UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Interazione neutrino-nucleo

Relatore:

Prof. Giampaolo Co'

Candidato:

Marzia Zuppa

Anno Accademico 1999-2000

Indice

Capitolo 1

Introduzione

L'osservazione dei neutrini ed antineutrini avviene in base agli effetti della loro interazione con la materia, soprattutto con i nuclei atomici che costituiscono la componente reattiva principale dei rivelatori usati per l'identificazione di queste particelle. Ad esempio il nucleo di carbonio è la componente reattiva principale dei rivelatori a scintillatore liquido e il nucleo di ossigeno è quella dei rivelatori a luce Čerenkov. È chiaro dunque quanto sia importante delineare una teoria che sia in grado di descrivere le reazioni neutrino-nucleo, dalle quali si possono anche ottenere importanti informazioni sulla struttura interna nucleare. La conoscenza della distribuzione di quark all'interno del nucleone è uno dei risultati ottenuti da esperimenti di diffusione di neutrini altamente energetici su bersagli nucleari.

La descrizione della sezione d'urto delle reazioni neutrino-nucleo comporta diversi livelli di complessità poiché il neutrino, che è un'entità puntiforme, interagisce con un sistema composto da nucleoni, questi a loro volta composti da quark e gluoni. Il trattamento ideale sarebbe quello che parte dalla descrizione dell'interazione neutrino-quark. D'altra parte se la descrizione del nucleone in termini di quark non è ancora disponibile, nonostante i progressi fatti nella soluzione delle equazioni di cromodinamica quantistica (QCD) su reticolo, quella del nucleo in termini di quark è ancora più lontana.

Da qui la necessità di utilizzare modelli basati su dati empirici per poter stimare le sezioni d'urto neutrino-nucleo. La validità di questi modelli dipende dai valori dell'energia in cui avviene la reazione: ad energie superiore a 100 GeV si è nel regime detto di libertà asintotica e in questo caso l'interazione tra neutrino e materia è accuratamente descritta in termini di interazione neutrino quark quasi libero. Per energie che vanno da 1 a 100 GeV diviene necessario utilizzare un modello che descriva l'interazione in termini di stati legati di quark, tenendo quindi conto degli effetti che derivano dalla presenza dell'interazione forte. Per energie più basse di 1 GeV lo stato interno del nucleone interagente con il neutrino non viene eccitato (la soglia di produzione pionica richiede in laboratorio un'energia ceduta al nucleone di almeno 300 MeV). In questo caso si può descrivere l'interazione in termini di nucleone senza tener conto esplicitamente della sua struttura interna ma, trattandosi di nucleoni in stati legati, in questo regime di energia diventano importanti gli effetti che derivano dall'interazione con gli altri nucleoni che compongono il nucleo.

Noi ci preoccuperemo di processi dove l'energia del neutrino è minore di 1 GeV

e quindi lo scopo di questa tesi sarà quello di calcolare la sezione d'urto neutrino-nucleo, considerando i nucleoni come elementi fondamentali della struttura nucleare. Come prima operazione definiremo la struttura degli operatori dell'interazione debole derivando la sezione d'urto tra neutrino e un leptone carico. La struttura operatoriale usata per il processo puramente leptonico verrà poi utilizzata per descrivere la sezione d'urto elastica tra neutrino e nucleone, considerando il fatto che il bersaglio non è più puntiforme ma ha una distribuzione di materia. Il passo successivo sarà quello di considerare la possibilità che il bersaglio possa eccitarsi. In realtà questo risultato non sarà direttamente utilizzato per il calcolo finale, ma sarà molto utile per fissare tecniche ed ipotesi che saranno poi considerate anche nel caso del nucleo. L'ultima parte della tesi riguarda direttamente il calcolo della sezione d'urto neutrino-nucleo. Gli operatori che descrivono l'interazione debole (definiti precedentemente) saranno utilizzati per descrivere l'eccitazione di un nucleo che compie una transizione tra due stati di buon momento angolare totale. Per descrivere questa transizione sarà necessario fare uno sviluppo in multipoli della sezione d'urto.
La tesi termina a questo punto. Per poter continuare occorre fissare il modello nucleare che si vuole utilizzare per poter descrivere l'eccitazione nucleare. Questo è un problema di struttura nucleare indipendente dalla sonda che eccita il nucleo.

Capitolo 2

I processi di interazione debole

Introduzione

La nostra discussione sui processi di diffusione di neutrino su bersagli adronici si basa sulla teoria quantistica relativistica. Nei prossimi paragrafi introdurremo sinteticamente le nozioni teoriche relative agli stati fermionici e ai processi di interazione debole, utili per le argomentazioni che saranno trattate nei successivi capitoli.

Nella nostra trattazione utilizzeremo le unità naturali $\hbar = c = 1$ e la metrica descritta in Appendice A.1.

2.1 Gli stati fermionici

Gli stati di moto di particella libera e spin $\frac{1}{2}$ sono descritti da funzioni d'onda $\psi(x)$ che soddisfano l'equazione di Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{2.1}$$

dove m è la massa a riposo della particella e γ^μ indica una delle matrici 4×4 le cui proprietà sono brevemente descritte in appendice A.2.

Le soluzioni dell'equazione sono autostati del momento del tipo:

$$\psi(x) = u(\mathbf{p}) \exp(-ip \cdot x) \tag{2.2}$$

dove $u(\mathbf{p})$ è una funzione spinoriale di quattro componenti indipendente da x e $p \cdot x = p^0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ con $p^0 = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Sostituendo la funzione (2.2) nell'equazione (2.1) otteniamo l'equazione di Dirac nello spazio dei momenti:

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0 \tag{2.3}$$

con $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

Le soluzioni indipendenti $u(\mathbf{p})$ dell'equazione (2.3), per un arbitrario $\mathbf{p}$, sono quattro e in forma esplicita sono date dalle seguenti relazioni [Hal84]:

$$u^s = N \begin{pmatrix} \chi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$u^{s+2} = N \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

dove N è la costante di normalizzazione, $\boldsymbol{\sigma}$ è l'operatore di spin (vedi App. A3) e χ^s (s = 1,2) è lo spinore a due componenti di Pauli:

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Gli spinori $u^{(1,2)}$ corrispondono a soluzioni di energia positiva, mentre gli spinori $u^{(3,4)}$ corrispondono a soluzioni di energia negativa che, secondo la teoria di Feynman, descrivono stati di antiparticella. Il valore della costante N si fissa dalle condizioni di normalizzazione covariante ($2E$ particelle per unità di volume) e di ortogonalità degli spinori:

$$\begin{aligned} (u^s)^\dagger u^s &= 2E \\ (u^{s+2})^\dagger u^{s+2} &= -2E \\ u^{r\dagger} u^s &= 2E\delta_{rs} \end{aligned}$$

da cui si ottiene la relazione:

$$N = \sqrt{E+m} \tag{2.7}$$

Per i nostri calcoli consideriamo i neutrini privi di massa, quindi troviamo l'espressione che assume l'equazione di Dirac per particelle prive di massa. In questo caso l'equazione di Dirac si divide in due equazioni disaccoppiate per spinori a due componenti $\chi(\mathbf{p})$, $\phi(\mathbf{p})$ (vedi App.A.4):

$$E\chi = -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\chi \tag{2.8}$$

$$E\phi = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\phi \tag{2.9}$$

Ogni equazione si basa sulla relazione relativistica energia-momento $E^2 = |\mathbf{p}|^2$, quindi vi è una soluzione per valori di energia positivi ($E = |\mathbf{p}|$) e una per valori di energia negativi ($E = -|\mathbf{p}|$). Sostituendo E con $\pm|\mathbf{p}|$, le equazioni (2.8) e (2.9) diventano equazioni agli autovalori dell'operatore elicità $\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$:

$$\pm\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\chi = -\chi \tag{2.10}$$

$$\pm\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\phi = \phi \tag{2.11}$$

con autovalori $\lambda = \pm 1$. La funzione d'onda libera χ o ϕ, che descrive un fermione privo di massa, è autostato dell'elicità; più precisamente le due soluzioni χ della equazione (2.10) descrivono per $E = -|\mathbf{p}|$ un antifermione in stato di elicità positiva (in stato right-handed) e per $E = |\mathbf{p}|$ un fermione in stato di elicità negativa (in stato left-handed). Analogamente le due soluzioni ϕ dell'equazione (2.11) descrivono per $E = |\mathbf{p}|$ fermioni in stato di elicità positiva e per $E = -|\mathbf{p}|$ antifermioni in stati di elicità negativa.

2.2 L'interazione debole

L'interazione debole tra particelle è descritta, in analogia all'interazione elettromagnetica, in termini di correnti accoppiate a bosoni vettori $W^{\pm}$ e Z^0, detti bosoni vettori intermedi. Utilizzando le regole di Feynman, l'ampiezza invariante del generico processo debole (fig. 2.1) assume, all'ordine più basso della teoria perturbativa, l'espressione:

$$\mathcal{M} = i(-ig\overline{u}_3 \Gamma_\alpha^A u_1) \left[\frac{i\left(-g^{\alpha\beta} + q^\alpha q^\beta / M_B^2\right)}{q^2 - M_B^2} \right] (-ig\overline{u}_4 \Gamma_\beta^B u_2) \tag{2.12}$$

dove g è la costante adimensionale di accoppiamento debole, q è il quadrimomento trasferito, M_B è la massa del bosone vettore intermedio scambiato, u_i sono le funzioni spinoriali che descrivono il moto dei quattro fermioni interagenti, e infine Γ_α^A, come Γ_β^B, è l'operatore che può essere espresso come combinazione di matrici γ. Il termine $\frac{i(-g^{\alpha\beta}+q^\alpha q^\beta/M_B^2)}{q^2-M_B^2}$ è il propagatore che descrive lo scambio del bosone tra i due vertici e la sua espressione è stata ottenuta dall'equazione di Klein-Gordon per una particella (vettoriale) massiva di spin uno [Hal84]. Nei processi in cui $q^2 \ll M_B^2 = (80\ GeV)^2$, l'espressione del propagatore si approssima a un valore costante:

$$\frac{i(-g^{\alpha\beta} + q^\alpha q^\beta / M_B^2)}{q^2 - M_B^2} \approx \frac{ig^{\alpha\beta}}{M_B^2} \tag{2.13}$$

In questo caso l'interazione debole si comporta come un'interazione di contatto con una struttura corrente-corrente e l'ampiezza invariante assume la forma:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \overline{u}_4 \Gamma_\alpha^A u_2 \, \overline{u}_3 \Gamma^{B\,\alpha} u_1 \tag{2.14}$$

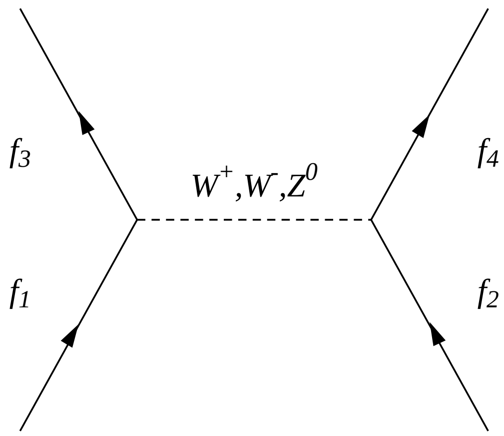

Figura 2.1: *Diagramma di Feynman del primo ordine di un generico processo debole.*

dove G è la costante di Fermi dimensionale reinterpretata come:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_B^2} \tag{2.15}$$

Nella nostra discussione assumeremo che la costante di accoppiamento debole g sia la stessa sia per i leptoni che per i quark, anche se in realtà la costante di accoppiamento si modifica leggermente quando avviene lo scambio di sapore tra famiglie di quark differenti, ad esempio dalla famiglia $(u\,d)$ alla famiglia $(s\,c)$.

Noi ci occuperemo di fenomeni che avvengono ben al di sotto della soglia di produzione del quark s, quindi consideriamo una sola costante di accoppiamento.

2.3 Diffusione neutrino-leptone

I processi di interazione debole di nostro interesse sono i processi di interazione carica debole descritti da scambi di bosoni vettori $W^{\pm}$. Nella figura 2.2 sono mostrati alcuni esempi di questi processi caratterizzati da vertici dove lo stato di particella iniziale, per assorbimento o emissione di un bosone vettore carico, si converte in un altro stato di particella della stessa famiglia, osservando la conservazione del numero leptonico o del numero barionico. La carica Q tra lo stato iniziale e finale della particella si differenzia di una unità, ma la variazione complessiva della carica di entrambi i vertici è nulla per la conservazione della carica. Analizziamo in dettaglio il processo puramente leptonico di corrente carica del tipo (fig. 2.2A):

$$\nu_e + \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu \tag{2.16}$$

La forma generale della corrente carica debole, rispetto alla covarianza di Lorentz, è espressa in termini di quantità bilineari del tipo:

$$(\overline{\psi})\,(4 \times 4)\,(\psi) \tag{2.17}$$

dove la matrice (4×4) è il prodotto di matrici γ e ψ è la funzione d'onda della particella del tipo (2.2). Queste quantità hanno definite proprietà sotto trasformazioni di Lorentz. È noto sperimentalmente che l'interazione debole è invariante sotto l'operazione dell'inversione temporale, mentre non è invariante sotto l'operazione della parità e della coniugazione della carica. Tenendo conto del comportamento

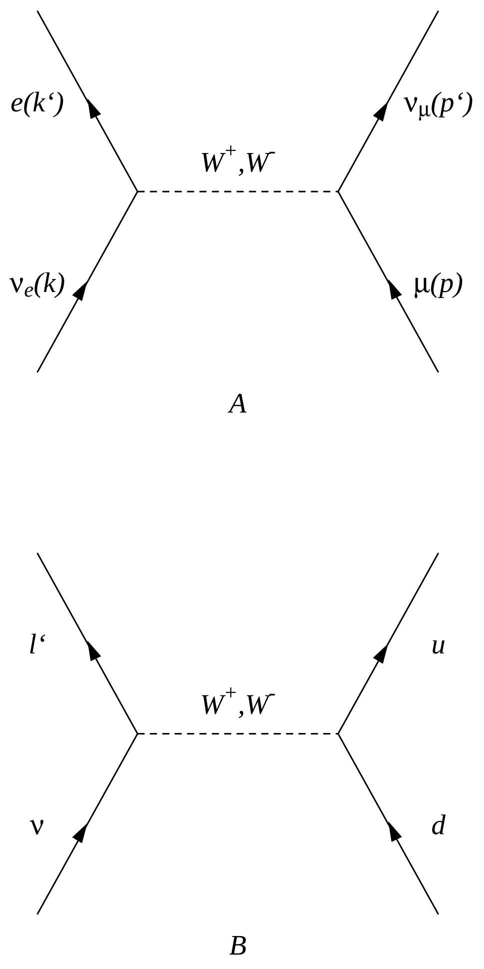

Figura 2.2: *Processi di interazione debole carica: (A) scambio di bosoni vettoriali carichi tra coppie di leptoni; (B) scambio di bosoni vettoriali carichi tra coppie di quark e leptoni.*

dell'interazione debole sotto operazioni di simmetrie discrete (in particolare sotto la parità), si è definita la corrente carica debole come combinazione lineare di una quantità bilineare vettoriale $(\overline{\psi})\gamma_\alpha(\psi)$ e di una quantità bilineare vettore-assiale $(\overline{\psi})\gamma_\alpha\gamma_5(\psi)$. I due termini hanno un diverso comportamento sotto l'operazione di inversione spaziale, quindi la loro interferenza viola automaticamente l'invarianza della parità.

In questo caso il termine matriciale Γ_α^A, così come il termine $\Gamma^{B\alpha}$, presente nella relazione (2.14), è una combinazione lineare delle matrici γ_α e $\gamma_\alpha\gamma_5$:

$$\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \tag{2.18}$$

L'ampiezza invariante $\mathcal{M}$ della reazione (2.16) è data dal prodotto covariante tra la corrente leptonica di abbassamento di carica L^α associata al vertice elettronico e la corrente leptonica di innalzamento di carica $L_\alpha^\dagger$ associata al vertice muonico ($L_\alpha^\dagger$ è l'hermitiana coniugata di L_α):

$$\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} L^\alpha L_\alpha^\dagger \tag{2.19}$$

con:

$$L^\alpha = \overline{u}_e \gamma^\alpha \frac{1}{2}(1-\gamma_5) u_{\nu_e} \tag{2.20}$$

$$L_\alpha^\dagger = \overline{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha \frac{1}{2}(1-\gamma_5) u_\mu \tag{2.21}$$

Le correnti deboli cariche leptoniche (2.20) e (2.21) presentano la struttura vettore-assiale (V-A) [Mish89], dove il termine in $\gamma_\alpha\gamma_5$ ha lo stesso peso del termine in γ_α con la conseguente violazione massimale della parità. L'azione dell'operatore $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ sullo spinore della particella è quella di selezionare la componente di elicità negativa (vedi App. A.4):

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u = u_L.$$

Nel processo in esame sono coinvolti neutrini che, secondo il modello standard, sono fermioni privi di massa. Il loro stato di particella libera è descritto da spinori che soddisfano le equazioni (2.8) e (2.9). In rappresentazione di Weyl il neutrino può essere descritto in termini di spinori a quattro componenti $u_\mu = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$. In questa rappresentazione il termine $\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u_\mu$ dà:

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u_\mu = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solo i neutrini in stato di elicità negativa (antineutrini in stato di elicità positiva) sono accoppiati a leptoni carichi dall'interazione debole. L'operatore γ_α non connette stati di elicità opposta, per cui le correnti deboli cariche non presentano nessuna componente di elicità positiva (right-randed):

$$\begin{aligned} L^\alpha &= [\overline{u}_L + \overline{u}_R]\gamma_\alpha u_L \\ &= \overline{u}_L \gamma_\alpha u_L \end{aligned}$$

Nota l'espressione della correnti deboli leptoniche e le sue proprietà, calcoliamo la sezione d'urto relativa alla reazione:

$$\nu_e(k) + \mu^-(p) \rightarrow e^-(k') + \nu_\mu(p') \tag{2.22}$$

dove le quantità in parentesi rappresentano i rispettivi quadrimomenti delle particelle, definiti rispetto al sistema di riferimento di laboratorio in cui il muone di massa M è a riposo:

$$k = (\epsilon, \mathbf{k})$$

$$
\begin{aligned}
k' &= (\epsilon', \mathbf{k}') \\
p &= (M, \mathbf{p} = 0) \\
p' &= (E', \mathbf{p}')
\end{aligned}
$$

L'espressione generale della sezione d'urto differenziale è [Hal84]:

$$d\sigma = \frac{1}{F}|S_{fi}|^2 \prod_{f=1}^{n} \frac{V d^3\mathbf{p}_{n_f}}{(2\pi)^3 2E_{n_f}} \tag{2.23}$$

dove con F indichiamo il flusso entrante, con S_{fi} l'ampiezza di transizione, con V il volume e con n il numero di particelle nello stato finale. Rispetto alla normalizzazione covariante di $2E$ particelle in un volume V, il flusso è definito, in forma invariante di Lorentz, come:

$$F = \frac{4}{V^2}[(k \cdot p)^2 - m_\nu m_\mu]^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

Se il neutrino non ha massa, come noi supponiamo, si ha:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{4}{V^2}[(p \cdot k)^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{V^2} M\epsilon
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Nel nostro caso la densità covariante degli stati finali $\prod_f \frac{V d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}$ deve essere calcolata per n=1, 2 con $\mathbf{p}_1 = k'$ e $\mathbf{p}_2 = p'$:

$$\prod \frac{V d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} = \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\epsilon'} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2E'} \tag{2.26}$$

Per il calcolo di S_{fi} abbiamo applicato la teoria perturbativa all'ordine più basso trascurando gli effetti di ordine successivo che, nell'approssimazione di un'interazione di contatto, comporterebbero termini divergenti. Usando le regole di Feynman otteniamo [Bjo64]:

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4\delta^4(k' + p' - p - k)\mathcal{M} \tag{2.27}$$

con:

$$\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}}[\overline{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\alpha\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u_\mu(\mathbf{p},s)][\overline{u}_e(\mathbf{k}',s')\gamma^\alpha\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\mathbf{k}) \tag{2.28}$$

dove s, s' sono le variabili di spin dell'elettrone e del muone. Per i neutrini queste variabili non sono specificate dato che hanno un definito stato di polarizzazione.
Il termine $|S_{fi}|^2$ per unità di tempo e di volume è dato da [Bjo64]:

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4\delta^4(k' + p' - p - k)|\mathcal{M}|^2 \tag{2.29}$$

Utilizzando le relazioni $(2.25), (2.26)$ e (2.29) la sezione d'urto differenziale (2.23) diventa:

$$d\sigma = \frac{1}{4(M\epsilon)}|\mathcal{M}|^2 dQ \tag{2.30}$$

dove dQ è la fase spaziale Lorentz-invariante:

$$dQ = (2\pi)^4\delta^4(k' + p' - p - k)\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\epsilon'}\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2E'} \tag{2.31}$$

L'espressione (2.31) è la sezione d'urto relativa ad una transizione da assegnati stati di spin iniziali ad assegnati stati di spin finali. Poiché non siamo interessati alla particolare polarizzazione delle particelle coinvolte nella reazione, dobbiamo sommare sugli stati di spin del sistema finale (in questo caso solo stati dell'elettrone) e mediare sui possibili stati di spin iniziale (stati del muone). Si ha:

$$|\mathcal{M}|^2 \to \frac{1}{2}\sum_{s,s'}|\mathcal{M}|^2 = \overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{2.32}$$

con :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G^2}{2}\frac{1}{2}\sum_{s,s'} L^{\mu}_{\alpha\beta} L_e^{\alpha\beta} \tag{2.33}$$

dove $L^{\mu}_{\alpha\beta}$ e $L_e^{\alpha\beta}$ sono rispettivamente i tensori associati al vertice elettronico e muonico:

$$L^{\mu}_{\alpha\beta} = \sum_{s}[\overline{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_\mu(\mathbf{p},s)][\overline{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\mathbf{p},s)]^* \tag{2.34}$$

$$L_e^{\alpha\beta} = \sum_{s'}[\overline{u}_e(\mathbf{k}',s')\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\mathbf{k})][\overline{u}_e(\mathbf{k}',s')\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\mathbf{k})]^* \tag{2.35}$$

Notiamo che $[\overline{u}_1\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_2]$ è una matrice 1×1, per cui la sua complessa coniugata coincide con la sua hermitiana coniugata:

$$\begin{aligned}
[\overline{u}_1\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_2]^* &= [\overline{u}_1\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_2]^\dagger \\
&= [u_1^\dagger\gamma^0\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_2]^\dagger \\
&= [u_2^\dagger(1-\gamma_5)\gamma^{\alpha\dagger}\gamma^0 u_1] \\
&= [u_2^\dagger\gamma^{\alpha\dagger}\gamma^0 u_1 - u_2^\dagger\gamma_5\gamma^{\alpha\dagger}\gamma^0 u_1] \\
&= [\overline{u}_2\gamma^\alpha u_1 - \overline{u}_2\gamma^\alpha\gamma_5 u_1] \\
&= [\overline{u}_2\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_1].
\end{aligned}$$

Tenendo conto dell'ultimo risultato, le relazioni (2.34) e (2.35) diventano:

$$L^{\mu}_{\alpha\beta} = \sum_{s}[\overline{u}_{\nu_\mu}(\mathbf{p}')\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_\mu(\mathbf{p},s)][\overline{u}_\mu(\mathbf{p},s)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\mathbf{p}')] \tag{2.36}$$

$$L_e^{\alpha\beta} = \sum_{s'} [\overline{u}_e(\mathbf{k'},s')\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\mathbf{k})][\overline{u}_{\nu_e}(\mathbf{k})\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_e(\mathbf{k'},s')] \tag{2.37}$$

Applichiamo la relazione di completezza $\sum_{s'} u(p)\overline{u}(p) = \not{p} + m$ che ci permette di eseguire la sommatoria sulle variabili di spin. In questo caso i due tensori possono essere espressi come la traccia del prodotto di quattro matrici 4×4:

$$L^\mu_{\alpha\beta} = Tr\,[\not{p}'\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\not{p}+m)\gamma_\beta(1-\gamma_5)] \tag{2.38}$$

$$L_e^{\alpha\beta} = Tr\left[(\not{k}'+M)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{k}\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right] \tag{2.39}$$

Calcoliamo il tensore $L^\mu_{\alpha\beta}$ usando la proprietà ciclica e i teoremi delle tracce:

$$\begin{aligned} L^\mu_{\alpha\beta} &= Tr[\not{p}'\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\not{p}+M)\gamma_\beta(1-\gamma_5)] \\ &= Tr[\not{p}'\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\not{p}\gamma_\beta(1-\gamma_5)] + MTr[\not{p}'\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\gamma_\beta] \end{aligned}$$

Il termine proporzionale a M è una traccia di un numero dispari di matrici γ, quindi è nullo (vedi App. A.3). Rimane il termine:

$$\begin{aligned} L^\mu_{\alpha\beta} &= Tr[\not{p}'\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\not{p}\gamma_\beta(1-\gamma_5)] \\ &= Tr[\not{p}'\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta] + Tr[\not{p}'\gamma_\alpha\gamma_5\not{p}\gamma_\beta\gamma_5] - Tr[\not{p}'\gamma_\alpha\gamma_5\not{p}\gamma_\beta] - Tr[\not{p}'\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\gamma_5] \\ &= 2Tr[\not{p}'\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta] - 2Tr[\not{p}'\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\beta\gamma_5] \\ &= 8\left[p'_\alpha p_\beta + p_\alpha p'_\beta - g_{\alpha\beta}(p'\cdot p) - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}p'^\mu p^\nu\right] \end{aligned} \tag{2.40}$$

Procediamo allo stesso modo per il tensore associato al vertice elettronico e otteniamo:

$$L_e^{\alpha\beta} = 8\left[k'^\alpha k^\beta + k'^\beta k^\alpha - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\eta\alpha\rho\beta}k'_\eta k_\rho\right] \tag{2.41}$$

Alla fine contraendo i due tensori abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G^2}{2}\frac{1}{2}L^{\mu}_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}_{e} \\
&= \frac{G^2}{2}32\left[2(k\cdot p)(k'\cdot p') + 2(p\cdot k')(k\cdot p') - 4(p'\cdot p)(k\cdot k')\right. \\
&\quad \left. +4(p'\cdot p)(k\cdot k') + 2(\delta^{\mu}_{\eta}\delta^{\nu}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\eta})(p'_{\mu}p_{\nu}k'^{\eta}k^{\rho})\right] \\
&= G^2 64(k\cdot p)(k'\cdot p') \\
&= 64G^2(M\epsilon)(\epsilon' E' - \mathbf{k}'\mathbf{p}') \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

La sezione d'urto assume l'espressione:

$$
d\sigma = \int\int \frac{\overline{|\mathcal{M}|}^2}{4(M\epsilon)}(2\pi)^4\delta^4(k'+p'-p-k)\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\epsilon'}\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2E'}. \qquad (2.43)
$$

Anche se l'espressione (2.43) è stata ottenuta partendo dal sistema di riferimento del laboratorio, essa è invariante per trasformazioni di Lorentz. Per semplicità possiamo calcolare la sezione d'urto rispetto al centro di massa dove:

$$
\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}' = 0 \qquad (2.44)
$$

Riscriviamo $d\sigma$ utilizzando le relazioni $s = (k+p)^2$ e $d^3\mathbf{k}' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\Omega$:

$$
d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int \frac{\overline{|\mathcal{M}|}^2}{(4M\epsilon)}\delta^3(\mathbf{k}'+\mathbf{p}'-\mathbf{p}-\mathbf{k})\delta(E'+\epsilon'-E-\epsilon)\frac{d^3\mathbf{p}'}{2\epsilon'}\frac{|\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'|}{2\epsilon'}d\Omega. \qquad (2.45)
$$

Integriamo su $d^3\mathbf{p}'$ ottenendo per la presenza della distribuzione δ:

$$
d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2}\int \frac{\overline{|\mathcal{M}|}^2}{4(M\epsilon)}\frac{\delta(\sqrt{|\mathbf{k}'|^2+m^2} + |\mathbf{k}'| - \sqrt{s})}{2\sqrt{|\mathbf{k}'|^2+m^2}}\frac{|\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'|}{2|\mathbf{k}'|}d\Omega \qquad (2.46)
$$

integriamo su $d|\mathbf{k}'|$:

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|}^2}{64\pi^2 M\epsilon}\frac{s-m^2}{2s} \qquad (2.47)
$$

Utilizziamo la relazione (2.42):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{64G^2(M\epsilon)(\epsilon' E' - \mathbf{k}'\mathbf{p}')}{128(M\epsilon)\pi^2}\frac{s-m^2}{s} \tag{2.48}$$

poiché $s - m^2 = 2k' \cdot p'$ si ha:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2}{4\pi^2}\frac{(s-m^2)^2}{s} \tag{2.49}$$

La sezione d' urto totale è:

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi}\frac{(s-m^2)^2}{s} \tag{2.50}$$

Per $s \gg m^2$:

$$\sigma \approx \frac{G^2}{\pi}s \tag{2.51}$$

o rispetto al sistema di laboratorio ($s = M^2 + 2M\epsilon$):

$$\sigma \approx \frac{G^2}{\pi}M(M + 2\epsilon) \tag{2.52}$$

L'interazione di contatto nella forma corrente-corrente, trattata all'ordine più basso della teoria perturbativa, determina una dipendenza lineare della sezione d'urto dall'energia del neutrino incidente. Ciò significa che σ aumenta all'aumentare dell'energia iniziale e per alte energie questo comportamento è errato. Quindi l'espressione dell'interazione effettiva usata è una buona approssimazione all'interazione dovuta allo scambio di bosoni vettori intermedi solo nei processi dove l'energia coinvolta è molto inferiore ai 100 GeV.

Capitolo 3

Diffusione neutrino-nucleone quasielastica

Introduzione

I primi esempi di processi semileptonici che esamineremo sono i processi di diffusione di neutrini su nucleoni liberi.

Il diagramma di Feynman del primo ordine in fig. 3.1 rappresenta un processo semileptonico di corrente carica:

$$\nu + N \to l^- + X \tag{3.1}$$

dove un neutrino incide su un nucleone libero e, per scambio di un bosone vettore carico $W^{\pm}$, le due particelle si convertono rispettivamente in un leptone carico della

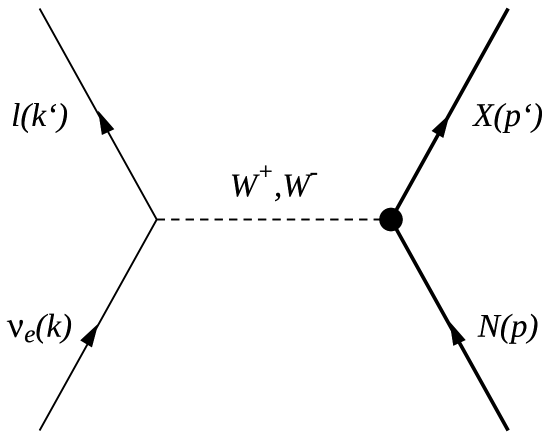

Figura 3.1: *Diagramma di Feynman del primo ordine del processo di interazione debole carica neutrino-nucleone.*

stessa famiglia del neutrino incidente e in uno stato adronico X. A basse energie del neutrino incidente, le interazioni di corrente carica sono dominate dai processi quasi-elastici del tipo

$$\nu + n \rightarrow l^- + p \tag{3.2}$$

dove il neutrino interagisce con un neutrone n senza eccitarne i gradi di libertà interni. In questo caso l'effetto dello scambio di $W^{\pm}$ è la conversione del neutrone (nucleone-bersaglio) in un protone p (vedi fig. 3.2).

L'obiettivo di questo capitolo è calcolare la sezione d'urto differenziale del processo quasi-elastico (3.2), prestando particolare attenzione allo sviluppo dell'elemento di matrice adronico.

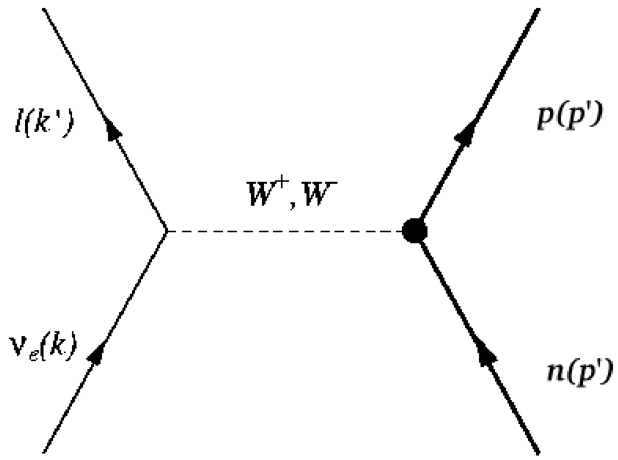

Figura 3.2: *Diagramma di Feynman del primo ordine del processo quasielastico neutrino-nucleone.*

3.1 La corrente debole carica adronica

Siamo interessati a processi in cui le energie sono dell'ordine di qualche centinaia di MeV, molto più piccole quindi delle masse dei bosoni vettori $W^{\pm}$. Possiamo considerare l'interazione agente tra i quattro fermioni sostanzialmente un'interazione di contatto. L'ampiezza invariante, al primo ordine, assume la semplice forma:

$$\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}}\,\overline{u}_l\gamma^{\alpha}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u_{\nu}\,\overline{u}_X\mathit{\Gamma}_{\alpha}u_{_N}. \tag{3.3}$$

Come discusso nel capitolo precedente, l'elemento di matrice associato al vertice leptonico è noto. Si ha invece difficoltà a trovare l'esplicita forma dell'elemento di matrice associato al vertice adronico; la quantità $\mathit{\Gamma}_{\alpha}$ non può essere semplicemente il prodotto di matrici $\gamma_{\alpha}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ che abbiamo usato su stati di leptoni (particelle puntiformi), poiché gli adroni sono composti da quark che interagiscono per scambio di gluoni. Nel calcolo dell'elemento di matrice di transizione occorre quindi tener conto della loro struttura adronica e della presenza dell'interazione forte, elementi non facilmente calcolabili in termini perturbativi.

La stessa difficoltà si è presentata nel calcolare l'elemento di matrice dell'operatore di corrente elettromagnetica agente tra stati adronici. L'espressione della corrente elettromagnetica per gli adroni è stata costruita studiando processi puramente leptonici ed estendendo le proprietà dell'interazione (come il comportamento dell'operatore di corrente sotto trasformazioni di Lorentz, la conservazione della corrente, hermicità, ecc..) al caso adronico. Questo è stato fatto decomponendo l'elemento di matrice in funzioni scalari, dette funzioni di struttura, che parametrizzano la struttura adronica e gli effetti dell'interazione forte. I termini di questa decomposizione sono tali da soddisfare tutte le proprietà di simmetria e conservazione della corrente elettromagnetica.

Per ottenere l'espressione della corrente debole carica adronica si è applicata la stessa procedura: si decompone l'elemento di matrice dell'operatore di corrente in specifiche funzioni di struttura adroniche, osservando le proprietà dell'interazione debole note dall'analisi dei processi puramente leptonici.

L'operatore della corrente carica debole adronica H_α in generale è dato dalla somma di due termini:

$$H_\alpha = J_\alpha \cos\theta_c + S_\alpha \sin\theta_c \tag{3.4}$$

dove θ_c è detto angolo di mixing di Cabibbo con un valore empirico di circa 13^o, J è la parte di H_α che agisce sugli stati adronici conservando la stranezza e cambiando la carica e l'isospin di una unità e infine S è la parte di H_α che agisce sugli stati adronici cambiando la stranezza di una unità, la carica e l'isospin di $\frac{1}{2}$.

Noi analizziamo processi in cui non si hanno modifiche della stranezza, quindi tra gli stati iniziale e finale adronici agisce solo la parte operatoriale $J_\alpha \cos\theta_c$ di H_α.

Per semplicità non consideriamo, nel calcolo dell'elemento di matrice di transizione, gli effetti che derivano dall'interazione elettromagnetica, tra cui la differenza di massa tra il neutrone e il protone. In questo caso il neutrone e il protone sono descritti, nel formalismo dell'isospin, come due stati diversi della stessa particella rappresentati da spinori a due componenti (spinori di Pauli):

$$|p>= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |n>= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Il primo spinore $|p>$, che corrisponde al protone, rappresenta lo stato del nucleone dove la terza componente dell'isospin è pari ad $\frac{1}{2}$; il secondo spinore $|n>$, che corrisponde al neutrone, rappresenta lo stato del nucleone con terza componente dell'isospin pari a $-\frac{1}{2}$. La funzione d'onda che descrive il nucleone nello spazio dell'isospin ha otto componenti:

$$\psi_N(x) = \begin{pmatrix} \psi_p(x) \\ \psi_n(x) \end{pmatrix} = \psi_p(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_n(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

dove $\psi_n(x)$ e $\psi_p(x)$ sono le funzioni del tipo (2.2).

La corrente carica debole adronica relativa al processo (3.2) ha la seguente forma:

$$(J^+_\alpha)_{fi} = \overline{\psi}_{N_f}\, J_\alpha\, \tau^+\, \psi_{N_i} \tag{3.7}$$

dove τ^+ è l'operatore di innalzamento di carica, che trasforma uno stato di neutrone, in uno stato di protone ed appartiene all'insieme dei tre tensori sferici ($\tau^\pm$,τ^0):

$$\tau^\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\tau^1 \pm i\tau^2), \quad \tau^0 = \tau^3 \tag{3.8}$$

con τ^i (i = 1,2,3) le componenti dell'operatore di isospin τ definite lungo tre assi quantizzati ed espresse mediante le matrici di Pauli:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

A questo punto cerchiamo di ottenere l'espressione dell'operatore J_α senza considerare in modo esplicito la struttura interna dei nucleoni. A tal scopo utilizziamo la procedura seguita per calcolare l'elemento di matrice adronico dell'operatore di corrente elettromagnetica j_α, relativo al processo di diffusione elastica elettrone-protone:

$$e^- + p \rightarrow e^- + p \tag{3.10}$$

Definiamo l'elemento di matrice di j_α tra autostati del quadrimomento (è sottintesa la dipendenza dalla variabile di spin):

$$< p'|j_\alpha(x)|p > \tag{3.11}$$

ed applichiamo la formula di traslazione in modo che la dipendenza dalla variabile x sia semplicemente esponenziale:

$$< p'|j_\alpha(x)|p >= e^{-ix\cdot(p_i-p_f)} < p'|j_\alpha(0)|p > . \tag{3.12}$$

Per la costruzione dell'operatore j_α abbiamo a disposizione i vettori p'_α, p_α, le matrici γ_α e loro combinazioni. I soli operatori vettoriali invarianti di Lorentz che possono essere formati sono:

$$\gamma_\alpha, \ \ (p'-p)^\beta\sigma_{\alpha\beta}, \ \ (p'-p)_\alpha, \ \ (p'+p)_\alpha,$$

di cui solo tre sono indipendenti. La decomposizione covariante del fattore $< p'|j_\alpha(0)|p >$ ha la forma generale:

$$< p'|j_\alpha(0)|p >= \overline{u}(\mathbf{p}')[\gamma_\alpha F_1(q^2) + \frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(q^2) + q_\alpha F_3(q^2)]u(\mathbf{p}) \tag{3.13}$$

con $u(\mathbf{p})$ spinori di Dirac, q il momento trasferito, $q = p' - p$, e M è la massa del nucleone. Le funzioni F_i devono essere scalari di Lorentz e quindi dipendono solo da quantità scalari di Lorentz come p'^2, p^2 e q^2. Poichè $p'^2 = p^2 = M^2$, p'^2 e p^2 sono costanti e la variazione di F_i è sulla variabile q^2. Inoltre le condizioni di hermicità e di invarianza sotto l'inversione temporale dell'interazione impongono che le funzioni F_i siano reali.

La conservazione della corrente elettromagnetica

$$\partial^\alpha(j_\alpha)_{fi} = iq^\alpha(j_\alpha)_{fi} = 0 \tag{3.14}$$

implica che il fattore di forma F_3 sia nullo per qualsiasi valore di q^2. Infatti se riscriviamo la (3.14) sostituendo $(j_\alpha)_{fi}$ con la relativa decomposizione covariante (3.13) otteniamo:

$$\overline{u}(\mathbf{p}')[q^\alpha\gamma_\alpha F_1(q^2) + \frac{i}{2M}q^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(q^2) + q^\alpha q_\alpha F_3(q^2)]u(\mathbf{p}) = 0$$

dove si può osservare che il termine in F_1 si annulla perchè gli spinori $\overline{u}$ e u soddisfano l'equazione di Dirac:

$$(\not{p} - m)u = 0$$

$$\overline{u}(\not{p}' - m) = 0$$

e quindi la quantità $\overline{u}(\mathbf{p}')[\gamma_\alpha q^\alpha]u(\mathbf{p})$ diviene:

$$\overline{u}(\mathbf{p}')\not{q}\, u(\mathbf{p}) = \overline{u}(\mathbf{p}')[\not{p}\, u(\mathbf{p}) - \not{p}'\, u(\mathbf{p})] = 0$$

Anche il termine in F_2 si annulla per l'antisimmetricità del tensore $\sigma_{\alpha\beta}$:

$$q^\alpha\sigma_{\alpha\beta}q^\beta = \frac{i}{2}q^\alpha[\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha]q^\beta = i\left[q^2 - q^2\right] = 0$$

Rimane il termine in F_3 e affinché sia soddisfatta la (3.14) deve essere $F_3 = 0$ dato che in generale $q_\alpha q^\alpha = q^2 \neq 0$. La relazione (3.13) diventa:

$$< p'|j_\alpha(0)|p >= \overline{u}(\mathbf{p}')\left[\gamma_\alpha F_1(q^2) + \frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_2(q^2)\right]u(\mathbf{p}). \tag{3.15}$$

La corrente elettromagnetica nel formalismo dell'isospin si suddivide in un termine isoscalare $(j^s_\alpha)_{fi}(I = 0)$ e in un termine isovettoriale $(j^v_\alpha)_{fi}(I = 1)$:

$$(j_\alpha)_{fi} = \overline{\psi}_{N_f}\gamma_\alpha\frac{1}{2}(1 + \tau_3)\psi_{N_i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\overline{\psi}_{N_f}\gamma_\alpha\psi_{N_i} + \overline{\psi}_{N_f}\gamma_\alpha\tau_3\psi_{N_i}\right] \\
&= \left[(j^s_\alpha)_{fi}(I=0) + (j^v_\alpha)_{fi}(I=1)\right]
\end{aligned}
$$

che risultano essere separatamente conservati: $\partial^\alpha (j^s_\alpha)_{fi} = \partial^\alpha (j^v_\alpha)_{fi} = 0$.

La decomposizione dell'elemento di matrice (3.15) assume l'espressione:

$$
< p'|j_\alpha(0)|p >= \overline{u}(\mathbf{p}')\left[\gamma_\alpha \frac{1}{2}(F^s_1 + \tau_3 F^v_1) + \sigma_{\alpha\beta}q^\beta \frac{1}{2}(F^s_2 + \tau_3 F^v_2)\right] u(\mathbf{p}) \tag{3.16}
$$

dove i fattori di forma F^s_i e F^v_i (i=1,2), rispettivamente isoscalare e isovettoriale, sono definiti in funzione dei fattori di forma F^N_i del nucleone come:

$$
F^s_i = F^p_i + F^n_i \tag{3.17}
$$

$$
F^v_i = F^p_i - F^n_i \tag{3.18}
$$

L'operatore di corrente carica debole può essere separato in una parte vettoriale ed in una parte assiale:

$$
J_\alpha = J^V_\alpha + J^A_\alpha \tag{3.19}
$$

e i loro rispettivi elementi di matrice si possono decomporre in modo analogo alla decomposizione covariante dell'elemento di matrice di corrente elettromagnetica.

L'operatore di corrente carica debole vettoriale J^V_α ha le stesse proprietà invarianti dell'operatore di corrente elettromagnetica, quindi l'elemento di matrice di J^V_α tra stati nucleonici, con $\cos\theta_c \approx 1$, ha la stessa generale decomposizione covariante dell'elemento di matrice di j_α scritta nella relazione (3.13):

$$< p'|J^V_\alpha(0)\tau^+|p >=$$
$$= \overline{u}(\mathbf{p}')[\gamma_\alpha F_V(q^2) + \frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_M(q^2) + q_\beta F_S(q^2)]\tau^+ u(\mathbf{p}). \tag{3.20}$$

I fattori di forma di questa decomposizione sono legati ai fattori di forma elettromagnetici dalla teoria CVC (Corrente Vettoriale Conservata) la quale afferma:

1) gli operatori della corrente carica debole vettoriale e della corrente elettromagnetica isovettoriale formano un tripletto di isospin;

2) la corrente vettoriale debole $(J^{V\pm}_\alpha)_{fi}$, in analogia alla corrente elettromagnetica, si conserva:

$$\partial^\alpha (J^{V\pm}_\alpha)_{fi} = 0. \tag{3.21}$$

Dalla prima ipotesi discende che i fattori F_V e F_M sono identici ai fattori di forma isovettoriali (3.18).

Dalla seconda ipotesi di conservazione della corrente vettoriale segue che il fattore F_S è identicamente nullo.

L'operatore J^A_α si trasforma come un tensore vettore-assiale di Lorentz. Per la costruzione di tali operatori si devono utilizzare, oltre ai due quadrimomenti indipendenti p e q, il prodotto di matrici $\gamma_\alpha\gamma_5$ e le loro combinazioni. In analogia a quanto fatto per J^V_α, si ha:

$$< p'|J^A_\alpha(0)\tau^+|p >=$$

$$= \overline{u}(\mathbf{p}')[\gamma_\alpha F_A(q^2) + \frac{i}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q^\beta F_T(q^2) + q_\alpha F_P(q^2)]\gamma_5\tau^+ u(\mathbf{p}). \tag{3.22}$$

Abbiamo già osservato che le proprietà dei fattori di forma, con cui decomponiamo le correnti sia elettromagnetiche che deboli, sono determinate dal comportamento delle stesse correnti sotto operazioni di simmetria. Applicando gli operatori di inversione temporale e di coniugazione di carica si può dimostrare che i fattori di forma F_V, F_M, F_A e F_P sono reali, mentre F_S e F_T devono essere nulli per qualsiasi valore di q^2 [Bai82]. Il termine di corrente legato al fattore di forma F_P, detto pseudoscalare, è collegato al tipo di corrente adronica generata dai pioni. Sotto alcune ipotesi (conservazione parziale della corrente assiale PCAC) è possibile collegare F_P con F_A:

$$F_P(q^2) = \frac{2MF_A(0)}{M_\pi^2 - q^2} \tag{3.23}$$

dove M_π è la massa del pione. Questa relazione è detta di Goldberger-Treiman. Il fattore di forma F_A è stato determinato dai risultati sperimentali su sezioni d'urto di reazioni neutrino-nucleo e, in analogia ai fattori di forma di Sachs, è parametrizzato in una forma di dipolo estratta dai dati sperimentali dei processi di diffusione neutrino-deutone e di elettroproduzione di pioni da protoni [Bad88]. I dati sperimentali risultano essere ben riprodotti da un andamento del tipo:

$$F_A(q^2) = \frac{F_A(0)}{(1 - q^2/M_A^2)^2} \tag{3.24}$$

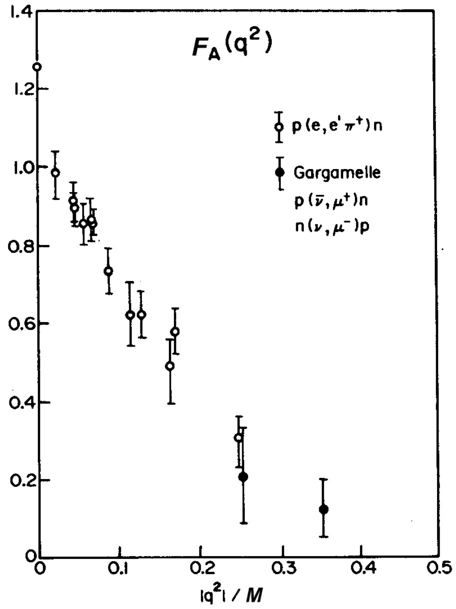

Figura 3.3: *Il fattore di forma assiale $F_A(q^2)$ del nucleone estratto da processi di disintegrazione del deuterio, indotto da diffusione di neutrini, e da processi di elettroproduzione di pioni da protoni.*

dove $F_A(0)$ è la carica assiale e M_A è un parametro detto massa assiale di dipolo, i cui valori sono stati determinati empiricamente.

Il valore di F_A per $q^2 \to 0$ è stato determinato con molta precisione da esperimenti di decadimento β del neutrone, dove si è ottenuto il valore:

$$\frac{F_A(0)}{F_V(0)} = 1.259 \pm 0.017 \tag{3.25}$$

Poichè per CVC $F_V(0) = 1$, si ha che $F_A(0) = 1.259 \pm 0.017$.

La massa assiale di dipolo M_A ha il valore sperimentale:

$$M_A = 1.05 \pm 0.03 GeV \tag{3.26}$$

ottenuto analizzando i dati di diffusione di neutrini su bersagli di nuclei leggeri come il deuterio. L'analisi sperimentale di diffusione di neutrini su bersagli di nuclei pesanti, come il freon o il freon-propano, conferma questo valore. Tuttavia sono ancora consistenti le incertezze sulla determinazione di M_A, dovute soprattutto agli effetti nucleari non facilmente calcolabili [Ose92].

3.2 Calcolo della sezione d'urto

Note le espressioni degli operatori delle correnti deboli vettoriali e vettore-assiali, siamo in grado di calcolare la sezione d'urto del processo quasielastico neutrino-nucleone.

Come discusso nel capitolo uno, l'espressione della sezione d'urto differenziale non polarizzata è:

$$d\sigma = \frac{1}{4k \cdot p}\overline{|\mathcal{M}|^2}(2\pi)^4\delta^4(k' + p' - k - p)\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2k'^0}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'^0} \tag{3.27}$$

dove $\mathcal{M}$ è l'ampiezza invariante di transizione al primo ordine. Dato che consideriamo sempre esperimenti in cui la polarizzazione delle particelle non viene rilevata, sommiamo su tutte le possibili polarizzazioni dello stato finale e mediamo su quelle dello stato iniziale. Segue che:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2}\sum_{s,s'} L^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \tag{3.28}$$

dove $L^{\alpha\beta}$ è il tensore leptonico, la cui espressione è stata valutata nel paragrafo 2.3, e $J_{\alpha\beta}$ è il tensore adronico, la cui espressione è presentata in Appendice B.

Consideriamo il sistema di riferimento di laboratorio dove il neutrone è a riposo:

$$
\begin{aligned}
k &= (\epsilon, \mathbf{k}) \\
k' &= (\epsilon', \mathbf{k}') \\
p &= (M, \mathbf{0}) \\
p' &= (E', \mathbf{p}')
\end{aligned}
$$

Per integrare su tutti i possibili stati del protone consideriamo le seguenti relazioni:

$$
\frac{d^3p'}{2\epsilon'} = d^4p'\delta(p'^2 - M^2)\Theta(p'^0) \tag{3.29}
$$

$$
d^3k' = 2\pi\epsilon'^2 d\epsilon' d\cos\theta \tag{3.30}
$$

dove abbiamo indicato con θ l'angolo tra la direzione del fascio dei neutrini incidenti e la direzione del leptone uscente e con Θ la funzione gradino.

Sostituendo le relazioni (3.29), (3.30) nell'equazione (3.27) e successivamente integrando su d^4p' si ha:

$$
\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{4k \cdot p} \int \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^4(k' + p' - k - p) d^4p'\delta(p'^2 - M^2)\Theta(p'^0)\pi\epsilon' d\epsilon' d\cos\theta \\
&= \frac{1}{16\pi} \frac{1}{k \cdot p} \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta((k + p - k')^2 - M^2)\epsilon' d\epsilon' d\cos\theta \\
&= \frac{1}{16\pi} \frac{1}{k \cdot p} \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta(p^2 + q^2 + 2M\omega - M^2)\epsilon'^2 d\epsilon' d\cos\theta \\
&= \frac{1}{32M\pi} \frac{1}{k \cdot p} \overline{|\mathcal{M}|^2} \delta(\omega + \frac{q^2}{2M})\epsilon' d\epsilon' d\cos\theta
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

dove ω è la componente q^0 del quadrivettore $q \equiv (\omega,\mathbf{q})$.

Usando la relazione:

$$dq^2 d\omega = 2\epsilon\epsilon' d\epsilon' d\cos\theta \tag{3.32}$$

abbiamo:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi M^2\epsilon^2}\overline{|\mathcal{M}|^2}\delta(\omega + \frac{q^2}{2M})dq^2 d\omega \tag{3.33}$$

integrando su $d\omega$:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi M^2\epsilon^2}\overline{|\mathcal{M}|^2}dq^2 \tag{3.34}$$

In appendice B mostriamo che, trascurando la massa del leptone uscente, possiamo esprimere $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ in funzione delle variabili di Mandelstan come:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8G^2[A(q^2) - B(q^2)(s-u) + C(q^2)(s-u)^2] \tag{3.35}$$

dove abbiamo definito:

$$\begin{aligned} A(q^2) &= q^2\left[\frac{1}{4}F_V(q^2)^2(4M^2+q^2) + \frac{1}{4}F_A(q^2)^2(-4M^2+q^2)\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{4M^2}F_M(q^2)^2(4M^2+q^2) + \frac{1}{2}F_V F_M q^2\right] && (3.36) \\ B(q^2) &= q^2\left[F_A(q^2)F_M(q^2) + F_V(q^2)F_A(q^2)\right] && (3.37) \\ C(q^2) &= \left[\frac{1}{4}F_V(q^2)^2 + \frac{1}{4}F_A(q^2)^2 - \frac{1}{4M^2}F_M(q^2)^2 q^2\right] && (3.38) \end{aligned}$$

La sezione d'urto differenziale inclusiva del processo è :

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{G^2}{8\pi M^2\epsilon^2}[A(q^2) - B(q^2)(s-u) + C(q^2)(s-u)^2]. \tag{3.39}$$

Capitolo 4

Diffusione neutrino-nucleone anelastica

Introduzione

In questo capitolo estendiamo la nostra discussione ai processi semileptonici, analizzando la diffusione anelastica di neutrini su nucleoni liberi. Per valori di energia del neutrino incidente maggiori di 1 GeV si osservano stati eccitati nucleonici, detti risonanze nucleoniche. Per valori di energia molto maggiori di 1 GeV hanno luogo processi di frammentazione del bersaglio (processi profondamente anelastici), da cui segue la formazione di diversi stati adronici (vedi fig. 4.1). La sezione d'urto relativa a questo tipo di processi, che ci proponiamo di calcolare, è limitata a processi inclusivi, dove sono osservati solo gli stati finali del leptone uscente. In questo modo

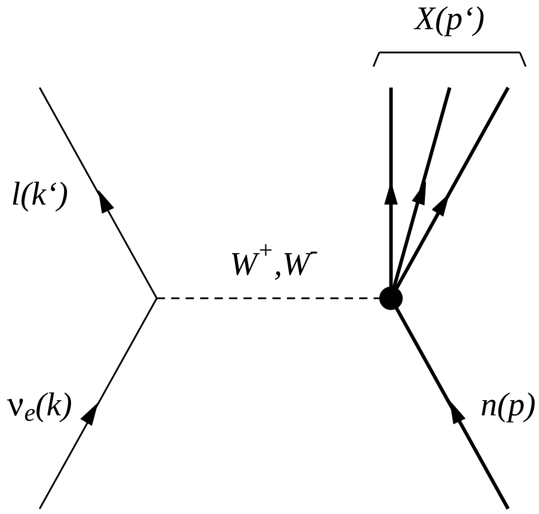

Figura 4.1: *Diffusione anelastica neutrino-nucleone.*

evitiamo la dettagliata descrizione della transizione del bersaglio dagli stati iniziali agli stati finali per effetto dell'interazione. La dinamica che sottende il vertice adronico è descritta, in analogia al caso di diffusione quasi-elastica, in termini di funzioni scalari, funzioni di struttura adroniche, che dipendono da variabili cinematiche come l'energia e il momento trasferiti.

4.1 Calcolo della sezione d'urto inclusiva

Analizziamo la reazione di corrente carica:

$$\nu + N \to l + X \tag{4.1}$$

con N e X rispettivamente il nucleone e un qualsiasi stato adronico finale ed l il leptone finale della stessa famiglia del neutrino incidente ν. In accordo con le regole di Feynman e in approssimazione dell'interazione debole di contatto, l'ampiezza di transizione del processo (4.1) risulta:

$$S_{fi} = -i\frac{G}{\sqrt{2}}\overline{u}(\mathbf{k}',s')\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5)u(\mathbf{k},s)$$
$$< X(p')|J_{\alpha}(0)|N(p) > (2\pi)^4\delta^4(k'+p'-k-p) \qquad (4.2)$$

dove u è lo spinore di Dirac che descrive lo stato leptonico nello spazio dei momenti, X è lo stato adronico finale, J_α è l'operatore di corrente carica adronica definito nel paragrafo 3.1 e infine (k,p) e (k',p') sono rispettivamente i quadrimomenti iniziali e finali delle particelle definiti rispetto al sistema di laboratorio dove il bersaglio è a riposo:

$$p = (M,\mathbf{0}),\ k = (\epsilon,\mathbf{k}),\ p' = (E',\mathbf{p}'),\ k' = (\epsilon',\mathbf{k}'). \qquad (4.3)$$

Consideriamo fasci di neutrini su bersagli non polarizzati, per cui l'elemento di matrice non presenta esplicita dipendenza dalle variabili di spin.

Dalla forma generale della sezione d'urto data nel capitolo due in eq. (2.23) abbiamo:

$$d^2\sigma = \frac{1}{4M\epsilon}|\mathcal{M}|^2\frac{d^3p'}{2E'(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{2\epsilon'(2\pi)^3}. \qquad (4.4)$$

Integrando sul momento dello stato adronico finale e sommando su tutte le orientazioni di spin otteniamo:

$$
\begin{aligned}
d^2\sigma &= \frac{G^2}{4M\epsilon}\left(\sum_{spin} l^{\alpha *} l^{\beta}\right)\frac{1}{2}\sum_{spin}\int \frac{d^3p'}{2E'(2\pi)^3} < p|J^{\dagger}_{\alpha}(0)|X >< X|J_{\beta}\left(0\right)|p > \\
& (2\pi)^4\delta^4(k'+p'-p-k)\frac{\mathbf{k'}^2 d|\mathbf{k'}|d\Omega}{2\epsilon'(2\pi)^3} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

dove con l^{α} indichiamo l'elemento di matrice leptonico. Se assumiamo che l'energia coinvolta nel processo sia sufficientemente alta da trascurare la massa del leptone finale, risulta $\mathbf{k'^2} \approx \epsilon'^{\mathbf{2}}$ e $d|\mathbf{k'}| \approx \mathbf{d}\epsilon'$. Infine sommando su tutti gli stati finali adronici X permessi dalle regole di selezione e dalla conservazione del quadrimomento, otteniamo la sezione d'urto inclusiva:

$$
\frac{d^2\sigma}{d\epsilon' d\Omega} = \frac{G^2}{(2\pi)^2}\frac{\epsilon'}{8\epsilon} L^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \qquad (4.6)
$$

dove $L^{\alpha\beta}$ e $W_{\alpha\beta}$ sono tensori di Lorentz. Il contributo leptonico è contenuto nel tensore $L^{\alpha\beta} = (\sum_{spin} l^{\alpha *} l^{\beta})$ dato dall'equazione (2.41) nel capitolo due:

$$
L^{\alpha\beta} = 8[k'^{\alpha}k^{\beta} + k^{\alpha}k'^{\beta} - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}k_{\nu}]. \qquad (4.7)
$$

Il tensore adronico $W_{\alpha\beta}$ è definito come:

$$
W_{\alpha\beta} = (2\pi)^3(2M)^{-1}\frac{1}{2}\sum_{spin}\sum_{X} < p|J^{\dagger}_{\alpha}(0)|X >< X|J_{\beta}(0)|p > \delta^4(k'+p'-k-p) \quad (4.8)
$$

La decomposizione più generale di $W_{\alpha\beta}$, che si ottiene utilizzando i quadrimomenti indipendenti p e q con $(p' = p + q)$ e i tensori invarianti $g_{\alpha\beta}$ e $\epsilon_{\alpha\beta\tau\rho}$, è:

$$
\begin{aligned}
W_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta}W_1 + \frac{p_{\beta}p_{\alpha}}{M^2}W_2 - \frac{i}{2M^2}\epsilon_{\alpha\rho\beta\tau}p_{\rho}q_{\tau}W_3 + \frac{q_{\beta}q_{\alpha}}{M^2}W_4 \\
&+ \frac{1}{2M^2}[p_{\beta}q_{\alpha} + p_{\alpha}q_{\beta}]W_5 + \frac{i}{2M^2}[p_{\beta}q_{\alpha} - p_{\alpha}q_{\beta}]W_6 \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

con M e m rispettivamente la massa del bersaglio e del leptone uscente.

Le funzioni W_i sono funzioni scalari reali che dipendono dalle due variabili scalari invarianti di Lorentz q^2 e $\eta = \frac{p \cdot q}{M}$. Rispetto al sistema di laboratorio fissato, la variabile η coincide con la quantità di energia trasferita $\omega = (\epsilon - \epsilon')$:

$$W_i = W_i(q^2, \eta). \tag{4.10}$$

Il termine pseudotensore $\epsilon_{\alpha\rho\beta\tau} p_\rho q_\tau$ deriva dall'interferenza dei termini vettoriali ed assiali della corrente debole carica ed è la parte non invariante sotto l'operazione della parità.

Calcoliamo la contrazione del tensore leptonico con il tensore adronico $W_{\alpha\beta}$ e otteniamo (vedi appendice C) nel limite ultra relativistico ($m \ll \epsilon'$) l'espressione:

$$L^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} = 8 \left[-q^2 W_1 + \left(2\epsilon(\epsilon - \omega) + \frac{1}{2} q^2 \right) W_2 + \frac{q^2}{2M} (\epsilon - \omega) W_3 \right] \tag{4.11}$$

La sezione d'urto risulta:

$$\frac{d^2\sigma}{d\epsilon' d\Omega} = \frac{G}{(2\pi)^2} \frac{\epsilon'}{\epsilon} \left[-q^2 W_1 + \left(2\epsilon(\epsilon - \omega) + \frac{1}{2} q^2 \right) W_2 + \frac{q^2}{2M} (2\epsilon - \omega) W_3 \right] \tag{4.12}$$

o rispetto alle variabili ω e q^2:

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\omega} = \frac{G^2}{4\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \left[-q^2 W_1 + \left(2\epsilon(\epsilon - \omega) + \frac{1}{2} q^2 \right) W_2 + \frac{q^2}{2M} (2\epsilon - \omega) W_3 \right]. \tag{4.13}$$

Come è stato già accennato nel precedente capitolo, la parte vettoriale della corrente debole carica ha la stessa struttura e le stesse proprietà della corrente elettromagnetica per la teoria CVC. Infatti l'espressione della sezione d'urto del processo di diffusione elettromagnetica anelastica di leptoni carichi su nucleoni, nel limite ultrarelativistico, è:

$$\frac{d^2\sigma}{dq^2 d\omega} = \frac{4\pi\alpha^2}{Mq^4\epsilon^2}\left[-q^2\widetilde{W}_1 + \left(2\epsilon(\epsilon-\omega) + \frac{1}{2}q^2\right)\widetilde{W}_2\right]. \tag{4.14}$$

I due termini in $\widetilde{W}_1$ e $\widetilde{W}_2$ sono analoghi ai rispettivi termini presenti in eq. (4.13). Ovviamente è assente l'analogo termine in W_3 che deriva dalla parte assiale della corrente debole.

Capitolo 5

Diffusione neutrino-nucleo

Introduzione

Le interazioni tra neutrini e la materia sono principalmente interazioni tra neutrini e nuclei. L'analisi di questi processi è complicata poiché è necessaria la descrizione nucleare a molti corpi. La scelta dei modelli teorici nucleari dipende dall'energia trasferita dalle particelle con cui il nucleo interagisce. Per energie dell'ordine di qualche MeV tutti i nucleoni costituenti il nucleo saranno coinvolti nell'eccitazione e sarà necessario usare modelli e teorie che descrivono questi modi collettivi. Per valori di energia di qualche centinaia di MeV, l'interazione coinvolgerà singolarmente i nucleoni e in buona approssimazione si può descrivere il processo in termini di diffusione su nucleoni quasi liberi. A energie superiori di 300 MeV avranno luogo anche processi con eccitazione dei gradi di libertà nucleonici.

Nella nostra discussione ci proponiamo di definire l'operatore di corrente nucleare indipendentemente dalla configurazione a molticorpi che descrive il nucleo e secondo una trattazione non relativistica. Una volta sviluppato l'elemento di matrice di transizione in termini di multipoli, vedremo come gli operatori di multipolo siano legati all'operatore di corrente definito con le caratteristiche descritte precedentemente.

Il presente capitolo si articola principalmente in due sezioni: nella prima deriveremo l'espressione generale della sezione d'urto inclusiva del processo neutrino-nucleo; nella seconda verrà calcolato l'elemento di matrice di transizione utilizzando lo sviluppo in multipoli.

5.1 Sezione d'urto inclusiva neutrino-nucleo

L'espressione della sezione d'urto inclusiva, relativa al processo di diffusione del neutrino su nucleo, si ottiene seguendo lo stesso procedimento che abbiamo utilizzato nel capitolo quarto per il processo di diffusione neutrino-nucleone. Anche in questo caso consideriamo solo interazioni deboli di corrente carica e lavoriamo con valori di energie e momenti trasferiti minori di 1 GeV, che ci consentono di utilizzare l'interazione di contatto. Il diagramma di Feynman in fig. 5.1 descrive la reazione in esame:

$$\nu(k) + N(P) \rightarrow \ell^-(k') + X(P') \tag{5.1}$$

Le quantità in parentesi indicano i quadrimomenti delle rispettive particelle, definiti

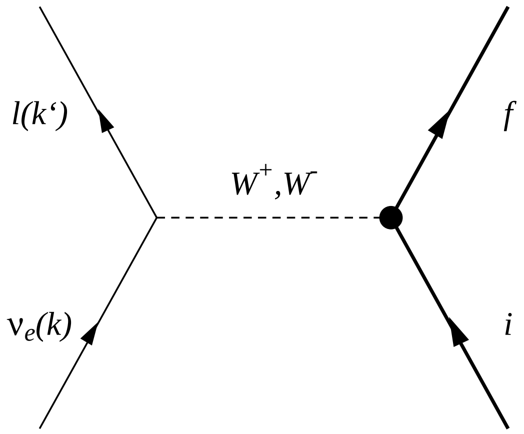

Figura 5.1: *Diffusione anelastica neutrino-nucleo.*

rispetto al sistema di laboratorio dove il bersaglio è a riposo, $P(M, \mathbf{0})$. Il leptone uscente di massa m_l è rivelato ad un angolo θ rispetto alla direzione del neutrino incidente. Per il calcolo delle sezione d'urto teniamo conto delle seguenti ipotesi:

1) il nucleo è un'oggetto esteso e il moto del suo centro di massa è descritto dalla funzione d'onda piana $\Psi(x) = \frac{1}{V}\exp(-iP \cdot x)$;

2) si trascurano le interazioni coulumbiane tra il leptone uscente e i nucleoni;

3) si trascura il rinculo del bersaglio.

Con queste ipotesi e utilizzando le regole di Feynman, l'ampiezza di transizione S_{fi} ha l'espressione:

$$S_{fi} = \frac{-i}{V^2}\frac{G}{\sqrt{2}} l^\alpha \int d^4x \exp(-iq \cdot x) < f|\widetilde{J}_\alpha(x)|i > \tag{5.2}$$

dove sono stati indicati con $|i>$ e $|f>$ gli stati nucleari iniziale e finale, con $l^\alpha \exp(-iq \cdot x)$ la corrente debole carica leptonica e con $\widetilde{J}_\alpha$ l'operatore di corrente carica debole nucleare.

La sezione d'urto differenziale inclusiva risulta:

$$d\sigma = \frac{G^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2[(k \cdot P)^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{k}'}{2\epsilon'} L^{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} \tag{5.3}$$

dove $L^{\alpha\beta}$ e $W_{\alpha\beta}$ sono tensori di Lorentz di rango due. Abbiamo definito $L^{\alpha\beta}$ il tensore che contiene il contributo leptonico, la cui espressione esplicita è stata data nel capitolo due in equazione (2.41). L'intera risposta nucleare, in seguito all'interazione neutrino-nucleo, è contenuta nel tensore $W_{\alpha\beta}$:

$$W_{\alpha\beta} = (2\pi)^3 V \overline{\sum_{spin}} \sum_f \delta^4(k' + P' - k - P) < P|\widetilde{J}^\dagger_\alpha(0)|P' >< P'|\widetilde{J}_\beta(0)|P > E \tag{5.4}$$

con V il volume di quantizzazione ed E l'energia iniziale del bersaglio. I simboli di sommatoria $\overline{\sum}_i$ e $\sum_f$ indicano rispettivamente la media su tutti gli stati iniziali del bersaglio e la somma su tutti i suoi possibili stati finali.

Secondo quanto discusso nel capitolo quarto, possiamo scrivere la decomposizione covariante di $W_{\alpha\beta}$ in termini dei quadrivettori indipendenti P e $q = (P' - P)$ come:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} W_1 + \frac{P_\beta P_\alpha}{M^2} W_2 - \frac{i}{2M^2} \epsilon_{\alpha\rho\beta\tau} P_\rho q_\tau W_3 \\ + \frac{q_\beta q_\alpha}{M^2} W_4 + \frac{1}{2M^2}[P_\beta q_\alpha + P_\alpha q_\beta] W_5 + \frac{i}{2M^2}[P_\beta q_\alpha - P_\alpha q_\beta] W_6 \end{aligned} \tag{5.5}$$

dove W_i sono funzioni scalari reali e dipendono dalle due variabili scalari invarianti di Lorentz, q^2 e $\eta = P \cdot q/M$:

$$W_i = W_i(q^2, \eta). \tag{5.6}$$

Il prodotto tensoriale $L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$, come è dimostrato in Appendice C in eq. C.9, risulta:

$$\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} &= 16\Big\{(k'\cdot k)W_1 + \frac{1}{2}(\epsilon'\epsilon + \mathbf{k'k})W_2 \\
&+ \frac{1}{2M}\Big((\epsilon'+\epsilon)(k'\cdot k) - m_l^2\epsilon\Big)W_3 + \frac{m_l^2}{2M^2}(k'\cdot k)W_4 + \frac{m_l\epsilon}{2M}(k'\cdot k)W_5\Big\} \\
&= 16\epsilon'\epsilon\Big\{\Big(W_1 + \frac{m_l^2}{2M^2}W_4\Big)(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{\epsilon'}\cos\theta) + \frac{W_2}{2}\Big(1 + \frac{|\mathbf{k}'|}{\epsilon'}\cos\theta\Big) \\
&+ \frac{W_3}{M}\Big((\epsilon+\epsilon')(1 - \frac{|\mathbf{k}'|}{\epsilon'}\cos\theta\Big) + (W_5 - W_3)\frac{m_l^2}{M\epsilon'}\Big\}. \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Se definiamo $\cos\chi = \frac{|\mathbf{k}'|}{\epsilon'}\cos\theta$:

$$\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} = 16\epsilon\epsilon'\Big\{\Big(W_1 + \frac{W_4}{2M^2}m_l^2\Big)(1-\cos\chi) + \frac{W_2}{2}(1+\cos\chi) \\
+ (W_5 - W_3)\frac{m_l^2}{M\epsilon'} + \frac{W_3}{M}(\epsilon+\epsilon')(1-\cos\chi)\Big\} \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

per $(1-\cos\chi) = 2\sin^2\frac{\chi}{2}$ e $(1+\cos\chi) = 2\cos^2\frac{\chi}{2}$

$$\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} &= 16\epsilon\epsilon'\Big\{\Big(2W_1 + \frac{W_4}{M^2}m_l^2\Big)\sin^2\frac{\chi}{2} + W_2\cos^2\frac{\chi}{2} \\
&\qquad + (W_5 - W_3)\frac{m_l^2}{M\epsilon'} + \frac{W_3}{M}(\epsilon+\epsilon')\sin^2\frac{\chi}{2}\Big\} \\
&= 16\epsilon\epsilon'\cos^2\frac{\chi}{2}\Big\{\Big(2W_1 + \frac{W_4}{M^2}m_l^2\Big)\tan^2\frac{\chi}{2} + W_2 \\
&\qquad + (W_5 - W_3)\frac{m_l^2}{M\epsilon'}\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}} + 2\frac{W_3}{M}(\epsilon+\epsilon')\tan^2\frac{\chi}{2}\Big\} \\
&= 16\epsilon\epsilon'\cos^2\frac{\chi}{2}\Big\{\Big(2W_1 + \frac{W_4}{M^2}m_l^2\Big)\tan^2\frac{\chi}{2} + W_2 \\
&+ (W_5 - W_3)\frac{m_l^2}{M\epsilon'}\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}} + 2\frac{W_3}{M}\tan\frac{\chi}{2}\sec\frac{\chi}{2}\Big(-q^2\cos^2\frac{\chi}{2} + \mathbf{q}^2\sin^2\frac{\chi}{2} + m_l^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

L'espressione della sezione d'urto differenziale inclusiva è:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma}{dk'd\Omega} = \frac{G^2\mathbf{k'^2}\cos^2\frac{\chi}{2}}{2\pi^2 M}\Big\{\Re_1(q^2,\nu)\tan^2\frac{\chi}{2} + \Big(\Re_3(q^2,\nu) - \Re_4(q^2,\nu)\Big)\frac{m_l^2}{M\epsilon'}\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}} \\
+ \Re_2(q^2,\nu) + 2\Re_4(q^2,\nu)\tan\frac{\chi}{2}\sec\frac{\chi}{2}\Big(-q^2\cos^2\frac{\chi}{2} + \mathbf{q^2}\sin^2\frac{\chi}{2} + m_l^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\} \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito:

$$
\begin{aligned}
\Re_1(q^2, \eta) &= \left(2W_1 + \frac{W_4}{M^2} m_l^2\right) \\
\Re_2(q^2, \eta) &= W_2 \\
\Re_3(q^2, \eta) &= W_5 \\
\Re_4(q^2, \eta) &= W_4
\end{aligned}
$$

Nei processi semileptonici, dove lo stato finale del bersaglio non viene osservato, la risposta del bersaglio, in seguito all'interazione con il leptone incidente, è caratterizzata dalle quattro risposte di superficie $\Re_i(q^2, \eta)$ con $i = 1,..,4$. La figura 5.2 illustra in un modo schematico gli aspetti che queste funzioni $\Re$ assumono al variare dell'energia trasferita ω per un dato valore di $\mathbf{q^2}$. I processi deboli cambiano la carica nucleare e la perdita minima di energia ΔE del bersaglio, necessaria affinché il processo avvenga, corrisponde alla differenza in massa del nucleo bersaglio e del nucleo finale, entrambi nel loro stato fondamentale ($\Delta E_{min} = \Delta M$). Si ha una regione di risposta a stati discreti eccitati ad energie di pochi MeV, a cui segue la regione delle risonanze giganti. Segue quindi la regione del picco quasi-elastico ad energie di poche centinaia di MeV. Superato il valore di soglia di circa 300 MeV, si ha la produzione di pioni associata all'eccitazione della risonanza Δ.

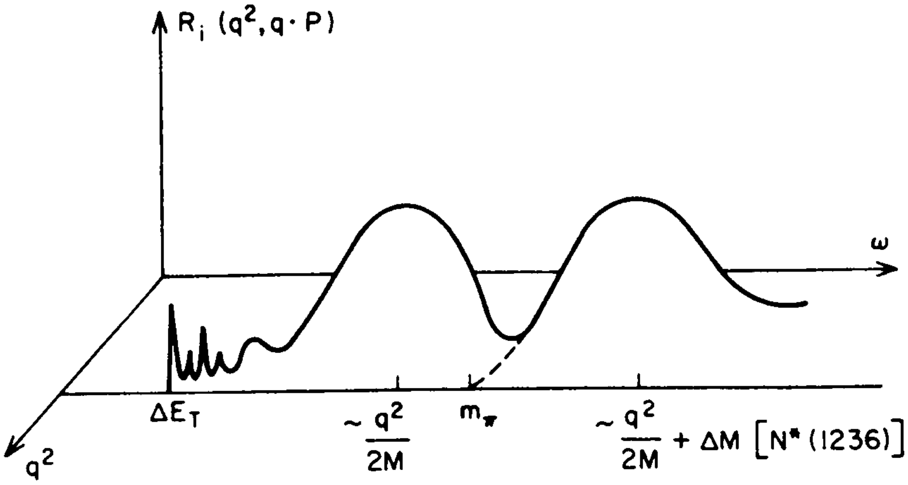

Figura 5.2: *L'andamento delle funzioni di risposta nucleari di superficie per processi deboli semileptonici ad un dato momento trasferito.*

5.2 Riduzione non relativistica dell'operatore di corrente

L'operatore di corrente $\widetilde{J}_\alpha$ presente nel tensore adronico $W_{\alpha\beta}$ è dato dalla somma del termine di corrente vettoriale $\widetilde{J}^V_\alpha$ e di corrente assiale $\widetilde{J}^A_\alpha$:

$$\widetilde{J}_\alpha(x) = \widetilde{J}^V_\alpha(x) + \widetilde{J}^A_\alpha(x). \tag{5.11}$$

Se il valore del momento trasferito $\mathbf{q}$ è dell'ordine di qualche centinaia di MeV, si può ritenere con buona approssimazione che il bosone vettore intermedio $W^\pm$ interagisca singolarmente con gli A nucleoni costituenti il nucleo bersaglio. In questa ipotesi l'operatore di corrente nucleare è dato dalla somma dei contributi dei singoli nucleoni:

$$\widetilde{J}_\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{A} J_\alpha(\mathbf{r_i})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i}) \tag{5.12}$$

dove la coordinata $\mathbf{r_i}$ indica la posizione dell'i-esimo nucleone. Supponiamo che l'operatore $\widetilde{J}_\alpha(\mathbf{r})$ agisca quasielasticamente su stati nucleonici di singola particella libera, trascurando le mutue interazioni tra nucleoni e la presenza delle correnti mesoniche di scambio; in questo caso possiamo estendere al caso di interazione con il nucleo la formula dell'elemento di matrice di corrente carica debole per un nucleone libero, definita nel capitolo terzo in eq. (3.20) e in eq. (3.22) con $F_S = F_T = 0$:

$$\begin{aligned} < p'|J_\alpha^{V\pm}(0)|p > &= \overline{u}(\mathbf{p'},s')\left[F_V(q^2)\gamma_\alpha + \frac{i}{2m}F_M(q^2)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]\tau^\pm u(\mathbf{p},s) \\ < p'|J_\alpha^{A\pm}(0)|p > &= \overline{u}(\mathbf{p'},s')\left[F_A(q^2)\gamma_\alpha + F_P(q^2)q_\alpha\right]\gamma_5\tau^\pm u(\mathbf{p},s). \end{aligned}$$

Dato che i modelli di struttura nucleare si basano su una descrizione non relativistica del moto dei nucleoni, facciamo una riduzione non relativistica dell'operatore, esplicitando i due elementi di matrice fino ad un ordine $|\mathbf{p}|/m$, dove m è la massa del nucleone. Il dettaglio del calcolo è stato riportato in Appendice D. Tenendo conto della dipendenza dei nucleoni dallo spin isotopico, le densità di corrente, per un singolo nucleone, hanno le seguenti espressioni:

$$< \mathbf{p'},s',\tau'|J_0^{V\pm}(0)|\mathbf{p},s,\tau > = F_V\chi_{\tau'}^\dagger\chi_{s'}^\dagger\tau^\pm\chi_s\,\chi_\tau \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} &< \mathbf{p'},s',\tau'|\mathbf{J}^{V\pm}(0)|\mathbf{p},s,\tau > = \\ &\qquad = \chi_{\tau'}^\dagger\chi_{s'}^\dagger\left[F_V\left(\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m}\right) + (F_V + F_M)i\boldsymbol{\sigma}\times\frac{\mathbf{q}}{2m}\right]\tau^\pm\chi_s\chi_\tau \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$< \mathbf{p}',s',\tau'|J_0^{A\pm}(0)|\mathbf{p},s,\tau> =$$

$$= \chi_{\tau'}^{\dagger}\chi_{s'}^{\dagger}\left[F_A\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m}\right) - q_0\left(F_P\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{2m}\right)\right]\tau^{\pm}\chi_s\,\chi_\tau \quad (5.15)$$

$$< \mathbf{p}',s',\tau'|\mathbf{J}^{A\pm}(0)|\mathbf{p},s,\tau> = \chi_{\tau'}^{\dagger}\chi_{s'}^{\dagger}\left[F_A\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}\left(F_P\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{2m}\right)\right]\tau^{\pm}\chi_s\,\chi_\tau \quad (5.16)$$

dove τ,τ' sono gli autovalori dell'operatore di isospin e χ_τ sono gli autostati dell'operatore di isospin rappresentati dagli spinori di Pauli.

Riprendiamo l'ampiezza di transizione relativa al processo di diffusione quasielastica neutrino-nucleone:

$$S_{fi} \propto l^\alpha \int d^4x\,\exp(-iq\cdot x) < p'|J_\alpha(x)|p >$$

ed esprimiamo J_α in rappresentazione di Heisenberg:

$$J_\alpha(x) = e^{iHt}J_\alpha(\mathbf{r})e^{-iHt}$$

dove H è l'hamiltoniana del sistema e $J_\alpha(\mathbf{r})$ è la parte di operatore che agisce solo sulla coordinata spaziale. Poiché le funzioni d'onda che descrivono gli stati nucleonici sono autofunzioni della hamiltoniana, si ha:

$$S_{fi} \propto l^\alpha \int dt\,d\mathbf{r}\,\exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\exp(E' - E - \omega) < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > .$$

Integrando sulla variabile temporale, otteniamo:

$$S_{fi} \propto 2\pi\delta(E' - E - \omega)l^\alpha \int\, d\mathbf{r} < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > .$$

Consideriamo solo il fattore $\int\, d\mathbf{r} < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p >$ e applichiamo la formula di integrazione per parti:

$$\int e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})} < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > d\mathbf{r} =$$

$$= -\left(\frac{i}{\mathbf{q}}\right)\left[e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})} < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p >\right]_{-\infty}^{\infty} + \left(\frac{i}{\mathbf{q}}\right)\int e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}\nabla < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > d\mathbf{r}. \quad (5.17)$$

Se ipotizziamo che il bersaglio sia localizzato, il primo termine della eq. (5.17) tende a zero, quindi rimane:

$$\mathbf{q}\int e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})} < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > d\mathbf{r} = i\int e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}\nabla < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > d\mathbf{r} \quad (5.18)$$

o equivalentemente:

$$\int e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}(i\mathbf{q}) < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > d\mathbf{r} = \int e^{(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}\nabla < p'|J_\alpha(\mathbf{r})|p > d\mathbf{r} \quad (5.19)$$

da cui segue che possiamo identificare $\mathbf{q}$ con il termine operatoriale $i\nabla$.

Gli operatori J_α^V e J_α^A, in termini delle quantità operatoriali presenti nelle relazioni $(5.13) - (5.16)$, sono definiti come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{V\pm}(\mathbf{r}) &= F_V\left(\frac{\mathbf{p}}{2m}\right)\tau^\pm + \frac{F_V + F_M}{2m}\nabla\times\boldsymbol{\sigma}\tau^\pm && (5.20)\\
\mathbf{J}^{A\pm}(\mathbf{r}) &= F_A\boldsymbol{\sigma}\tau^\pm + F_P\nabla\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\tau^\pm && (5.21)\\
J_0^{V\pm}(\mathbf{r}) &= F_V\tau^\pm && (5.22)\\
J_0^{A\pm}(\mathbf{r}) &= F_A\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\tau^\pm - iq^0F_P\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2m}\tau^\pm && (5.23)
\end{aligned}$$

dove $(2\mathbf{p}+\mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p}$ poichè $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$.

In analogia all'espressione della corrente elettromagnetica, è tradizione riscrivere J_α^V e J_α^A in termini di altre quantità:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{V\pm}(\mathbf{r}) &= \mathbf{J}_c^\pm(\mathbf{r}) + \nabla\times\boldsymbol{\mu}^\pm(\mathbf{r}) && (5.24)\\
\mathbf{J}^{A\pm}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}^\pm(\mathbf{r}) + \nabla\phi_{ps}^\pm(\mathbf{r}) && (5.25)
\end{aligned}$$

$$J_0^{V\pm}(\mathbf{r}) \;=\; \rho^{\pm}(\mathbf{r}) \tag{5.26}$$

$$J_0^{A\pm}(\mathbf{r}) \;=\; \rho_A^{\pm}(\mathbf{r}) - i[H, \phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r})] \tag{5.27}$$

con:

$$\mathbf{J}_c^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; F_V \left(\frac{\mathbf{p}}{2m}\right) \tau^{\pm} \tag{5.28}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; \frac{F_V + F_M}{2m} \boldsymbol{\sigma} \tau^{\pm} \tag{5.29}$$

$$\mathbf{A}^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; F_A \boldsymbol{\sigma} \tau^{\pm} \tag{5.30}$$

$$\phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; F_P \frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \tau^{\pm} \tag{5.31}$$

$$\rho^{\pm}(\mathbf{r})) \;=\; F_V \tau^{\pm} \tag{5.32}$$

$$\rho_A^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; F_A \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{2m} \tau^{\pm} \tag{5.33}$$

Il termine $q_0 \phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r})$ equivale al commutatore dell'operatore $\phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r})$ (definito operatore della corrente pseudoscalare) con l'Hamiltoniana nucleare, $[H, \phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r})]$, dato che le funzioni d'onda che descrivono gli stati nucleonici sono autofunzioni di H:

$$\int d^3r \psi_N^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[H \phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r}) - \phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r}) H\right] \psi_N(\mathbf{r}) = (E' - E) \int d^3r \psi_N^{\dagger}(\mathbf{r}) \phi_{ps}^{\pm}(\mathbf{r}) \psi_N(\mathbf{r}). \tag{5.34}$$

A questo punto costruiamo l'operatore $\widetilde{O}(\mathbf{r})$ a molticorpi ricordando la definizione (5.12)

$$\widetilde{O}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{A} \{O(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\} \tag{5.35}$$

e otteniamo:

$$\widetilde{\mathbf{J}}_c^{\pm}(\mathbf{r}) \;=\; F_V \sum_{i=1}^{A} \left[\frac{\mathbf{p}_i}{m}, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_i})\right]_{sym} \tau_i^{\pm} \tag{5.36}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{r}) = F_A \sum_{i=1}^{A} \boldsymbol{\sigma}_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_i})\ \tau_i^{\pm} \tag{5.37}$$

$$\widetilde{\rho}^{\pm}(\mathbf{r}) = F_V \sum_{i=1}^{A} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_i}) \tau_i^{\pm} \tag{5.38}$$

$$\widetilde{\rho}_A^{\pm}(\mathbf{r}) = F_A \sum_{i=1}^{A} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \left[\frac{\mathbf{p}_i}{m}, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r_i})\right]_{sym} \tau_i^{\pm} \tag{5.39}$$

con:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{F_V + F_M}{2mF_A} \widetilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{r}) \tag{5.40}$$

$$\widetilde{\phi}_{ps}^{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{F_P}{2mF_A} \boldsymbol{\nabla} \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^{\pm}(\mathbf{r}) \tag{5.41}$$

Il simbolo $[\ \ ]_{sym}$ indica l'operazione di simmetrizzazione dei due operatori $[A,B]_{sym} \equiv (AB + BA)/2$, necessaria per la non commutabilità di $\mathbf{p_i}$ e della coordinata $\mathbf{r_i}$.

5.3 Sviluppo in multipoli dell'elemento di matrice di transizione

Il nostro interesse per la risposta nucleare si limita al caso in cui il nucleo fa una transizione tra stati con momento angolare e parità definiti. Su questa ipotesi descriviamo l'ampiezza di transizione S_{fi} in termini di multipoli.

Riprendiamo l'espressione di S_{fi} in eq. (5.2):

$$S_{fi} = -\frac{i}{V^2} \frac{G}{\sqrt{2}} l^{\alpha} \int d^4x \exp(-iq \cdot x) < f|\widetilde{J}_{\alpha}(x)|i > \tag{5.42}$$

dove $\widetilde{J}^{\pm}_{\alpha} \equiv (\widetilde{J}^{V\pm}_{\alpha}, \widetilde{J}^{A\pm}_{\alpha})$ è l'operatore di corrente nucleare definito secondo le relazioni $(5.36) - (5.41)$, ottenute nel paragrafo precedente. Sfruttando la relazione:

$$\widetilde{J}_{\alpha}(x) = e^{iHt}\widetilde{J}_{\alpha}(\mathbf{r})e^{-iHt}$$

con H hamiltoniana nucleare, calcoliamo l'integrale temporale dell'espressione (5.42) in modo da avere la funzione integranda, dipendente solo dalla coordinata spaziale:

$$S_{fi} = -\frac{i}{V^2}\frac{G}{\sqrt{2}}l^{\alpha}2\pi\delta\left(E' - E - \omega\right)\int d\mathbf{r}\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) < f|\widetilde{J}_{\alpha}(\mathbf{r})|i> . \tag{5.43}$$

Identicamente la (5.43) si può riscrivere:

$$S_{fi} = R\int d\mathbf{r}\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\left[l^0 < f|\widetilde{J}_0(\mathbf{r})|i> -\mathbf{l}\cdot < f|\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r})|i>\right] \tag{5.44}$$

dove, per abbreviare la notazione, abbiamo indicato con R il fattore

$-\frac{i}{V^2}\frac{G}{\sqrt{2}}2\pi\delta\left(E' - E - \omega\right)$.

Le componenti delle quantità vettoriali presenti in (5.44) sono definite rispetto alla base dei vettori unitari sferici $\{\xi_{\lambda}\}_{\lambda=0,\pm1}$, le cui proprietà sono definite in App. E1, in particolare:

$$\mathbf{l} = \sum_{\lambda=0,\pm1} \mathrm{l}_{\lambda}\xi^{*}_{\lambda}$$

Sostituiamo la funzione esponenziale con il suo sviluppo in onde piane:

$$S_{fi} = R\int d\mathbf{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[4\pi(2\ell+1)\right]^{\frac{1}{2}}(i)^{\ell}j_{\ell}(\kappa r)Y_{\ell 0}(\vartheta\varphi)$$
$$\left[l^0 < f|\widetilde{J}_0(\mathbf{r})|i> - \sum_{\lambda=0,\pm1}\mathrm{l}_{\lambda}\xi^{*}_{\lambda}\cdot < f|\widetilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r})|i>\right] \tag{5.45}$$

dove $j_\ell(\kappa x)$ è la funzione di Bessel dipendente dal modulo del momento trasferito $\kappa = |\mathbf{q}|$, e dalla variabile r. Esplicitiamo l'espressione (5.45) utilizzando una serie di proprietà delle funzioni di Bessel, delle funzioni armoniche sferiche $Y_{\ell m}(\vartheta\varphi)$, delle funzioni armoniche sferiche vettoriali $\mathcal{Y}_{JJM}$ e dei coefficienti di Clebsh-Gordan, dati in Appendice E.2:

$$
\begin{aligned}
S_{fi} &= R < f| \sum_{J=0}^{\infty} \left[4\pi(2J+1)\right]^{\frac{1}{2}} (i)^J \left(l_0 C_{J0}(\kappa) + \mathrm{l}_o \mathcal{L}_{J0}(\kappa)\right) \\
&- \sum_{\lambda=\pm 1} \mathrm{l}_\lambda \left\{ \sum_{J\geq 1}^{\infty} \left[2\pi(2J+1)\right]^{\frac{1}{2}} (i)^J \left(\lambda \mathcal{J}^{mag}_{JM}(\kappa) + \mathcal{J}^{el}_{JM}(\kappa)\right) \right\} |i > \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

I termini $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{J}^{mag}$, $\mathcal{J}^{el}$ sono rispettivamente gli operatori di multipolo di carica (o di Coulomb), di multipolo longitudinale, di multipolo traversale elettrico e di multipolo traversale magnetico definiti come:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\pm}_{JM}(\kappa) &= \int d\mathbf{r} j_J(\kappa r) Y_{JM}(\vartheta\varphi) \widetilde{J}^{\pm}_0(\mathbf{r}) && (5.47) \\
\mathcal{L}^{\pm}_{JM}(\kappa) &= \frac{i}{\kappa} \int d\mathbf{r} \left[\nabla j_J(\kappa r) Y_{JM}(\vartheta\varphi)\right] \cdot \widetilde{\mathbf{J}}^{\pm}(\mathbf{r}) && (5.48) \\
\mathcal{J}^{el\pm}_{JM}(\kappa) &= \frac{1}{\kappa} \int d\mathbf{r} \left[\nabla \times j_J(\kappa r) \mathcal{Y}_{JJM}\right] \cdot \widetilde{\mathbf{J}}^{\pm}(\mathbf{r}) && (5.49) \\
\mathcal{J}^{mag\pm}_{JM}(\kappa) &= \int d\mathbf{r} j_J(\kappa r) \mathcal{Y}_{JJM} \cdot \widetilde{\mathbf{J}}^{\pm}(\mathbf{r}) && (5.50)
\end{aligned}
$$

Questi operatori sono operatori tensoriali sferici di rango J che operano nello spazio di Hilbert nucleare. La conservazione del momento angolare implica la regola di selezione:

$$|J_i - J_f| \leq J \leq J_i + J_f \qquad (5.51)$$

Il loro uso è vantaggioso poiché valutiamo elementi di matrice tra autostati caratterizzati dal buon numero quantico del momento angolare e parità. In questo contesto usiamo il teorema di Wigner-Eckart che ci permette di separare la parte dipendente dal numero quantico della proiezione magnetica M del momento angolare J dal resto dell'elemento di matrice. Applichiamo il teorema secondo la convezione

$$< J_f, M_f | O_{JM}(\kappa) | J_i, M_i >= (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} (J_f || O_J(\kappa) || J_i).$$

A questo punto troviamo l'espressione dell'elemento di matrice di transizione in funzione degli elementi di matrice ridotti degli operatori di multipolo. Innanzitutto calcoliamo il modulo quadro di $|S_{fi}|$:

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= |R|^2 | < f | \sum_{J=0}^{\infty} \left\{ [4\pi(2J+1)]^{\frac{1}{2}} (i)^J \left(l_0 C_{J0}(\kappa) + \mathrm{l}_o \mathcal{L}_{J0}(\kappa) \right) \right\} \\ &- \sum_{\lambda=\pm 1} \mathrm{l}_\lambda \left\{ \sum_{J \geq 1}^{\infty} [2\pi(2J+1)]^{\frac{1}{2}} (i)^J \left(\lambda \mathcal{J}_{JM}^{mag}(\kappa) + \mathcal{J}_{JM}^{el}(\kappa) \right) \right\} |i > |^2. \quad (5.52) \end{aligned}$$

Poiché non siamo interessati allo stato di polarizzazione del bersaglio, calcoliamo la somma incoerente degli elementi di matrice elevati al quadrato su tutte le proiezioni dello spin nucleare nello stato finale e la media su tutte le possibili orientazioni dello spin nucleare nello stato iniziale :

$$\overline{\sum_{M_i}} \sum_{M_f} | < J_f, M_f | O_{JM}(\kappa) | J_i, M_i > |^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} | < J_f, M_f | O_{JM}(\kappa) | J_i, M_i > |^2$$

$$= \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_i, M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & M' & M_i \end{pmatrix} | < J_f || O_{JM}(\kappa) || J_i > |^2$$

Applichiamo la relazione di completezza:

$$\sum_{Mi,M_f} \begin{pmatrix} J_f & J & J_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & J' & J_i \\ -M_f & M' & M_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2J+1}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}$$

e otteniamo:

$$\frac{1}{2J_i+1}\sum_{Mi,M_f} |< J_f,M_f|O_{JM}(\kappa)|J_i,M_i >|^2 =$$
$$= \frac{1}{2J_i+1}\frac{1}{2J+1} |< J_f \; ||O_J(\kappa)|| \; J_i >|^2 \qquad (5.53)$$

Eseguite tutte le opportune operazioni, il quadrato dell'elemento di matrice di transizione ha l'espressione:

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= R^2\frac{1}{2J_i+1}\left\{- \sum_{\lambda=\pm1} \mathrm{l}_\lambda \mathrm{l}_\lambda^* \left[\sum_{J\geq1}^{\infty} 2\pi| < J_f||\lambda\mathcal{J}_J^{mag} + \mathcal{J}_J^{el}||J_i > |^2\right]\right. \\ & + \sum_{J=0}^{\infty} 4\pi \left[\mathrm{l}_0\mathrm{l}_0^* < J_f||\mathcal{L}_J||J_i > |^2 + \ell_0\ell_0^*| < J_f||\mathcal{C}_J||J_i > |^2\right. \\ & +2Re\left(\mathrm{l}_0\ell_0^* < J_f||\mathcal{L}_J||J_i >< J_f||\mathcal{C}_J||J_i >^*\right)]\} \qquad (5.54) \end{aligned}$$

L'ultimo risultato ottenuto può essere ulteriormente semplificato notando che:

$$\sum_{\lambda=\pm1} \mathrm{l}_\lambda \mathrm{l}_\lambda^* \, |a+\lambda b|^2 = (\mathbf{l}\cdot\mathbf{l}^* - \mathrm{l}_0\mathrm{l}_0^*)\left(\left|a\right|^2 + \left|b\right|^2\right) - i\,(\mathbf{l}\times\mathbf{l}^*)_0\, 2Re(a^*b)$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 = R^2\frac{4\pi}{(2J_i+1)} & \left\{\sum_{J\geq1}^{\infty}\frac{1}{2}(\mathrm{l}_0\mathrm{l}_0^* - \mathbf{l}\cdot\mathbf{l})\left(| < J_f||\mathcal{J}_J^{mag}||J_i > |^2\right.\right. \\ + & \left.| < J_f||\mathcal{J}_J^{el}||J_i > |^2\right) + \frac{i}{2}(\mathbf{l}\times\mathbf{l})_0 2Re(< J_f||\mathcal{J}_J^{mag}||J_i >< J_f||\mathcal{J}_J^{el}||J_i >^*) \\ + & \sum_{J=0}^{\infty} \mathrm{l}_0\mathrm{l}_0^*| < J_f||\mathcal{L}_J||J_i > |^2 + \ell_0\ell_0^*| < J_f||\mathcal{C}_J||J_i > |^2 \\ + & \left.2Re\left(\mathrm{l}_0\ell_0^* < J_f||\mathcal{L}_J||J_i >< J_f||\mathcal{C}_J||J_i >^*\right)\right\} \qquad (5.55) \end{aligned}$$

Sommiamo su tutte le proiezioni dello spin del leptone uscente e utilizzando le tecniche delle tracce (Appendice F) si ha:

$$
\begin{aligned}
|S_{fi}|^2 &= R^2 \frac{4\pi}{(2J_i+1)} \left\{ \sum_{J=0}^{\infty} (1 + \widehat{\nu} \cdot \beta) | < J_f \; ||\mathcal{C}_J|| \; J_i > |^2 \right. \\
&\quad + (1 - \widehat{\nu} \cdot \beta + 2(\widehat{\nu} \cdot \widehat{\mathbf{q}})(\widehat{\nu} \cdot \beta)) \, | < J_f \; ||\mathcal{L}_J|| \; J_i > |^2 \\
&\quad + \widehat{\mathbf{q}} \cdot (\widehat{\nu} + \widehat{\mathbf{q}}) 2Re < J_f ||\mathcal{L}_J|| \; J_i >< J_f \; ||\mathcal{C}_J|| J_i >^* \\
&\quad - \sum_{J \geq 1}^{\infty} (1 - (\widehat{\nu} \cdot \widehat{\mathbf{q}})(\widehat{\nu} \cdot \beta)) \Big(| < J_f || \mathcal{J}_J^{mag} || J_i > |^2 + | < J_f || \mathcal{J}_J^{el} || J_i > |^2 \Big) \\
&\quad \left. - \, \widehat{\mathbf{q}} \cdot (\widehat{\nu} - \widehat{\mathbf{q}}) 2Re < J_f || \mathcal{J}_J^{mag} || J_i >< J_f || \mathcal{J}_J^{el} || J_i >^* \right\} \qquad (5.56)
\end{aligned}
$$

dove $\widehat{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}/|\mathbf{q}| \equiv e_3$, $\beta = \mathbf{k}'/\varepsilon', \widehat{\boldsymbol{\nu}} \equiv \boldsymbol{k}/\epsilon$.

Ciascun operatore di multipolo O_{JM} si separa nei due termini che derivano dalla parte vettoriale ed assiale dell'operatore di corrente:

$$\mathcal{C}_{JM}(\kappa) = C^V_{JM,}(\kappa) + C^A_{JM}(\kappa) \qquad (5.57)$$

$$\mathcal{L}_{JM}(\kappa) = L^V_{JM}(\kappa) + L^A_{JM}(\kappa) \qquad (5.58)$$

$$\mathcal{J}^{el}_{JM}(\kappa) = T^{elV}_{JM}(\kappa) + T^{elA}_{JM}(\kappa) \qquad (5.59)$$

$$\mathcal{J}^{mag}_{JM}(\kappa) = T^{magV}_{JM}(\kappa) + T^{magA}_{JM}(\kappa) \qquad (5.60)$$

e ciascuno di essi ha parità definita come indicato dalla tabellla 5.1, quindi nel calcolo del modulo quadro i rispettivi elementi di matrice non interferiscono per le diverse regole di selezione sulla parità.

Una volta che abbiamo definito gli operatori di multipolo e abbiamo individuato la loro azione sugli stati nucleari, esprimiamo tali operatori in termini degli operatori di

$C^V_{JM,}(\kappa)$	$C^A_{JM}(\kappa)$	$L^V_{JM}(\kappa)$	$L^A_{JM}(\kappa)$	$T^{elV}_{JM}(\kappa)$	$T^{elA}_{JM}(\kappa)$	$T^{magV}_{JM}(\kappa)$	$T^{magA}_{JM}(\kappa)$
$(-1)^J$	$(-1)^{J+1}$	$(-1)^J$	$(-1)^{J+1}$	$(-1)^J$	$(-1)^{J+1}$	$(-1)^{J+1}$	$(-1)^J$

Tabella 5.1: *La parità degli operatori di multipolo.*

corrente definiti in (5.36) – (5.41), inserendoli esplicitamente nelle quantità definite in (5.47) – (5.50). Si ha:

$$C^V_{JM} = F_V M^M_J(\mathbf{r_i}) \tag{5.61}$$

$$L^V_{JM} = -\frac{q_o}{\kappa} F_V M^M_J(\mathbf{r_i}) \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned} T^{elV}_{JM} &= \frac{F_V}{m}\left[-\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J+1}}(\mathbf{r_i}) + \left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J-1}}(\mathbf{r_i})\right]\cdot \nabla_\mathbf{i} \\ &+\frac{\kappa}{2m}(F_V+F_M)\mathbf{M^M_{J,J}}(\mathbf{r_i})\cdot \boldsymbol{\sigma}_i \end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned} T^{magV}_{JM} &= \frac{F_V}{im}\mathbf{M^M_{J,J}}(\mathbf{r_i})\cdot\nabla_\mathbf{i} + \frac{\kappa}{2m}(F_V+F_M)\left[-i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J+1}}(\mathbf{r_i})\right. \\ &\left. +i\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J-1}}(\mathbf{r_i})\right]\cdot\sigma_\mathbf{i} \end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned} L^A_{JM} &= F_A\left[-i\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J+1}}(\mathbf{r_i}) + i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J-1}}(\mathbf{r_i})\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}_i \\ &+\frac{\kappa^{\mathbf{2}}}{2m}F_P\left[-i\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J+1}}(\mathbf{r_i}) + i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J-1}}(\mathbf{r_i})\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}_i \end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned} C^A_{JM} &= -i\frac{F_A}{m}M^M_J(\mathbf{r_i})\boldsymbol{\sigma}_i\cdot\nabla_i + \frac{\kappa}{2m}(F_A+q_0F_P)\left[-i\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J+1}}(\mathbf{r_i})\right. \\ &\left. +i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J-1}}(\mathbf{r_i})\right]\cdot\boldsymbol{\sigma}(i) \end{aligned} \tag{5.66}$$

$$T^{magA}_{JM} = F_A\mathbf{M^M_{J,J}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_i \tag{5.67}$$

$$T_{JM}^{elA} = F_A \left[-i \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J+1}(r_i)} + i \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{M^M_{J,J-1}(r_i)} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \qquad (5.68)$$

con

$$\mathbf{M^M_{JJ}}(r) \equiv j_J(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJM}(\vartheta\varphi)$$

$$M_J^M(r) \equiv j_J(\kappa r)Y_{JM}(\vartheta\varphi)$$

A questo punto, avendo esplicitato le espressioni degli operatori di transizione debole, non rimane che il calcolo esplicito degli elementi di matrice nucleari. Per fare questo è necessario utilizzare modelli che forniscano esplicite descrizioni dello stato fondamentale e di quelli eccitati. Questo è un problema di struttura nucleare che va oltre lo scopo del presente lavoro.

Capitolo 6

Conclusioni

Nel nostro lavoro ci siamo interessati di diffusione di neutrini su bersagli di nucleoni sia in stato libero che in stato legato (nuclei), con lo scopo di ottenere l'espressione delle relative sezioni d'urto differenziali. Il modello standard è la teoria su cui abbiamo basato la descrizione dei processi in esame. In questo contesto il neutrino è una particella elementare di massa nulla e le interazioni deboli avvengono per scambio di bosoni vettori di spin uno, $W^{\pm}, Z^0$. Ci siamo limitati a considerare processi di diffusione di neutrini dove avviene solo lo scambio di $W^{\pm}$ (processi di corrente carica).

Le interazioni deboli hanno un range molto limitato, dell'ordine di 10^{-3}fm. Nei processi ad energie basse ed intermedie (dell'ordine di un GeV), l'interazione si comporta effettivamente come un'interazione di contatto che connette i campi fermionici coinvolti nello stesso punto dello spazio di Minkowski. In questo caso, l'interazione effettiva assume la forma corrente-corrente, dove è assente l'espressione del propagatore e tutta la dinamica dell'interazione è racchiusa nella costante di Fermi G. Dato che l'interazione debole non conserva la parità, ne segue che la corrente carica debole sotto le trasformazioni di Lorentz si trasforma come un tensore di componenti vettoriali ed assiali.

Nel primo capitolo abbiamo visto che la struttura V-A della corrente carica debole agente tra stati leptonici comporta la massima violazione della parità, la violazione della coniugazione della carica, mentre rispetta l'invarianza sotto l'operazione di inversione temporale. Con queste informazioni sulla struttura della corrente carica debole tra leptoni, abbiamo studiato l'espressione della stessa corrente agente tra stati adronici. In questo caso non si può avere la semplice forma V-A, poiché gli adroni, a differenza dei leptoni, hanno una struttura interna (sono stati legati di quark interagenti per scambio di gluoni) di cui si deve tener conto nel descrivere il processo interattivo tra il leptone e l'adrone.

Per calcolare l'elemento di matrice adronico abbiamo esteso al nostro caso la procedura che si usa per descrivere i processi di interazione elettromagnetica, dove gli effetti dell'interazione forte sono parametrizzati in funzioni scalari, detti fattori di forma. L'elemento di matrice adronico dell'operatore di corrente elettromagnetica si decompone in modo covariante rispetto a queste funzioni. Tra l'operatore di corrente carica debole vettoriale e l'operatore di corrente elettromagnetica isovettoriale adroniche esiste una connessione stabilita dalla teoria CVC (ipotesi della conservazione della corrente vettoriale), la quale identifica i suddetti operatori come un tripletto di isospin. Questa connessione permette, ad esempio, di definire i fattori di forma, con cui si decompone covariantemente l'elemento di matrice adronico debole vettoriale, in funzione dei fattori di forma elettromagnetici isovettoriali e di individuare l'azione dell'operatore di corrente vettore-assiale, confrontando i dati sperimentali delle sezioni d'urto dei processi semileptonici con i dati ottenuti da misure di diffusione di elettroni.

I primi processi semileptonici, che abbiamo descritto, sono i processi di diffusione di neutrini su nucleoni in stato libero. Ad energie dell'ordine di un GeV del neutrino incidente, le interazioni di corrente carica sono dominate dai processi quasi-elastici, che abbiamo esaminato nel secondo capitolo. In questo caso il neutrino interagisce con il nucleone nel suo complesso, piuttosto che con i quark-partoni di cui il nucleone è composto. Ad energie maggiori hanno luogo processi anelastici, di cui ne abbiamo discusso nel terzo capitolo considerando esperimenti inclusivi.

I risultati ottenuti per il nucleone libero sono in eq.(3.39) e (4.13) rispettivamente per il processo quasi-elastico e per il processo inclusivo anelastico.

Dopo aver trattato il caso di interazione con il singolo nucleone, abbiamo calcolato la sezione d'urto neutrino-nucleo in termini di funzione risposta nucleare (eq. 5.10). In seguito abbiamo trovato l'espressione degli elementi di matrice nucleari in termini di operatori di multipoli. In questo caso abbiamo descritto il nucleo essenzialmente come un sistema di A nucleoni non interagenti fra loro e l'unica ipotesi sugli stati finali nucleari è che questi abbiano, come per gli stati iniziali, definita parità e momento angolare.

A questo punto è necessario definire il modello nucleare da usare per descrivere la transizione. Anche in questo caso diversi regimi energetici possono richiedere diversi modelli nucleari. Queste però non sono problematiche specifiche dell'interazione debole ma comuni ad ogni tipo di transizione nucleare.

Appendice A

Elementi di teoria relativistica

In questa appendice discuteremo in separate sezioni dei seguenti argomenti:

- A.1 La metrica dello spazio di Minkowski;
- A.2 Le matrici γ;
- A.3 Teoremi delle tracce;
- A.4 Gli spinori destrosi e sinistrosi di Dirac.

A.1 La metrica dello spazio di Minkowski

Le coordinate temporali-spaziali $(t,x,y,z) \equiv (t,\mathbf{x})$ sono indicate da un quadrivettore controvariante :

$$x^{\mu} = (x^0,x^1,x^2,x^3) = (t,\mathbf{x}) \tag{A.1}$$

il corrispondente quadrivettore covariante x_μ è:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{A.2}$$

dove si usa la convenzione secondo la quale gli indici ripetuti indicano una somma su tutti i possibili valori e $g_{\mu\nu}$ è la matrice 4×4:

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Il prodotto scalare tra due quadrivettori è definito come:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b_\nu = a^0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{A.4}$$

In particolare il prodotto scalare tra la coordinata x^μ e quadrimomento $p^\mu = (E,\mathbf{p})$ è:

$$x \cdot p = tE - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \tag{A.5}$$

L'operatore del quadrimomento nella rappresentazione delle coordinate è dato da:

$$p^\mu \equiv i\partial^\mu \equiv i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla \right) \tag{A.6}$$

e

$$p_\mu \equiv i\partial_\mu \equiv i\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\nabla \right) \tag{A.7}$$

Nel calcolo degli elementi di matrice di transizione useremo il tensore antisimmetrico di Levi-Civita:

$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\delta} =$ 1 se (μ,ν,λ,δ) sono nell'ordine (0,1,2,3) o in qualsiasi permutazione pari degli indici;

$=$ -1 per permutazioni dispari degli indici;

$=$ 0 se almeno due indici sono uguali.

Notiamo che:

$$\varepsilon_{\mu}^{\nu\lambda\delta} = g_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha\nu\lambda\delta} \tag{A.8}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = -\varepsilon^{\mu\nu\lambda\delta} \tag{A.9}$$

A.2 Matrici di Dirac

L'equazione di Dirac che descrive il moto di una particella libera di spin $\frac{1}{2}$ è:

$$H\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta\, m)\psi \tag{A.10}$$

L'operatore $\boldsymbol{\alpha}$ è composto da tre matrici α_i.

Le matrici α_i e β hanno dimensione 4× 4 e soddisfano le seguenti regole di anticommutazione:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i,\alpha_j\} &= 2\, I\, \delta_{ij} \\ \alpha_i,\beta &= 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

dove I è la matrice di identità 2×2.

Le matrici γ^μ sono legate alle matrici β e α dalla relazione:

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0,\gamma) \equiv (\beta,\beta\alpha) \tag{A.11}$$

e soddisfano la regola di anticommutazione:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.12}$$

La combinazione di γ^μ che appare frequentemente è

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.13}$$

γ^5, come γ_0, è una matrice γ hermitiana (le matrici $\boldsymbol{\gamma}$ son antihermitiane), in particolare:

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \;\; (\gamma_5)^2 = I, \;\; \gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \tag{A.14}$$

Il tensore antisimmetrico $\sigma^{\mu\nu}$ è definito come:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu,\gamma^\nu\right) = \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = i\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu}\right) \tag{A.15}$$

Il prodotto scalare di una matrice γ^μ con un ordinario quadrivettore A è indicato come:

$$\gamma_\mu A^\mu \equiv \not{A} = \gamma^0 A^0 - \gamma \cdot \mathbf{A}$$

L'equazione di Dirac impone solo le proprietà di anticommutazione di $\boldsymbol{\alpha}$ e di β e quindi di γ. Le due rappresentazioni esplicite delle matrici γ che soddisfano le proprietà sopra elencate sono la rappresentazione di Pauli-Dirac in cui:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.16}$$

e la rappresentazione di Weyl in cui:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

dove $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e σ_i sono le matrici di spin di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

A.3 Teoremi delle tracce

Nella nostra discussione calcoleremo sezioni d'urto non polarizzate, quindi nel calcolo degli elementi di matrice si effettuerà la somma su tutte le possibili orientazioni dello spin delle particelle coinvolte nella reazione. Questa operazione è di fatto il calcolo delle tracce delle matrici γ con cui gli operatori di transizione sono descritti. La traccia del prodotto delle matrici γ può essere valutata senza calcolare esplicitamente il prodotto matriciale utilizzando i seguenti teoremi:

$$Tr\, I = 4 \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma_{\mu_1}\cdot .. \cdot \gamma_{\mu_n}) &= 0 \qquad (n\ \ dispari) &\text{(A.20)}\\
Tr\gamma_5 &= 0 &\text{(A.21)}\\
Tr\,\not{a}\not{b} &= 4a\cdot b &\text{(A.22)}\\
Tr\gamma_5\not{a}\not{b} &= 0 &\text{(A.23)}\\
Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4\left[(a\cdot b)\,(c\cdot d)-(a\cdot c)\,(b\cdot d)+(a\cdot d)\,(b\cdot c)\right] &\text{(A.24)}\\
Tr(\gamma_5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4i\epsilon_{\alpha\beta\rho\eta}a^\alpha b^\beta c^\rho d^\eta &\text{(A.25)}
\end{aligned}$$

A.4 Spinori destrosi e sinistrosi di Dirac

Consideriamo l'equazione di Dirac per fermioni di massa m e momento **p**:

$$H\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+m\beta)\psi \tag{A.26}$$

con $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$ dove χ e ϕ sono spinori a due componenti. Inserendo in $(A.26)$ la rappresentazione a due componenti della funzione d'onda e utilizzando la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici $\boldsymbol{\alpha}$ otteniamo due equazioni accoppiate:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}\cdot p)\,\chi - m\phi &= E\phi &\text{(A.27)}\\
(\boldsymbol{\sigma}\cdot p)\,\phi + m\chi &= E\chi &\text{(A.28)}
\end{aligned}$$

Definiamo:

$$\phi_R = (\chi+\phi)\,/2, \qquad \chi_L = (\chi-\phi)\,/2 \tag{A.29}$$

e sostituendo ϕ_R e χ_L in $(A.27)$ e $(A.28)$ otteniamo:

$$\begin{aligned}(\sigma \cdot \mathbf{p})\,\chi_L - m\phi_R &= -E\chi_L &\text{(A.30)}\\ (\sigma \cdot \mathbf{p})\,\phi_R + m\chi_L &= E\phi_R &\text{(A.31)}\end{aligned}$$

Nel caso in cui la particella abbia massa nulla, l'equazione di Dirac si separa in due equazioni disaccoppiate:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot p)\,\chi_L = -E\chi_L, \qquad (\boldsymbol{\sigma} \cdot p)\,\phi_R = E\phi_R \tag{A.32}$$

Per soluzioni di energia positiva ($E = |\mathbf{p}|$), lo spin e momento $\mathbf{p}$ sono allineati in ϕ_R e antiallineati in χ_L. Per questa ragione ϕ_R e χ_L sono detti rispettivamente spinori destrosi e sinistrosi. L'operatore $\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}$ è definito l'operatore elicità, quindi ϕ_R è autostato di questo operatore con autovalore $+1$ e χ_L è autostato con autovalore -1. Si segue lo stesso discorso per soluzioni di energia negativa($E = -|\mathbf{p}|$).

L'operatore $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ proietta la componente destrosa/sinistrosa dello spinore ψ:

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi + \phi \\ \phi + \chi \end{pmatrix} = u_R \tag{A.33}$$

$$\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi - \phi \\ \phi - \chi \end{pmatrix} = u_L \tag{A.34}$$

Dimostriamo che l'operatore γ^μ non connette spinori di diversa elicità:

$$\overline{u}\gamma^\mu\, u = (\overline{u}_L + \overline{u}_R)\gamma^\mu(u_L + u_R) = \overline{u}_L\gamma^\mu u_L + \overline{u}_R\gamma^\mu u_R \tag{A.35}$$

infatti

$$\overline{u}_L \gamma^\mu u_R = \overline{u}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\gamma^\mu u_R = \frac{1}{4}\overline{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)(1+\gamma_5)u = 0 \tag{A.36}$$

dove abbiamo usato le relazioni $\gamma^\mu\gamma_5 = \gamma_5\gamma^\mu$ e $(\gamma_5)^2 = 1$.

Appendice B

Determinazione delle funzioni $A(q^2), B(q^2), C(q^2)$

B.1 Calcolo del tensore adronico $J_{\alpha\beta}$

Secondo quanto presentato nel paragrafo (1.2), il tensore associato al vertice adronico $J_{\alpha\beta}$ assume l'espressione:

$$J_{\alpha\beta} = \sum_{spin} \left[\overline{u}(\mathbf{p}')J_\alpha(0)u(\mathbf{p})\right] \left[u(\mathbf{p}')J_\beta(0)u(\mathbf{p})\right]^*$$

$$= \sum_{spin} \left[\overline{u}(\mathbf{p}') \left(F_V(q^2)\gamma_\alpha + \frac{i}{2M}F_M(q^2)\sigma_{\alpha\eta}q^\eta + F_A(q^2)\gamma_\alpha\gamma_5 + F_P(q^2)q_\alpha\gamma_5\right) u(\mathbf{p})\right]$$
$$\left[\overline{u}(\mathbf{p}) \left(F_V(q^2)\gamma_\beta - \frac{i}{2M}F_M(q^2)\sigma_{\beta\rho}q^\rho \ + F_A(q^2)\gamma_\beta\gamma_5 - F_P(q^2)q_\beta\gamma_5\right) u(\mathbf{p}')\right]$$

$$= (\not{p}' + M) \left(F_V(q^2)\gamma_\alpha + \frac{i}{2M}F_M(q^2)\sigma_{\alpha\eta}q^\eta + F_A(q^2)\gamma_\alpha\gamma_5 + F_P(q^2)q_\alpha\gamma_5\right)$$

$$(\not p + M)\left(F_V(q^2)\gamma_\beta - \frac{i}{2M}F_M(q^2)\sigma_{\beta\rho}q^\rho + F_A(q^2)\gamma_\beta\gamma_5 - F_P(q^2)q_\beta\gamma_5\right) \quad \text{(B.1)}$$

L'ultimo risultato si è ottenuto applicando la relazione di completezza e la proprietà di anticommutazione di γ_5.

Le singole quantità operatoriali sono pari alle loro tracce:

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} = \quad & (F_V^2 + F_A^2)Tr[\not p'\gamma_\alpha \not p \gamma_\beta] + M^2(F_V^2 - F_A^2)Tr[\gamma_\alpha\gamma_\beta] \\
+ \quad & \frac{F_M^2}{4M^2}\{-Tr[\not p'\gamma_\alpha \not q \not p \gamma_\beta \not q] + Tr[\not p'\gamma_\alpha \not q \not p]q_\beta + q_\alpha Tr[\not p' \not p \gamma_\beta \not q] - q_\alpha Tr[\not p' \not p]q_\beta\} \\
+ \quad & \frac{F_M^2}{4}\{-Tr[\gamma_\alpha \not q \gamma_\beta \not q] + Tr[\gamma_\alpha \not q]q_\beta + q_\alpha Tr[\gamma_\beta \not q] - q_\alpha Tr[\gamma_\beta \not q]q_\beta\} \\
+ \quad & F_P^2\left\{q_\alpha Tr[\not p' \not p]q_\beta - M^2 q_\alpha Tr[I]q_\beta\right\} + 2F_V F_A Tr[\not p'\gamma_\alpha \not p \gamma_\beta\gamma_5] \\
+ \quad & \frac{i}{2M}F_M F_P\{Tr[\not p'\gamma_\alpha \not q \not p \gamma_5]q_\beta - q_\alpha Tr[\not p'\gamma_5 \not p \gamma_\beta \not q]\} \\
+ \quad & \frac{i}{2}F_V F_M\{Tr[\not p'\gamma_\alpha\gamma_\beta \not q] - Tr[\not p'\gamma_\alpha \not q \gamma_\beta] - Tr[\not p'\gamma_\alpha]q_\beta + Tr[\not p'\gamma_\beta]q_\alpha \\
& \qquad + Tr[\gamma_\alpha \not p \gamma_\beta \not q] - Tr[\gamma_\alpha \not p]q_\beta - Tr[\gamma_\alpha \not q \not p \gamma_\beta] - q_\alpha Tr[\not p \gamma_\beta]\} \\
+ \quad & M F_A F_P\{q_\beta Tr[\gamma_\alpha \not p] + q_\alpha Tr[\not p \gamma_\beta] - Tr[\not p'\gamma_\alpha]q_\beta - Tr[\not p'\gamma_\beta]q_\alpha\} \\
+ \quad & \frac{i}{2}F_M F_A\{-Tr[\not p'\gamma_\alpha \not q \gamma_\beta\gamma_5] + Tr[\not p'\gamma_\alpha\gamma_5\gamma_\beta \not q] - Tr[\gamma_\alpha \not q \not p \gamma_\beta\gamma_5] \\
& -Tr[\gamma_\alpha\gamma_5 \not p \gamma_\beta \not q]\}
\end{aligned} \quad \text{(B.2)}$$

Applichiamo i teoremi delle tracce:

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} = \; & 4(F_V^2 + F_A^2)\left\{p'_\alpha p_\beta + p'_\beta p_\alpha - g_{\alpha\beta}(p'\cdot p)\right\} + 4M^2(F_V^2 - F_A^2)g_{\alpha\beta} \\
+ \quad & \frac{F_M^2}{M^2}\left\{(p\cdot q)(p'_\alpha q_\beta + p'_\beta q_\alpha) - q^2(p'_\beta p_\alpha + p'_\alpha p_\beta) - 2(p'\cdot q)(p\cdot q)g_{\alpha\beta}\right. \\
+ \quad & \left.(p'\cdot q)(p_\alpha q_\beta + q_\alpha p_\beta) - (p'\cdot p)(q_\alpha q_\beta - q^2 g_{\alpha\beta})\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad F_M^2 \left\{q^2 g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta\right\} + 4F_P^2 q_\beta q_\alpha \left((p' \cdot p) - M^2\right) \\
&+ \quad 2F_V F_M \left\{2g_{\alpha\beta}(p' \cdot q) - p'_\beta q_\alpha - p'_\alpha q_\beta - 2g_{\alpha\beta}(p \cdot q) + p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha\right\} \\
&+ \quad 8iF_V F_A \epsilon_{\nu\alpha\mu\beta} p'^\nu p^\mu + 2iF_M F_A \left\{-2\epsilon_{\delta\alpha\zeta\beta} p'^\delta q^\zeta - \epsilon_{\delta\alpha\zeta\beta}(p^\delta q^\zeta - p^\zeta q^\delta)\right\} \\
&+ \quad 4MF_A F_P \left\{p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha - p'_\alpha q_\beta + p'_\beta q_\alpha\right\} \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

Calcolo di $\overline{|\mathcal{M}|^2}$

La quantità $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ si ottiene contraendo il tensore leptonico con quello adronico:

$$
\begin{aligned}
\sum_{s,s'} |\mathcal{M}|^2 = 16G^2 &\left\{ \left(F_V^2 + F_A^2\right) ((k \cdot p)(k' \cdot p') + (k \cdot p')(k' \cdot p)) \right. \\
&- \quad \left(F_V^2 - F_A^2\right) M^2 (k \cdot k') + 2F_V F_A ((k \cdot p')(p \cdot k') - (k \cdot p)(k' \cdot p')) \\
&+ \quad \left(\frac{F_M}{2M}\right)^2 \left((k \cdot p)(k' \cdot q)(p' \cdot q) - (k \cdot p)(k' \cdot p') q^2 + (k \cdot p')(p \cdot q)(k' \cdot q)\right. \\
&- \quad (k \cdot p')(p \cdot k') q^2 + \frac{1}{2}(k \cdot k')(p \cdot p') q^2 + (k \cdot q)(p \cdot q)(k' \cdot p') \\
&- \quad \left.\frac{M^2}{2}(k \cdot k') q^2 + (k \cdot q)(p' \cdot q)(p \cdot p') q^2\right) \\
&- \quad 2F_V \frac{F_M}{2} ((k \cdot k')(p' \cdot q) + (k \cdot q)(k' \cdot p') + (k' \cdot q)(k \cdot p') \\
&- \quad (k \cdot k')(p \cdot q) - (k \cdot q)(k' \cdot p) - (k' \cdot q)(k \cdot p)) \\
&+ \quad 2F_A F_M \left[(k \cdot q)((k' \cdot p) + (k' \cdot p')) - (k' \cdot q)((k \cdot p) + (k \cdot p'))\right] \\
&+ \; F_P^2 \left[\left((k \cdot q)(k' \cdot q) - \frac{1}{2} q^2 (k \cdot k')\right)\left((p \cdot p') - M^2\right)\right] \\
&+ \; 2MF_A F_P ((p' \cdot q)(k \cdot k') - (k \cdot p')(k' \cdot q) - (k \cdot q)(k' \cdot p') \\
&+ \; \left. (k \cdot p)(k' \cdot q) + (k \cdot q)(p \cdot k') - (p \cdot q)(k \cdot k'))\right\} \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

Consideriamo l'approssimazione ultrarelativistica in cui i termini dipendenti dalla massa dell'elettrone vengono trascurati, allora possiamo esprimere $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ in funzione di ϵ e di q^2:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = 16G^2 \Big\{ & F_V^2 \left((M\epsilon)^2 + \frac{1}{4}(q^2+2M\epsilon)^2 + \frac{1}{2}(Mq)^2\right) \\ & + \left(\frac{F_M}{2M}\right)^2 \left(-M\epsilon(q^2+M\epsilon)+(Mq)^2\right) q^2 + F_A^2 \left((M\epsilon)^2 + \frac{1}{4}(q^2+2M\epsilon)^2 - \frac{1}{2}(Mq)^2\right) \\ & + 2F_V F_A \left(-(M\epsilon)^2 + \frac{1}{4}(q^2+2M\epsilon)^2\right) \ + F_V \frac{F_M}{2}\left(-M\epsilon q^2 + q^2(\frac{1}{2}q^2+M\epsilon)+\frac{1}{2}q^4\right) \\ & + F_A \frac{F_M}{2}\left(2M\epsilon q^2 + (q^2+2M\epsilon)q^2\right)\Big\} \end{aligned} \tag{B.5}$$

Riscriviamo $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ in maniera equivalente a (B.7):

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = 16G^2 \Big\{ & \frac{1}{8}F_V^2 \left((4M\epsilon+q^2)^2 + 4q^2(M^2+q^2)\right) \\ & + \frac{1}{8}F_A^2 \left((-4M\epsilon+q^2)^2 + 4q^2(M^2+q^2)\right) + (F_V F_A + F_A F_M)\frac{q^2}{2}\left(4M\epsilon+q^2\right) \\ & + F_V F_M \frac{q^4}{2} + \left(\frac{F_M}{2M}\right)^2 \left(-(4M\epsilon+q^2)^2\right) q^2 \Big\} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Esprimiamo ϵ e q in funzione delle variabili di Mandlestan, s e u:

$$s = (k+p)^2 = M^2 + 2M\epsilon \tag{B.7}$$

$$u = (k'-p)^2 = M^2 - q^2 - 2M\epsilon \tag{B.8}$$

da cui:

$$s - u = 4M\epsilon + q^2 \tag{B.9}$$

$\overline{|\mathcal{M}|^2}$ ha l'espressione :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8G^2[A(q^2) - B(q^2)(s-u) + C(q^2)(s-u)^2] \tag{B.10}$$

con:

$$\begin{aligned}
A(q^2) &= \left\{\frac{1}{4}F_V^2(4M^2+q^2)+\frac{1}{4}F_A^2(-4M^2+q^2)+\frac{1}{4M^2}F_M^2(4M^2+q^2)\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}F_V F_M q^2\right\} q^2 \qquad \text{(B.11)} \\
B(q^2) &= \left(F_A F_M + F_V F_A\right) q^2 \qquad \text{(B.12)} \\
C(q^2) &= \frac{1}{4}\left(F_V^2+F_A^2-F_M^2 q^2\right) \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

Appendice C

Contrazione di $L^{\alpha\beta}$ e di $W_{\alpha\beta}$

Come abbiamo definito nel capitolo terzo, $L^{\alpha\beta}$ e $W_{\alpha\beta}$ sono rispettivamente i tensori leptonico ed adronico con:

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta} &= 8[k'^{\alpha}k^{\beta} + k^{\alpha}k'^{\beta} - g^{\alpha\beta}(k' \cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}k_{\nu}], && \text{(C.1)} \\
W_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta}W_1 + \frac{p_\beta p_\alpha}{M^2}W_2 - \frac{i}{2M^2}\epsilon_{\alpha\rho\beta\tau}p_\rho q_\tau W_3 + \frac{q_\beta q_\alpha}{M^2}W_4 \\
&\quad + \frac{1}{2M^2}[p_\beta q_\alpha + p_\alpha q_\beta]W_5 + \frac{i}{2M^2}[p_\beta q_\alpha - p_\alpha q_\beta]W_6, && \text{(C.2)}
\end{aligned}
$$

dove definiamo con $k = (\epsilon,\mathbf{k}), k' = (\epsilon',\mathbf{k}'), p = (M,0)$ rispettivamente i quadrimomenti del neutrino incidente, del leptone uscente di massa m e del bersaglio. Per il calcolo della quantità $L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}$ calcoliamo la contrazione di $L^{\alpha\beta}$ con i vari termini del tensore $W_{\alpha\beta}$:

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}(-g_{\alpha\beta}W_1) &= 8\left[k'^{\alpha}k^{\beta} + k^{\alpha}k'^{\beta} - g^{\alpha\beta}(k' \cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_{\mu}k_{\nu}\right](-g_{\alpha\beta}W_1) \\
&= 8[-k'_{\beta}k^{\beta} - k_{\beta}k'^{\beta} + 4(k' \cdot k) + i\varepsilon^{\mu\nu\beta}_{\beta}k'_{\mu}k_{\nu}]W_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 16(k' \cdot k)W_1, && \text{(C.3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}\frac{p_\beta p_\alpha}{M^2}W_2 &= 8[k'^\alpha k^\beta + k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_\mu k_\nu]\frac{p_\beta p_\alpha}{M^2}W_2 \\
&= \frac{8}{M^2}[(p\cdot k)(p\cdot k') + (p\cdot k')(p\cdot k) - p^2(k'\cdot k)]W_2 \\
&= \frac{8}{M^2}[2M^2\epsilon'\epsilon - M^2(k\cdot k')]W_2 \\
&= 8\left[2\epsilon'\epsilon - \epsilon'\epsilon + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\right]W_2 \\
&= 8\left[\epsilon'\epsilon + \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'\right]W_2, && \text{(C.4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}\left(\frac{-i}{2M^2}\right)\epsilon_{\alpha\rho\beta\tau}p_\rho q_\tau W_3 &= 8\left[k'^\alpha k^\beta + k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_\mu k_\nu\right] \\
&\qquad\qquad \frac{-i}{2M^2}\epsilon_{\alpha\rho\beta\tau}p_\rho q_\tau W_3 \\
&= \frac{8}{2M^2}\left[2(\delta^\rho_\mu\delta^\tau_\nu - \delta^\rho_\nu\delta^\tau_\mu)k'^\mu k^\nu p_\rho q_\tau\right]W_3 \\
&= \frac{8}{M^2}\left[(\delta^\rho_\mu\delta^\tau_\nu - \delta^\rho_\nu\delta^\tau_\mu)k'^\mu k^\nu p_\rho q_\tau\right]W_3 \\
&= \frac{8}{M^2}\left[(k'\cdot p)(k\cdot q) - (k\cdot p)(k'\cdot q)\right]W_3 \\
&= \frac{8}{M^2}\left[M\epsilon'\left(k\cdot(k'-k)\right) - M\epsilon\left(k'\cdot(k'-k)\right)\right]W_3 \\
&= \frac{8}{M}\left[(\epsilon+\epsilon')(k\cdot k') - m^2\epsilon\right]W_3, && \text{(C.5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}\frac{q_\beta q_\alpha}{M^2}W_4 &= 8\left[k'^\alpha k^\beta + k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_\mu k_\nu\right]\frac{q_\beta q_\alpha}{M^2}W_4 \\
&= \frac{8}{M^2}[2(k'\cdot q)(k\cdot q) - (k\cdot k')q^2]W_4 \\
&= \frac{8}{M^2}\left[2\left(k'\cdot(k'-k)\right)\left(k\cdot(k'-k)\right) - (k\cdot k')\left(k'-k\right)^2\right]W_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{M^2}\Big[2\left(m^2-(k\cdot k')\right)(k\cdot k') \\
&\qquad -(k\cdot k')\left(m^2-2(k\cdot k')\right)\Big]W_4 \\
&= \frac{8m^2}{M^2}(k\cdot k')W_4, \qquad \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}\frac{1}{2M^2}[p_\beta q_\alpha + p_\alpha q_\beta]W_5 &= 8[k'^\alpha k^\beta + k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_\mu k_\nu] \\
&\qquad [p_\beta q_\alpha + p_\alpha q_\beta]W_5 \\
&= \frac{8}{M^2}[2(p\cdot k)(q\cdot k') + 2(k\cdot q)(k'\cdot q) \\
&\qquad -2(k\cdot k')(p\cdot q)]W_5 \\
&= \frac{8}{M}[\epsilon(m^2 - k\cdot k') + \epsilon'(k\cdot k') - (k\cdot k')(\epsilon'-\epsilon)]W_5 \\
&= \frac{8m\epsilon}{M}W_5, \qquad \text{(C.7)} \\
L^{\alpha\beta}\frac{i}{2M^2}[p_\beta q_\alpha - p_\alpha q_\beta]W_6 &= 8\left[k'^\alpha k^\beta + k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta}(k'\cdot k) - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}k'_\mu k_\nu\right] \\
&\qquad [p_\beta q_\alpha - p_\alpha q_\beta]\,W_6 \\
&= 0. \qquad \text{(C.8)}
\end{aligned}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} &= 16\Big\{(k'\cdot k)W_1 + \frac{1}{2}(\epsilon'\epsilon + \mathbf{k}'\mathbf{k})W_2 + \frac{1}{2M}[(\epsilon'+\epsilon)(k'\cdot k) - m^2\epsilon]W_3 \\
&\quad + \frac{m^2}{2M^2}(k'\cdot k)W_4 + \frac{m\epsilon}{2M}(k'\cdot k)W_5\Big\} \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}
$$

Nel limite ultra relativistico $m \ll \epsilon'$, i termini in W_4 e W_5 (C.6 e C.7) non danno contributo alla sezione d'urto. Dato che in questo limite $k'\cdot k \approx -\frac{1}{2}q^2$, per le restanti espressioni abbiamo:

$$16(k' \cdot k)W_1 \approx -8q^2W_1, \tag{C.10}$$

$$8[2\epsilon'\epsilon - (k \cdot k')]W_2 \approx 8[2\epsilon'\epsilon + \frac{1}{2}q^2]W_2 = \left(2\epsilon(\epsilon - \omega) + \frac{1}{2}q^2\right) W_2, \tag{C.11}$$

$$\frac{8}{M}[-(\epsilon + \epsilon')(k \cdot k') + m^2\epsilon]W_3 \approx \frac{q^2}{2M}(2\epsilon - \omega)W_3. \tag{C.12}$$

Riassumendo:

$$L^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} = 8\left[-q^2W_1 + \left(2\epsilon(\epsilon - \omega) + \frac{1}{2}q^2\right) W_2 + \frac{q^2}{2M}(2\epsilon - \omega)W_3\right]. \tag{C.13}$$

Appendice D

Armoniche sferiche vettoriali

D.1 Vettori unitari sferici

Rispetto ad una base di vettori unitari cartesiani e_x,e_y,e_z definiamo i vettori unitari sferici come:

$$\xi_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y), \quad \xi_0 = e_z$$

I vettori ξ_λ soddisfano le seguenti relazioni:

$$\xi_\lambda^* = (-1)^\lambda \xi_{-\lambda}, \tag{D.1}$$

e

$$\xi_{\lambda'}^* \cdot \xi_\lambda = (-1)^{\lambda'} \xi_{-\lambda'} \cdot \xi_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'}, \tag{D.2}$$

dove gli sottoindici greci assumono i valori $-1, 0, 1$.

Un vettore reale $\mathbf{V}$ in termini di coordinate sferiche può essere definito come:

$$\mathbf{V} = \sum_{\lambda=-1}^{1} V_\lambda \xi_\lambda^* = \sum_{\lambda=-1}^{1} V_\lambda^* \xi_\lambda. \tag{D.3}$$

da cui segue:

$$V_\lambda = \xi_\lambda \cdot \mathbf{V} = (-1)^\lambda V_{-\lambda}^* \tag{D.4}$$

D.2 Proprietà delle armoniche sferiche

Data la formula di sviluppo della funzione $\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r})$ in onde piane:

$$\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa r) Y_{l\,m}^*(\hat{\kappa}) Y_{\ell\,m}(\hat{r}) \tag{D.5}$$

dove $\hat{\kappa}$ e $\hat{r}$ indicano le coordinate θ e ϕ dei vettori $\boldsymbol{\kappa}$ e $\mathbf{r}$ i cui moduli sono rispettivamente κ e r, inseriamo in $(D.5)$ la quantità:

$$\sum_{J,M} < l\,m\,1\,\lambda | J\,M >< l\,m'\,1\,\lambda' | J\,M >= \delta_{m\,m'} \delta_{\lambda\,\lambda'} \tag{D.6}$$

ottenendo:

$\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}) =$

$$= 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa r) \sum_{J,M} < l\,m\,1\,\lambda | J\,M >< l\,m'\,1\,\lambda' | J\,M > Y_{l\,m}^*(\hat{\kappa}) Y_{l\,m}(\hat{r}) \tag{D.7}$$

Data l'arbitrarietà della scelta dell'asse di quantizzazione è possibile definire e_z lungo la direzione di $\boldsymbol{\kappa}$, quindi si ha:

$$Y_{l\,m}^*(\hat{\kappa}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m,0} \tag{D.8}$$

e l'equazione (D.7) diventa:

$$\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r}) =$$

$$= 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa r) \sum_{J,M} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} < l\,0\,1\,\lambda | J\,M >< l\,m'\,1\,\lambda' | J\,M > Y_{l\,m'}(\hat{r}) \quad \text{(D.9)}$$

Si definisce l'armonica sferica vettoriale $\mathcal{Y}_{JLM}$ come:

$$\mathcal{Y}_{JlM}(\hat{r}) = \sum_{m_l, m_s} < l\,m_l\,s\,m_s | J\,M > Y_{l\,m_l}(\hat{r})\,\xi_{m_s} \quad \text{(D.10)}$$

e nel nostro caso si ha:

$$\mathcal{Y}_{JlM}(\hat{r}) = \sum_{\lambda} < l\,0\,1\,\lambda | J\,M > Y_{l\,0}(\hat{r})\,\xi_\lambda \quad \text{(D.11)}$$

La quantità vettoriale $\exp(i\kappa{\cdot}\mathbf{r})\xi_\lambda$ è definita come:

$$\exp(i\boldsymbol{\kappa}{\cdot}\mathbf{r})\xi_\lambda = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(\kappa r) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{J,M} < l\,0\,1\,\lambda | J\,M > \mathcal{Y}_{JlM} \quad \text{(D.12)}$$

Esplicitando la sommatoria su l in J ($l = J-1, J, J+1$) si ottiene:

$$\begin{aligned}\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})\,\xi_\lambda = 4\pi \sum_{J,M} \Bigg\{ & i^J j_J(\kappa r) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} < J\,0\,1\,\lambda | J\,M > \mathcal{Y}_{JJM} \\ & + i^{J-1} j_{J-1}(\kappa r) \sqrt{\frac{2\,(J-1)+1}{4\pi}} < (J-1)\;0\,1\,\lambda | J\,M > \mathcal{Y}_{JJ-1M} \\ & + i^{J+1} j_{J+1}(\kappa r) \sqrt{\frac{2\,(J+1)+1}{4\pi}} < (J+1)\;0\,1\,\lambda | J\,M > \mathcal{Y}_{JJ+1M} \Bigg\} \end{aligned} \quad \text{(D.13)}$$

Considerando esplicitamente i valori dei coefficienti di Clesbh-Gordan (Tab. D.1), per $\lambda = \pm 1$ otteniamo:

$$\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})\,\xi_{\lambda=\pm1} =$$

$$= 4\pi\sum_{J,M}\left\{ i^{J-1} j_{_{J-1}}(\kappa r)\sqrt{\frac{2\,(J-1)+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{J+1}{2\,(2\,(J-1)+1)}}\mathcal{Y}_{JJ-1M}\right.$$

$$+i^J j_J(\kappa r)\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\frac{-\lambda}{\sqrt{2}}\mathcal{Y}_{JJM}$$

$$\left. i^{J+1} j_{J+1}(\kappa r)\sqrt{\frac{2\,(J+1)+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{J}{2\,(2\,(J+1)+1)}}\mathcal{Y}_{JJ+1M}\right\}$$

$$= \sqrt{2\pi}\sum_{J\geq1}^{\infty}\sqrt{2J+1}i^J\left\{-\lambda j_J(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJM} \quad - i\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J-1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ-1M}\right.$$

$$\left. +i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J+1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ+1M}\right\}$$

$$= -\sqrt{2\pi}\sum_{J\geq1}^{\infty} i^J\sqrt{2J+1}\left\{\lambda j_J(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJM}+\frac{1}{\kappa}\nabla\times\left(j_J(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJM}\right)\right\} \tag{D.14}$$

nell'ultima espressione abbiamo sfruttato la proprietà :

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nabla}\times j_J(\kappa\, r)\mathcal{Y}_{JJM} = i\, j_{J-1}(\kappa r)\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}_{JJ-1M} - i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J+1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ+1M}$$

Nel caso $\lambda = 0$

$$\begin{aligned}\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})\xi_0 &= 4\pi\sum_{J=0}^{\infty}\left\{ i^{J-1}\sqrt{\frac{2\,(J-1)+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{J}{2\,(J-1)+1}} j_{J-1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ-1M}\right.\\ &\qquad \left. -i^{J+1}\sqrt{\frac{2\,(J+1)+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{J+1}{2\,(J+1)+1}} j_{J+1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ+1M}\right\}\\ &= \sqrt{4\pi}\frac{(-i)}{\kappa}\sum_{J=0}^{\infty} i^J\sqrt{2J+1}\,\nabla\left(j_J(\kappa r)\right) Y_{J0}(\hat{r}))\end{aligned} \tag{D.15}$$

dove

$$\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nabla}\, j_J(\kappa\, r)Y_{JM} = \left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J+1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ+1M} + \left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J-1}(\kappa r)\mathcal{Y}_{JJ-1M}$$

$j =$	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j_1 + 1$	$\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
$j_1 - 1$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(j_1+1)}}$

Tabella D.1: *Coefficienti di Clesbh-Gordon* $< j_1 j_2 m_1 m_2 | jm >$ *per* $j_2 = 1$.

Appendice E

Riduzione non relativistica degli operatori di corrente debole carica adronica

In questa sezione sviluppiamo i due elementi di matrice:

$$
\begin{aligned}
< p'|J^{V\pm}_{\alpha}(0)|p > &= \overline{u}(\mathbf{p}',s')\left[F_V(q^2)\gamma_\alpha + \frac{i}{2m}F_M(q^2)\sigma_{\alpha\beta}q^\beta\right]\tau^{\pm}u(\mathbf{p},s) \quad \text{(E.1)}\\
< p'|J^{A\pm}_{\alpha}(0)|p > &= \overline{u}(\mathbf{p}',s')\left[F_A(q^2)\gamma_\alpha + F_P(q^2)q_\alpha\right]\gamma_5\tau^{\pm}u(\mathbf{p},s) \quad \text{(E.2)}
\end{aligned}
$$

fino ad un ordine $|\mathbf{p}|/m$, considerando gli spinori di Dirac nella forma non relativistica:

$$
u(\mathbf{p},s) = N\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \end{pmatrix} \quad \text{(E.3)}
$$

dove χ_s sono gli spinori di Pauli e N è la costante di normalizzazione. Iniziamo a calcolare l'elemento di matrice dell'operatore di corrente vettoriale (E.1), esplicitando le matrici γ in rappresentazione di Pauli-Dirac.

Per la componente scalare J^V_o di J^V_α si ha:

$$
\begin{aligned}
< p'|J_0^V(0)|p > &= \overline{u}(\mathbf{p}',s')\left[F_V(q^2)\gamma_0 + \frac{i}{2m}F_M(q^2)\sigma_{0\beta}q^\beta\right]u(\mathbf{p},s)\\
&= u^\dagger(\mathbf{p}',s')\left[F_V\,\gamma_0\,\gamma_0 + \frac{F_M}{2m}(q^2)(g_{0\beta}-\gamma_0\gamma_\beta)q^\beta\right]u(\mathbf{p},s) \qquad \text{(E.4)}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo singolarmente le due quantità in F_V e in F_M trascurando i termini di ordine superiore a $|\mathbf{p}|/m$:

$$
\begin{aligned}
F_V\,u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,\gamma_0\,\gamma_0\,u(\mathbf{p},s) &= F_V\begin{pmatrix}\chi^\dagger_{s'} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_{s'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s\end{pmatrix}\\
&= F_V\,\chi^\dagger_{s'}\left[1+\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\right]\chi_s\\
&\approx F_V\,\chi^\dagger_{s'}\,\chi_s \qquad \text{(E.5)}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{F_M}{2m}\,u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,\gamma_0\,(q_0-\gamma_0\,\gamma_\beta\,q^\beta)\,u(\mathbf{p},s) = \frac{F_M}{2m}\begin{pmatrix}\chi^\dagger_{s'} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_s\end{pmatrix}
$$

$$
\left\{q_0\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} - q_0\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q} & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s\end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{F_M}{2m}\chi^\dagger_{s'}\left\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}\right\}\chi_s \qquad \text{(E.6)}
$$

In questo caso entrambi i termini della $(E.6)$ sono dell'ordine di $\frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}$, quindi non si considerano.

Si ha complessivamente:

$$< p'|J_0^V(0)|p > \approx F_V\, \chi^\dagger_{s'}\, \chi_s \tag{E.7}$$

Trattiamo in maniera anologa l'elemento di matrice della componente vettoriale **J** di J_α

$$\begin{aligned} < p'|\mathbf{J}^V(0)|p > &= \overline{u}(\mathbf{p}',s')\left[F_V(q^2)\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2m}F_M(q^2)(g_{\alpha\beta} - \boldsymbol{\gamma}\gamma_\beta)q^\beta)\right]u(\mathbf{p},s) \quad \alpha \neq 0 \\ &= u^\dagger(\mathbf{p}',s')\left[F_V\gamma_0\,\boldsymbol{\gamma} + \frac{F_M}{2m}\gamma_0\,(\mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma}\gamma_0\,q^0 + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}))\right]u(\mathbf{p},s) \end{aligned} \tag{E.8}$$

con:

$$\begin{aligned} F_V\, u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,\gamma_0\,\boldsymbol{\gamma}\,u(\mathbf{p},s) = F_V &\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_{s'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \end{pmatrix} \\ = F_V &\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi_{s'\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \\ \boldsymbol{\sigma}\chi_s \end{pmatrix} \\ = F_V\, &\chi^\dagger_{s'}\sum_{i=1}^{3}\left[\sigma_i\,\frac{\sigma_j p_j}{2m} + \frac{\sigma_j p'_j}{2m}\sigma_i\right]\chi_s \\ = \frac{F_V}{2m}&\,\chi^\dagger_{s'}\sum_{i=1\,j=1}^{3}\left[2I\delta_{ij}\,p_j + I\delta_{ji}q_j) + i\sum_{l=1}^{3}\varepsilon_{jil}\sigma_l q_j\right]\chi_s \\ = F_V\, &\chi^\dagger_{s'}\left[\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m} + i\,\boldsymbol{\sigma}\times\frac{\mathbf{q}}{2m}\right]\chi_s \end{aligned} \tag{E.9}$$

e

$$\frac{F_M}{2m}u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,\gamma_0\,(\mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma}\gamma_0\,q^0 + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q}))\,u(\mathbf{p},s) = \frac{F_M}{2m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_{s'} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\mathbf{q}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} - q_0 \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}) \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \end{pmatrix}$$

$$= \frac{F_M}{2m}\chi^\dagger_{s'}\left[\mathbf{q} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}')\mathbf{q}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})}{4m^2} - q_0\left(-\boldsymbol{\sigma}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} + \boldsymbol{\sigma}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\right)\right.$$
$$\left. -\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}) - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\right]\chi_s \qquad \text{(E.10)}$$

trascurando i termini dell'ordine di $\frac{|\mathbf{p}^2|}{m^2}$ rimane:

$$\begin{aligned} \frac{F_M}{2m}u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,\gamma_0\,(\mathbf{q} - \boldsymbol{\gamma}\gamma_0\,q^0 + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{q})\,u(\mathbf{p},s) &\approx \frac{F_M}{2m}\chi^\dagger_{s'}\,[\mathbf{q} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q})]\,\chi_s \\ &\approx \frac{F_M}{2m}\chi^\dagger_{s'}\,[\mathbf{q} + i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q} - \mathbf{q}]\,\chi_s \\ &= \frac{F_M}{2m}\chi^\dagger_{s'}\,(i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q})\,\chi_s \end{aligned} \qquad \text{(E.11)}$$

In definitiva:

$$< p'|\mathbf{J}^V(0)|p > \approx \chi^\dagger_{s'}\left[F_V\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m} + (F_V + F_M)\frac{i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q}}{2m}\right]\chi_s \qquad \text{(E.12)}$$

Per quanto riguarda lo sviluppo dell'elemento di matrice E.2 procediamo allo stesso modo.

Abbiamo per $< p'|J_0^A(0)|p >$:

$$\overline{u}(\mathbf{p}',s')[F_A\gamma_0\gamma_5 + F_P q_0\gamma_5]u(\mathbf{p},s) = u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,[F_A\gamma_0\,\gamma_0\,\gamma_5 + F_P q_0\,\gamma_0\,\gamma_5]u(\mathbf{p},s)$$

$$= \begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_{s'} \end{pmatrix} \left\{F_A\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + F_P q_0 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \chi^\dagger_{s'} \left[F_A \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m} + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} \right) + F_P\, q_0 \, \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m} \right) \right] \chi_s \\
&= \chi^\dagger_{s'} \left[F_A \, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(2\mathbf{p}+\mathbf{q})}{2m} - F_P\, q_0 \, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{2m} \right] \chi_s
\end{aligned}
\tag{E.13}
$$

Per l'elemento $< p'|\mathbf{J}^A(0)|p >$ si ha

$$
\overline{u}(\mathbf{p}',s')[F_A \boldsymbol{\gamma}\gamma_5 + F_P \mathbf{q}\gamma_5]u(\mathbf{p},s) = u^\dagger(\mathbf{p}',s')\,[F_A\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_5 + F_P\gamma_0\mathbf{q}\gamma_5]u(\mathbf{p},s)
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& F_A \begin{pmatrix} \chi^\dagger_s & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \end{pmatrix} \\
& + F_P\mathbf{q} \begin{pmatrix} \chi^\dagger_s & \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\chi^\dagger_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\chi_s \end{pmatrix} \\
= \;& \chi^\dagger_{s'} \left[F_A \left(\boldsymbol{\sigma} + \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m}\boldsymbol{\sigma}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} \right) + F_P\mathbf{q} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m} - \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}'}{2m} \right) \right] \chi_s \\
\approx \;& \chi^\dagger_{s'} \left[F_A\boldsymbol{\sigma} \; - F_P\mathbf{q}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{2m} \right] \chi_s
\end{aligned}
\tag{E.14}
$$

Riassumendo:

$$
< p'|J_0{}^V(0)|p > \;\approx\; F_V\chi^\dagger_{s'}\,\chi_s \tag{E.15}
$$

$$
< p'|\mathbf{J}^V(0)|p > \;\approx\; \chi^\dagger_{s'} \left[F_V\frac{2\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2m} + (F_V+F_M)\frac{i\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{q}}{2m} \right] \chi_s \tag{E.16}
$$

$$
< p'|J_0{}^A(0)|p > \;=\; \chi^\dagger_{s'} \left[F_A \, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(2\mathbf{p}+\mathbf{q})}{2m} - F_P\, q_0 \, \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{2m} \right] \chi_s \tag{E.17}
$$

$$
< p'|\mathbf{J}^A(0)|p > \;\approx\; \chi^\dagger_{s'} \left[F_A\boldsymbol{\sigma} \; - F_P\mathbf{q}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{q}}{2m} \right] \chi_s \tag{E.18}
$$

Appendice F

Tracce dell'elemento di matrice leptonico

Il tensore $l^{\alpha} = (l_0,\mathbf{l}) = (l^0, l_1, l_2, l_3)$ è definito:

$$l^{\alpha} = \overline{u}\,(k')\,\gamma^{\alpha}\,(1-\gamma_5)\,u\,(k) \tag{F.1}$$

dove $k = (k_o,\mathbf{k}) = (\epsilon,\mathbf{k})$ è il quadrimomento del neutrino incidente e $k = (k'_o,\mathbf{k}') = (\epsilon',\mathbf{k})$ è il quadrimomento del leptone uscente.

Poiché non si è interessati allo stato di polarizzazione del leptone uscente, si somma su tutte le variabili di spin s' possibili $\sum_{s'} l^{\alpha}$. Questa somma si esegue mediante le tecniche delle tracce. Le relazioni che seguono sono le espressioni che le quantità, presenti nell'espressione (5.55) nel capitolo quinto, assumono una volta eseguita la somma su s'.

Definiamo le variabili β, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ come:

$$\beta = \frac{\mathbf{k}'}{\varepsilon'}, \;\; \hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{k}}{\epsilon}, \;\; \hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \tag{F.2}$$

dove la direzione di $\mathbf{q}$ coincide con la direzione del vettore unitario $e_3 \equiv e_0$

1) $\sum_{s'} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}^* - l_3 l_3^*) \rightarrow \sum_{\alpha=1,\ \alpha=\beta}^{2} \left[k^\alpha k'^\beta + k^\alpha k'^\beta - g^{\alpha\beta} (k \cdot k') - i\varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_\mu k'_\nu \right]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (2k_1 k'_1 + 2k_2 k'_2 + 2k \cdot k') \; (g_{\alpha\beta} = -1 \; per \; \alpha = \beta = 1{,}2{,}3) \\
&= (k_1 k'_1 + k_2 k'_2 + k_0 k'_0 - k_1 k'_1 - k_2 k'_2 - k_3 k'_3) \\
&= (\varepsilon\varepsilon' - (\mathbf{v} \cdot e_3)(\mathbf{k}' \cdot e_3)) \\
&= \varepsilon\varepsilon' (1 - (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{q}}) (\beta \cdot \mathbf{q}))
\end{aligned} \tag{F.3}$$

2) $\sum_{s'} l_0 l_0^* \rightarrow [k_0 k'_0 + k_0 k'_0 - (k \cdot k')]$

$$\begin{aligned}
&= (2k_0 k'_0 - (k \cdot k')) \\
&= (k_0 k'_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \\
&= \varepsilon\varepsilon' (1 + \hat{\mathbf{v}} \cdot \beta)
\end{aligned} \tag{F.4}$$

3) $\sum_{s'} l_3 l_3^* \rightarrow [k_3 k'_3 + k_3 k'_3 + (k \cdot k')]$

$$\begin{aligned}
&= (2k_3 k'_3 + (k \cdot k')) \\
&= \varepsilon\varepsilon' (1 + 2(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{q}})(\beta \cdot \hat{\mathbf{q}}) - \hat{\mathbf{v}} \cdot \beta)
\end{aligned} \tag{F.5}$$

4) $\sum_{s'} l_3 l_0^* \rightarrow \left[k_3 k'_0 + k_0 k'_3 + i\varepsilon^{3\mu 0\nu} k_\mu k_{\prime\nu} \right]$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon\varepsilon' (\hat{\mathbf{v}} + \beta) \cdot \hat{\mathbf{q}} + i (\mathbf{k} \times \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{q}} \\
&= \varepsilon\varepsilon' (\hat{\mathbf{v}} + \beta) \cdot \hat{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{F.6}$$

5) $\sum_{s'}\left(l_1 l_2^* - l_2 l_1^*\right) \to \left[i\varepsilon^{1\mu 2\nu} k_\mu k_{\prime\nu} - i\varepsilon^{2\mu 1\nu} k_\mu k_{\prime\nu}\right]$

$$\begin{aligned} &= 2\left(k_0 k_3' - k_3 k_0'\right) \\ &= 2\varepsilon\varepsilon'\left(\hat{\mathbf{v}} - \beta\right) \cdot \hat{\mathbf{q}}. \end{aligned} \tag{F.7}$$

Bibliografia

[Hal84] F.Halzen and D.Martin, *Quarks and Leptons*, J.Wiley and Sons, New York, (1984).

[Bjo64] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill, New York, (1964).

[Bai82] D. Bailin, *Weak Interactions*, A.Hilger Ltd, Bristol, (1982).

[Bad88] R. K. Bhaduri, *Models of Nucleon*, Addison-Wesley, New York, (1988).

[Sch83] F. Scheck, *Electroweak and strong Interactions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, (1996).

[Mish89] S. R. Misha, *Phys. Rev. Lett.*, **63** (1989) 132.

[Ose92] E. Oset, S.K. Singh, *Nucl.Phys.*, **A542** (1992) 586.