettori oggetti sono legati dal tensore metrico $g^{\mu\nu}$ mediante la relazione:

$$x^{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \tag{A.3}$$

con:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Il prodotto scalare tra due quadrivettori è quindi:

$$a \cdot b = a^{\mu} b_{\mu} = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{A.5}$$

e la metrica che definisce è detta di Minkowski.

L'operatore di quadrimomento nella rappresentazine delle coordinate è dato da:

$$p^{\mu} \equiv i\partial^{\mu} \equiv i\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}. \tag{A.6}$$

Definiamo infine il tensore unitario completamente antisimmetrico di rango quattro e^{iklm} ponendo:

$$e^{0123} = +1 \tag{A.7}$$

e fissando le condizioni che gli altri elementi sono nulli se hanno almeno due indici uguali e sono uguali a ± 1, a seconda che sia pari o dispari il numero di permutazioni necessarie a riportare gli indici nella successione naturale 0123.

A.2 Matrici di Dirac

L'equazione di Dirac in forma matriciale per una particella di spin $\frac{1}{2}$ è:

$$H\psi = (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \tag{A.8}$$

L'operatore α è composto da tre matrici α_i che soddisfano insieme alla matrice β le seguenti regole di anticommutazione:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2I\ \delta ij \tag{A.9}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \tag{A.10}$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \tag{A.11}$$

Sia le matrici α_i che la matrice β sono nella teoria di Dirac matrici 4×4.

Le matrici γ sono legate alle α e β dalla relazine:

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma) \equiv (\beta, \beta\alpha) \tag{A.12}$$

e soddisfano la regola di anticommutazione:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.13}$$

Definiamo invece la matrice γ^5 mediante la seguente combinazione:

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.14}$$

Risulta che le matrici γ sono antihermitiane, mentre γ^0 e γ^5 sono hermitiane.

Si ha anche:

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5; \qquad \left(\gamma^5\right)^2 = I; \qquad \gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \tag{A.15}$$

Introduciamo poi il simbolo:

$$\not{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu = \gamma^0 A_0 - \gamma \cdot \mathbf{A} \tag{A.16}$$

L'equazione di Dirac prescrive per le matrici γ solo le regole di anticommutazione. Esse sono soddisfatte da varie rappresentazioni delle matrici γ, le più comunenmente usate sono dette di Dirac-Pauli e di Weyl. Noi abbiamo adottato la prima:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

dove abbiamo indicato con σ_i sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

e con I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

A.3 Teoremi delle tracce

Il calcolo del tasso di cattura per particelle non polarizzate richiede una somma su tutte le possibili orientazioni degli spin del muone, del neutrino e del nucleone. Per fare questa somma è utile il calcolo delle tracce di prodotti di matrici γ. Per effettuare questi calcoli è comodo utilizzare i seguenti teoremi.

$$TrI = 4 \tag{A.20}$$

$$Tr\,(\gamma^\mu) = 0 \tag{A.21}$$

$$Tr\,(\gamma_5) = 0 \tag{A.22}$$

$$Tr\,\left(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 0 \tag{A.23}$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \tag{A.24}$$

$$Tr(\gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_2}, ...\gamma^{\mu_n}) = 0 \tag{A.25}$$

$$Tr\,(\not a \not b) = 4a \cdot b \tag{A.26}$$

$$Tr\,\left(\gamma^5 \not a \not b\right) = 0 \tag{A.27}$$

$$Tr\,(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{A.28}$$

A.4 Soluzione dell'equazione di Dirac per particella libera e normalizzazione covariante

Gli stati di particella libera e spin 1/2 sono descritti dalle soluzioni della equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{A.29}$$

dove m è la massa della particella.

Le soluzioni della (A.29) sono i seguenti quattro autostati di quadrimomento:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} u(\mathbf{p}) e^{-ipx} \tag{A.30}$$

dove $u(\mathbf{p})$ rappresenta uno spinore a quattro componenti indipendenti da x:

$$u^s(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^s \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

$$u^{s+2}(\mathbf{p}) = N \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \qquad s = 1, 2 \tag{A.32}$$

in cui σ sono le matrici di Pauli e χ^s i due spinori di Pauli:

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.33}$$

Gli spinori $u^{(1,2)}(\mathbf{p})$ corrispondono a soluzioni con energia positiva mentre $u^{(2,3)}(\mathbf{p})$ a soluzioni con energia negativa.

In tutta la trattazione normalizziamo le funzioni d'onda adottando la cosidedtta *normalizzazione covariante* che consiste nell'imporre che 2E particelle occupino il volume V. Essa ha il pregio di lasciare invariata la densità di probabilità sotto trasformazioni di Lorentz [5]. Gli spinori $u^s(\mathbf{p})$ soddisfano le proprietà di ortogonalità:

$$\left(u^{s}\right)^{\dagger} u^{s'} = \delta_{ss'} 2E \tag{A.34}$$

$$\left(u^{s+2}\right)^{\dagger} u^{s'+2} = \delta_{ss'} 2E \tag{A.35}$$

$$\left(u^{s}\right)^{\dagger} u^{s'+2} = 0 \tag{A.36}$$

in cui $s, s\prime = 1, 2$.

Dalle precedenti relazioni si ricava infine:

$$N = \sqrt{E + M}. \tag{A.37}$$

A.5 Soluzione dell'equazione di Dirac in potenziali scalari centrali

Le soluzioni dell'equazione di Dirac per potenziali centrali sono autostati del set H, J^2, J_3, K dove $\mathbf{J} = (\mathbf{l}+\frac{1}{2}\mathbf{\Sigma})$ e $\mathbf{K} = \beta(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{l}+1)$. Abbiamo posto $\mathbf{\Sigma} = \sigma\mathbf{I}$. Tali soluzioni ψ si possono scrivere nella forma

$$\psi_{jj_3}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k(r)\mathcal{Y}^{j_3}_{jl}(\hat{\mathbf{r}}) \\ if_k(r)\mathcal{Y}^{j_3}_{jl'}(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \tag{A.38}$$

in cui k sono gli autovalori di $\mathbf{K}$ e l' e l risultano legati dalla relazione: $l'+l = 2j$. Le $\mathcal{Y}^{j_3}_{jl}(\hat{\mathbf{r}})$ sono invece:

$$\mathcal{Y}^{j_3}_{jl} = \langle l, 1/2,\, j_3-1/2,\, 1/2|\, jj_3\rangle\, Y_l^{j_3-\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \langle l\,, 1/2,\, j_3+1/2,\, -1/2|\, jj_3\rangle\, Y_l^{j_3+\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In un potrenziale centrale lo stato fondamentale risulta descritto da $k = -1$, $l' = 1$ e $l = 0$, inoltre le funzioni $g_k(r)$ e $f_k(r)$ soddisfano le equazioni [3]:

$$\frac{dg_k}{dr} + \frac{k+1}{r}g_k - (m+U)f_k = Ef_k \tag{A.39}$$

$$\frac{df_k}{dr} + \frac{1-k}{r}f_k - (m+U)g_k = -Eg_k. \tag{A.40}$$

Dalla (A.39) otteniamo un'espressione di f_k grazie alla quale scriviamo:

$$\chi = i\frac{\left(\frac{dg_k}{dr} + \frac{k+1}{r}g_k\right)}{m + E + U(r)}\mathcal{Y}_{jl'}^{j_3}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{A.41}$$

Dalla proprietà:

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})g_k(r)\mathcal{Y}_{jl}^{j_3} = -i\left[\frac{dg_k}{dr} + (k+1)\frac{g_k}{r}\right](\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathcal{Y}_{jl}^{j_3}. \tag{A.42}$$

otteniamo invece:

$$\chi = \frac{-(\sigma \cdot \mathbf{p})g_k(r)(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}})}{m + E + U(r)}\mathcal{Y}_{jl'}^{j_3}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{A.43}$$

e dalla :

$$(\sigma \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathcal{Y}_{jl}^{j_3} = -\mathcal{Y}_{jl'}^{j_3} \tag{A.44}$$

otteniamo:

$$\chi = \frac{(\sigma \cdot \mathbf{p})g_k(r)}{m + E + U(r)}\mathcal{Y}_{jl}^{j_3}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{A.45}$$

Poiché siamo interessati a descrivere un muone in uno stato atomico, possiamo trascurare il potenziale $U(r)$ nella (A.45). Sulla superficie nucleare di ^{16}O esso vale per esempio circa $1MeV$ ed è quindi trascurabile rispetto alla massa del muone. Si ha quindi:

$$\chi = \frac{(\sigma \cdot \mathbf{p})g_k(r)}{m + E}\mathcal{Y}_{jl}^{j_3}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{A.46}$$

che inserita nella (A.38) dà:

$$\psi_{jj_3}(\mathbf{r}) = g_k(r)\mathcal{Y}_{jl}^{j_3}(\hat{\mathbf{r}})\begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{m+E} \end{pmatrix}. \tag{A.47}$$

Nello stato atomico fondamentale un muone con $m_s = +\frac{1}{2}$ è descritto quindi da:

$$\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) = g_{-1}(r)\mathcal{Y}^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}0}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{m+E} \end{pmatrix} = \tag{A.48}$$

$$= \frac{g_{-1}(r)Y^0_0(\hat{\mathbf{r}})}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{m+E} \end{pmatrix} = R(\mathbf{r})u(\mathbf{p}) \tag{A.49}$$

in cui $u(\mathbf{p})$ è lo spinore di Dirac di particella libera.

Appendice B

Armoniche sferiche vettoriali

B.1 Vettori unitari sferici

Definiamo la base dei vettori sferici unitari a partire da un sistema di versori cartesiani $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, mediante le ralazioni:

$$\mathbf{e}_{\pm\mathbf{1}} = \mp \frac{\mathbf{e}_z \pm i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \; ; \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$$

i vettori della base così definita soddisfano le proprietà:

$$\mathbf{e}^*_\lambda = \begin{cases} (-)^\lambda \mathbf{e}_{-\lambda} & \lambda = \pm 1 \\ \\ \mathbf{e}_\lambda & \lambda = 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{e}^*_\lambda \mathbf{e}_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

Un vettore generico $\mathbf{A}$ si potrà allora sviluppare sulla base sferica secondo la seguente espressione:

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda=\pm1,3} \mathbf{A}_\lambda \mathbf{e}^*_\lambda$$

infatti:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sum_{\lambda=\pm1,3} (\mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{A})\, \mathbf{e}_\lambda = \sum_{\lambda=\pm1,3} (-)^\lambda \mathrm{A}_{-\lambda}\mathbf{e}_\lambda \\ &= \sum_{\lambda=\pm1,3} \mathrm{A}_{-\lambda}\mathbf{e}^*_{-\lambda} = \sum_{\lambda=\pm1,3} \mathrm{A}_\lambda \mathbf{e}^*_\lambda\end{aligned}$$

le A_λ sono le componenti sferiche del vettore $\mathbf{A}$, e sono date da:

$$\mathrm{A}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \cdot \mathbf{A} = (-)^\lambda \mathrm{A}_{-\lambda}$$

B.2 Sviluppo in multipoli

Partiamo dallo sviluppo dell'esponenziale in onde piane:

$$e^{i\mathbf{kr}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$$

scegliendo e_z lungo la direzione di $\mathbf{k}$ si ha:

$$Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m,0}$$

la quantità $e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{e}_\lambda$ diventa allora:

$$e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{e}_\lambda = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_{l0}(\hat{\mathbf{r}})\mathbf{e}_\lambda$$

Definiamo l'armonica sferica vettoriale:

$$\mathcal{Y}_{JL}^{M}(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{ms,ml} \langle l\ m_l\ s\ m_s |\ JM\rangle\, Y_{l,m_l}(\hat{\mathbf{r}})\mathbf{e}_{m_s} \tag{B.1}$$

quindi inserendo una completezza di stati JM si ha:

$$\mathbf{e}_{\lambda} Y_l(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{JM} \langle lm1\lambda |\ JM\rangle\, \mathcal{Y}_{JL}^{M}(\hat{\mathbf{r}})$$

quindi la :

$$e^{i\mathbf{kr}}\xi_{\lambda} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{JM} \langle lm1\lambda |\ JM\rangle\, \mathcal{Y}_{JLM}(\hat{\mathbf{r}})$$

Esplicitando la somma su l = *J-1, J, J+1* e utilizzando i valori specifici dei coefficienti di Clesbh-Gordan, si ottiene per $\lambda = 3$:

$$e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{e}_3 = \sqrt{4\pi}\frac{(-i)}{k} \sum_{J=0}^{\infty} \left(i^J\right) \sqrt{2J+1}\nabla(j_l(kr)Y_{J0}(\hat{\mathbf{r}})) \tag{B.2}$$

mentre per $\lambda = \pm 1$:

$$e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{e}_{\pm 1} = -\sqrt{2\pi} \sum_{J\geq 1}^{\infty} \left(i^J\right) \sqrt{2J+1} \left[\lambda j_l(kr)\mathcal{Y}_{JL}^{M}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{k}\nabla \times \left(j_l(kr)\mathcal{Y}_{JL}^{M}(\hat{\mathbf{r}})\right)\right] \tag{B.3}$$

Per ottenere la (B.2) abbiamo utilizzato la proprietà:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\nabla j_J(kr)Y_{JM}(\hat{\mathbf{r}}) &= \left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J+1}(\rho)\mathcal{Y}_{JJ+1}^{M}(\hat{\mathbf{r}}) + \\ &+ \left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J-1}(\rho)\mathcal{Y}_{JJ-1}^{M}(\hat{\mathbf{r}})\end{aligned}$$

mentre per scrivere la (B.3) la:

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\nabla \times j_J(kr)\mathcal{Y}_{JJM}(\hat{\mathbf{r}}) &= -\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J+1}(\rho)\mathcal{Y}_{JJ+1}^{M}(\hat{\mathbf{r}}) + \\ &+i\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J-1}(\rho)\mathcal{Y}_{JJ-1}^{M}(\hat{\mathbf{r}})\end{aligned}$$

Lo sviluppo appena ricavato del termine $e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{e}_\lambda$ ci consente ottenere quello di $e^{-i\mathbf{kr}}\mathbf{e}^*_\lambda$ osservando che:

$$e^{-i\mathbf{kr}}\mathbf{e}^*_\lambda = -\left(e^{i\mathbf{kr}}\mathbf{e}_{-\lambda}\right)^+ . \tag{B.4}$$

Utilizziamo in questo caso la proprietà:

$$\left(\mathcal{Y}^M_{JL}\right)^\dagger = (-1)^{L+1-J+M}\mathcal{Y}^{-M}_{JL} \tag{B.5}$$

Appendice C

Calcolo dei termini del tensore leptonico

In questa sezine introduciamo i quadrivettori $k = (\varepsilon_\mu, \mathbf{k}_\mu)$ e $\nu = (\varepsilon_\nu, \mathbf{k}_\nu)$. Dalla definizione di l^α si ha:

$$\sum_s l^\alpha \left(l^\beta\right)^* = \left[\bar{u}(\nu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mathbf{k},s)\right]\left[\bar{u}(\nu)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u(\mathbf{k},s)\right]^* \tag{C.1}$$

essendo l^α una matrice 1×1, la sua complessa coniugata coincide con la sua hermitiana coniugata

$$\begin{aligned} \left[\bar{u}(\nu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mathbf{k},s)\right]^* &= \left[\bar{u}(\nu)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u(\mathbf{k},s)\right]^\dagger = \\ &\left[\bar{u}(\mathbf{k},s)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u(\nu)\right] \end{aligned} \tag{C.2}$$

si ha quindi:

$$\sum_s l^\alpha \left(l^\beta\right)^* = \bar{u}_\alpha(\nu)\left[\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\right]_{\alpha\beta}\sum_s u_\beta(\mathbf{k},s)\bar{u}_\gamma(\mathbf{k},s)\left[\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\right]_{\gamma\delta}u_\delta(\nu) \tag{C.3}$$

e sfruttando la relazione di completezza

$$\sum_s u_\beta(\mathbf{k},s)\bar{u}_\gamma(\mathbf{k},s) = (\not{k}+m)_{\beta\gamma} \tag{C.4}$$

la quantità $\sum_s l^\alpha \left(l^\beta\right)^*$ si può scrivere nel seguentre modo:

$$\sum_s l^\alpha \left(l^\beta\right)^* = Tr\left[\not{\nu}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(\not{k}+m)\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right] \tag{C.5}$$

e può essere calcolata usando i teoremi sulle tracce e le proprietà delle matrici γ.

Definiamo i vettori $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nu}/\varepsilon'$, $\hat{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}/\left|\boldsymbol{\nu}\right|$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}/\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\sum_s l^\alpha \left(l^\beta\right)^* &= Tr\left[\not{\nu}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(\not{k}+m)\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right] \\
&= Tr\left[\nu_\mu\gamma^\mu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)k_\nu\gamma^\nu\gamma^\beta(1-\gamma_5)+\right. \\
&\quad \left.+\nu_\mu\gamma^\mu\gamma^\beta(1-\gamma_5)m\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\right] \\
&= \nu_\mu k_\nu Tr\left[\gamma^\mu\gamma^\beta(1-\gamma_5)\gamma^\nu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\right] \\
&= 8\nu_\mu k_\nu\left[\left(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\nu}g^{\beta\alpha} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu}\right) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\right] \\
&= 8\left[k^\alpha\nu^\beta + \nu^\alpha k^\beta - ik_\nu\nu_\mu\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\right]
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\sum_s l^3 \left(l^3\right)^* &= 8\left(2\nu^3k^3 + \nu k\right) \\
&= 8\varepsilon\varepsilon'\left[1 + 2\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\nu}\right) - \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\beta}\right]
\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}\sum_s l^0 \left(l^0\right)^* &= 8\left(2\nu^0 k^0 - \nu k\right) \\ &= 8\varepsilon\varepsilon' \left(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\eta}\right)\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}\sum_s l^3 \left(l^0\right)^* &= 8\left(\nu^0 k^3 + \nu^3 k^0 - i k_\nu \nu_\mu \varepsilon^{\mu 3 \nu 0}\right) \\ &= 8\varepsilon\varepsilon' \left(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}}\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}\sum_s \left[l^1 \left(l^2\right)^* - l^2 \left(l^1\right)^*\right] &= 8 i \nu_\mu k_\nu \left[\varepsilon^{\mu 2 \nu 1} - \varepsilon^{\mu 1 \nu 2}\right] \\ &= 16\varepsilon\varepsilon' \left(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\eta}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{\nu}}\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}\sum_s \left[l^1 \left(l^1\right)^* + l^2 \left(l^2\right)^*\right] &= 8\left(\nu^1 k^1 + \nu_\mu k^\mu + \nu^2 k^2\right) \\ &= 8\left[\nu^0 k^0 - \nu^3 k^3\right] \\ &= 8\left[\varepsilon\varepsilon' - \left(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}_3\right)\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3\right)\right] \\ &= 8\varepsilon\varepsilon' \left[1 - \left(\boldsymbol{\eta} \cdot \nu\right)\left(\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu}\right)\right]\end{aligned} \tag{C.11}$$

Calcolando i precedenti elementi nel limite $\boldsymbol{\beta} \longrightarrow 0$ delle basse energie per il muone entrante. Si ha:

$$lim_{\beta \longrightarrow 0} \sum_s l^3 \left(l^3\right)^* = 8\varepsilon\varepsilon' \tag{C.12}$$

$$lim_{\beta \longrightarrow 0} \sum_s l^0 \left(l^0\right)^* = 8\varepsilon\varepsilon' \tag{C.13}$$

$$lim_{\beta \longrightarrow 0} \sum_s l^3 \left(l^0\right)^* = 8\varepsilon\varepsilon' \tag{C.14}$$

$$lim_{\beta \longrightarrow 0} \sum_s l^1 \left(l^2\right)^* - l^2 \left(l^1\right)^* = 16i\varepsilon\varepsilon' \tag{C.15}$$

$$lim_{\beta \longrightarrow 0} \sum_s \frac{1}{2} \left[l^1 \left(l^1\right)^* + l^2 \left(l^2\right)^*\right] = 8\varepsilon\varepsilon' \tag{C.16}$$

Appendice D

Elementi di matrice ridotti

In questa sezione riportiamo il risultato del calcolo degli elementi di matrice ridotti di alcune quantità che compaiono negli operatori (3.32)-(3.39). Il calcolo di tali elementi si riduce ad una combinazione dei seguenti risultati.

$$\langle n_f j_f \| j_J(kr) Y_J \| n_i j_i \rangle = (-)^{1/2+j_f} \frac{\hat{\jmath}_f \hat{\jmath}_i \hat{J}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j_f & J & j_i \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$\xi(l_f + l_i + J) \int \left(r^2 R_f^*(r) j_j(r) R_i(r) \right) dr \qquad \text{(D.1)}$$

$$\langle n_f j_f \| j_J(kr) \mathcal{Y}_{J,J+1}(\vartheta\varphi) \cdot \nabla \| n_i j_i \rangle = (-)^{J+j_i+1/2} \frac{\hat{\jmath}_f \hat{\jmath}_i}{\sqrt{4\pi}}$$
$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \xi(l_f + l_i + J)$$
$$\left[\sqrt{J+1} \int \left(r^2 j_j(r) R_f^* \frac{\partial}{\partial r} R_i \right) dr - \frac{H(l_f + l_i + J)}{\sqrt{J+1}} \int \left(r j_{j+1}(r) R_f^*(r) R_i(r) \right) dr \right]$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_J(kr)\mathcal{Y}_{J,J-1}\cdot\nabla\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{J+j_i+1/2}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\xi(l_f+l_i+J) \tag{D.2}$$

$$\left[\sqrt{J}\int\left(r^2 j_{j-1}(r)R_f^*\frac{\partial}{\partial r}R_i\right)dr + \frac{H(l_f,l_i,J)}{\sqrt{J}}\int\left(r j_{j-1}(r)R_f^* R_i\right)dr\right] \tag{D.3}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_J(kr)\mathcal{Y}_{J,J}\cdot\nabla\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{J+j_i+1/2}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi(l_f+l_i+J)H(l_f,l_i,J)\int\left(r^2 j_j(r)R_f^* R_i\right)dr \tag{D.4}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_J(kr)Y_J\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{J+j_i+1/2}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i\hat{J}}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\xi(l_f+l_i+J)\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[2(j_i-l_i)\int dr r^2 j_j(r)R_f^*\frac{\partial}{\partial r}R_i + 2(j_i-2l_i-1/2)\int\left(r j_j(r)R_f^* R_i\right)dr\right] \tag{D.5}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_J(kr)\mathcal{Y}_{J,J}\cdot\boldsymbol{\sigma}\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{l_i}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i\hat{J}}{\sqrt{4\pi}}\xi(l_f+l_i+J)$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\int\left(r^2 j_j(r)R_f^* R_i\right)dr \tag{D.6}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_{J+1}(kr)\mathcal{Y}_{J,J+1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{J+j_i+\frac{3}{2}}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}\xi(l_f+l_i+J)$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\frac{\chi_f+\chi_i+J+1}{\sqrt{J+1}}\right]\int \left(r^2 j_{j+1}(r)R_f^* R_i\right)dr \qquad \text{(D.7)}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_{J-1}(kr)\mathcal{Y}_{J,J-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{J+j_i+\frac{3}{2}}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}\xi(l_f+l_i+J)$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\frac{\chi_f+\chi_i-J}{\sqrt{J+1}}\right]\int \left(r^2 j_{j-1}(r)R_f^* R_i\right)dr \qquad \text{(D.8)}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_{J-1}(kr)\mathcal{Y}_{J,J-1}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = i\,|q|\,(-)^{J+j_i+\frac{3}{2}}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\frac{\chi_i-\chi_f}{\sqrt{J+1}}\right]\xi(l_f+l_i+J)\int \left(r^2 j_j(r)R_f^* R_i\right)dr$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_J(kr)\mathcal{Y}_{J,J}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = i\,|q|\,(-)^{J+j_i+\frac{1}{2}}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}\xi(l_f+l_i+J+1)$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\left(\frac{J+1}{J}\right)^{1/2}(\chi_i+\chi_f-J)\int \left(r^2 j_{j-1}(kr)R_f^* R_i\right)dr\right.$$

$$\left.-\left(\frac{J}{J+1}\right)^{1/2}(\chi_i+\chi_f+J+1)\int \left(r^2 j_{j+1}(r)R_f^* R_i\right)dr\right] \qquad \text{(D.9)}$$

$$\langle n_f j_f \,\| j_{J+1}(kr)\mathcal{Y}_{J,J+1}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = i\,|q|\,(-)^{J+j_i+\frac{1}{2}}\frac{\hat{j}_f\hat{j}_i}{\sqrt{4\pi}}$$

$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\xi(l_f+l_i+J)\int \left(r^2 j_j(kr)R_f^* R_i\right)dr \qquad \text{(D.10)}$$

$$\langle n_f j_f \,\|(j_{J+1}(kr)\mathcal{Y}_{J,J+1}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{l_f+1}\frac{\hat{\jmath}_f\hat{\jmath}_i}{\sqrt{4\pi}\sqrt{J(J+1)}}$$
$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\left(\frac{H(l_f,l_i-1,J)}{\sqrt{J+1}} - \sqrt{J+1}(l_i+1)\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{H(l_f,l_i-1,J)}{\sqrt{J+1}}+\sqrt{J+1}\right)\frac{(l_i+1)}{r^2}-\sqrt{J+1}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]\xi(l_f+l_i+J)$$
$$\text{(D.11)}$$

$$\langle n_f j_f \,\|(j_J(kr)\mathcal{Y}_{J,J1}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{l_f+1}\frac{\hat{\jmath}_f\hat{\jmath}_i\hat{J}}{\sqrt{4\pi}\sqrt{J(J+1)}}$$
$$H(l_f,l_i-1,J)\xi(l_f+l_i+J)\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l_{n+1}}{r^2}\right) \quad \text{(D.12)}$$

$$\langle n_f j_f \,\|(j_{J-1}(kr)\mathcal{Y}_{J,J-1}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\|\, n_i j_i\rangle = (-)^{l_f+1}\frac{\hat{\jmath}_f\hat{\jmath}_i}{\sqrt{4\pi}}\xi(l_f+l_i+J)$$
$$\begin{pmatrix} j_f & j_i & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\left[\left(\frac{H(l_f,l_i-1,J)}{\sqrt{J+1}} + \sqrt{J+1}(l_i+1)\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{H(l_f,l_i-1,J)}{\sqrt{J+1}}-\sqrt{J}\right)\frac{(l_i+1)}{r^2}+\sqrt{J}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right] \quad \text{(D.13)}$$

$$\xi(L) = \begin{cases} 1 & L \quad pari \\ 0 & L \quad dispari \end{cases}$$
$$\chi = (-)^{l+j+\frac{1}{2}}\left(j+\frac{1}{2}\right) = (l-j)(2j+1)$$
$$H(l_f,l_i,J) = -\frac{1}{2}\left[\left(\chi_f+(-)^{l_f+l_i+J+1}\chi_i\right)(1+\chi_f+\chi_i) - J(J+1)\right]$$

Bibliografia

[1] F.Arias de Saavedra, G.Cò, A.Fabrocini and S.Fantoni, Nucl. Phys. A605 (1996) 359

[2] C.Bisconti, tesi di laurea in Fisica, Università degli studi di Lecce (2000)

[3] R.K.Bhaduri, Models of the Nucleon, Addison-Wesley, New York, (1988).

[4] A.R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton (1957).

[5] F.Halzen and D.Martin, Quarks and Leptons, J.Wiley and Sons, New York, (1994).

[6] E.Kolbe and K.Langanke, Phys. Rev., C 50 (1994) 1122

[7] L.E.Marcucci, R.Schiavilla, S.Rosati, A.Kievsky and M.Viviani, Phys. Rev.,C66 (2002) 054003.

[8] D.F.Measday, Phys. Rep., 354 (2001) 243-409.

[9] E.Oset and S.K.Singh, Nucl.Phys., A542 (1992) 586.

[10] P.Ring and P.Schuck, The Nucear Many-body Problem,Spinger, Berlin-Heidelberg, (1980).

[11] T.Suzuki and D.F.Measday and J.P.Roalsvig, Phys. Rev., C 49 (1994) 1122.

[12] J.D.Walecka, Muon Physics, vol.2, Academy Press, London, (1975).

[13] M.Zuppa, Tesi di laurea in Fisica, Universitá degli studi di Lecce (2000)