UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Fotoni polarizzati nello studio della struttura del nucleo atomico

Relatore:

Ch.mo Prof. Giampaolo Co'

Candidato:

Tina A. C. Maiolo

Anno Accademico 2003-2004

Indice

Introduzione

La presente Tesi di Laurea si propone di studiare le eventuali novità offerte dall'uso di fotoni polarizzati rispetto a quelli non polarizzati, utilizzati fino ad ora. A questo scopo studieremo i processi di fotoassorbimento e di fotoemissione includendo ed evidenziando gli effetti dovuti alla polarizzazione dei fotoni.

Recenti sviluppi della tecnologia permettono di ottenere fasci di fotoni di varie decine di MeV con percentuale di polarizzazione lineare attorno all'80%. (Si veda ad esempio il progetto del *Sincrotone Aurora* a Barcellona: http://ific.uv.es/aurora/aurora.htm). Questo rende possibile un uso estensivo dei fotoni polarizzati per lo studio della struttura nucleare.

Nel Capitolo 1 ricaveremo dapprima l'espressione della sezione d'urto di fotoassorbimento totale nel caso in cui il fotone utilizzato sia polarizzato circolarmente. Successivamente forniremo l'espressione della sezione d'urto per i processi di fotoemissione sia nel caso di polarizzazione circolare che nel caso di polarizzazione lineare del fotone. L'utilizzo di fotoni polarizzati linearmente e la conseguente introduzione di una direzione privilegiata ci permetteranno di introdurre una nuova quantità, l'*asimmetria*, contenente termini non presenti nella sezione d'urto non polarizzata.

Nel Capitolo 2 ricaveremo l'espressione esplicita della corrente nucleare che compare nell'operatore di transizione tra stati nucleari e studieremo in dettaglio la riduzione non relativistica di questa quantità utilizzando il metodo di *Foldy–Wouthuysen*, che fornisce una descrizione sistematica per ottenere termini alla desiderata accuratezza. Una volta nota l'espressione esplicita dell'operatore di transizione e fissato il modello che descrive gli stati nucleari su cui questo agisce, calcoleremo la sezione d'urto e l'asimmetria. Questo verrà effettuato nel Capitolo 3 dove descriveremo, mediante il calcolo numerico, processi di fotoassorbimento totale e di fotoemissione. Analizzeremo quindi gli andamenti delle asimmetrie allo scopo di ottenere informazioni sulle multipolarità dell'eccitazione e sull'interazione nucleare. Il confronto con i dati sperimentali consentirà di valutare l'attendibilità dei nostri calcoli.

Infine nel Capitolo 4 ci occuperemo di effetti di ordine superiore. In particolare verranno trattati in dettaglio l'azione delle correlazioni a corto raggio (Short Range Correlation SRC) e delle correnti di scambio mesonico (Mesonic Exchange Current MEC).

Capitolo 1

Interazione radiazione materia

Lo scopo di questo lavoro di tesi è illustrare il processo di assorbimento fotonico di un nucleo evidenziando gli effetti dovuti alla polarizzazione del fotone. Processi di questo tipo sono puramente elettromagnetici e forniscono un utile strumento per investigare la struttura nucleare.

Per studiare l'interazione di un fotone con un nucleo si fa riferimento al tasso di transizione definito dall'espressione della regola d'oro come [Eis70]:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \mathcal{H} | i \rangle \right|^2 \rho \tag{1.1}$$

dove $|f\rangle$ e $|i\rangle$ rappresentano rispettivamente lo stato finale ed iniziale del sistema (fotone e nucleo) e ρ indica la densità degli stati finali. Nell'equazione (1.1) $\mathcal{H}$ è l'hamiltoniana d'interazione

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) \tag{1.2}$$

dove $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ è l'operatore di corrente relativo al nucleo e $\mathcal{A}(\mathbf{r},t)$ è l'operatore che descrive il campo elettromagnetico associato al fotone che interagisce con il nucleo.

1.1 Sezione d'urto di fotoassorbimento totale per un fotone polarizzato circolarmente

Consideriamo il processo di fotoassorbimento, in cui il nucleo viene eccitato da uno stato iniziale $|J_i M_i\rangle$ ad uno stato finale $|J_f M_f\rangle$.

Abbiamo già fatto l'ipotesi che il nucleo faccia una transizione tra stati di momento angolare J e proiezione sull'asse z, M, definiti. Anche la parità è un numero quantico che caratterizza gli stati. Dato che non considereremo le interazioni deboli, la parità totale del sistema sarà conservata

$$\langle f|\mathcal{H}|i\rangle = -\frac{1}{c}\int \langle J_f M_f|\mathbf{j}(\mathbf{r},t)|J_i M_i\rangle\langle 0|\mathcal{A}(\mathbf{r},t)|\mathbf{k}\mu\rangle d\mathbf{r} \tag{1.3}$$

Il campo elettromagnetico associato al fotone è calcolato come elemento di matrice di transizione tra uno stato con un fotone di vettore d'onda $\mathbf{k}$ e polarizzazione μ, $|\mathbf{k}\mu\rangle$, e uno stato senza fotoni $|0\rangle$. Dalla soluzione dell'equazione di Maxwell in una zona lontana dalle sorgenti del campo si ha che [Eis70]:

$$\langle 0|\mathcal{A}(\mathbf{r},t)|\mathbf{k}\mu\rangle = c\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}}\xi_\mu e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{1.4}$$

dove ξ_μ è un vettore di polarizzazione unitario

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \quad \xi_0 = e_z, \quad \xi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y). \tag{1.5}$$

Nel nostro caso l'asse $\widehat{z}$ è fissato nella direzione di $\mathbf{k}$. Poichè i fotoni reali sono puramente trasversi, nell'equazione (1.4) l'indice μ può assumere i soli valori ± 1.

Per quanto riguarda la corrente nucleare, separiamo la dipendenza radiale da quella temporale esprimendo l'operatore $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ in rappresentazione di

Heisenberg:

$$\langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r},t) | J_i M_i \rangle = \langle J_f M_f | e^{i\frac{H}{\hbar}t} \mathbf{j}(\mathbf{r}) e^{-i\frac{H}{\hbar}t} | J_i M_i \rangle =$$

$$\langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t}. \tag{1.6}$$

Sapendo che $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ soddisfa l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r},t) | J_i M_i \rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \langle J_f M_f | \rho(\mathbf{r},t) | J_i M_i \rangle \tag{1.7}$$

$$\nabla \cdot \langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} = -i\frac{E_f - E_i}{\hbar} \langle J_f M_f | \rho(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \tag{1.8}$$

$$\nabla \cdot \langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle = -i\frac{E_f - E_i}{\hbar} \langle J_f M_f | \rho(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle \tag{1.9}$$

dove $\rho(\mathbf{r})$ è l'operatore densità di carica nucleare.

Utilizzando le (1.3), (1.4), (1.6) otteniamo la seguente espressione relativa al tasso di transizione

$$w = \frac{(2\pi)^2}{\omega} \left| \int \langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle \xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2 \rho \tag{1.10}$$

A partire dalla (1.10) calcoliamo la sezione d'urto considerando che nel caso in esame la densità degli stati finali è $\rho = 1$. Infatti il fotone viene assorbito dal nucleone che rimane in uno stato caratterizzato da J_f, M_f e parità Π_f. Per ottenere la sezione d'urto dobbiamo dividere per il flusso dei fotoni entranti, e avendo ipotizzato nella normalizzazione della (1.4) di lavorare in un volume unitario, il flusso è uguale a c. Dalla (1.10) otteniamo

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\omega c} \frac{1}{2J_i + 1} \frac{1}{2} \sum_{M_i \mu} \sum_{J_f M_f} \left| \int \langle J_f M_f | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | J_i M_i \rangle \xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right|^2, \qquad \mu = \pm 1. \tag{1.11}$$

Dato che svolgeremo i nostri calcoli per nuclei doppio–magici, che sono sferici e pari–pari, abbiamo:

$$|J_i M_i\rangle \equiv |00\rangle \qquad\qquad |J_f M_f\rangle \equiv |JM\rangle$$

dove abbiamo reso esplicita la media sugli stati iniziali e la somma sugli stati finali da cui abbiamo

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\omega c}\frac{1}{2}\sum_{\mu=\pm1}\sum_{J}\left|\int \langle JM|\mathbf{j}(\mathbf{r})|00\rangle \xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}\right|^2. \tag{1.12}$$

Dato che il nucleo atomico è un sistema finito, risulta conveniente utilizzare una descrizione basata sui multipoli di eccitazione. Sviluppiamo in multipoli i termini relativi al fotone:

$$\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{LM} (i)^L j_L(kr) Y^*_{LM}(\widehat{k}) Y_{LM}(\widehat{r}) \xi_\mu \tag{1.13}$$

dove con Y_{LM} indichiamo l'armonica sferica, con j_L la funzione di Bessel sferica, k e r sono i moduli dei vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}$ e $\widehat{k}$ e $\widehat{r}$ le rispettive coordinate angolari. Utilizzando la relazione di ortogonalità dei coefficienti di *Clebsch–Gordan* possiamo riscrivere la (1.13) come

$$\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{LM} (i)^L j_L(kr) Y^*_{LM}(\widehat{k}) \delta_{MM'} \delta_{\mu\mu'} Y_{LM'} \xi_{\mu'} \tag{1.14}$$

Scegliendo l'asse di quantizzazione $\widehat{z}$ lungo la direzione di $\mathbf{k}$, l'espressione precedente si semplifica come segue:

$$\begin{aligned}\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= 4\pi \sum_{L} (i)^L j_L(kr) \frac{\widehat{L}}{\sqrt{4\pi}} \delta_{M_L,0} \sum_{J} \langle L01\mu|J\mu\rangle \vec{Y}^{\mu}_{J,L,1}(\widehat{r}) = \\ &= \sqrt{4\pi} \sum_{LJ} (i)^L j_L(kr) \widehat{L} \langle L01\mu|J\mu\rangle \vec{Y}^{\mu}_{J,L,1}(\widehat{r}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

dove abbiamo sostituito

$$Y_{LM}(0) = \frac{\widehat{L}}{\sqrt{4\pi}}\delta_{M,0}$$

e abbiamo definito con $\vec{Y}^{\mu}_{J,L,1}(\widehat{r})$ l'armonica sferica di spin [Edm60]:

$$\vec{Y}^{\mu}_{J,L,1}(\widehat{r}) = \sum_{M_L \mu} \langle L M_L S \mu | J M \rangle Y_{LM}(\widehat{r}) \xi_\mu$$

e abbiamo usato il simbolo $\widehat{L} = \sqrt{2L+1}$. Dal momento che $L = J \pm 1$ o $L = J$ esplicitiamo la somma su L lasciando J come unico indice della sommatoria

$$\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{4\pi}\sum_J \Big[(i)^{J-1} j_{J-1}(kr)\widehat{J-1}\langle J-1,0,1,\mu|J,\mu\rangle \vec{Y}^{\mu}_{J,J-1,1}(\widehat{r}) +$$
$$+(i)^J j_J(kr)\widehat{J}\langle J,0,1,\mu|J,\mu\rangle \vec{Y}^{\mu}_{J,J,1}(\widehat{r}) +$$
$$+(i)^{J+1} j_{J+1}(kr)\widehat{J+1}\langle J+1,0,1,\mu|J,\mu\rangle \vec{Y}^{\mu}_{J,J+1,1}(\widehat{r})\Big]. \qquad (1.16)$$

Calcoliamo i tre coefficienti di Clebsch–Gordan per $\mu = \pm 1$ [Abr70] e ricaviamo:

$$\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{2\pi}\sum_J \sqrt{2J+1}(i)^J\Big[-\mu j_J(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J,J,1}(\widehat{r}) +$$
$$+(i)^{-1}\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J,J-1,1}(\widehat{r}) + (i)\sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J,J+1,1}(\widehat{r}). \qquad (1.17)$$

La parità dell'armonica sferica Y_{LM} è $(-1)^L$. Questo significa che nell'espressione (1.17) ci sono termini con parità diversa. Dato che la parità del sistema è conservata nelle interazioni elettromagnetiche, non tutti i termini della (1.17) agiranno contemporaneamente.

Definiamo l'operatore di transizione elettrica $A_{J_\mu}(\mathbf{r},\mathcal{E})$

$$A_{J_\mu}(\mathbf{r},\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J,J-1,1}(\widehat{r}) - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J,J+1,1}(\widehat{r}) \qquad (1.18)$$

attivo per l'eccitazione di transizioni a parità naturale, tali che $(-1)^J = 1$. L'operatore di transizione magnetica $A_{J_\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{M})$, attivo per transizioni a parità non naturale, $(-1)^{J+1} = 1$ è definito come

$$A_{J_\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) = j_J(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J,J,1}(\widehat{r}). \tag{1.19}$$

La (1.17) può essere scritta come

$$\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\sqrt{2\pi}\sum_J (i)^J \widehat{J}\Big[\mu A_{J_\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{M}) + iA_{J_\mu}(\mathbf{r}, \mathcal{E})\Big]. \tag{1.20}$$

Calcoliamo la sezione d'urto sostituendo la (1.17) nella (1.12) e consideriamo separatamente il contributo elettrico e quello magnetico.

1.1.1 Eccitazioni a parità naturale

Riscriviamo l'espressione della sezione d'urto data dalla (1.12) inserendo il contributo del solo operatore elettrico

$$\sigma^{\mathcal{E}} = \frac{(2\pi)^2}{\omega c}\sum_J \Big| \int d\mathbf{r}\langle JM|\mathbf{j}(\mathbf{r})|00\rangle(-\sqrt{2\pi})\sum_{J_\gamma}(i)^{J_\gamma}\sqrt{2J_\gamma+1}$$

$$\Big[i\left(\frac{J_\gamma+1}{2J_\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J_\gamma-1}(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J_\gamma,J_\gamma-1,1}(\widehat{r}) - i\left(\frac{J_\gamma}{2J_\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} j_{J_\gamma+1}(kr)\vec{Y}^{\mu}_{J_\gamma,J_\gamma+1,1}(\widehat{r})\Big]\Big|^2. \tag{1.21}$$

Possiamo riscrivere la (1.21) esplicitando il prodotto tensoriale tra l'operatore $\mathbf{j}$ e l'armonica sferica di spin, che sono entrambi tensori sferici irriducibili

$$\mathbf{j}\cdot\vec{Y}^{\mu}_{J_\gamma,J_\gamma-1,1} = [\mathbf{j}\otimes Y_{J_\gamma-1}]^{J_\gamma}_{\mu}, \qquad \mathbf{j}\cdot\vec{Y}^{\mu}_{J_\gamma,J_\gamma+1,1} = [\mathbf{j}\otimes Y_{J_\gamma+1}]^{J_\gamma}_{\mu}.$$

dove abiamo usato la simbologia

$$[a_{L_1} \otimes b_{L_2}]^J_M = \sum_{M_1 M_2} \langle L_1 M_1 L_2 M_2 | JM \rangle a^{L_1}_{M_1} b^{L_2}_{M_2}$$

con a e b che indicano una delle componenti M_1 e M_2 dei tensori sferici irriducibili di rango L_1 e L_2 [Edm60]. Applicando il teorema di Wigner–Eckart (Appendice A) l'espressione della sezione d'urto diventa:

$$\sigma^{\mathcal{E}} = \frac{(2\pi)^3}{\omega c} \sum_J \Big| \int d\mathbf{r} \sum_{J_\gamma} (-1)^{J-1} \begin{pmatrix} J & J_\gamma & 0 \\ -M & \mu & 0 \end{pmatrix} i^J$$

$$\Big[\sqrt{J_\gamma + 1} j_{J_\gamma - 1}(kr) \langle J || [\mathbf{j} \otimes Y_{j_\gamma - 1}]^J]|| 0 \rangle + \sqrt{J_\gamma} j_{J_\gamma + 1}(kr) \langle J || [\mathbf{j} \otimes Y_{j_\gamma + 1}]^J]|| 0 \rangle \Big] \Big|^2 . \tag{1.22}$$

Il teorema di Wigner–Eckart si applica solo alla parte angolare della funzione d'onda. Quindi l'elemento di matrice ridotto, che noi abbiamo indicato con la doppia barra $\langle || \rangle$, è rigorosamente definito solo per integrazioni in $d\Omega$. Per semplificare la scrittura nella (1.22) non abbiamo esplicitato l'integrazione sulla parte radiale della funzione d'onda, che però è sottinteso. Quindi nella (1.22) il simbolo

$$\langle J || O_J || o \rangle$$

indica un'integrazione sulla parte radiale e il calcolo dell'elemento di matrice ridotto per la parte angolare. Il simbolo $3j$ di Wigner è non nullo solo quando $J = J_\gamma$ e $\mu = -M$, e questo esprime la conservazione del momento angolare.

Se, per semplicità di scrittura, definiamo

$$[\mathcal{E}]^J = \sqrt{J+1} \int d\mathbf{r} j_{J-1}(kr) \mathbf{j} \cdot \vec{Y}^\mu_{J,J-1,1}(\widehat{r}) - \sqrt{J} \int d\mathbf{r} j_{J+1}(kr) \mathbf{j} \cdot \vec{Y}^\mu_{J,J+1,1}(\widehat{r}) \tag{1.23}$$

e

$$C_J = \begin{pmatrix} J & J_\gamma & 0 \\ -M & \mu & 0 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

allora l'espressione della sezione d'urto diventa

$$\sigma^{\mathcal{E}} = \frac{(2\pi)^3}{\omega c} \sum_J \left| \langle J || [\mathcal{E}]^J || 0 \rangle \right|^2 C_J^2. \tag{1.25}$$

1.1.2 Eccitazioni a parità non naturale

Consideriamo, ora, nella sezione d'urto l'operatore di transizione magnetica $A_{J_\gamma}(\mathbf{r}, \mathcal{M})$. La sezione d'urto relativa alle sole transizioni di parità non naturale sarà data da

$$\sigma^{\mathcal{M}} = \frac{(2\pi)^3}{\omega c} \sum_J \left| \int d\mathbf{r} \sum_{J_\gamma} \langle JM | [\mathbf{j} \otimes Y_{j_\gamma}]_\mu^{J_\gamma} | 00 \rangle (i)^J \sqrt{2J_\gamma + 1} \mu j_{J_\gamma}(kr) \right|^2. \tag{1.26}$$

Procedendo come in precedenza, applicando all'elemento di matrice di transizione il teorema di Wigner–Eckart

$$\sigma^{\mathcal{M}} = \frac{(2\pi)^3}{\omega c} \sum_J \left| \langle J || \int d\mathbf{r} j_J(kr) \mathbf{j}(\mathbf{r}) Y_{JJ} || 0 \rangle \right|^2 (2J+1) C_J^2. \tag{1.27}$$

1.2 Sezione d'urto per processi di fotoemissione

In questo paragrafo presenteremo l'espressione della sezione d'urto di fotoassorbimento del processo di fotoemissione di un nucleone, (γ, p) o (γ, n) delineando le sostanziali differenze rispetto al calcolo fatto nella sezione precedente per un processo di fotoassorbimento totale.

Come nel caso precedente, lo stato iniziale del sistema è dato dagli stati iniziali del nucleo (che per semplicità consideriamo doppio magico) e del fotone con vettore d'onda $\mathbf{k}$ e indice di polarizzazione μ. Lo stato finale del sistema è composto dallo stato del nucleo con $A-1$ nucleoni, caratterizzato dal momento angolare I e proiezione m_I sull'asse $\widehat{z}$, e dallo stato del nucleone emesso $|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle$ caratterizzato dall'impulso $\mathbf{p}$, dallo spin 1/2 e proiezione s. Nel caso non ci fosse interazione tra nucleone emesso e nucleo residuo lo stato del nucleone emesso sarebbe un'onda piana

$$|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle \equiv e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\chi_s^{\frac{1}{2}} \tag{1.28}$$

dove $\chi_s^{\frac{1}{2}}$ è relativo all'isospin del nucleone emesso e

$$|i\rangle \equiv |00\rangle|\mathbf{k}\mu\rangle \qquad\qquad |f\rangle \equiv |Im_I\rangle|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle. \tag{1.29}$$

Adottiamo la seguente notazione:

I è il momento angolare del nucleo con $A-1$ nucleoni;

$l \otimes \frac{1}{2} = j$ è il momento angolare totale del nucleone;

$I \otimes j = J$ è il momento totale del sistema nucleare con A nucleoni.

Prendendo spunto dalla (1.12) possiamo scrivere la sezione d'urto per il processo (γ, p) come

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\omega c}\Big|\int d\mathbf{r}\langle Im_I|\mathbf{j}(\mathbf{r})|00\rangle|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle\xi_\mu e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\Big|^2. \tag{1.30}$$

Sviluppiamo in multipoli i termini relativi al nucleone rivelato (i calcoli sono presentati in Appendice B) e, separando la parte radiale, otteniamo:

$$|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle|Im_I\rangle = 4\pi\sum_{l\mu}\sum_{jm}\sum_{JM}(i)^l Y_{l\mu}(\widehat{p})\langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle\langle jmIm_I|JM\rangle|JM(Ijl);p\rangle \tag{1.31}$$

dove

$$|JM(Ijl);p\rangle = R_l(pr)\sum_{m'} \vec{Y}^{m'}_{j,l,\frac{1}{2}}\langle jm'Im_I|JM\rangle|Im_I\rangle, \tag{1.32}$$

con $R_l(pr)$ parte radiale della funzione d'onda. Nell'espressione della sezione d'urto equazione (1.11) inseriamo lo sviluppo in multipoli relativo al nucleone emesso e quello relativo alla parte fotonica:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\omega c}\frac{1}{2}\sum_{m\pm s\mu_\gamma}\Big|\int d\mathbf{r}\sum_{l\mu jmJM}(4\pi)(i)^l Y_{l\mu}(\widehat{p})\langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle$$

$$\langle jmIM_I|JM\rangle\langle JM(Ijl);p|\mathbf{j}(\mathbf{r})|00\rangle(-\sqrt{2\pi})\sum_{J_\gamma}(i)^{J_\gamma}\sqrt{2J_\gamma+1}$$

$$\Big[i\sqrt{\frac{J_\gamma+1}{2J_\gamma+1}}j_{J_\gamma-1}(kr)\vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma,J_\gamma-1,1}(\widehat{r}) - i\sqrt{\frac{J_\gamma}{2J_\gamma+1}}j_{J_\gamma+1}(kr)\vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma,J_\gamma+1,1}(\widehat{r})+$$

$$+\mu_\gamma j_{J_\gamma}(kr)\vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma,J_\gamma-1,1}(\widehat{r})\Big]\Big|^2. \tag{1.33}$$

Se definiamo W_{μ_γ} come segue :

$$W_{\mu_\gamma} = -i\sqrt{\frac{J_\gamma+1}{2J_\gamma+1}}\int d\mathbf{r}j_{J_\gamma-1}(kr)\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma,J_\gamma-1,1}(\widehat{r})+$$

$$-i\sqrt{\frac{J_\gamma}{2J_\gamma+1}}\int d\mathbf{r}j_{J_\gamma+1}(kr)\mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma,J_\gamma+1,1}(\widehat{r})+\mu_\gamma\int d\mathbf{r}j_{J_\gamma}(kr)\mathbf{j}9\mathbf{r})\cdot\vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma,J_\gamma,1}(\widehat{r}) \tag{1.34}$$

allora l'espressione della sezione d'urto di fotoassorbimento può essere scritta come

$$\sigma = \frac{2^7\pi^5}{\omega c}\frac{1}{2}\sum_{m\pm s\mu_\gamma}\Big|\sum_{l\mu jmJMJ_\gamma}(i)^{l+J_\gamma}Y_{l\mu}(\widehat{p})\langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle$$

$$\langle jmIm_I|JM\rangle\sqrt{2J_\gamma+1}\langle JM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle\Big|^2. \tag{1.35}$$

1.2.1 Polarizzazione circolare

L'espresione (1.35) è generale per un processo di fotoemissione di nucleoni in cui non venga misurata alcuna polarizzazione. Per questo motivo si somma sulle possibili polarizzazioni del nucleone emesso, s, del nucleo residuo, m_I, e del fotone, μ_γ. È da notare che il fattore 1/2 davanti alla somma è stato inserito per mediare tra le possibili polarizzazioni del fotone. Nel caso si intenda considerare la polarizzazione del fotone bisogna eliminare la somma su μ_γ, ed il fattore 1/2 della (1.35)

$$\sigma = \frac{2^7\pi^5}{\omega c} \sum_{I,m_I,s} \Bigg| \sum_{l\mu jmJMJ_\gamma} (i)^{l+J_\gamma} Y_{l\mu}(\widehat{p}) \langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle$$

$$\langle jmIm_I|JM\rangle \sqrt{2J_\gamma+1} \langle EJM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle \Bigg|^2 \tag{1.36}$$

Dato che μ_γ si riferisce alle componenti sferiche del vettore unitario (1.5), questo formalismo considera la polarizzazione circolare dei fotoni. In Appendice C riportiamo il calcolo del modulo quadro della sommatoria che compare nella (1.36). La sezione d'urto può essere scritta nella forma

$$\sigma = \frac{2^7\pi^5}{\omega c} \Big\{ \sum_{ljJ} \sum_{l'j'J'} \langle J(Ijl)||W_{\mu_\gamma}||0\rangle \langle 0||W^\dagger_{\mu_\gamma}||J'(Ij'l')\rangle \Big\}$$

$$\sum_{sm_I} \mathcal{A}(jlJ, j'l'J', sm_I, \mu_\gamma) \tag{1.37}$$

dove $\mathcal{A}(jlJ, j'l'J', sm_I, \mu_\gamma) =$

$$\langle l(-s-m_I-\mu_\gamma)\frac{1}{2}s|j(-\mu_\gamma-m_I)\rangle \langle l'(-s-m_I-\mu_\gamma)\frac{1}{2}s|j'(-\mu_\gamma-m_I)\rangle$$

$$\langle j(-m_I-\mu_\gamma)Im_I|J-\mu_\gamma\rangle \langle j'(-m_I-\mu_\gamma)Im_I|J'-\mu_\gamma\rangle$$

$$(i)^{l-l'+J+J'} \sqrt{2J_\gamma+1}\sqrt{2J'_\gamma+1} Y_{l,(-s-m_I-\mu_\gamma)}(\widehat{p}) Y^*_{l',(-s-m_I-\mu_\gamma)}(\widehat{p}). \tag{1.38}$$

1.2.2 Polarizzazione lineare

Nel caso precedente la polarizzazione del fotone era identificata dalle componenti sferiche $\mu_\gamma = \pm 1$ del vettore unitario ξ. Questo identifica una polarizzazione circolare del fotone. Trattiamo ora il caso in cui il fotone che eccita il nucleo sia polarizzato linearmente. In questo caso il vettore di polarizzazione sarà dato da una combinazione lineare dei vettori di polarizzazione circolare sui due indici permessi e sarà quindi del tipo $(c_+\xi_+ + c_-\xi_-)$, dove c_+ e c_- sono due numeri complessi:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\omega c} \sum_{m \pm s} \Big| \int d\mathbf{r} \langle I m_I | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | 00 \rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \chi_s^{\frac{1}{2}} (c_+\xi_+ + c_-\xi_-) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Big|^2 \tag{1.39}$$

Sviluppando in multipoli i termini nucleonici e quelli fotonici otteniamo la seguente espressione

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{(2\pi)^2}{\omega c} \sum_{m \pm s} \Big| \int d\mathbf{r} \sum_{l\mu jmJM} (4\pi)(i)^l Y_{l\mu}(\widehat{p}) \langle l\mu \frac{1}{2} s | jm \rangle \langle jm I m_I | JM \rangle \\ \langle JM(jIl); p | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | 00 \rangle (c_+ + c_-)(-2\sqrt{2\pi}) \sum_{J_\gamma} \sqrt{2J_\gamma + 1} \\ \left[i \left(\frac{J_\gamma + 1}{2J_\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} j_{J_\gamma - 1}(kr) \vec{Y}^{\mu}_{J_\gamma, J_\gamma - 1, 1}(\widehat{r}) - i \left(\frac{J_\gamma}{2J_\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} j_{J_\gamma + 1}(kr) \vec{Y}^{\mu}_{J_\gamma, J_\gamma + 1, 1}(\widehat{r}) + \\ \pm j_{J_\gamma}(kr) \vec{Y}^{\mu_\gamma}_{J_\gamma, J_\gamma, 1}(\widehat{r}) \right] \Big|^2\end{aligned} \tag{1.40}$$

dove il doppio segno va interpretato come segue: scegliamo il segno + per la parte che moltiplica il coefficiente c_+ e il segno − per i termini che moltiplicano c_-. Utilizzando la definizione di $W_\pm$ dell'equazione (1.34) l'espressione della sezione d'urto può essere scritta nella forma più compatta

$$\sigma = \frac{2^7\pi^5}{\omega c} \Big| \sum_{l\mu jmJMJ_\gamma} (i)^{J_\gamma + l} Y_{l\mu}(\widehat{p}) \langle l\mu \frac{1}{2} s | jm \rangle \langle jm I M_I | JM \rangle \sqrt{2J_\gamma + 1}$$

$$\Big(c_+\langle JM(Ijl);p|W_+|00\rangle + c_-\langle JM(Ijl);p|W_-|00\rangle\Big)\Big|^2. \qquad (1.41)$$

Per poter applicare il teorema di Wigner–Eckart calcoliamo esplicitamente i prodotti scalari che compaiono:

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{j}\cdot\vec{Y}^1_{J_\gamma,J_\gamma-1,1}\rightarrow\Big[Y_{J_\gamma-1}\otimes\mathbf{j}\Big]^J_1 & \mathbf{j}\cdot\vec{Y}^{-1}_{J_\gamma,J_\gamma-1,1}\rightarrow\Big[Y_{J_\gamma-1}\otimes\mathbf{j}\Big]^J_{-1} \\
\mathbf{j}\cdot\vec{Y}^1_{J_\gamma,J_\gamma+1,1}\rightarrow\Big[Y_{J_\gamma+1}\otimes\mathbf{j}\Big]^J_1 & \mathbf{j}\cdot\vec{Y}^{-1}_{J_\gamma,J_\gamma+1,1}\rightarrow\Big[Y_{J_\gamma+1}\otimes\mathbf{j}\Big]^J_{-1} \\
\mathbf{j}\cdot\vec{Y}^1_{J_\gamma,J_\gamma,1}\rightarrow\Big[Y_{J_\gamma}\otimes\mathbf{j}\Big]^J_1 & \mathbf{j}\cdot\vec{Y}^{-1}_{J_\gamma,J_\gamma,1}\rightarrow\Big[Y_{J_\gamma}\otimes\mathbf{j}\Big]^J_{-1}
\end{array}$$

Perciò applicando il teorema di Wigner–Eckart ai due elementi di matrice di transizione che compaiono nella (1.41) otteniamo

$$\langle JM(jIl);p|[W_+]^J_1|00\rangle \rightarrow (-1)^{J-M}\begin{pmatrix} J & J_\gamma & 0 \\ -M & 1 & 0\end{pmatrix}\langle EJ(Ijl;p)||[W_+]^J||0\rangle; \qquad (1.42)$$

da cui $M=-1$ e $J_\gamma = J$ e

$$\langle JM(Ijl);p|[W_-]^J_{-1}|00\rangle \rightarrow (-1)^{J-M}\begin{pmatrix} J & J_\gamma & 0 \\ -M & -1 & 0\end{pmatrix}\langle J(Ijl)||[W_-]^J||0\rangle \qquad (1.43)$$

da cui $M=1$ e $J_\gamma = J$. Sotto queste condizioni, i coefficienti di Clebsch–Gordan che moltiplicano c_+ ci forniscono le seguenti relazioni

$$\langle jmIm_I|J-1\rangle \longrightarrow m = (-1-m_I)$$

$$\langle l\mu\frac{1}{2}s|j(-1-m_I)\rangle \longrightarrow \mu = (-1-m_I-s).$$

I coefficienti che moltiplicano c_-, invece, danno

$$\langle jmIm_I|J1\rangle \longrightarrow m = (1-m_I)$$

$$\langle l\mu\frac{1}{2}s|j(1-m_I)\rangle \longrightarrow \mu=(1-m_I-s).$$

Sfruttando le uguaglianze appena ricavate la sezione d'urto può essere scritta come:

$$\sigma=\frac{2^7\pi^5}{\omega c}\Big\{\sum_{ljJ}\sum_{l'j'J'} c_+\mathcal{A}_+(Ijl)\langle J(Ijl);p||[W_+]^J||0\rangle c_+^*\mathcal{A}_+^*(Ijl)\langle 0||[W_+]^{J'}||J'(I'j'l');p\rangle$$
$$+c_-\mathcal{A}_-\langle J(Ilj);p||[W_-]^J||0\rangle c_-^*\mathcal{A}_-^*(Ilj)\langle 0||[W_-]^{J'}||J'(I'j'l');p\rangle$$
$$+c_+\mathcal{A}_+(Ilj)\langle J(Ijl);p||[W_+]^J||0\rangle c_-^*\mathcal{A}_-^*\langle 0||[W_-]^{J'}||J'(I'j'l');p\rangle$$
$$+c_-\mathcal{A}_-(Ilj)\langle J(Ijl);p||[W_-]^J||0\rangle c_+^*\mathcal{A}_+^*\langle 0||[W_+]^{J'}||J'(I'j'l');p\rangle\Big\} \qquad (1.44)$$

dove abbiamo definito $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ rispettivamente come

$$\mathcal{A}_+(Ijl)\equiv(i^{l+J})\langle l(-1-m_I-s)\frac{1}{2}s|j(-1-m_I)\rangle\langle j(-1-m_I)Im_I|J-1\rangle$$
$$\sqrt{2J+1}Y_{l(-1-m_I-s)}(\widehat{p}); \qquad (1.45)$$
$$\mathcal{A}_-(Ijl)\equiv(i^{l+J})\langle l(1-m_I-s)\frac{1}{2}s|j(1-m_I)\rangle\langle j(1-m_I)Im_I|J1\rangle$$
$$\sqrt{2J+1}Y_{l(1-m_I-s)}(\widehat{p}). \qquad (1.46)$$

Consideriamo la definizione (1.5) del vettore unitario sferico ξ possiamo identificare i coefficienti $c_\pm$ per fotoni polarizzati lungo gli assi $\widehat{x}$ e $\widehat{y}$:

$$e_x=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_- - \xi_+);\quad c_+=-\frac{1}{\sqrt{2}};\quad c_-=\frac{i}{\sqrt{2}} \qquad (1.47)$$

$$e_y=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_- + \xi_+);\quad c_+=c_-=\frac{i}{\sqrt{2}}. \qquad (1.48)$$

Inserendo questi valori nell'espressione (1.44) otteniamo

$$\sigma_x\equiv\sigma_\perp=\frac{2^7\pi^5}{\omega c}\frac{1}{2}\Big\{\sum_{ljI}\sum_{l'j'I'}\Big[A_+A_+^*+A_-A_-^*-A_+A_-^*-A_-A_+^*\Big]\Big\} \qquad (1.49)$$

$$\sigma_y \equiv \sigma_{\parallel} = \frac{2^7\pi^5}{\omega c}\frac{1}{2}\Big\{\sum_{ljI}\sum_{l'j'I'}\Big[A_+A_+^* + A_-A_-^* + A_+A_-^* + A_-A_+^*\Big]\Big\} \tag{1.50}$$

dove

$$A_{\pm} = c_{\pm}\mathcal{A}_{\pm}(Ijl)\langle J(Ijl);p||[W_{\pm}]^J||0\rangle.$$

Definiamo l'asimmetria Σ come:

$$\Sigma = \frac{\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}}. \tag{1.51}$$

Definiamo inoltre le quantità

$$W_T = \sum_{ljI}\sum_{l'j'I'}[A_+A_+^* + A_-A_-^*] \tag{1.52}$$

$$W_{TT} = \sum_{ljI}\sum_{l'j'I'}[A_+A_-^* + A_-A_+^*] \tag{1.53}$$

quindi

$$\Sigma = \frac{W_{TT}}{W_T}. \tag{1.54}$$

Per quanto detto in precedenza, Σ può essere interpretato come il fattore correttivo che occorre aggiungere per passare da una sezione calcolata con fotone non polarizzato a quella calcolata tenendo conto della polarizzazione del fotone:

$$(\sigma)_P = \sigma(1 + \Sigma) \tag{1.55}$$

dove il pedice P indica la sezione d'urto calcolata con fotone polarizzato. Per concludere, nel caso di fotoni polarizzati contribuiscono alla sezione d'urto due funzioni di struttura. La prima è W_T che, per come è definita, è la stessa quantità determinata nei processi in cui il fotone non è polarizzato ed è la somma incoerente di fotoni con una certa elicità ed elicità inversa. La seconda funzione di struttura W_{TT} contiene i contributi di interferenza tra queste componenti.

Capitolo 2

Correnti nucleari

2.1 Introduzione

Nella derivazione delle sezioni d'urto fatta nel capitolo precedente, non si è esplicitata l'espressione della corrente nucleare. In questo capitolo ci occuperemo di come questa corrente sia definita e soprattutto della sua riduzione non relativistica. Quest'ultima parte sarà trattata in dettaglio dato che è difficile trovare in letteratura una descrizione approfondita del metodo, anche se i risultati finali sono comunemente utilizzati.

2.2 Il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico

Trattiamo il moto di un protone in interazione con il campo elettromagnetico generato da un elettrone. Procediamo, dapprima, occupandoci dell'interazione del protone con un generico campo elettromagnetico di potenziale

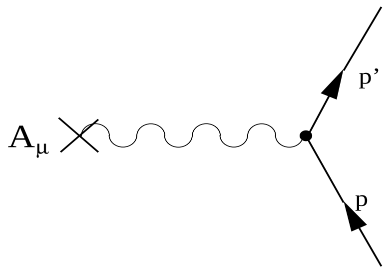

Figura 2.1: Diagramma di Feynman relativo all'interazione di un protone con un campo elettromagnetico.

quadrivettore A_μ (vedi **Figura 2.1**) e, in un secondo momento, troveremo il potenziale vettore $\mathbf{A}(x_\mu)$ e il potenziale scalare $\varphi(x_\mu)$ dovuti al passaggio dell'elettrone.

L'equazione di Dirac per una particella libera può essere scritta, in unità naturali ($c = \hbar = 1$), nella forma

$$H\psi \equiv (\beta m + i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{2.1}$$

dove m è la massa a riposo della particella. L'operatore $\boldsymbol{\alpha}$ è composto da tre matrici hermitiane di dimensioni 4×4, α_i, che soddisfano le seguenti proprietà di anticommutazione:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \qquad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \qquad \alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \tag{2.2}$$

dove anche β è una matrice hermitiana e una rappresentazione che soddisfa tali proprietà è:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

dove le σ_i sono le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Riscriviamo l'equazione in forma covariante:

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{2.5}$$

con

$$\gamma_\mu \equiv (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}) \qquad x_\mu \equiv (t, \mathbf{x}) \qquad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tag{2.6}$$

scritta secondo la notazione di Einstein che prevede la sommatoria sugli indici uguali ripetuti.

La descrizione del moto relativistico di una particella con carica e interagente con un campo elettromagnetico A_μ si ottiene usando la sostituzione $\partial^\mu \to \partial^\mu + ieA^\mu$:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi = 0 \tag{2.7}$$

dove

$$A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A}) \tag{2.8}$$

con $\mathbf{A}$ potenziale vettore e φ potenziale scalare. La sostituzione utilizzata è nota in letteratura come *accoppiamento minimale*: questo consente di mantenere l'equazione covariante per trasformazioni di Lorentz e invariante per trasformazioni di gauge .

Dobbiamo ancora aggiungere un termine, quello relativo allo spin del protone.

La corrente elettomagnetica associata al protone è [Bjo64]:

$$j_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \qquad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0. \tag{2.9}$$

È possibile dimostrare la seguente identità, detta di Gordon ([Bjo64], Cap. III),

$$\bar{\psi}(i\sigma_{\mu\nu}q^{\nu} - 2m\gamma_{\mu} + P_{\mu})\psi = 0 \tag{2.10}$$

con

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}], \qquad q^{\nu} = p_2^{\nu} - p_1^{\nu}, \qquad P_{\mu} = p_{1\mu} + p_{2\mu} \tag{2.11}$$

dove p_1^{μ} e p_2^{μ} sono rispettivamente i quadrimpulsi del protone prima e dopo l'interazione con il campo. Utilizzando la (2.10) possiamo scrivere:

$$e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi = \frac{e}{2m}\bar{\psi}(i\sigma_{\mu\nu}q^{\nu} + P_{\mu})\psi \tag{2.12}$$

la (2.12) mostra che in aggiunta al termine di potenziale ricavato con l'accoppiamento minimale, c'è anche un termine legato allo spin $(e/2m)i\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}$. Pertanto il termine che aggiungiamo all'equazione di Dirac è

$$A^{\mu}j_{\mu} = \frac{e}{2m}\sigma_{\mu\nu}\partial^{\nu}A_{\mu} \tag{2.13}$$

avendo sostituito l'impulso con l'operatore corrispondente. Quest'ultimo termine può essere interpretato come l'interazione fra il campo elettromagnetico rappresentato da A_{μ} e il momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ del protone.

Per considerare la struttura interna del protone introduciamo i fattori di forma elettromagnetici di Dirac del nucleone $F_1(q_{\mu}^2)$ e $F_2(q_{\mu}^2)$, normalizzati come segue:

$$F_1(0) = 1 \qquad\qquad F_2(0) = 1 \qquad\quad \textit{per il protone}$$

$$F_1(0) = 0 \qquad\qquad F_2(0) = 1 \qquad\quad \textit{per il neutrone}$$

e una grandezza K legata al momento magnetico anomalo μ_0 del protone,

$$\frac{eK}{2m} = \mu_0. \tag{2.14}$$

Considerando i fattori di forma il moto del protone è descritto dalla seguente equazione:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi - (eF_1\gamma_\mu A^\mu)\psi + [\frac{eK}{2m}(F_2\partial^\nu A_\mu)\sigma_{\mu\nu}]\psi = 0 \tag{2.15}$$

che può essere riscritta, nella notazione usata, come:

$$\Big[(i\beta\frac{\partial}{\partial t} + i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - m) - eF_1\beta\varphi + e\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot F_1\mathbf{A} + \frac{eK}{2m}(F_2\partial^\nu A_\mu)\sigma_{\mu\nu}\Big]\psi = 0. \tag{2.16}$$

Ricordando la formulazione hamiltoniana dell'equazione del moto

$$H\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi, \tag{2.17}$$

ricaviamo

$$H = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m - eF_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A} + eF_1\varphi - \frac{eK}{2m}F_2\beta(\partial^\nu A_\mu)\sigma_{\mu\nu.} \tag{2.18}$$

Utilizzando la forma esplicita di $\sigma_{\mu\nu}$ esprimiamo l'ultimo addendo in termini di campo elettrico e magnetico (si veda appendice D)

$$-\beta\partial_\nu A_\mu\sigma_{\mu\nu} \longrightarrow i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E} - i\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} \tag{2.19}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ rispettivamente il campo elettico e magnetico cui è soggetta la particella. L'hamiltoniana relativa ad una particella di Dirac soggetta ad un campo elettromagnetico può essere riscritta come:

$$H = \beta m - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - eF_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A} + eF_1\varphi + \frac{ieK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E} - \frac{ieK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}. \tag{2.20}$$

È proprio all'hamiltoniana appena trovata che applicheremo il metodo di Foldy–Wouthuysen come indicato nel seguente paragrafo.

2.3 Metodo di Foldy–Wouthuysen

Il metodo di Foldy–Wouthuysen è un metodo iterativo che consiste in una successione di trasformazioni unitarie che vengono fatte sull'hamiltoniana relativa al moto di una particella di Dirac con lo scopo di eliminare da essa, all'ordine desiderato, gli operatori che accoppiano grandi componenti a piccole componenti negli spinori di Dirac.

In questo modo, l'equazione di Dirac, che in generale può essere scritta come un sistema di equazioni miste, presenterà solo operatori rappresentati da matrici diagonali e pertanto la loro azione sugli spinori di Dirac genererà un sistema in cui le equazioni che compaiono sono pure nel senso che una è relativa alle grandi componenti e l'altra alle piccole. Nel limite non relativistico trascureremo quest'ultima equazione. Prima di poter passare alla descrizione vera e propria del metodo in questo capitolo, occorre fare delle operazioni preliminari che consentano di riscrivere l'hamiltoniana in una forma più generale. Il primo passo è quello di definire *dispari* ($\mathcal{O}$) gli operatori che, nell'hamiltoniana (2.20) anticommutano con β:

$$\{\mathcal{O}, \beta\} = 0 \qquad\qquad \mathcal{O}\beta + \beta\mathcal{O} = 0$$

e *pari* ($\mathcal{E}$) gli operatori che commutano con β

$$[\mathcal{E}, \beta] = 0 \qquad\qquad \mathcal{E}\beta = \beta\mathcal{E}.$$

Ovviamente, il prodotto di due operatori pari o di due dispari è un operatore pari, mentre il prodotto di un operatore pari per uno dispari è un operatore dispari. Gli operatori dispari agiscono mescolando le componenti, gli operatori pari, invece, collegano le grandi componenti alle grandi e le piccole alle piccole. Nell'hamiltoniana considerata gli operatori dispari e pari sono rispettivamente:

$$\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - eF_1 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \frac{ieK}{2m} F_2 \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}, \tag{2.21}$$

$$\mathcal{E} = eF_1 \varphi - \frac{ieK}{2m} F_2 \beta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \tag{2.22}$$

perciò la (2.20) può essere riscritta come

$$H = \beta m + \mathcal{O} + \mathcal{E}. \tag{2.23}$$

La (2.23) costituisce il punto di partenza per l'applicazione del metodo. Con il metodo di Foldy–Wouthuysen costruiamo una serie di successive trasformazioni unitarie con lo scopo di eliminare gli operatori dispari in modo da disaccoppiare le grandi componenti dalle piccole negli spinori di Dirac. Queste trasformazioni fatte sull'hamiltoniana H portano ad una nuova hamiltoniana H' i cui termini principali sono degli operatori con una particolare potenza di $(1/m)$ e i cui termini di correzione sono di ordine più alto in $(1/m)$. La trasformazione di Foldy–Wouthuysen fornisce un metodo iterativo per generare un'hamiltoniana sviluppata in potenze di $(1/m)$.

Nel caso specifico applichiamo questo metodo fermando lo sviluppo all'ordine $(1/m)^2$ (consideriamo K indipendente da m, e di conseguenza il fattore $eK/2m$ di ordine $1/m$) e trascuriamo tutti i termini di ordine superiore al primo nel potenziale elettromagnetico.

All'equazione di Dirac applichiamo una trasformazione unitaria $\psi' = e^{iS}\psi$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\psi' = H\psi = He^{-iS}\psi' = e^{-iS}\Big(i\frac{\partial \psi'}{\partial t}\Big) + \Big(i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\Big)\psi'.$$

Dagli ultimi due termini dell'eguaglianza si ottiene che

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi' = e^{iS}[He^{-iS} - i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}]\psi' \equiv H'\psi'. \tag{2.24}$$

Sviluppiamo H' in potenze di S mediante commutatori multipli (si veda Appendice E):

$$H' = H + i[S, H] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, H]] + \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] + \cdots \quad (2.25)$$

Consideriamo come generatore della prima trasformazione unitaria, prendendo spunto dall'hamiltoniana libera, l'operatore hermitiano

$$S = \frac{-i\beta}{2m}\mathcal{O}. \quad (2.26)$$

Rendiamo esplicito ogni termine dello sviluppo (per i calcoli in dettaglio si veda l'Appendice F)

$$i[S, H] = -\mathcal{O} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}, \mathcal{E}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2, \quad (2.27)$$

$$\frac{i^2}{2}[S, [S, H]] = -\frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]], \quad (2.28)$$

$$\frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H]]] = -\frac{1}{6m^3}\beta\mathcal{O}^4 + \frac{1}{6m^2}\mathcal{O}^3, \quad (2.29)$$

$$-\dot{S} = \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}, \quad (2.30)$$

$$\frac{i^2}{2!}[S, \dot{S}] = -\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}]. \quad (2.31)$$

Perciò troncando lo sviluppo all'ordine desiderato l'hamiltoniana diventa:

$$H' = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}, \mathcal{E}] - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] - \frac{1}{3m^2}\mathcal{O}^3 +$$
$$i\frac{\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}} - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] + O((1/m)^3). \quad (2.32)$$

Nella nuova hamiltoniana H' i termini dispari sono:

$$\mathcal{O}' = \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}, \mathcal{E}] - \frac{1}{3m^2}\mathcal{O}^3 + \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}. \quad (2.33)$$

L'obiettivo è ora eliminare in H' i termini dispari all'ordine $(1/m)^2$. Faremo una nuova trasformazione con l'operatore

$$S = -i\frac{\beta}{2m}\{termini \ \ dispari \ \ di \ \ H'\} =$$

$$-i\frac{\beta}{2m}\{\frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] - \frac{1}{3m^2}\mathcal{O}^3 + i\frac{\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}\}. \tag{2.34}$$

Per brevità chiamiamo $\mathcal{E}'$ i termini pari di H':

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}]. \tag{2.35}$$

Sviluppando H' in commutatori :

$$H'' = H' + i[S,H'] - \dot{S}. \tag{2.36}$$

H'' assume la seguente forma (Appendice G):

$$H'' = \beta m + \mathcal{E}' + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}',\mathcal{E}'] + \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}' =$$

$$\beta m + \mathcal{E}' + \mathcal{O}'' \tag{2.37}$$

dove

$$\mathcal{O}'' = \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}',\mathcal{E}'] + i\frac{\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}' \tag{2.38}$$

è il termine dispari di ordine $1/m$.

Iteriamo ancora questo procedimento con

$$S = -\frac{i\beta}{2m}\mathcal{O}'' = -\frac{i\beta}{2m}(\frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}',\mathcal{E}'] + \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}'}{2m}) \tag{2.39}$$

e otteniamo un'hamiltoniana priva di termini dispari (gli operatori $\mathcal{O}$ compaiono solo alla terza potenza in $1/m$).

$$H''' = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}] + O((1/m)^3). \tag{2.40}$$

A questo punto sostituiamo le espressioni di $\mathcal{O}$ e di $\mathcal{E}$ relative al caso trattato di una particella di Dirac in interazione con un campo elettromagnetico e con momento magnetico anomalo.

I termini in $\mathcal{O}$ comprendono oltre alla parte cinetica $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})$ dei termini relativi all'interazione della particella con il campo elettromagnetico. Quindi separiamo $\mathcal{O}$ in due parti:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1 \tag{2.41}$$

con

$$\mathcal{O}_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \qquad \mathcal{O}_1 = -eF_1 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \frac{ieK}{2m} F_2 \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}. \tag{2.42}$$

In questo modo sono facilmente individuabili i termini dovuti all'interazione elettromagnetica che sono $\mathcal{E}$ e $\mathcal{O}_1$. Quindi, dal momento che stiamo troncando lo sviluppo al primo ordine per quanto riguarda i termini di potenziale posso trascurare termini come $(\mathcal{O}_1)^2$ e $\mathcal{O}_1 \mathcal{E}$ o altri termini di ordine maggiore.

In questo modo l'hamiltoniana diventa:

$$\begin{aligned} H = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1)^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, [\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, \mathcal{E}]] + \\ - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1)]. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Esplicitando ciascun termine all'ordine desiderato (i calcoli sono riportati in dettaglio in Appendice H), l'hamiltoniana ridotta con il metodo di Foldy–Wouthuysen risulta:

$$\begin{aligned} H = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}_0^2 + \frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0 \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_0) + \\ - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0, [\mathcal{O}_0, \mathcal{E}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0, \dot{\mathcal{O}}_1] + O((1/m)^3, \mathcal{O}_1^2, \mathcal{O}_1 \mathcal{E}). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Fattorizzando

$$H = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}_0^2 + \frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1\mathcal{O}_0) +$$

$$-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_{0,}([\mathcal{O}_0, \mathcal{E}] + i\dot{\mathcal{O}}_1)] + O((1/m)^3, \mathcal{O}_1^2, \mathcal{O}_1\mathcal{E}). \qquad (2.45)$$

A questo punto, ricordando come abbiamo definito le grandezze $\mathcal{E}$, $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}_1$, non occorre altro che esplicitare ogni termine (seguendo i calcoli in Appendice I) come segue:

$$\frac{\beta}{2m}\mathcal{O}_0^2 = \frac{\beta}{2m}p^2; \qquad (2.46)$$

$$\frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1\mathcal{O}_0) =$$

$$-\frac{e\beta}{2m}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{A}) + (F_1\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}] - \frac{e\beta}{2m}i\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_1\mathbf{A}) + (F_1\mathbf{A})\times\mathbf{p}]$$

$$-\frac{ieK}{4m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_2\mathbf{E}) - (F_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{p}] + \frac{eK}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_2\mathbf{E}) - (F_2\mathbf{E})\times\mathbf{p}]; \qquad (2.47)$$

$$-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0, ([\mathcal{O}_0, \mathcal{E}] + i\dot{\mathcal{O}}_1)] =$$

$$-\frac{ie}{8m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{E}) - (F_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{p}] + \frac{e}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_1\mathbf{E}) - (F_1\mathbf{E})\times\mathbf{p}]. \qquad (2.48)$$

In queste espressioni, solo per brevità di scrittura, abbiamo sostituito $-i\nabla$ con $\mathbf{p}$. Questo significa che $\mathbf{p}$, come anche $\boldsymbol{\sigma}$, deve essere interpretato non come un numero, ma come un operatore. L'operatore hamiltoniano diventa:

$$H = \beta m + eF_1\varphi - \frac{eK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} + \frac{\beta}{2m}p^2 +$$

$$-\frac{e\beta}{2m}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{A}) + (F_1\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}] - \frac{e\beta}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\times F_1\mathbf{A} +$$

$$-\frac{ieK}{4m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_2\mathbf{E}) - (F_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{p}] + \frac{eK}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_2\mathbf{E}) - (F_2\mathbf{E})\times\mathbf{p}]$$

$$-\frac{ie}{8m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{E}) - (F_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{p}] + \frac{e}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_1\mathbf{E}) - (F_1\mathbf{E})\times\mathbf{p}]. \qquad (2.49)$$

Fattorizzando:

$$
\begin{aligned}
H = \beta m + \frac{\beta}{2m}p^2 + eF_1\varphi + \\
-\frac{e\beta}{2m}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{A}) + (F_1\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}] - \frac{e\beta}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(F_1 + KF_2)\mathbf{B} + \\
+\frac{e}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_1 + 2KF_2)\mathbf{E} - (F_1 + 2KF_2)\mathbf{E}\times\mathbf{p}] + \\
-\frac{ie}{8m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_1 + 2KF_2)\mathbf{E} - (F_1 + 2KF_2)\mathbf{E}\cdot\mathbf{p}].
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Nell'hamiltoniana (2.50) intervengono solo operatori pari, quindi il valore di aspettazione di H tra autostati dell'equazione di Dirac per la particella libera ha separati i termini delle grandi componenti da quelli provenienti dalle piccole. La riduzione non relativistica consiste nel trascurare questi ultimi.

Nella prospettiva di questa applicazione trasformiamo l'operatore (2.50) in un operatore che agisce solo sulle grandi componenti degli spinori di Dirac. Per questo poniamo $\beta = 1$ e in questo modo otteniamo:

$$
\begin{aligned}
H_{int} = \frac{1}{2m}p^2 + eF_1\varphi - \frac{e}{2m}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{A}) + (F_1\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}] - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot(F_4\mathbf{B}) + \\
+\frac{e}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_3\mathbf{E}) - (F_3\mathbf{E})\times\mathbf{p}] - \frac{e}{8m^2}\nabla\cdot(F_3\mathbf{E}) + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

dove H_{int} è definita sottraendo il termine di massa dall'hamiltoniana totale:

$$H = H_{int} - m$$

e F_3 e F_4 sono definiti come

$$F_3 = F_1 + 2KF_2 \qquad F_4 = F_1 + KF_2.$$

Trovata quest'hamiltoniana, relativa al moto di un protone in un campo elettromagnetico, ci proponiamo di trovare le espressioni di $\mathbf{A}$ e di φ nel caso in cui il campo è generato dal moto di un elettrone.

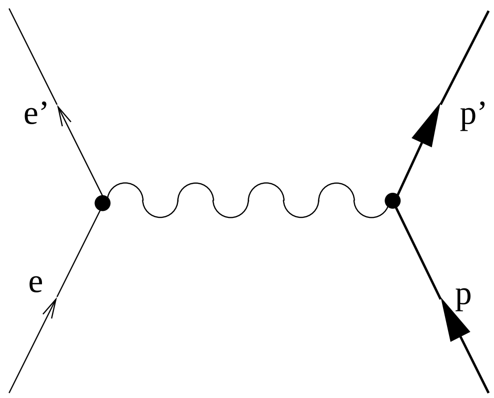

Figura 2.2: Diagramma di Feynman relativo al processo elettrone–protone.

2.4 Moto del protone nel campo elettromagnetico dell'elettrone

Nel paragrafo precedente abbiamo descritto il moto di un protone in un campo elettromagnetico A_μ, senza preoccuparci di come fosse stato generato. Ora rendiamo esplicito il diagramma di Feynman precedente attribuendo al moto dell'elettrone la presenza del campo. Pertanto il processo che ci accingiamo a trattare è quello rappresentato in **Figura 2.2**.

L'elettrone è un fermione, e come tale deve soddisfare all'equazione di Dirac, perciò la quadricorrente è:

$$j_\mu = e\psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\psi \qquad j_\mu \equiv (\rho, \mathbf{j}). \tag{2.52}$$

A partire da questa espressione sfruttando la gauge di Lorentz $\Box A_\mu = -4\pi j_\mu$, troviamo $\mathbf{A}$ e φ. Siano ψ_1 e ψ_2 le funzioni di onda libera (a quattro componenti) dell'elettrone, rispettivamente prima e dopo l'interazione con il protone, ed esprimiamole in termini degli spinori $u_1(k_{1\mu})$ e $u_2(k_{2\mu})$

$$\psi_1 = u_1 e^{ik_{1\mu}x^\mu}$$

$$\psi_2^\dagger = u_2 e^{-ik_{2\mu}x^\mu}.$$

Otteniamo, in questo modo, le seguenti espressioni di carica e corrente:

$$\rho = eu_2^\dagger u_1 e^{iq_\mu x^\mu} \tag{2.53}$$

$$\mathbf{j} = eu_2^\dagger \boldsymbol{\alpha} u_1 e^{iq_\mu x^\mu} \tag{2.54}$$

dove q_μ è il quadrimomento trasferito $q_\mu \equiv (\omega, \mathbf{q})$ tale che $q_\mu^2 = \omega^2 - \mathbf{q}^2$. A sua volta $\mathbf{q}$ è definito come la differenza dei momenti dell'elettrone nello stato iniziale e finale: $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ e ω è la differenza di energia tra gli stati.

Applicando a ρ e $\mathbf{j}$ la condizione di Lorentz, otteniamo immediatamente le espresioni di φ e di $\mathbf{A}$:

$$\varphi = \frac{4\pi e u_2^\dagger u_1}{q_\mu^2} e^{iq_\mu x^\mu} = \frac{4\pi e u_2^\dagger u_1}{q^2 - \omega^2} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{2.55}$$

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi e u_2^\dagger \boldsymbol{\alpha} u_1}{q_\mu^2} e^{iq_\mu x^\mu} = \frac{4\pi e u_2^\dagger \boldsymbol{\alpha} u_1}{q^2 - \omega^2} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \tag{2.56}$$

Ricordando che:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{4\pi e}{q_\mu^2}(-\mathbf{q} + \omega\boldsymbol{\alpha}) e^{iq_\mu x^\mu} \tag{2.57}$$

e che

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{4\pi e}{q_\mu^2}(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\alpha}) e^{iq_\mu x^\mu} \tag{2.58}$$

l'hamiltoniana precedentemente trovata diventa:

$$H = \frac{4\pi e^2}{q_\mu^2} u_2^\dagger \{F_1 e^{iq_\mu x^\mu} - \frac{F_1}{2m}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} e^{iq_\mu x^\mu} + e^{iq_\mu x^\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})$$

$$
-\frac{F_1 + KF_2}{2m} i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\alpha}) e^{iq_\mu x^\mu} - \frac{q_\mu^2}{8m^2}(F_1 + 2KF_2) e^{iq_\mu x^\mu}
$$

$$
+\frac{F_1 + 2KF_2}{2m} i\boldsymbol{\sigma} \cdot [\mathbf{p} \times (\omega\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{q}) e^{iq_\mu x^\mu} - e^{iq_\mu x^\mu} (\omega\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{q}) \times \mathbf{p}]\} u_1 \qquad (2.59)
$$

dove $\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ sono rispettivamente operatori di momento e di spin. I termini

$$
F_1 e^{iq_\mu x^\mu},
$$

$$
-\frac{F_1}{2m}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} e^{iq_\mu x^\mu} + e^{iq_\mu x^\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}),
$$

$$
-\frac{F_1 + KF_2}{2m} i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{q} \times \boldsymbol{\alpha}) e^{iq_\mu x^\mu}
$$

che in potenze di $(1/m)$ sono di ordine 0 e 1 rappresentano rispettivamente il termine di Coulomb, quello di corrente di convezione e quello relativo allo spin da cui si ricava la corrente di magnetizzazione.

L'espressione (2.59) rappresenta l'operatore hamiltoniano relativo al protone e tiene conto dell'interazione con il campo esterno essendo calcolato tra le funzioni di onda libera dell'elettrone.

Fino a questo punto della trattazione abbiamo considerato un processo relativo ad un solo fotone scambiato nella singola interazione protone-elettrone, ora vogliamo generalizzare il discorso al caso di A nucleoni. Per fare questo, dobbiamo innanzitutto isolare il termine operatoriale, poi identificare i termini di corrente di convezione e di magnetizzazione e, a quel punto, sommare su tutti i nucleoni.

Della (2.59) consideriamo solo l'elemento di matrice relativo alla corrente del protone in interazione con il campo generato dall'elettrone:

$$
\langle \mathbf{j}_{int} \rangle = \langle u_2 | \frac{F_1}{2m}(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} e^{iq_\mu x^\mu} + e^{iq_\mu x^\mu} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - \frac{F_1 + KF_2}{2m} i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\alpha}) e^{iq_\mu x^\mu} | u_1 \rangle. \qquad (2.60)
$$

Nel calcolare quest'elemento di matrice eseguiamo un integrale nelle cordinate spaziali e in quella temporale. Dal momento che non v'è dipendenza temporale negli integrandi l'integrazione nel tempo produce una δ delle energie esprimendo la conservazione delle energie. In questo modo la (2.60) diventa

$$\langle \mathbf{j}_{int} \rangle = \langle u_2 | \frac{F_1}{2m} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} e^{i\mathbf{qr}} + e^{i\mathbf{qr}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) - \frac{F_1 + KF_2}{2m} i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\alpha}) e^{i\mathbf{qr}} | u_1 \rangle. \quad (2.61)$$

Se confrontiamo la (2.61) con l'elemento di matrice relativo alla corrente del solo elettrone libero $\langle \psi_2 | \boldsymbol{\alpha} | \psi_1 \rangle$ ricaviamo l'espressione dell'operatore di corrente del protone:

$$\mathbf{j} = \frac{e}{2m} (\mathbf{p} e^{i\mathbf{qr}} + e^{i\mathbf{qr}} \mathbf{p}) - \frac{\mu}{2m} i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q} e^{i\mathbf{qr}}. \quad (2.62)$$

A questo punto, trovato l'operatore di corrente per un solo nucleone, possiamo generalizzare al caso di un nucleo, semplicemente sommando sugli A nucleoni. Separando la (2.62) nel termine di convezione $\mathbf{J}^C$, e in quello di magnetizzazione $\mathbf{J}^M$, otteniamo le espressioni:

$$\mathbf{J}^C = \sum_{j=1}^{A} \frac{e}{2m} \Big(\mathbf{p}_j e^{i\mathbf{qr}_j} + e^{i\mathbf{qr}_j} \mathbf{p}_j \Big) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{J}^M = \sum_{j=1}^{A} \frac{\mu_j}{2m} i \Big(\boldsymbol{\sigma}_j \times \mathbf{q} e^{i\mathbf{qr}_j} \Big). \quad (2.64)$$

2.5 Elementi di matrice

Il calcolo della sezione d'urto necessita la conoscenza degli elementi di matrice che compaiono nella (1.44). Pertanto esprimiamo sia l'operatore che gli stati su cui esso agisce in termini di quantità ben note. L'operatore, definito nella

(1.34), comprende l'operatore di corrente nucleare che si ottiene dalle (2.63) e (2.64) mediante trasformata di Fourier:

$$\mathbf{J}^C(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{A} F_k^E \frac{-i}{2m}[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)\overrightarrow{\nabla}_k + \overleftarrow{\nabla}\delta_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)] \tag{2.65}$$

$$\mathbf{J}^M(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{A} F_k^M \frac{1}{2m}\vec{\nabla}_k \times \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)\sigma_k. \tag{2.66}$$

Nella (2.65) e nella (2.66) compare il fattore elettromagnetico $F_k^{E,M}(q,\omega)$ definito

$$F_k^{E,M}(q,\omega) = G_{E,M}^p(q,\omega) + \frac{1}{2}(1+\tau_3^k) + G_{E,M}^n(q,\omega) + \frac{1}{2}(1-\tau_3^k) \tag{2.67}$$

dove τ_3^k è la terza componente dell'isospin. Per compattare la scrittura, introduciamo il tensore elettrico T_{JM}^{el} con parità naturale $\Pi = (-1)^\lambda$ e il tensore magnetico T_{JM}^{mag} con parità $\Pi = (-1)^{\lambda+1}$:

$$T_{JM}^{el} = \frac{1}{q}\int d\mathbf{r}\left\{\vec{\nabla} \times [j(qr)\mathbf{Y}_{J,J,M}(\mathbf{r})]\right\} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}); \tag{2.68}$$

$$T_{JM}^{mag} = \int d\mathbf{r} j_J(qr)\mathbf{Y}_{J,J,M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}). \tag{2.69}$$

Sfruttando il teorema del rotore e le regole di differenzazione delle funzioni di Bessel, il tensore elettrico può essere espresso nella forma seguente:

$$T_{JM}^{el}(q) = -\frac{i}{\sqrt{2J+1}} s\sqrt{J+\delta(s,-1)} \int d\mathbf{r} j_{J+1}(qr)\mathbf{Y}_{J,J+s,M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}), \tag{2.70}$$

con $s = \pm 1$. A questo punto è facile intuire come l'operatore possa essere riscritto in termini dei tensori elettrico e magnetico:

$$W_{\pm} = T_{JM}^{el} \pm T_{JM}^{mag}. \tag{2.71}$$

Introdurremo, poi, un'ipotesi semplificativa sugli stati $|00\rangle$ e $|J(Ijl);p\rangle$ su cui agisce l'operatore di transizione. Rappresenteremo tali stati in termini di sola particella–buco in modo da esprimere gli elementi di transizione come combinazione lineare di eccitazioni di singola particella–buco. Adotteremo la descrizione del modello nucleare fornita dalla teoria RPA dando agli elementi di matrice di transizione la forma:

$$\langle J(Ijl)||W||0\rangle = \sum_{j_p j_h} \Big[X^J_{ph} \langle j_p||W||j_h\rangle + (-1)^{J+j_p-j_h} Y^J_{ph} \langle j_h||W||j_p\rangle \Big]. \quad (2.72)$$

In questo modo lavoreremo sui semplici elementi di matrice che compaiono nella (2.72) e ricaveremo dal codice i coefficienti X^J_{ph} e Y^J_{ph} dipendenti dall'energia di singola particella.

Capitolo 3

Applicazione alla regione delle risonanze giganti

3.1 Introduzione

In questo capitolo presentiamo i risultati ottenuti nella regione delle risonanze giganti. Scopo di questo studio è quello di investigare se l'analisi delle asimmetrie può offrire particolari informazioni sulle multipolarità dell'eccitazione e sull'interazione effettiva, informazioni non estraibili dalle sezioni d'urto. Il nostro studio è limitato al nucleo doppio magico ^{16}O.

In tutti inuclei con $A > 10$ la sezione d'urto di fotoassorbimento aumenta considerevolmente ad energie di eccitazione che variano dai 10 ai 30 MeV [Eis70], [Rin80]. Questo aumento della sezione d'urto, detto risonanza gigante, corrisponde ad una eccitazione collettiva del nucleo, ovvero un modo di eccitazione che coinvolge un gran numero di nucleoni.

Il modello a campo medio non riesce a descrivere modi collettivi, dato che tratta i nucleoni come se fossero indipendenti uno dagli altri. La teoria più sofisticata utilizzata oggi per descrivere stati collettivi del nucleo è la *Random Phase Approximation* (RPA) [Eis70], [Rin80].

Tale teoria si basa su un modello a particelle indipendenti, ma, anzichè trattare i nucleoni soggetti al solo potenziale medio, considera anche un'interazione residua che fa perdere indipendenza ad ogni nucleone e fa acquistare carattere collettivo al sistema in esame.

3.2 Il modello nucleare

Consideriamo l'hamiltoniana H che descrive il sistema tenendo conto dell'interazione tra l'i-esimo e il j-esimo nucleone:

$$H = \sum_{i=1}^{A} -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + \sum_{i<j}^{A} v(i,j) \tag{3.1}$$

dove m_i indica la massa dell'i-esimo nucleone e $v(i,j)$ è l'interazione tra i nucleoni i e j. Aggiungendo e sottraendo il termine di potenziale medio ad un corpo $U(i)$ possiamo separare nell'hamiltoniana la parte che è espressa come somma di hamiltoniane di singola particella h_i, e che identifichiamo con H_0, dalla parte a due corpi che è espressa mediante soli termini di potenziale.

$$H = \sum_{i=1}^{A} -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + \sum_{i=1}^{A} U(i) + \sum_{i<j}^{A} v(i,j) - \sum_{i=1}^{A} U(i) = H_0 + V_{res} \tag{3.2}$$

con

$$H_0 = \sum_{i=1}^{A} -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + \sum_{i=1}^{A} U(i) = \sum_{i=1}^{A} h(i), \tag{3.3}$$

$$V_{res} = \sum_{i<j}^{A} v(i,j) - \sum_{i=1}^{A} U(i). \tag{3.4}$$

In rappresentazione dei numeri di occupazione (RNO) l'hamiltoniana iniziale H diventa [Eis70], [Rin80]:

$$H = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha,\beta} a_\alpha^\dagger a_\beta - \frac{1}{2}\sum_{ijij} \overline{V}_{ijij} + \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} \overline{V}_{\alpha\beta\alpha'\beta'} N[a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_{\beta'} a_{\alpha'}] \tag{3.5}$$

dove abbiamo indicato con $a_\alpha^\dagger$ e a_β gli operatori di creazione e di distruzione di nucleoni. Nell'equazione precedente abbiamo definito

$$h_{\alpha\beta} = \langle\alpha|h|\beta\rangle = t_{\alpha\beta} + \sum_i \overline{V}_{\alpha i\beta i} \tag{3.6}$$

con

$$t_{\alpha\beta} = \langle\alpha|t|\beta\rangle = \int d\mathbf{r}\phi_\alpha^*(\mathbf{r})t(\mathbf{r})\phi_\beta(\mathbf{r}) \tag{3.7}$$

e $\overline{V}_{ijij} = V_{ijij} - V_{ijji}$ è il valor medio dell'interazione residua dato dal termine diretto meno quello di scambio dove

$$V_{ijij} = \int d\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\phi_j^*(\mathbf{r}_1)\phi_i^*(\mathbf{r}_2)v(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\phi_i(\mathbf{r}_1)\phi_j(\mathbf{r}_2). \tag{3.8}$$

Le $\phi_\alpha(\mathbf{r})$ indicano le funzioni d'onda del singolo nucleone generate da un potenziale medio. Il simbolo $N[a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_{\beta'} a_{\alpha'}]$ indica il prodotto normale ordinato degli operatori di distruzione e di creazione [Fet71].

La teoria RPA descrive gli stati eccitati del sistema come combinazione lineare di eccitazioni particella buca. In un modello a campo medio gli stati di singola particella al di sotto della superficie di Fermi sono completamente occupati e quelli al di sopra completamente vuoti. Questo descrive lo stato fondamentale del sistema. Gli stati eccitati sono costruiti promuovendo particelle dagli stati occupati, che liberandosi vengono identificati come stati

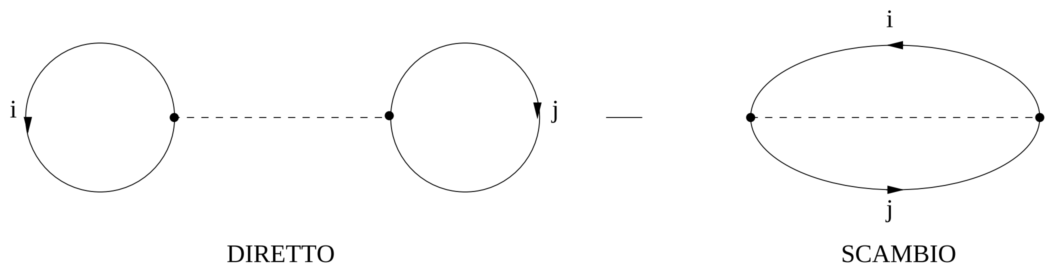

Figura 3.1: Diagramma di Goldstone relativo al termine diretto e di scambio dell'interazione V_{ijij}

buco, a stati vuoti denominati stati particella. In realtà lo stato fondamentale nel modello RPA non è quello di campo medio descritto sopra, ma è uno stato in cui sono presenti un certo numero di correlazioni (ovvero compaiono già alcune coppie particella-buco).

Definamo un operatore tale che:

$$Q_\nu^\dagger|\Psi_0\rangle = |\Psi_\nu\rangle \qquad\qquad Q_\nu|\Psi_0\rangle = 0, \tag{3.9}$$

dove $|\Psi_0\rangle$ è lo stato fondamentale RPA. Esplicitando l'espressione dell'operatore Q, la seconda delle due relazioni scritte sopra definisce lo stato fondamentale. In RPA si sceglie:

$$Q_\nu = \sum_{m,i} X^\nu_{m,i} a_i^\dagger a_m - \sum_{m,i} Y^\nu_{m,i} a_m^\dagger a_i, \tag{3.10}$$

e quindi l'operatore di eccitazione è:

$$Q_\nu^\dagger = \sum_{m,i} X^\nu_{mi} a_m^\dagger a_i - \sum_{m,i} Y^\nu_{m,i} a_i^\dagger a_m. \tag{3.11}$$

Per convenzione usiamo i pedici m,n,p,q,r se lo stato di singola particella è sopra la superficie di Fermi e i,j,k,l se invece è sotto. Data una base di singola particella, su cui agiscono gli operatori di creazione e distruzione, e una interazione effettiva tra nucleoni, le equazioni secolari RPA forniscono le energie di eccitazione del nucleo ω_ν, e per ogni energia i coefficienti X^ν e Y^ν che descrivono l'autostato. Le equazioni RPA sono derivate in letteratura utilizzando varie tecniche [Eis70], [Rin80], [Fet71]. Noi presentiamo il risultato finale nel sistema caratteristico della RPA:

$$\begin{cases} X^\nu_{nj} A_{minj} + Y^\nu_{nj} B_{minj} = \omega_\nu X^\nu_{mi} \\ X^\nu_{nj} B^*_{minj} + Y^\nu_{nj} A^*_{minj} = \omega_\nu Y^\nu_{mi} \end{cases} \tag{3.12}$$

dove le quantità A_{minj} e B_{minj} sono definite come segue:

$$A_{minj} = \langle \psi_0 | [a^\dagger_i a_m, [H, a^\dagger_n a_j]] | \psi_0 \rangle = (\varepsilon_m - \varepsilon_i)\delta_{ji}\delta_{nm} + \overline{V}_{mjin} \tag{3.13}$$

$$B_{minj} = -\langle \psi_0 | [a^\dagger_i a_m, [H, a^\dagger_j a_n]] | \psi_0 \rangle = \overline{V}_{mnij} \tag{3.14}$$

Molto spesso per compattare la scrittura si usa riportare il sistema (3.12) in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \omega_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

La conoscenza dei coefficienti X^ν e Y^ν ci permette di valutare la probabilità di transizione dallo stato fondamentale $|\Psi_0\rangle$ allo stato eccitato $|\Psi_\nu\rangle$. Supponiamo che il campo esterno che induce la trasformazione sia descritto da un operatore ad un corpo F

$$F = \sum_{\mu\mu'} \langle | f | \mu' \rangle a^\dagger_\mu a_{\mu'}, \tag{3.16}$$

dalla definizione (3.9) la probabilità di transizione è data da

$$\langle \Psi_\nu | F | \psi_0 \rangle = \sum_{mi} [X^\nu_{mi} \langle m | F | i \rangle + Y^\nu_{mi} \langle i | F | m \rangle] \tag{3.17}$$

dove $|m\rangle$ e $|i\rangle$ indicano la funzione d'onda di singola particella. L'equazione (3.17) mostra chiaramente che l'RPA descrive una transizione tra stati a molticorpi, come combinazione lineare di eccitazioni di singola particella.

Le energie che considereremo sono superiori alla soglia del continuo. Questo significa che l'energia dello stato particella è maggiore di zero, e quindi lo stato eccitato decade emettendo un nucleone e lasciando un nucleo residuo di $A - 1$ nucleoni.

Le equazioni secolari RPA che descrivono l'eccitazione nel continuo sono più complicate delle (3.12) e prevedono una soluzione per qualsiasi valore di ω al di sopra della soglia di emessione nucleonica.

In questo lavoro useremo le soluzioni delle equazioni RPA nel continuo ottenute come descritto in [Co'84].

3.3 Descrizione del metodo di calcolo

Per eseguire un qualunque calcolo RPA occorre fissare l'interazione residua e i livelli di singola particella. Nel nostro lavoro gli stati di singola particella sono stati generati utilizzando un potenziale *Woods-Saxon*. I parametri del potenziale, presi da [Co'84], sono stati fissati per riprodurre i valori empirici delle energie di singola particella attorno alla superficie di Fermi e la distribuzione di carica di ^{16}O. Per verificare la sensibilità dei risultati all'interazione residua abbiamo effettuato i calcoli introducendo due diverse interazioni residue: l'interazione di *Landau–Migdal* (brevemente, LM) e il *potenziale di polarizzazione* (PP).

L'interazione LM è un'interazione di contatto della forma:

$$V_{LM}(1,2) = C_0[f_0(\rho) + f'_0(\rho)\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2) + g_0\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)+$$

$$+g'_0\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2)]\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \tag{3.18}$$

dove C_0 è una costante di dimensioni $MeV fm^3$ e f_0, f'_0, g_0, g'_0 sono coefficienti adimensionali. I termini dipendenti dalla densità sono fissati come segue :

$$f(\rho) = f^{ex} + (f^{int} - f^{ex})\frac{\rho(0)}{\rho(\mathbf{r})} \tag{3.19}$$

in modo tale che

$$\lim_{\mathbf{r}\to 0} f = f^{int} \qquad \lim_{\mathbf{r}\to\infty} f = f^{ex} \tag{3.20}$$

con

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 + exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}. \tag{3.21}$$

I valori dei parametri f, f', g, g' da noi utilizzati [Co'84] sono stati fissati in modo da riprodurre proprietà di stati eccitati nell'^{16}O.

L'altra interazione residua che abbiamo utilizzato è quella del potenziale di polarizzazione (PP). L'interazione PP ha un'espressione simile alla LM ma è a range finito:

$$V_{PP}(1,2) = [F_0(\mathbf{r}_{1,2},\rho) + F'_0(\mathbf{r}_{1,2},\rho)\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2) + G_0(\mathbf{r}_{1,2})\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)+$$

$$G'_0(\mathbf{r}_{1,2})\boldsymbol{\sigma}(1)\cdot\boldsymbol{\sigma}(2)\boldsymbol{\tau}(1)\cdot\boldsymbol{\tau}(2)] \tag{3.22}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbf{r}_{1,2}$ la distanza tra i nucleoni 1 e 2. L'interazione PP è stata proposta in [PQW76] ed è stata fissata per riprodurre alcune caratteristiche della materia nucleare.

3.4 Presentazione dei risultati

Inizialmente, consideriamo il processo di fotoassorbimento totale in cui un fotone viene assorbito da un nucleo di ^{16}O. Per il processo inclusivo considerato abbiamo calcolato la sezione d'urto in funzione dell'energia del fotone incidente per le prime tre multipolarità elettriche. Nella **Figura 3.2** mostriamo il contributo dei tre multipoli considerati quando viene utilizzata una LM, un PP e in assenza di interazione residua (MF). Nel primo pannello della **Figura 3.2** si vede come, utilizzando un'interazione a zero-range, la LM, il contributo del multipolo 1^- sia predominante rispetto al 2^+ che a sua volta è superiore al 3^- e questa situazione permane dalla regione delle risonanze giganti fino alle energie relative al picco quasi elastico.

Il contributo dei diversi multipoli al calcolo della sezione d'urto ricavata con il potenziale di polarizzazione è molto simile a quella ottenuta spegnendo l'interazione residua per energie oltre i 40 MeV. Questo accade perchè ad un'energia di circa 20 MeV la massima distanza che riusciamo a risolvere è di qualche decina di fm, e in questa zona l'andamento dell'interazione di contatto è simile a quella del potenziale di polarizzazione. Se invece l'energia associata al fotone è di circa 100 MeV siamo i grado di risolvere distanze di pochi fm e a tali energie l'interazione costante si distanzia da quella a zero–range che tende ad annullarsi. Abbiamo inoltre confrontato gli andamenti della sezione d'urto con i dati sperimentali [Ahr76] del processo di fotoassorbimento studiato. Tale confronto è presentato nella **Figura 3.2 b**. La sezione d'urto calcolata senza alcuna interazione residua presenta un picco a 17 MeV ma nessuna risonanza collettiva. Solo i calcoli RPA riproducono le

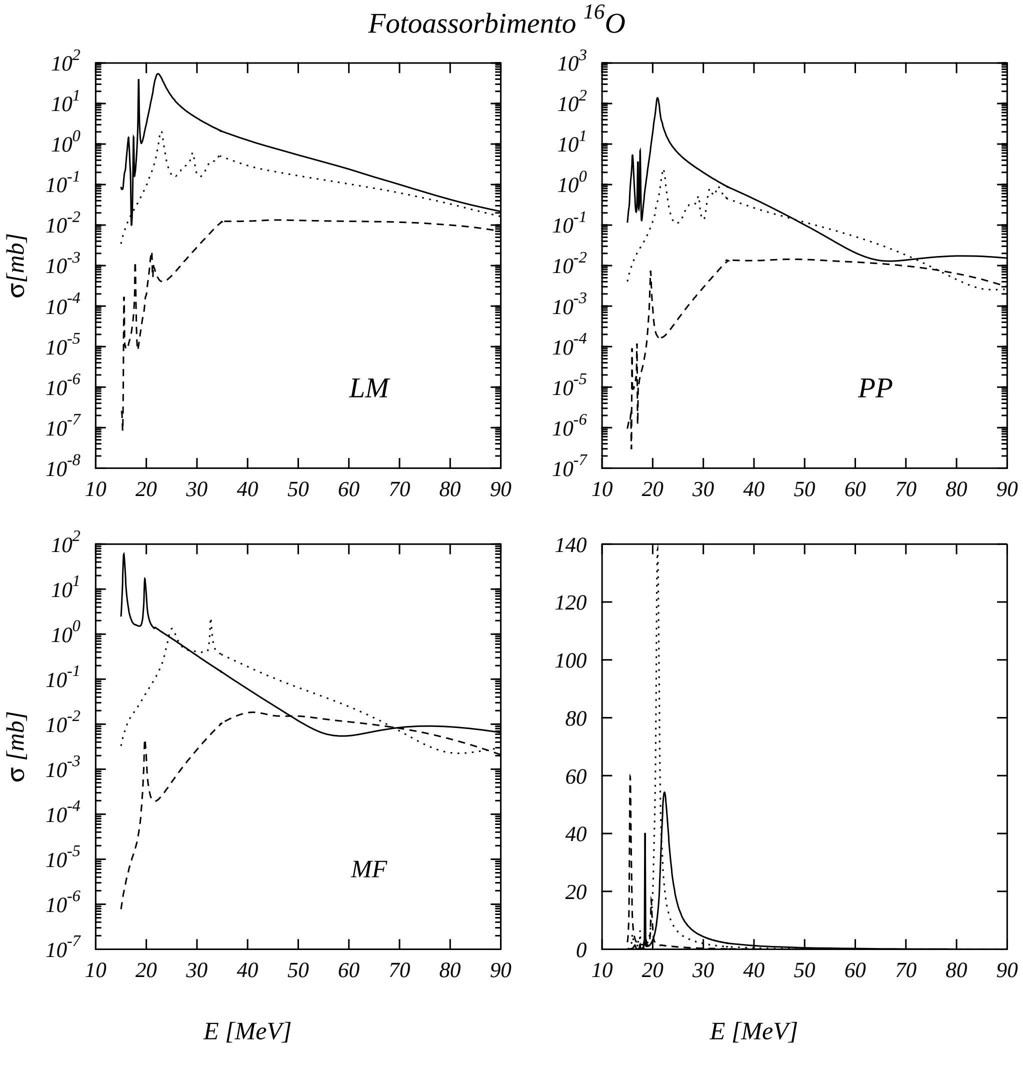

Figura 3.2: Nei primi tre pannelli riportiamo la sezione d'urto per processi di fotoassorbimento totale calcolata con un'interazione residua di tipo Landau–Migdal (LM), di tipo potenziale di polarizzazione (PP) e spegnendo l'interazione facendo agire il solo campo medio (MF). Per ognuno dei tre pannelli confrontiamo i diversi contributi dei multipoli 1^- (linea continua), 2^+ (linea punteggiata) e 3^- (linea tratteggiata). Nell'ultimo confrontiamo le sezioni d'urto totali calcolate con l'interazione LM (linea continua), PP (linea punteggiata) e con interazione nulla (linea tratteggiata).

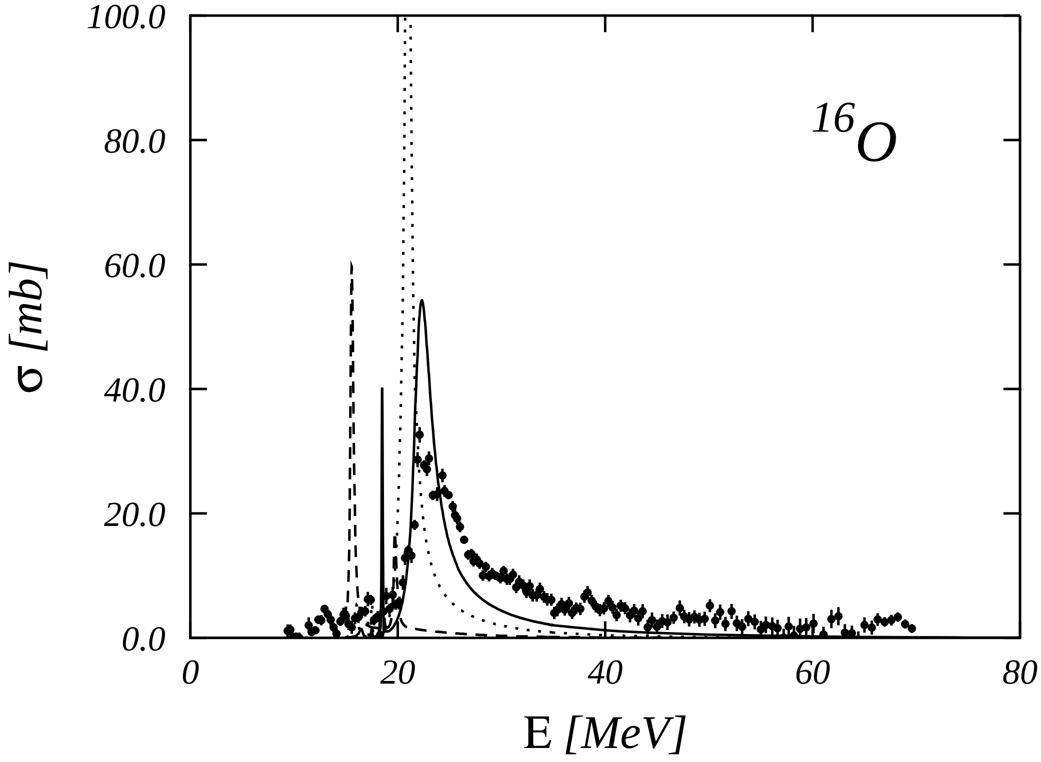

Figura 3.2 b: Confronto con i dati sperimentali della sezione d'urto totale per processi di fotoassorbimento calcolata con un'interazione residua di tipo Landau–Migdal (linea continua), di tipo potenziale di polarizzazione (linea punteggiata) e con l'azione del solo campo medio. Solo nel caso in cui la sezione d'urto è stata calcolata mediante l'interazione di Landau–Migdal viene riprodotta la presenza del picco delle risonanze giganti

risonanze. L'interazione residua LM riproduce la posizione del picco anche se ne sovrastima l'altezza e ne sottostima l'ampiezza.

L'interazione PP produce una risonanza ad energia inferiore rispetto a quella sperimentale, più alta e stretta rispetto a quella prodotta dalla LM.

Dopo aver confrontato i risultati delle sezioni d'urto di fotoassorbimento totale con i dati sperimentali, siamo passati allo studio del processo di emissione nucleonica da un nucleo eccitato mediante fotone. Nello specifico, abbiamo studiato il processo $^{16}O(\gamma, p)^{15}N$ considerando che il protone rivelato venga emesso dallo stato $1p_{\frac{1}{2}}$.

Prima di studiare il comportamento della sezione d'urto e dell'asimmetria alla presenza o meno di interazione residua, stimiamo il numero di multipoli utili al calcolo di queste quantità. Fissate l'interazione residua e l'energia, abbiamo studiato la distibuzione angolare della sezione d'urto all'aumentare del numero di multipoli. In **Figura 3.3** mostriamo che i contributi dei multipoli con $J > 6$ sono trascurabili. Infatti, sommando i diversi multipoli sia elettrici che magnetici con J inferiore a 5 la sezione d'urto cambia considerevolmente, mentre le curve ottenute sommando multipoli elettrici e magnetici superiori a $J = 6$ si sovrappongono le une alle altre, suggerendoci che il loro contributo alla sezione d'urto è trascurabile. Diremo, pertanto, che per $J = 6$ si verifica convergenza. Abbiamo, inoltre, messo a confronto le sezioni d'urto ottenute con i multipoli elettrici e magnetici con quelle relative ai soli multipoli elettrici notando che, come accade per fotoni non polarizzati, le transizioni magnetiche sono poco rilevanti. Abbiamo ripetuto la stessa operazione usando il potenziale di polarizzazione o azzerando l'interazione residua il risultato è il medesimo: si ha convergenza per $J = 6$.

Pertanto in **Figura 3.3** riportiamo l'andamento della sezione d'urto all'aumentare del numero di multipoli elettrici con cui viene calcolata la stessa. Stabilito che per la sezione d'urto possiamo arrestare lo sviluppo a $J = 6$, ripetiamo la stessa operazione per l'asimmetria : ci proponiamo di stabilire se l'asimmetria converge prima della sezione d'urto. In **Figura 3.4** mostriamo che l'asimmetria può essere calcolata trascurando i multipoli con parità naturale e non con $J > 6$.

Valutiamo il contributo di ciascun multipolo e cerchiamo di capire se l'aver stabilito la convergenza a $J = 6$ è una buona approssimazione. Quindi, dapprima calcoliamo la sezione d'urto con dieci multipoli, tale scelta ci sembra ragionevole avendo già stabilito con l'ausilio degli andamenti grafici che la convergenza si ottiene attorno al sesto multipolo. Poi valutiamo lo scarto, ovvero l'entità della nostra approssimazione, calcolando le quantità

$$\Delta_\sigma \equiv \int \frac{\sigma^F(\theta) - \sigma^{J_\pi}(\theta)}{\sigma^F(\theta)} d\theta, \qquad \Delta_\Sigma \equiv \int \frac{\Sigma^F(\theta) - \Sigma^{J_\pi}(\theta)}{\Sigma^F(\theta)} d\theta \tag{3.23}$$

dove con σ^F e Σ^F indichiamo rispettivamente la sezione d'urto e l'asimmetria calcolata con 10 multipoli, mentre σ^{J_π} e Σ^{J_π} rappresentano la sezione d'urto e l'asimmetria valutate con il multipolo con momento J e parità π sommato ai precedenti. Ripetiamo la stima dell'approssimazione sia per i calcoli effettuati con interazione LM che PP e anche per i calcoli con interazione spenta, ovvero di puro campo medio. Riportiamo in **Tabella 3.1** i risultati così ottenuti. Dall'analisi di tali valori osserviamo che all'aumentare del numero dei multipoli lo scarto diminuisce fino a tendere a zero. L'unica eccezione è costituita dal multipolo 2^+ che interferendo con l' 1^- riduce il contributo di quest'ultimo sia nella sezione d'urto che nel modulo dell'asimmetria. D'al-

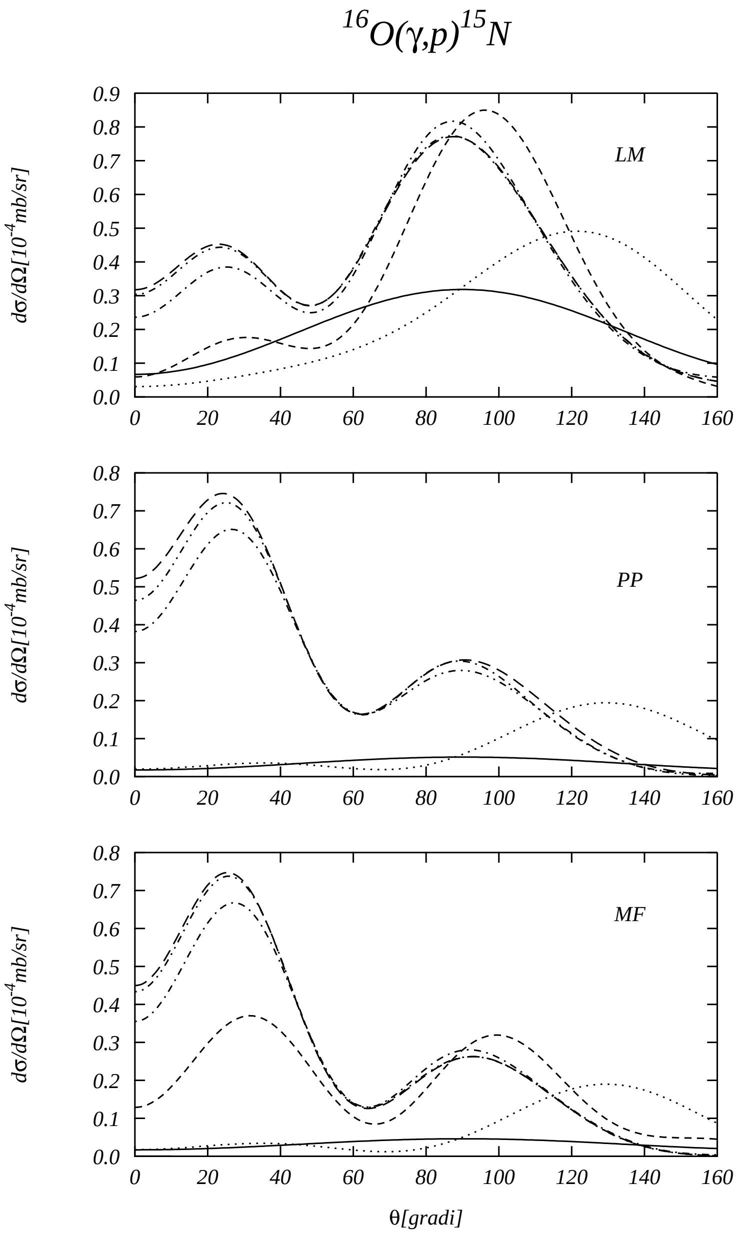

Figura 3.3: Andamento della sezione d'urto aumentando il numero di multipoli elettrici fino al sesto. Il calcolo è stato fatto utilizzando l'interazione residua di tipo LM, PP e, infine, senza alcuna interazione residua. La linea continua è relativa al contributo dell'1^-, quella punteggiata alla somma dell' 1^- e del 2^+, la linea a tratti si riferisce all' $1^-, 2^+$ e 3^-; la linea a tratto e punto è relativa alla somma dei primi quattro multipoli elettrici, i trattini intervallati da due punti rappresentano il contributo della somma di 1^-, 2^+, 3^-, 4^+ e 5^- e l'andamento con l'aggiunta del sesto multipolo è rappresentato dai trattini più spessi.

tronde l'andamento della sezione d'urto ottenuto sommando i contributi dei primi due multipoli elettrici resta, fino ad un angolo di 90°, quasi sempre al di sotto della curva relativa all'azione del solo multipolo 1^-. Lo scarto ottenuto sommando multipoli maggiori del sesto è irrilevante pertanto abbiamo la conferma che la prima approssimazione fatta dalla sola analisi dei grafici è soddisfacente.

	LM		PP		MF	
J^π	Δ_σ	Δ_Σ	Δ_σ	Δ_Σ	Δ_σ	Δ_Σ
1^-	83.339	-32.561	170.539	-65.686	190.548	-75.410
2^+	167.239	-37.787	554.939	-50.780	624.430	-58.026
3^-	57.065	-35.684	274.102	-12.516	249.265	-11.122
4^+	12.837	-4.584	23.317	-3.072	19.058	-3.213
5^-	1.882	-1.113	2.095	-2.227	2.847	-0.413
6^+	0.338	-0.328	0.898	-11.508	0.472	-0.167
7^-	0.071	-0.070	0.0870	-0.133	0.082	-0.067
8^+	0.015	-0.009	0.018	-0.016	0.019	-0.004
9^-	0.004	-0.002	0.005	-0.004	0.005	-0.001
10^+	0	0	0	0	0	0

Tab 3.1: Valutiamo l'entità dell'approssimazione fatta sulla convergenza della sezione d'urto e dell'asimmetria.

Fissato il numero di multipoli utili, calcoliamo la sezione d'urto e riportiamo in **Figura 3.5** il confronto tra i diversi andamenti ottenuti cambiando l'interazione residua alle diverse energie fissate. A 20 MeV la sezione d'ur-

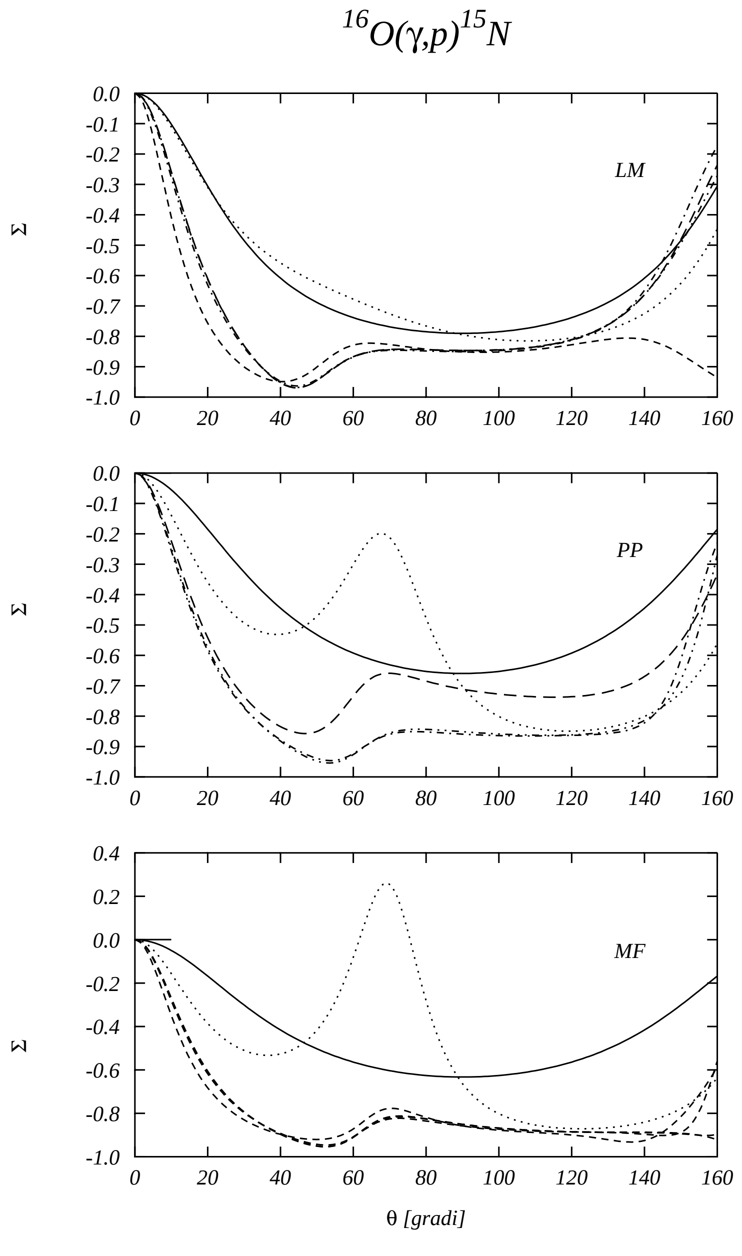

Figura 3.4: Andamento dell'asimmetria aumentando il numero di multipoli elettrici fino al sesto. Il calcolo è stato fatto utilizzando l'interazione residua di tipo LM, PP e con l'azione del solo campo medio. La rappresentazione usata per il contributo di diversi mutipoli è la stessa della **Figura 3.3**:

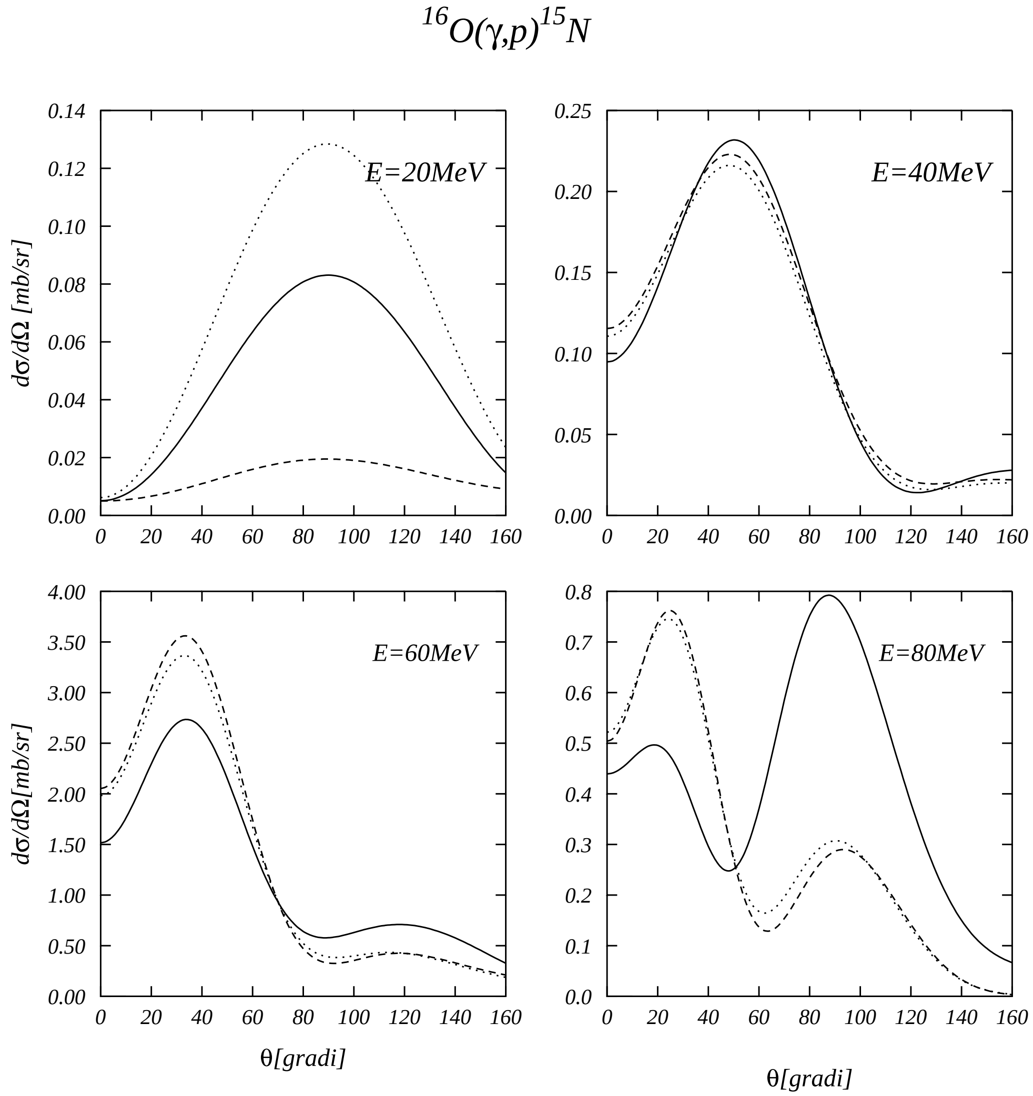

Figura 3.5: Sezione d'urto alle energie di 20, 40, 60 e 80 MeV calcolata con i sei multipoli utili. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto spegnendo l'interazione residua (linea tratteggiata), quello con interazione LM (linea continua) e con PP (linea punteggiata).

to risulta piuttosto sensibile alla presenza o meno di interazione residua: lo spegnimento dell'interazione produce un andamento nettamente separato da quello prodotto dall'interazione LM o da quella PP. All'aumentare dell'energia l'interazione residua dovuta al potenziale di polarizzazione tende ad annularsi e quindi produce un andamento simile a quello ottenuto senza alcuna interazione residua. Negli ultimi due pannelli si nota come solo il contributo dell'interazione LM si separa nettamente da quello relativo all'interazione nulla dal momento che il potenziale di polarizzazione ad un'energia così alta tende a zero. Ripetiamo esattamente la stessa operazione per l'asimmetria e riportiamo gli andamenti in **Figura 3.6**. A 20 MeV l'azione dell'interazione residua di tipo LM e PP è notevole e produce affetti simili all'asimmetria, infatti la linea continua (interazione LM) e quella punteggiata (interazione PP) del primo pannello di **Figura 3.6** sono quasi sovrapposte, ma nettamente separate dall'andamento dell'asimmetria ottenuta con la sola azione del campo medio. All'aumentare dell'energia, l'azione del potenziale di polarizzazione tende a spegnersi e, infatti, l'andamento dell'asimmetria ottenuto con PP risulta più vicino a quello relativo all'assenza d'interazione che non a quello relativo alla presenza di interazione LM.

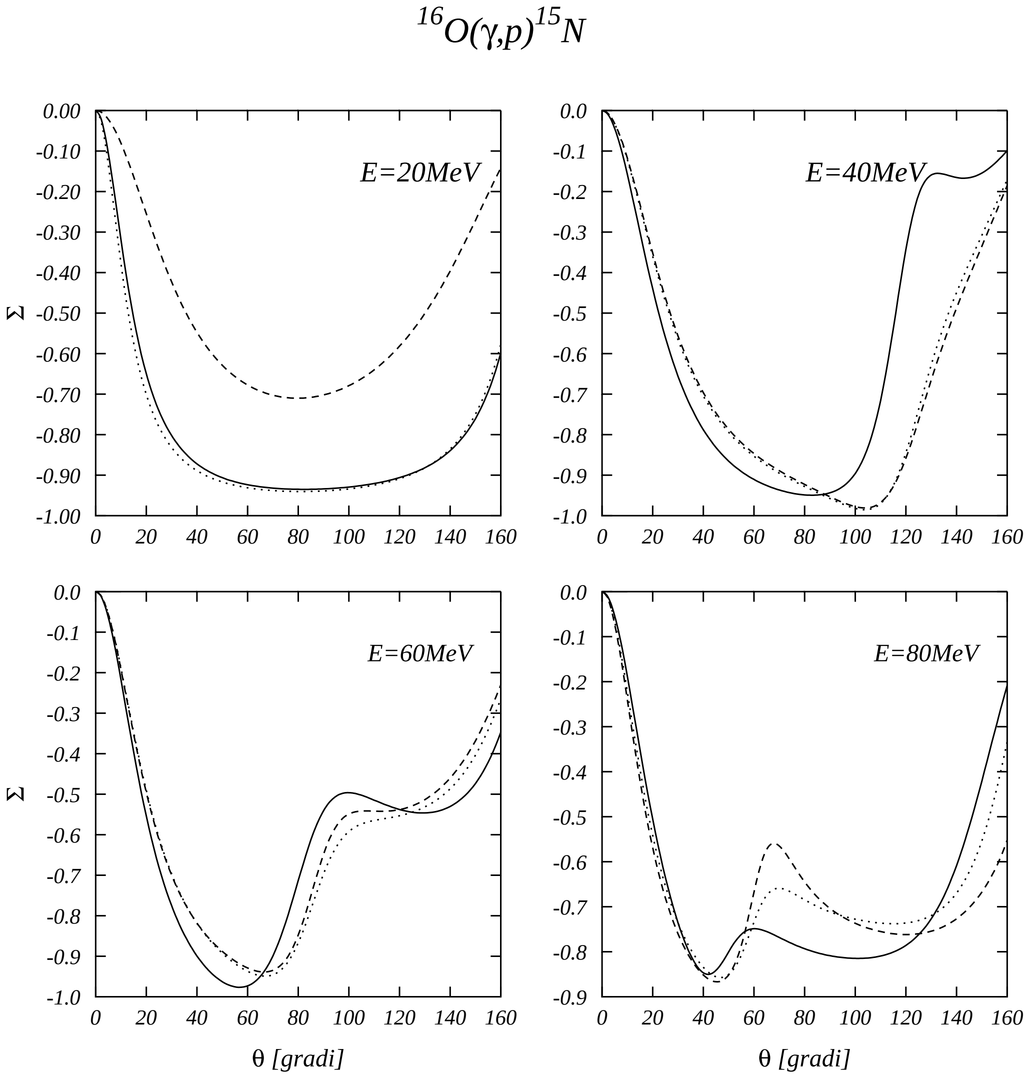

Figura 3.6: Asimmetria alle energie di 20, 40, 60 e 80 MeV calcolata con i sei multipoli utili. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto spegnendo l'interazione residua (linea tratteggiata), quello con interazione LM (linea continua) e con PP (linea punteggiata).

Capitolo 4

Effetti di ordine superiore

4.1 Introduzione

Fin'ora abbiamo considerato che la transizione del nucleo dallo stato fondamentale a quello eccitato fosse indotta da operatori ad un corpo. In realtà ci sono due possibili correzioni a questa ipotesi, una legata alla struttura della corrente elettromagnetica, e l'altra legata a correzioni del modello nucleare.

La correzione alla corrente elettromagnetica riguarda l'inserimento delle correnti di scambio mesonico (MEC). L'altra correzione riguarda le correlazioni a corto raggio (SRC). Entrambi questi effetti producono eccitazioni indotte da operatori a due corpi. Dato che questi effetti sono piccoli rispetto a quelli prodotti dagli operatori ad un corpo è necessario avere sottocontrollo il modello nucleare.

Abbiamo visto nel capitolo precedente che per energie del fotone maggiori di $60 MeV$ le sezioni d'urto sono ben descritte da un modello a campo medio. Per questo studio noi lavoreremo in questo regime energetico.

Il modello nucleare da cui siamo partiti è un puro modello a campo medio in cui la particella viene emessa nel continuo.

Rispetto al semplice modello a campo medio operiamo una correzione per considerare le interazioni di stato finale (FSI), ovvero il fatto che il nucleone emesso re–interagisca con il nucleo residuo. Le FSI sono considerate facendo muovere il nucleone emesso in un potenziale medio complesso, potenziale ottico, i cui parametri sono stati fissati per riprodurre le sezioni d'urto elastiche nucleone–nucleo.

Questo trattamento implica una non ortogonalità tra stati buca, ottenuti con un potenziale reale come descritto nel capitolo precedente, e stati di particella. Questi problemi sono noti e studiati in letteratura e portano ad errori di qualche percento sulla sezione d'urto [Bof96]. Nel nostro lavoro non ci limiteremo allo studio di processi di emissione di un singolo nucleone (γ, p), ma analizzeremo anche processi in cui vengono emesse due particelle cariche (γ, pp). In quest'ultimo processo sono attivi solo operatori a due corpi. Prima di presentare i risultati daremo una breve descrizione delle idee di base della trattazione delle MEC e delle SRC.

4.2 Correnti di scambio mesonico (MEC)

La presenza all'interno del nucleo di correnti elettromagnetiche non prodotte dai nucleoni deriva dal fatto che i nucleoni interagiscono scambiandosi mesoni. Le MEC sono generate da questi mesoni.

La conservazione di carica e corrente mostra la necessità di inserire correnti a due corpi perchè possa essere soddisfatta [Bof96]. Questo, non è però

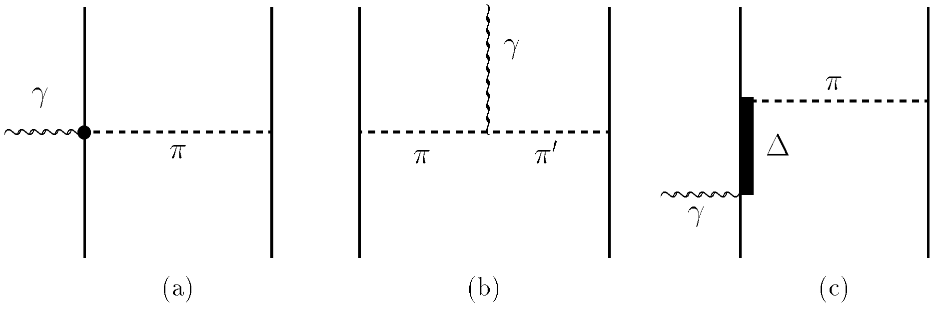

Figura 4.1: Diagrammi di Feynman dei tre operatori di corrente di scambio mesonico che abbiamo usato: (a) seagull, (b) pionic, (c) Δ.

sufficiente per identificare in modo univoco le MEC. Per questo motivo in letteratura ci sono vari approcci alla trattazione delle MEC.

Noi utilizzeremo l'approccio presentato in [Ama94] che consiste nel considerare i diagrammi di Feynman che descrivono lo scambio di un solo pione. Questi sono i contributi più rilevanti, circa il 90%, delle MEC [Bof96]. I tre diagrammi che consideriamo sono presentati in **Figura 4.1**, e vengono definiti come *Seagull* (J^S), *Pionic* (J^π), *Delta* (J^Δ):

$$J^S(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{f_\pi^2}{m_\pi^2} F_S \sum_{k,l=1}^{A} [\boldsymbol{\tau}^k \times \boldsymbol{\tau}^l]_3 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) \boldsymbol{\sigma}^k \cdot \boldsymbol{\sigma}^l \nabla_k h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) + (k \leftrightarrow l) \quad (4.1)$$

$$J^\pi(\mathbf{r}) = -4\pi \frac{f_\pi^2}{m_\pi^2} F_{\pi\sigma} \sum_{k,l=1}^{A} [\boldsymbol{\tau}^k \times \boldsymbol{\tau}^l]_3 \boldsymbol{\sigma}^k \cdot \nabla_k h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|)(\overrightarrow{\nabla} - \overleftarrow{\nabla}) \boldsymbol{\sigma}^l \cdot \nabla_l h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) \quad (4.2)$$

$$J^\Delta(\mathbf{r}) = -iC_\Delta F_\Delta \sum_{k,l=1}^{A} \nabla \times \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k) \Big\{ [\boldsymbol{\tau}^k \times \boldsymbol{\tau}^l]_3 \boldsymbol{\sigma}^k \times \nabla_k \Big(\boldsymbol{\sigma}^l \cdot \nabla_k h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) \Big)$$
$$-4\tau_3^l \nabla_k \Big(\boldsymbol{\sigma}^l \cdot \nabla_k h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) \Big) \Big\} + (k \leftrightarrow l) \quad (4.3)$$

dove la notazione $(k \leftrightarrow l)$ indica la ripetizione del termine che compare nella sommatoria con gli indici k ed l scambiati. Le costanti delle equazioni (4.1) e (4.2) sono $f_\pi^2 = 0.079$, $F_S = G_E^p - G_E^n$,

$$F_\pi = F_{\pi\gamma} = \frac{1}{1 + (q^2 - \omega^2)/m_\rho^2}$$

con ρ massa del mesone scambiato. La funzione $h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|)$ è ottenuta a partire dal propagatore del pione [Ama94] e la sua espressione è

$$h(|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{F_{\pi n}(j,\varepsilon) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{r}_l}}{k^2 + m_\pi^2 - \varepsilon} \tag{4.4}$$

dove abbiamo indicato con $F_{\pi n}$ il fattore di forma pione–nucleone e con $\varepsilon = (\Delta E)_l$ l'energia del pione scambiato, di massa m_π ottenuta come differenza tra le energie degli stati finale e iniziale di singola particella dell' l-esimo nucleone:

$$\varepsilon = \varepsilon_{p_l} + \varepsilon_{p_k} - \varepsilon_{h_l} - \varepsilon_{h_k}.$$

I coefficienti dell'espressione (4.3) per la corrente Δ sono

$$F_\Delta = G_M^p - G_M^n, \qquad C_\Delta \equiv \frac{f_{\pi N\Delta} f_{\pi NN} f_{\gamma N\Delta}}{9m_\pi^3} \frac{1}{(m_{\Delta - m})}.$$

Nell'equazione precedente abbiamo indicato con m la massa del nucleone, con m_Δ la massa della Δ e con m_π la massa del pione. Le tre costanti di accoppiamento $f_{\pi N\Delta}$, $f_{\pi NN}$, $f_{\gamma N\Delta}$ si riferiscono ai tre vertici della figura (c). Mentre il valore $f_{\pi NN}^2/4\pi = 0.079$ è ben stabilito da esperimenti di diffusione elastica di π da nucleoni, i valori delle altre due costanti sono incerti. Sfrutteremo l'incertezza di questi valori per verificare la sensibilità dei nostri risultati alla corrente Δ.

Le correnti Seagull e Pionic sono nulle se il pione scambiato è neutro. Questo non è vero per la corrente Δ. Nel caso di emissione di due nucleoni identici, ad esempio due protoni, come noi considereremo, per conservazione della carica i soli termini MEC attivi sono quelli della J^Δ con scambio di π^0.

Le correnti definite in (4.1), (4.2), (4.3) devono essere inserite negli operatori $W_{\pm}$ definiti nell'equazione (1.34) per calcolare le sezione d'urto e le asimmetrie. Le espressioni esplicite degli elementi di matrice sono date in [Ama94].

4.3 Correlazioni a corto raggio (SRC)

Le correlazioni a corto raggio sono generate dalla presenza di un core fortemente repulsivo nell'interazione microscopica tra due nucleoni. Questo impedisce loro di avvicinarsi entro certe distanze. È evidente che questo effetto è incluso nel modello a campo medio in cui ogni particella si muove indipendentemente dalla presenza delle altre.

Per la descrizione delle SRC noi utilizzeremo la tecnica descritta in [Ang02] e [Ang04], basata sulla tradizionale teoria *Correlated Basis Function* (CBF) [Ros82] e [Cla79].

Esprimiamo gli stati fondamentale ed eccitato come

$$|\psi_0\rangle \equiv |00; +1\rangle = F|\Phi; 00, +1\rangle \tag{4.5}$$

$$|\psi_f\rangle \equiv |JM; \Pi\rangle = F|\Phi; JM, \Pi\rangle \tag{4.6}$$

dove Φ indica determinanti di Slater di funzioni d'onda di singola particella. La funzione di correlazione F ha forma

$$F(1, 2, ...A) = \prod_{i,j} f(r_{ij}). \tag{4.7}$$

dove $f(r_{ij})$ è una funzione di correlazione scalare a due corpi e dipende dalla mutua distanza $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ dell'i-esimo e j-esimo nucleone considerato.

In generale i vettori rappresentativi degli stati non hanno norma unitaria, quindi introduciamo vettori del tipo

$$|\Psi_n\rangle = \frac{|\psi_n\rangle}{\sqrt{\langle\psi_n|\psi_n\rangle}} \tag{4.8}$$

per $n = 0$ indica lo stato fondamentale e $n = f$ quello eccitato. A questo punto possiamo calcolare l'elemento di matrice $\langle\Psi_f|W_\pm|\Psi_i\rangle$ facendo uno sviluppo in cluster utilizzando la (4.5) e la (4.6):

$$C \equiv \langle\Psi_f|W_\pm|\Psi_0\rangle = \frac{\langle\psi_f|W_\pm|\psi_0\rangle}{\sqrt{\langle\psi_f|\psi_f\rangle}\sqrt{\langle\psi_0|\psi_0\rangle}} = \frac{\langle\Phi_f|F^\dagger W_\pm F|\Phi_0\rangle}{\sqrt{\langle\Phi_f|F^\dagger F|\Phi_f\rangle}\sqrt{\langle\Phi_0|F^\dagger F|\Phi_0\rangle}} \tag{4.9}$$

Per poter utilizzare le tradizionali tecniche dello sviluppo in cluster usate in CBF [Cla79], [Ros82] conviene riscrivere la (4.9) come segue:

$$C = \frac{\langle\Phi_f|F^\dagger W_\pm F|\Phi_0\rangle}{\langle\Phi_f|F^\dagger F|\Phi_f\rangle}\sqrt{\frac{\langle\Phi_f|F^\dagger F|\Phi_f\rangle}{\langle\Phi_0|F^\dagger F|\Phi_0\rangle}} \tag{4.10}$$

La presenza del denominatore $\langle\Phi_0|F^\dagger F|\Phi_0\rangle$ consente di eliminare i diagrammi non connessi presenti nel numeratore $\langle\Phi_f|F^\dagger W_\pm F|\Phi_0\rangle$.

La quantità $h(r_{ij})$ in termini della quale viene fatto lo sviluppo in cluster è

$$h(r_{ij}) = f^2(r_{ij}) - 1. \tag{4.11}$$

Inserendo la (4.11) e la (4.7) nella (4.10), è possibile esprimere l'elemento di matrice come somma dei termini che contengono diverse potenze di h. Come già accennato, la presenza in (4.10) dei denominatori permette di eliminare i diagrammi non connessi. Il modello sviluppato in [Co'95] consiste nel considerare solo i termini al primo ordine in h:

$$C^{(1)} = \langle\Phi_f|W_\pm \sum_{i<j}(1 + h(r_{ij}))|\Phi_0\rangle_c \tag{4.12}$$

dove il pedice c ci riferisce ai soli diagrammi non connessi. Se indichiamo con 1 la coordinata su cui agisce l'operatore ad un corpo di corrente elettromagnetica la (4.12) può essere scritta come somma di tre termini:

$$C^{(1)} = \langle \Phi_f | W_\pm | \Phi_0 \rangle_c + \langle \Phi_f | W_\pm \sum_{i>1}^{A} h(r_{ij}) | \Phi_0 \rangle_c + \langle \Phi_f | W_\pm \sum_{1<i<k}^{A} h(r_{ik}) | \Phi_0 \rangle_c \tag{4.13}$$

I termini sono riportati in forma diagrammatica in **Figura 4.2** dove i quadretti neri indicano le coordinate su cui agisce l'operatore ad un corpo, le altre coordinate sono rappresentate con i cerchietti neri. Le linee tratteggiate rappresentano la funzione di correlazione usata $h(r_{ij})$, quelle orientate rappresentano le funzioni d'onda di singola particella. Le lettere *i,k* indicano una generica funzione d'onda di buco sotto la superficie di Fermi. I diagrammi di **Figura 4.2** si riferiscono al caso di emissione di singolo nucleone.È evidente che in caso $h(r_{ij})$ sia nullo sopravvive solo il termine di puro campo medio (1.1). Nel caso di emissione di due nucleoni si hanno diagrammi analoghi a due e a tre punti, ma non non esiste il diagramma di puro campo medio [Ang03] **Figura 4.3**. Il troncamento al primo ordine di C risulta essere una buona approssimazione per il calcolo degli elementi di matrice $\langle JM(Ijl); p | [W_\pm] | 00; +1 \rangle$ [Ama98].

È evidente che la correlazione trasforma un operatore ad un corpo in un operatore a due corpi. Non considereremo la situazione in cui MEC e SRC agiscono insieme.

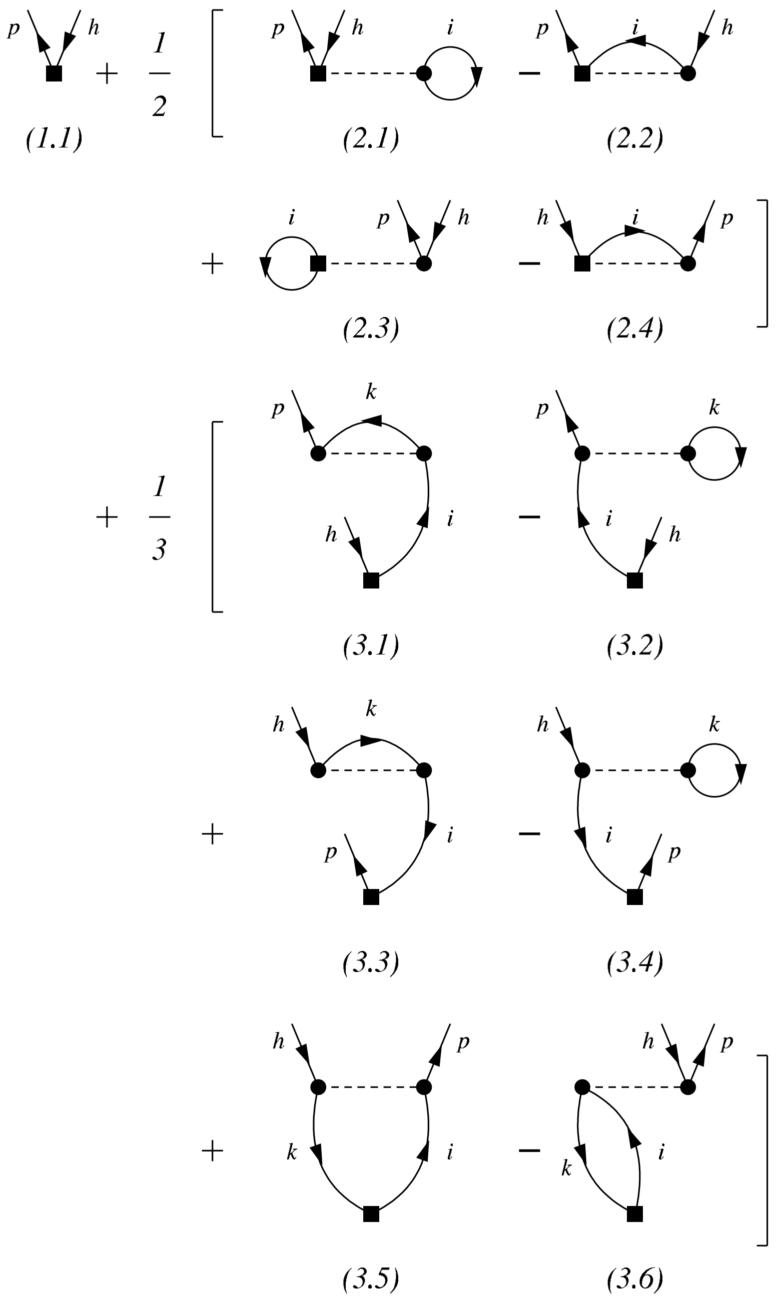

Figura 4.2: Diagrammi relativi alle SRC. Il termine (1.1) è un diagramma ad un punto e corrisponde al primo termine della (3.10), i diagrammi (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) indicano l'azione dell'operatore su una delle due particelle correlate e rappresentano il secondo termine dell'espressione. Gli ultimi diagrammi sono relativi al caso in cui l'operatore agisce su particelle diverse da quelle correlate. La spiegazione dei simboli è data nel testo.

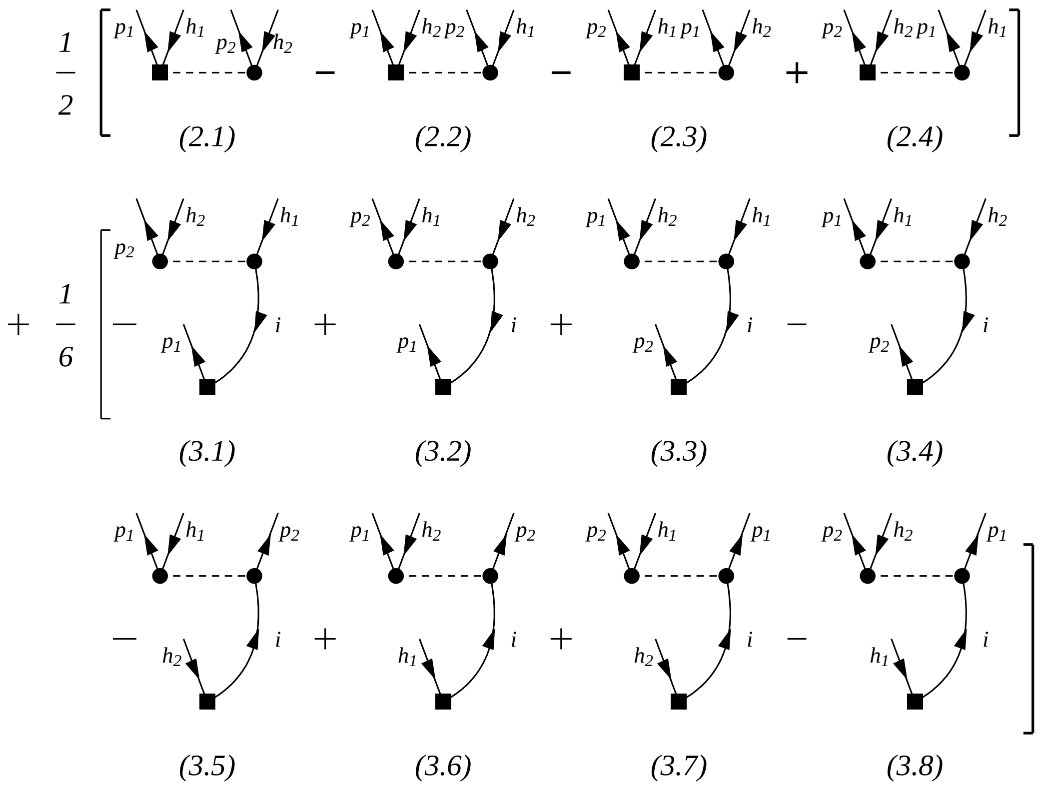

Figura 4.3: Diagrammi relativi alle SRC nel caso di emissione di due nucleoni. La simbologia usata è la stessa del diagramma precedente.

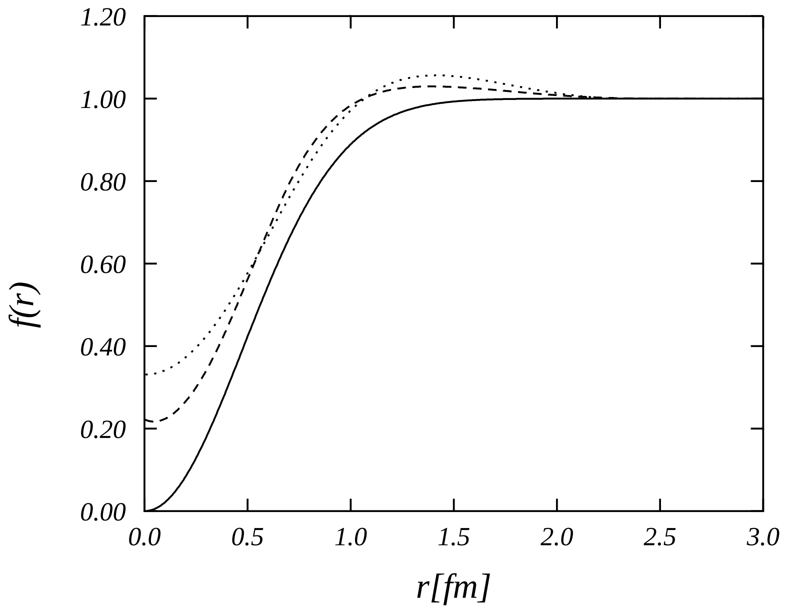

Figura 4.4 : Funzioni di correlazione usate nei nostri calcoli in funzione della distanza tra i nucleoni. La linea continua indica la correlazione Gaussiana, quella punteggiata la $S3$ e la linea tratteggiata rappresenta la correlazione $V8$.

4.4 Risultati sulla sensibilità alle SRC e alle MEC

In questo paragrafo prenderemo in esame il processo (γ, p) e l'azione esercitata su di esso dalla presenza di SRC e di MEC. Studieremo la sensibilità della sezione d'urto e dell'asimmetria al variare delle funzioni di correlazione, mantenendo fissi i parametri associati alla corrente di scambio mesonico.

Dapprima, abbiamo curato la sensibilità alle SRC servendoci di tre diverse funzioni di correlazione: $V8$, $S3$ e la correlazione *Gaussiana* che mettiamo a confronto in **Figura 4.4**. La correlazione $V8$ è la parte scalare della correlazione usata nello sviluppo in cluster (noto come calcolo di Fermi Hypernetted Chain, FHC) fatto con l'interazione Argonne $V18$ che è di tipo nucleone–nucleone. Il minimo della funzione di correlazione gaussiana è più basso del minimo della $S3$ e della $V8$ perchè abbiamo scelto una parametrizzazione della gaussiana tale da poter supporre la presenza di un core fortemente repulsivo

$$f(r) = 1 - a\ exp\ (-br^2) \tag{4.14}$$

con $a = 1$ e $b = 2.2 fm^2$.

4.5 Fotoemissione di un nucleone

In **Figura 4.5** riportiamo, per energie di 40, 60, 80 MeV, il confronto tra la sezione d'urto del (γ, p) calcolata con il solo operatore ad un corpo (linea continua), quella calcolata con il campo medio e la correlazione $V8$ (linea punteggiata), quella relativa al campo medio con l'aggiunta delle correnti di scambio mesonico (linea tratteggiata) e la sezione d'urto ottenuta considerando sia le correnti di scambio sia la correlazione (linea tratto–punto). L'angolo θ di emissione del fotone è misurato rispetto alla direzione del fotone. Si noti inoltre, il buon accordo con i dati sperimentali [Ada88]. Come mostrato nei tre pannelli all'aumentare dell'energia il contributo delle correlazioni abbassa l'andamento della sezione d'urto più di quanto il contributo delle MEC riesca ad innalzarlo. In **Figura 4.6** mostriamo invece l'andamento dell'asimmetria ottenuta con gli stessi parametri della figura precedente. All'energia di 40 MeV l'azione delle correlazioni e delle correnti di scambio mesonico rappresentano solo una piccola perturbazione all'azione del campo medio sull'asimmetria. A 80 MeV, invece, solo le correlazioni riproduco-

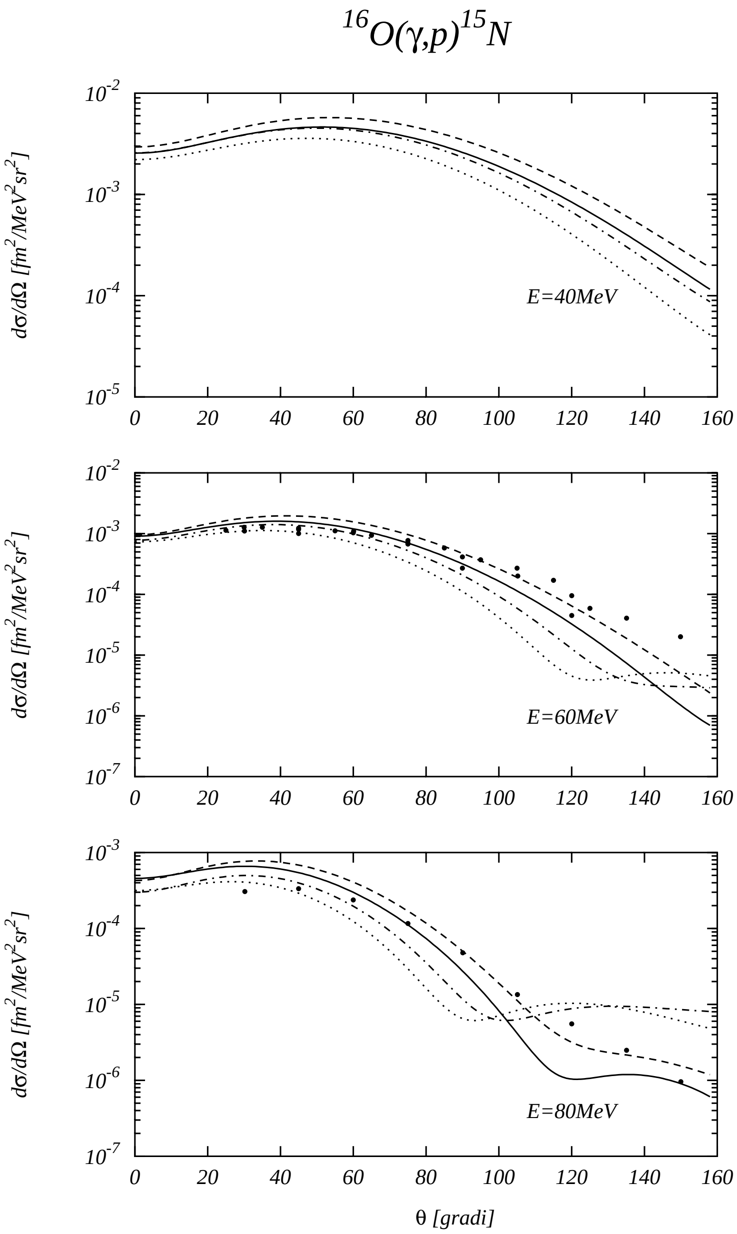

Figura 4.5 : Distribuzione angolare della sezione d'urto,$^{16}O(\gamma,p)^{15}N$ a 40, 60 e 80 MeV. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto con il campo medio (linea continua), campo medio e $V8$ (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con $V8$ e MEC (linea tratto punto).

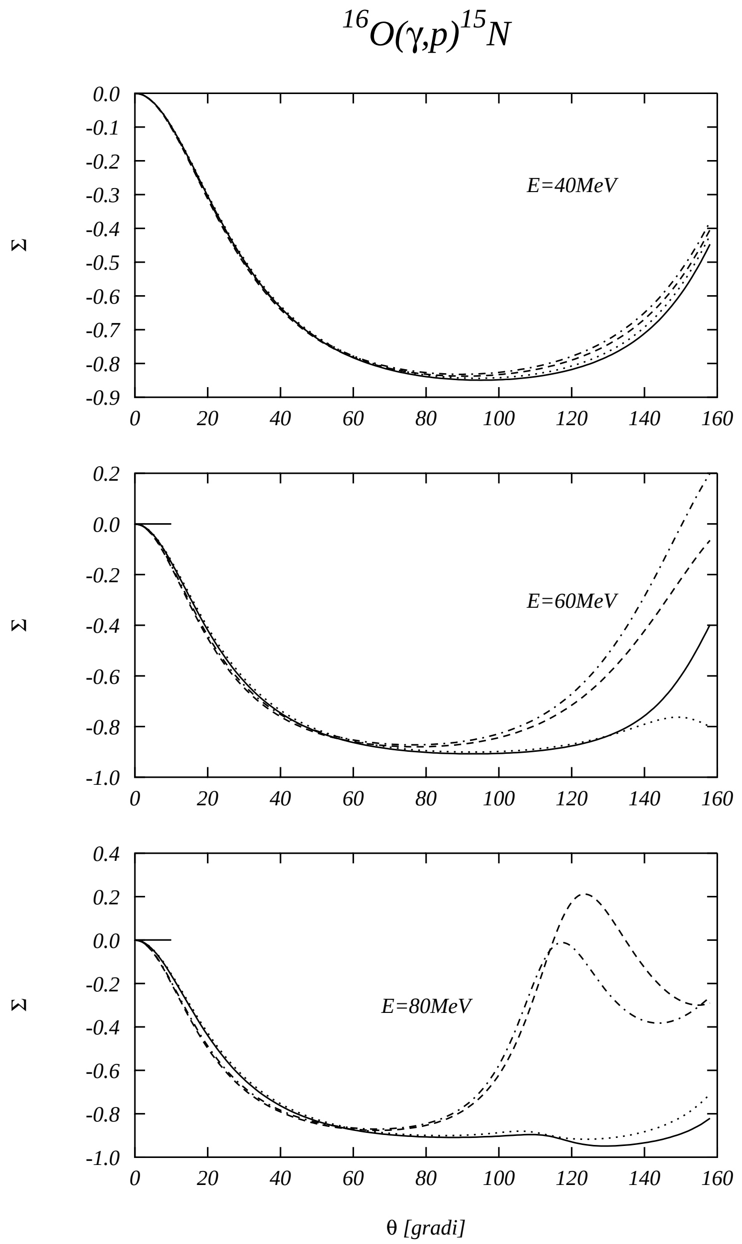

Figura 4.6 : Distribuzione angolare dell'asimmetria a 40, 60 e 80 MeV. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto con il campo medio (linea continua), campo medio e $V8$ (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con $V8$ e MEC (linea tratto punto).

no l'andamento dell'asimmetria, mentre le MEC ad un angolo di diffusione maggiore di 80° danno un contributo notevole all'asimmetria di quasi un ordine di grandezza in più. Fissiamo, pertanto, l'attenzione su questo andamento anomalo della distribuzione angolare dell'asimmetria a 80 MeV oltre gli 80°. Studiamo separatamente l'andamento dei parametri W_T e W_{TT} che compaiono rispettivamente a denominatore e a numeratore dell'asimmetria con lo scopo di capire se le MEC fanno diminuire W_T o aumentare W_{TT} con conseguente aumento dell'asimmetria.

In **Figura 4.7** riportiamo gli andamenti di W_T e W_{TT}. Dal pannello in basso si nota che i contributi della correlazione e del campo medio fanno sì che W_{TT} resti sempre negativo, invece con le MEC il valore di W_{TT} aumenta fino a diventare positivo per elevati angoli di diffusione e si annulla attorno ai 115°. Questo sembrerebbe spiegare la presenza del picco vicino ai 115° in **Figura 4.6** perchè qualunque valore assuma il parametro W_T l'asimmetria è nulla quando W_{TT} è zero. Dal momento che la divergenza dell'asimmetria aumenta all'aumentare dell'energia, mettiamo a confronto gli andamenti alle diverse energie dei parametri W_T e W_{TT} ottenuti mediante campo medio e correlazione, per vedere se la presenza del picco sia dovuta al passaggio dallo zero di W_{TT} come ipotizzato da una prima analisi. Presentiamo questo studio in **Figura 4.8**. Analizzando ciò che accade ad un angolo di diffusione di circa 115°, notiamo come il parametro W_{TT} sia nullo a 80 MeV, mentre è ancora diverso da zero a 40 e 60 MeV. Questo spiega perchè a 80 MeV l'asimmetria aumenti fino a raggiungere valore zero.

Per ottenere informazioni sulle SRC abbiamo calcolato la sezione d'urto con procedure analoghe ma con le tre diverse funzioni di correlazione

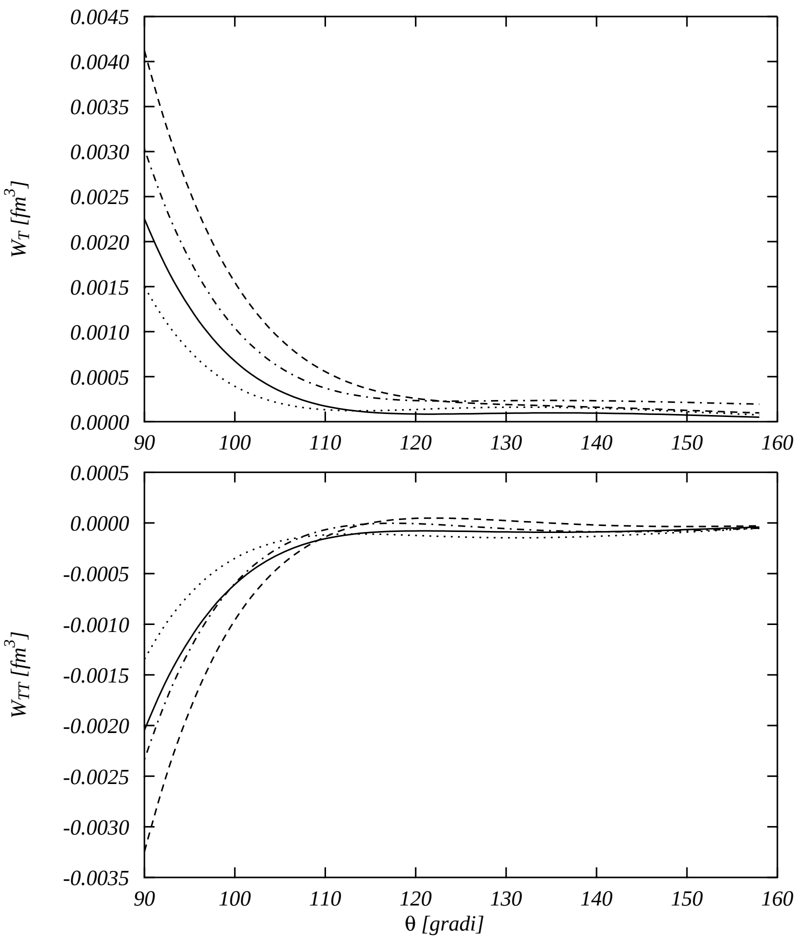

Figura 4.7 : Distribuzione angolare delle risposte W_T e W_{TT} a 80 MeV con il solo campo medio (linea continua), campo medio e $V8$ (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con $V8$ e MEC (linea tratto punto).

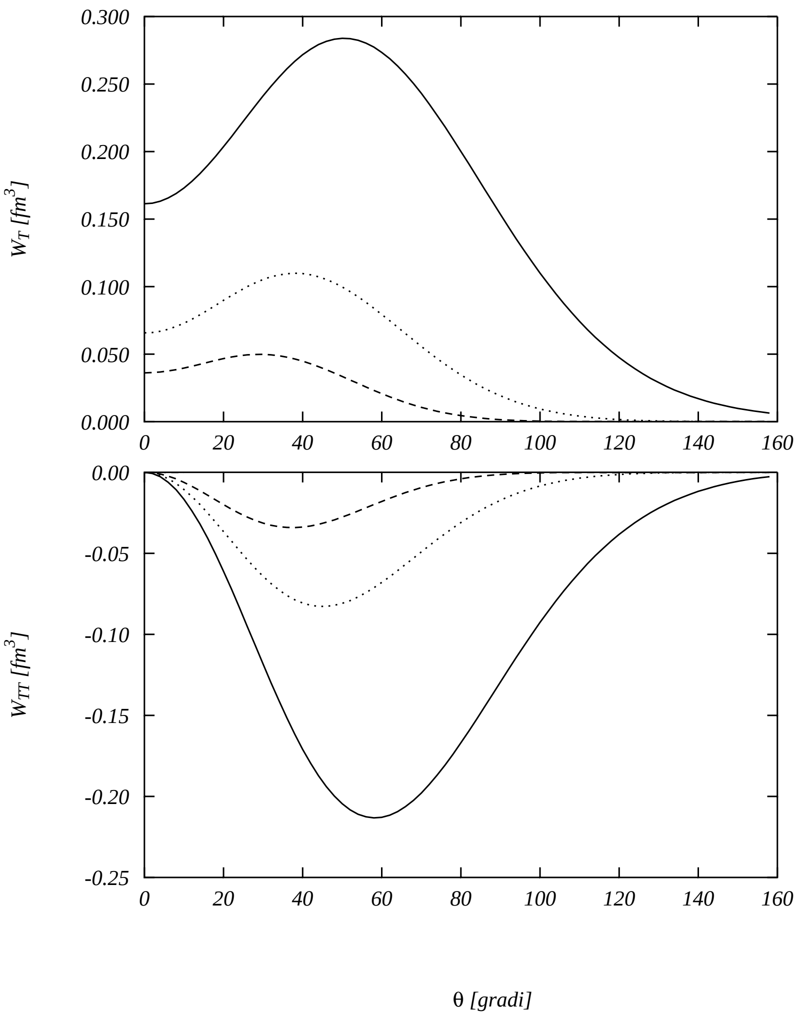

Figura 4.8 : Andamenti di W_T e W_{TT} all'aumentare dell'energia. La linea continua rappresenta il calcolo a 20 MeV, la linea punteggiata a 40MeV e quella tratteggiata a 80MeV.

presentate nella sezione precedente.

I risultati presentati in **Figura 4.9** e in **Figura 4.10** sono stati ottenuti con la correlazione S3. Per tutte e tre le energie analizzate, la correlazione $S3$ dà un contributo alla sezione d'urto che è praticamente trascurabile rispetto all'azione del campo medio. Inoltre la linea tratto–punto, che rappresenta la sezione d'urto del processo di emissione nucleonica in un campo medio tenuto conto di SRC e di MEC, è quasi completamente sovrapposta per tutta la distribuzione angolare alla linea tratteggiata che rappresenta la sezione d'urto senza tener conto della correlazione parametrizzata con $S3$. Ciò significa che la sezione d'urto così calcolata non fornisce alcuna informazione sulle correlazioni di tipo $S3$. Siamo passati, quindi, ad analizzare il comportamento dell'asimmetria (**Figura 4.10**). Soprattutto a 40 e 60 MeV riusciamo a distinguere il contributo della correlazione $S3$, mentre ad un'energia di 80 MeV la correlazione sembra influire poco se non ad angoli di emissione superiori ai 120°. Risultati nettamente diversi si ottengono se usiamo la correlazione gaussiana. In **Figura 4.11** riportiamo la sezione d'urto e in **Figura 4.12** l'asimmetria così ricavate. Le correnti di scambio mesonico aumentano l'asimmetria, ma quando queste interferiscono con la funzione di correlazione gaussiana l'andamento della asimmetria si abbassa riproducendo all'incirca l'azione dell'operatore ad un corpo e della correlazione gaussiana. Avendo fissato il parametro $a = 1$ nella correlazione gaussiana, essa presenta un minimo più basso rispetto alle funzioni di $S3$ e $V8$. Come mostrato in **Figura 4.4** nella regione compresa tra 1 e 2 *fm* le correlazioni $S3$ e $V8$ assumono valori maggiori di uno mentre la correlazione gaussiana, al crescere di r, tende a questo valore senza mai oltrepassarlo. Per $r = 0$ la $S3$ assume valore 0.3

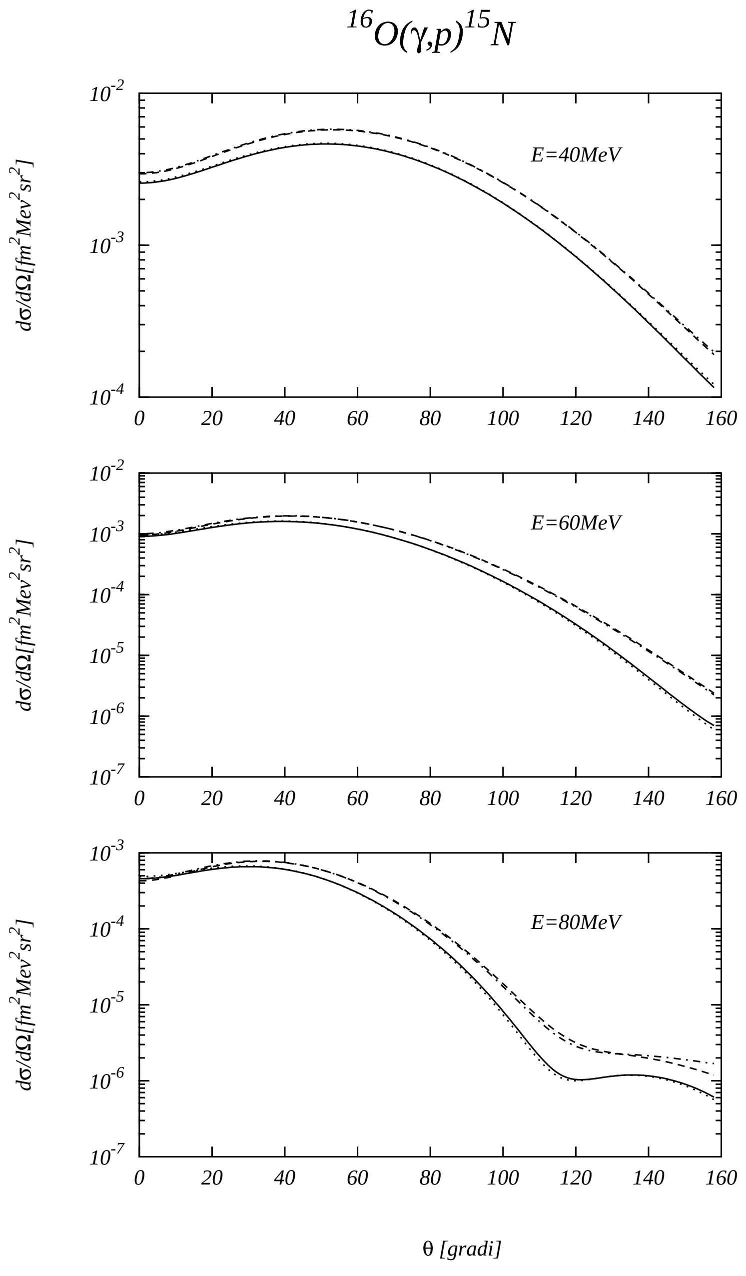

Figura 4.9: Sezione d'urto a 40, 60 e 80 MeV. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto con il campo medio (linea continua), campo medio e $S3$ (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con $S3$ e MEC (linea tratto punto).

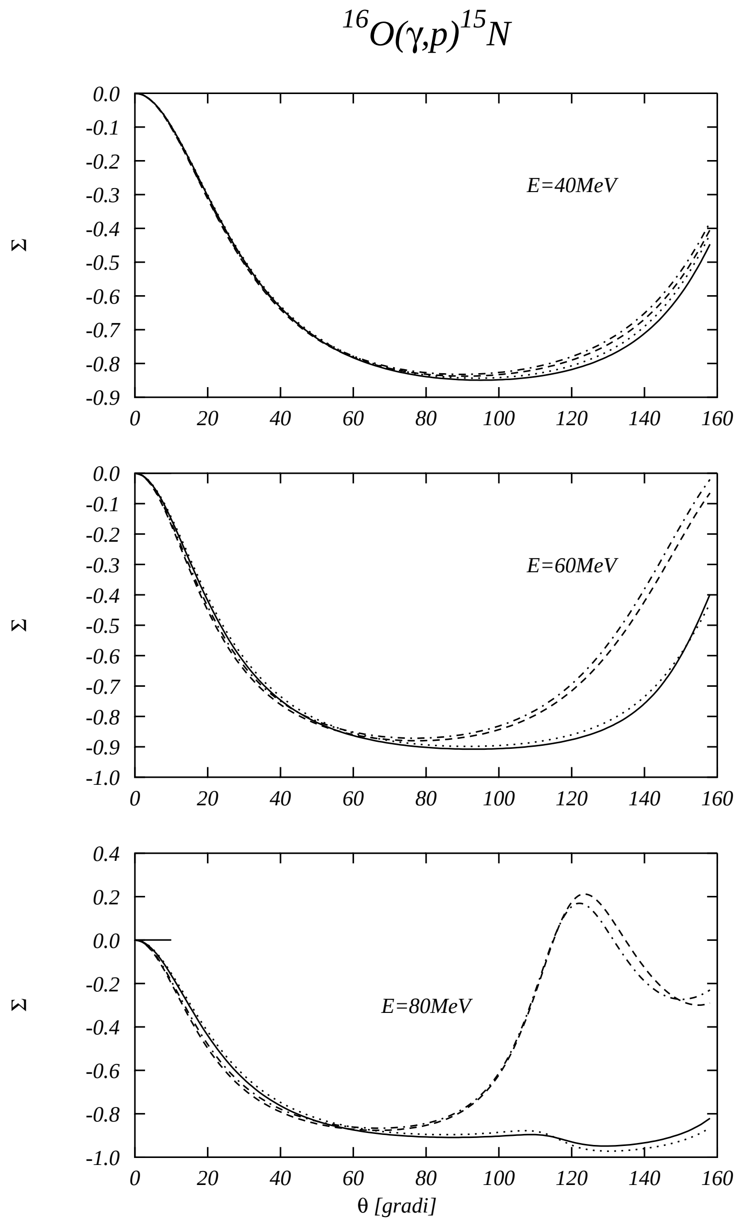

Figura 4.10 : Asimmetria a 40, 60 e 80 MeV. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto con il campo medio (linea continua), campo medio e $S3$ (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con $S3$ e MEC (linea tratto punto).

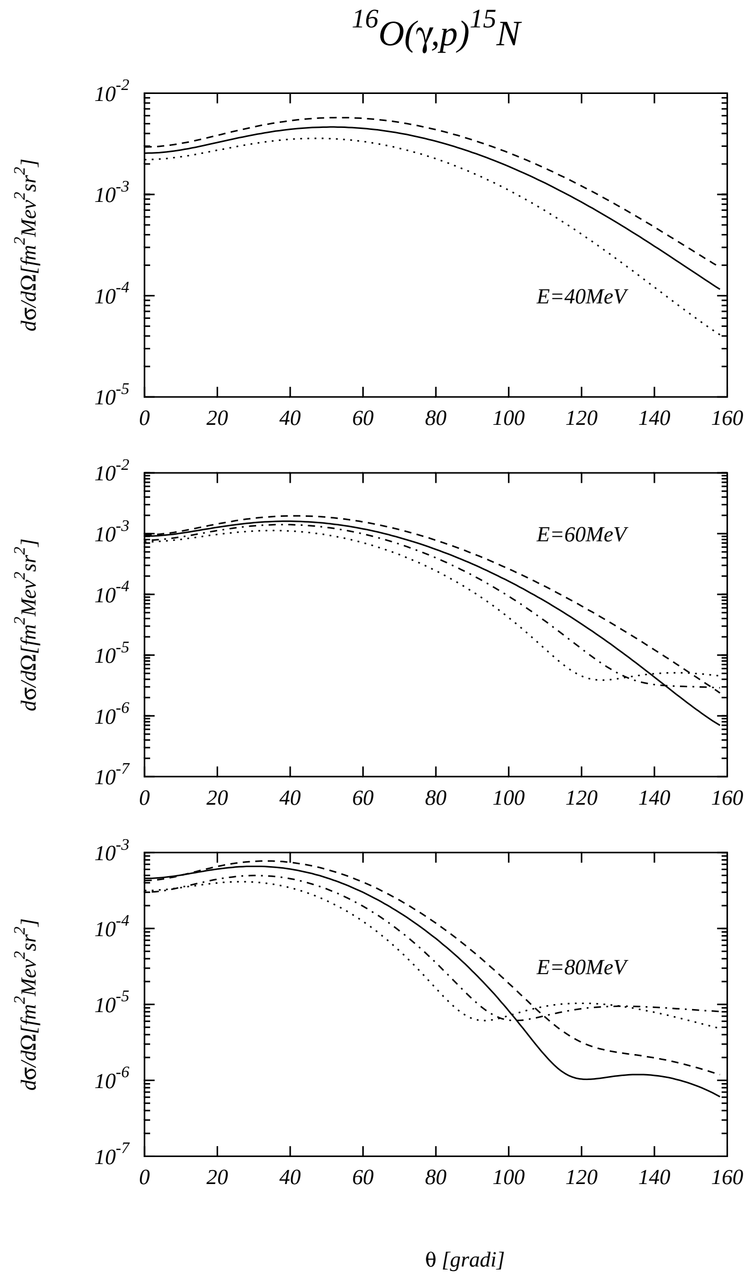

Figura 4.11: Sezione d'urto a 40, 60 e 80 MeV. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto conil campo medio (linea continua), campo medio e correlazione gaussiana (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con correlazione gaussiana e MEC (linea tratto punto).

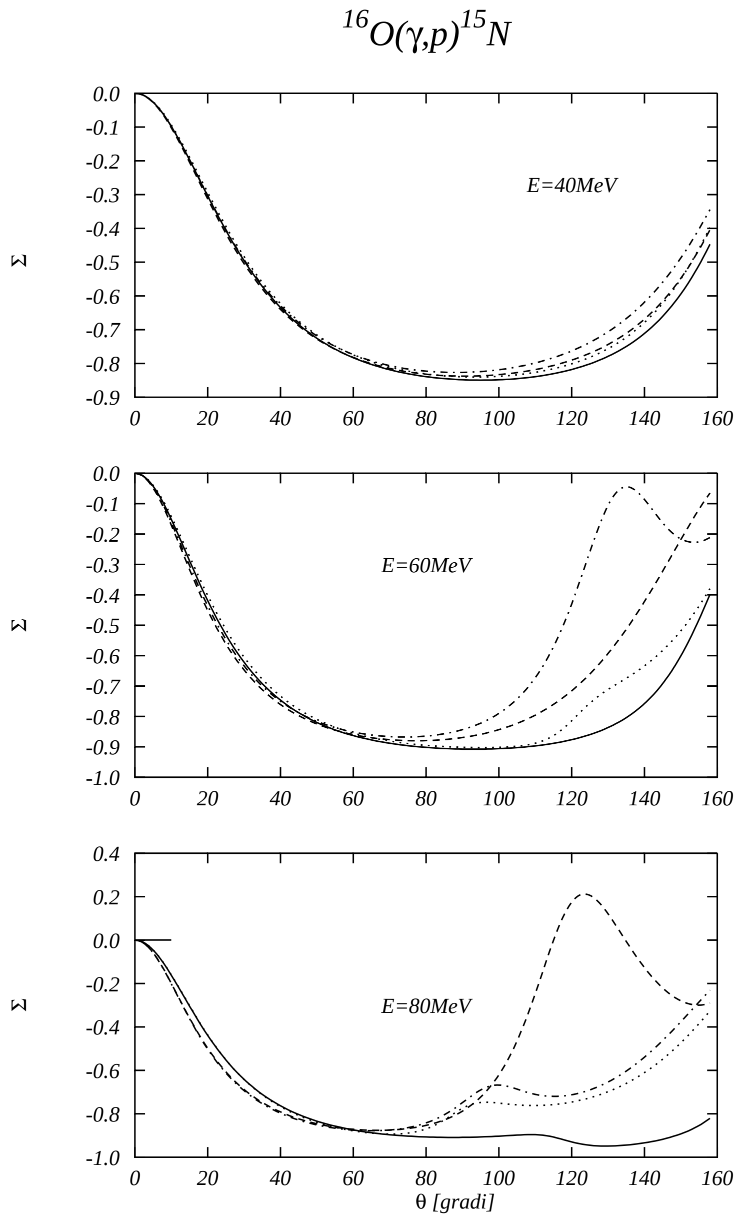

Figura 4.12 : Asimmetria a 40, 60 e 80 MeV. In ogni pannello riportiamo, ad energia fissata, il confronto tra l'andamento ottenuto con il campo medio (linea continua), campo medio e correlazione gaussiana (linea punteggiata), campo medio e MEC (linea tratteggiata), campo medio con correlazione gaussiana e MEC (linea tratto punto).

che è il più alto rispetto alle altre due funzioni e la sezione d'urto calcolata con questa correlazione risulta maggiore di quella relativa alle altre due. Inoltre la gaussiana è l'unica correlazione a non superare la soglia del valore uno, ma abbiamo visto come interferendo con le MEC riesca a far abbassare l'asimmetria.

4.6 Fotoemissione di due protoni

Per ricavare informazioni sugli operatori a due corpi studiamo il processo (γ, pp) dove l'emissione delle due particelle cariche non può essere descritto dall'azione dell'operatore ad un corpo, e di conseguenza l'azione delle correlazioni a corto raggio e delle correnti di scambio diventa importante. Come già accennato, per conservazione della carica, in un processo di emissione di due protoni l'unica corrente che può essere prodotta è quella generata dallo scambio di una particella neutra: l'eccitazione della risonanza Δ come mostrato dal diagramma (c) di **Figura 4.1**. La corrente generata dipende dalla costante di accoppiamento relativa a ciascuno dei tre vertici del diagramma. Pertanto, dobbiamo tener conto della costante d'accoppiamento fotone–nucleone $f_{\pi NN}$, della costante d'accoppiamento pione–nucleone–delta $f_{\pi N\Delta}$ e di quella relativa all'accoppiamento fotone–nucleone–delta $f_{\gamma N\Delta}$. I dati sperimentali rendono nota solo la prima delle tre costanti ($f_{\pi NN}$) il cui valore è stato stimato essere tale che $f^2_{\pi NN}/4\pi = 0.079$. Ci proponiamo di quantificare come l'incertezza associata alle altre due costanti di accoppiamento possa influire sul calcolo della sezione d'urto e dell'asimmetria.

Abbiamo effettuato i calcoli utilizzando i valori di $f_{\gamma N\Delta}$ e $f_{\pi N\Delta}$ presi rispettivamente da [Ama94], [Giu97] e [Ryc97] denominati con AMA, GIU e RYC e che riportiamo in **Tabella 4.1**.

	AMA	GIU	RYC
$f_{\gamma N\Delta}$	0.299	0.373	0.120
$f_{\pi N\Delta}$	1.69	2.15	2.15

Tabella 4.1: Valori dei parametri usati per il contributo della corrente Δ.

Giunti a questo punto ci siamo proposti di studiare l'azione della corrente Δ e di valutare l'entità dell'incertezza associata alle sue costanti di accoppiamento nel calcolo della sezione d'urto e dell'asimmetria. Abbiamo dapprima calcolato la sezione d'urto e l'asimmetria nell'ipotesi in cui l'emissione delle due particelle cariche sia determinata dalla sola azione della corrente Δ senza alcun contributo delle correlazioni. Abbiamo azzerato ogni contributo delle MEC e abbiamo fissato l'energia del primo nucleone $\varepsilon_1 = 10MeV$, quello del secondo $\varepsilon_2 = 30MeV$, supponendo che la diffusione per entrambi i nucleoni avvenga nel piano di diffusione ($\phi_1 = 0° = \phi_2$) abbiamo fissato l'angolo di diffusione del secondo nucleone a $\theta = 60°$. Con questi parametri iniziali valutiamo la sezione d'urto e l'asimmetria in funzione della distribuzione angolare del primo nucleone al variare dell'energia del fotone incidente. Tutti gli angoli sono misurati rispetto alla direzione del fotone incidente.
Sia ad energie relativamente basse (40 MeV in **Figura 4.13**) sia ad energie più alte (80 MeV in **Figura 4.14**) l'andamento della sezione d'urto risente notevolmente dell'incertezza associata alle costanti di accoppiamento della corrente Δ. Per tutto il campo di energie analizzate la sezione d'urto ottenuta facendo assumere a $f_{\gamma N\Delta}$ e $f_{\pi N\Delta}$ i valori del parametro GIU è dieci volte

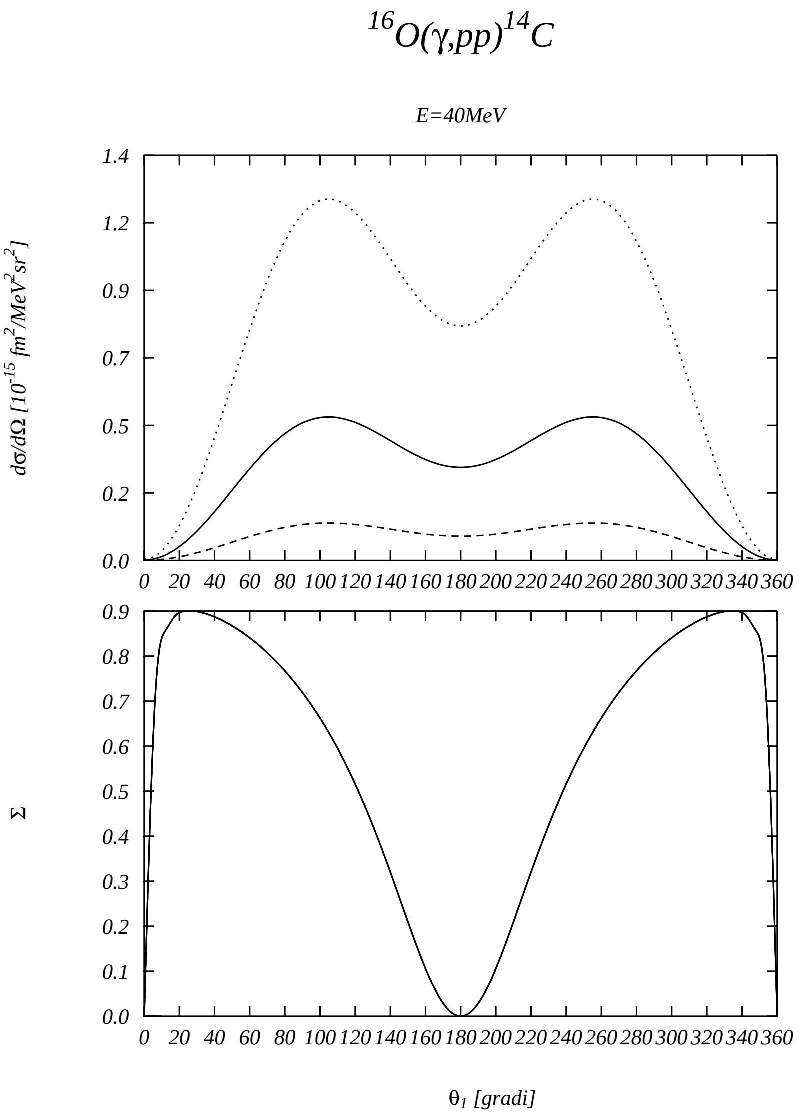

Figura 4.13: Sezione d'urto ed asimmetria a 40 MeV valutate simulando totale assenza di SRC. L'unico operatore che agisce è quello relativo alla corrente Δ. Abbiamo fatto assumere alle costanti di accoppiamento i diversi valori previsti: AMA linea continua, GIU linea punteggiata e RYC linea tratteggiata.

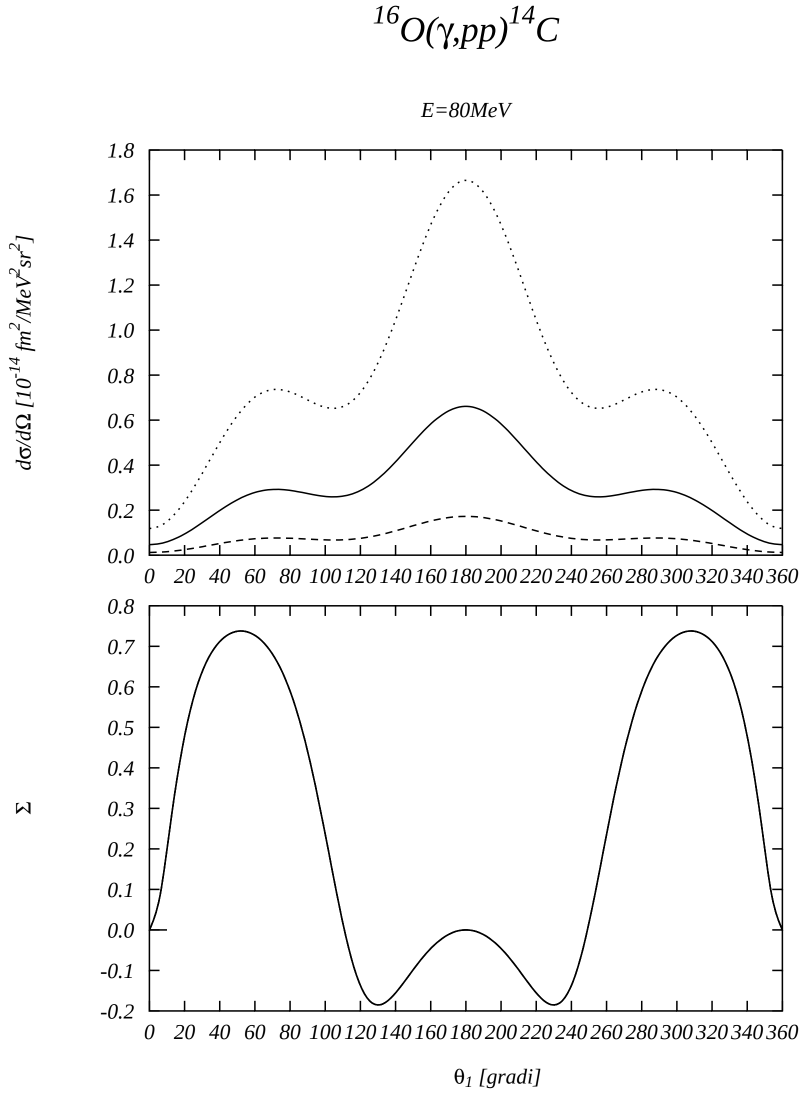

Figura 4.14: Sezione d'urto ed asimmetria a 80 MeV valutate simulando totale assenza di SRC. L'unico operatore che agisce è quello relativo alla corrente Δ. Abbiamo fatto assumere alle costanti di accoppiamento i diversi valori previsti: AMA linea continua, GIU linea punteggiata e RYC linea tratteggiata.

maggiore di quella ottenuta con RYC. Il parametro AMA è un compromesso tra i precedenti. È importante notare come l'asimmetria sia costante al variare dei parametri associati alle costanti di accoppiamento. Un risultato del genere, ottenuto spegnendo le correlazioni e lasciando attiva la sola corrente Δ, dimostra che l'azione dell'operatore relativo alla Δ è identificabile in termini di una costante moltiplicativa per i fattori W_{TT} e W_T. Dal momento che l'asimmetria è definita dal rapporto di queste quantità è ovvio che resti costante.

Diverso è il caso in cui i due protoni vengano emessi sotto l'azione combinata e delle MEC e delle SRC. In questo caso nel calcolare il modulo quadro degli elementi di transizione non vi sono soltanto i moduli quadri degli elementi di transizione dovuti all'azione disgiunta degli operatori relativi alla Δ e alle correlazioni, ma compare anche il termine d'interferenza. In questo caso, non solo la sezione d'urto, ma anche l'asimmetria risulta sensibile all'incertezza associata alla corrente Δ. In **Figura 4.15**, **Figura 4.16** e **Figura 4.17** riportiamo, per le diverse energie, i risultati ottenuti attivando MEC e SRC. Da queste tre figure si vede che all'aumentare dell'energia gli effetti della corrente Δ diventano sempre più importanti : l'incertezza legata ai parametri AMA, GIU e RYC della Δ diventa importante intorno agli 80 MeV tanto da modificare notevolmente la distribuzione angolare sia della sezione d'urto sia dell'asimmetria. Nel caso dell'azione congiunta di MEC e SRC i termini d'interferenza agiscono in maniera diversa sui coefficienti W_T e W_{TT} e in questo caso il loro contributo all'asimmetria non può essere eliminato, anzi aumenta all'aumentare dell'energia.

Per valutare quale sia l'importanza della corrente Δ rispetto alle correla-

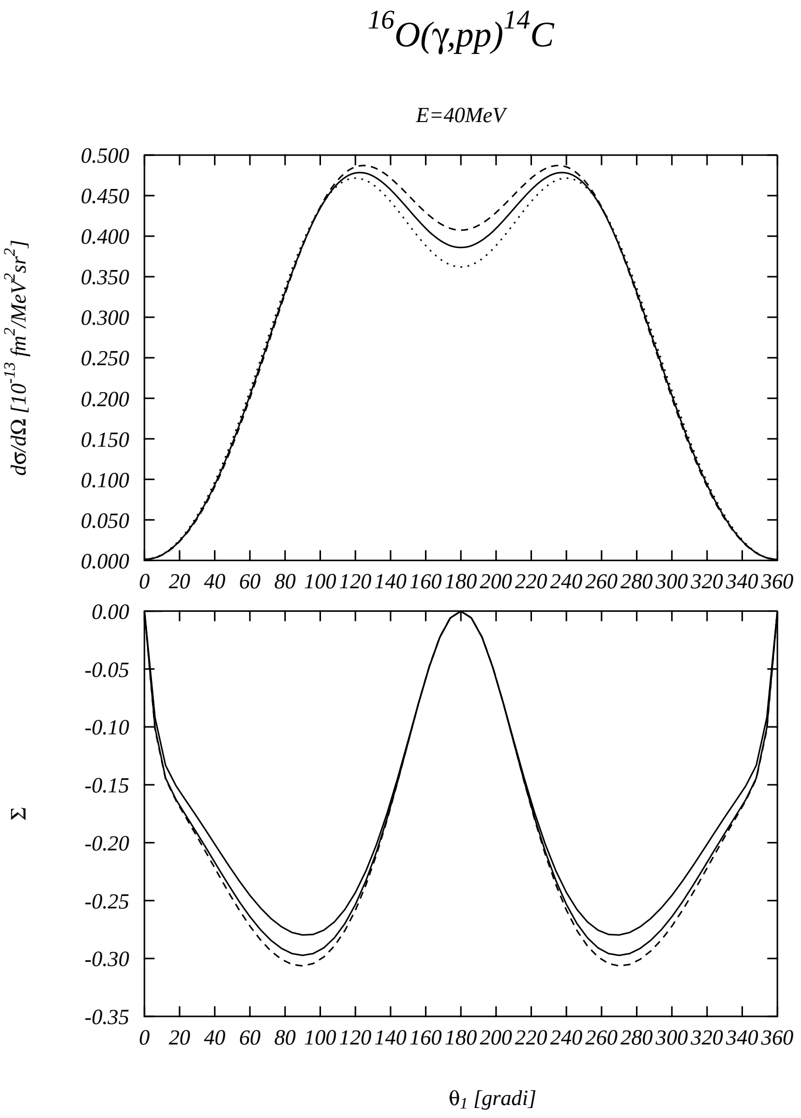

Figura 4.15: Sezione d'urto ed asimmetria a 40 MeV valutate sotto l'azione simultanea di SRC e MEC. Sono riportati gli andamenti al variare dei valori delle costanti di accoppiamento: AMA linea continua, GIU linea punteggiata e RYC linea tratteggiata.

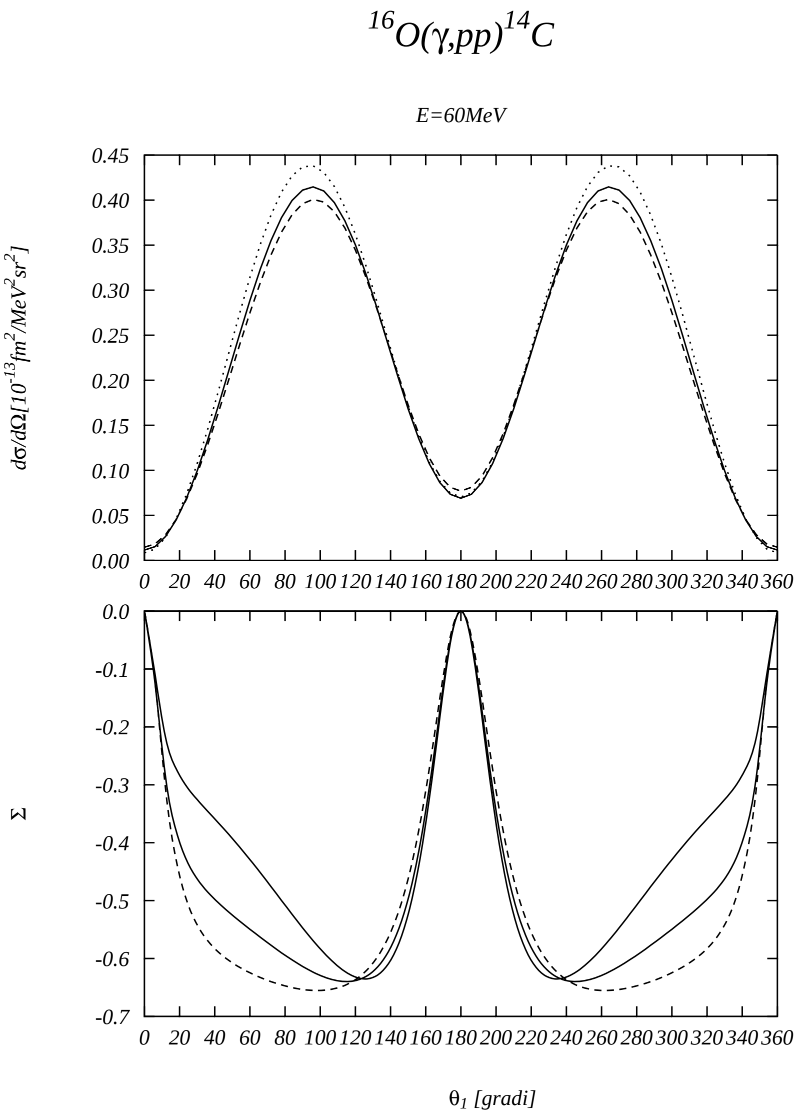

Figura 4.16: Sezione d'urto ed asimmetria a 60 MeV valutate sotto l'azione simultanea di SRC e MEC. Sono riportati gli andamenti al variare dei valori delle costanti di accoppiamento: AMA linea continua, GIU linea punteggiata e RYC linea tratteggiata.

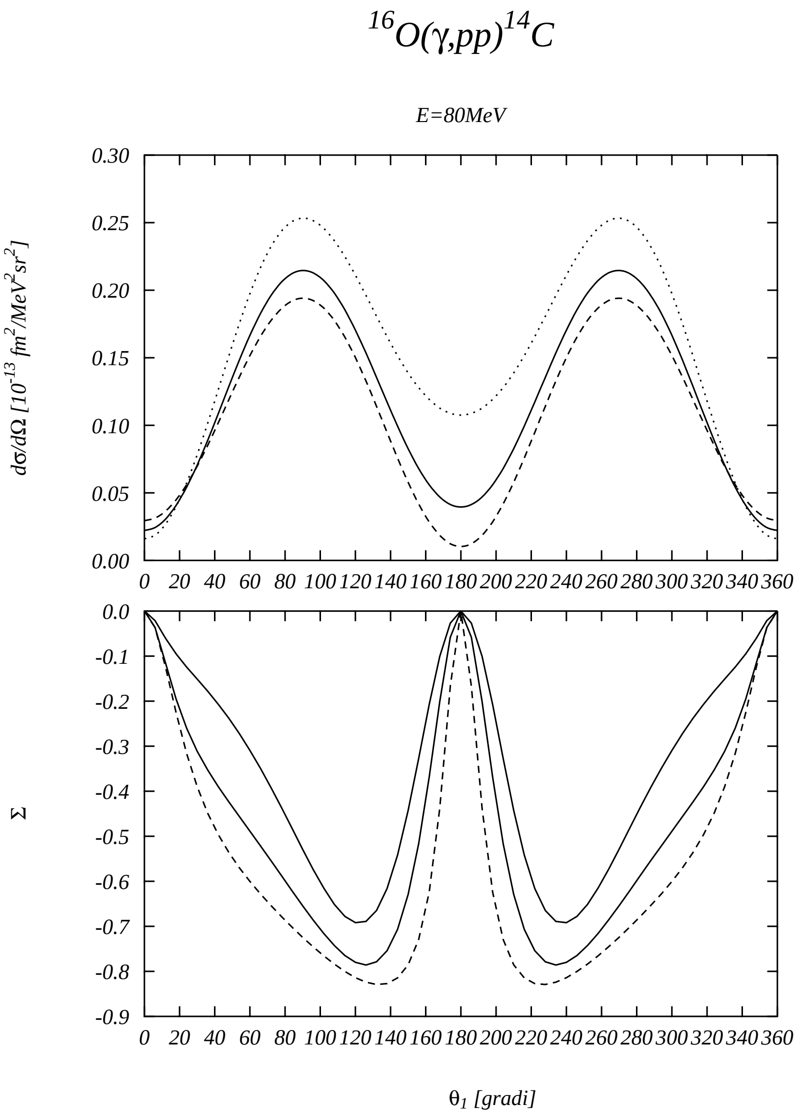

Figura 4.17: Sezione d'urto ed asimmetria a 80 MeV valutate sotto l'azione simultanea di SRC e MEC. Sono riportati gli andamenti al variare dei valori delle costanti di accoppiamento: AMA linea continua, GIU linea punteggiata e RYC linea tratteggiata.

zioni calcoliamo il rapporto tra la sezione d'urto differenziale calcolata con le sole correlazioni ($\sigma(C)$) e quella calcolata anche con la corrente Δ ($\sigma(C\Delta)$). In questo modo calcoliamo il contributo delle diverse correlazioni in relazione alla corrente di scambio mesonico utilizzata. Come mostrato in **Figura 4.18**, nel caso di correlazione gaussiana l'interferenza tra correlazione e corrente Δ non altera di molto l'andamento ottenuto con la sola correlazione, il rapporto tra le due quentità in esame, infatti, tende ad uno soprattutto quando attribuiamo alle costanti di accoppiamento della Δ i valori tabulati come AMA.

Risultati diversi si ottengono nel caso in cui si usino le correlazioni $S3$ e $V8$ (**Figura 4.19** e **Figura 4.20**). In questi casi l'azione simultanea della correlazione e della corrente Δ provoca un abbassamento nell'andamento della sezione d'urto.

Possiamo, dunque, dedurre che nel processo (γ, pp) la corrente Δ produce degli effetti rilevanti sulla sezione d'urto e l'incertezza associata alle costanti di accoppiamento genera un'incertezza sul calcolo della sezione d'urto che è significativa nello studio del ruolo delle correlazioni e delle correnti di scambio mesonico.

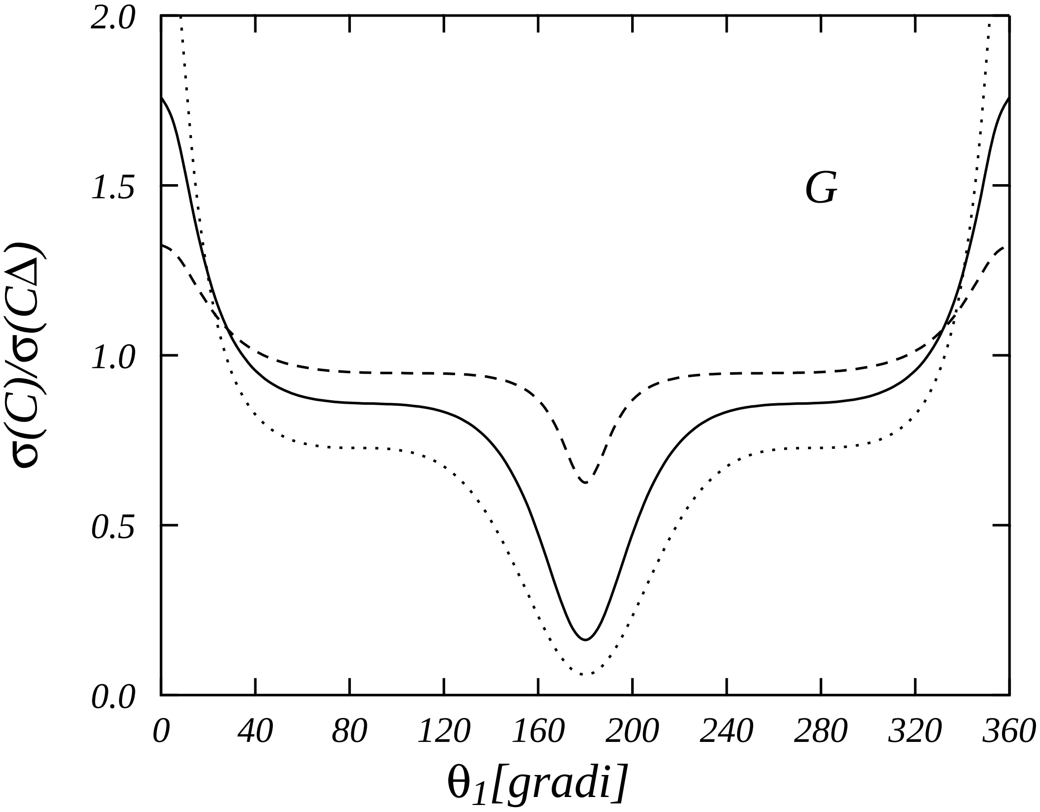

Figura 4.18: Rapporto tra la sezione d'urto calcoalta con la sola correlazione gaussiana e quella calcolata facendo interferire correlazione gaussiana e corrente Δ. La linea continua si riferisce al calcolo effettuato attribuendo valori AMA alle costanti di accoppiamento della Δ, la linea punteggiata è relativa ai valori GIU e quella tratteggiata ai valori RYC.

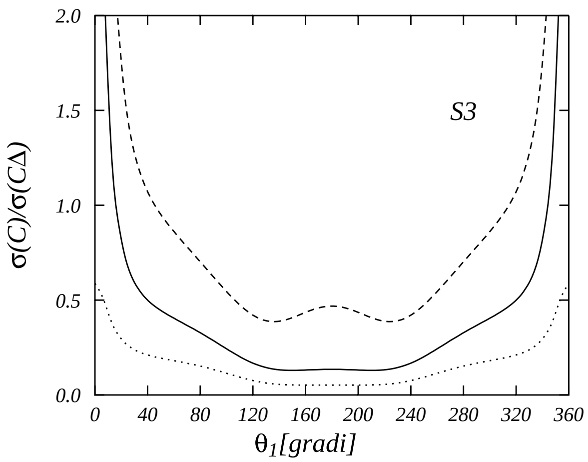

Figura 4.19: Rapporto tra la sezione d'urto calcoalta con la sola correlazione S3 e quella calcolata facendo interferire correlazione S3 e corrente Δ. La linea continua si riferisce al calcolo effettuato attribuendo valori AMA alle costanti di accoppiamento della Δ, la linea punteggiata è relativa ai valori GIU e quella tratteggiata ai valori RYC.

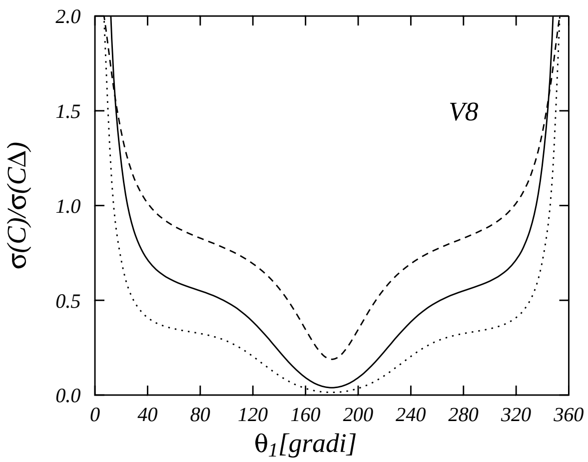

Figura 4.20: Rapporto tra la sezione d'urto calcoalta con la sola correlazione V8 e quella calcolata facendo interferire correlazione V8 e corrente Δ. La linea continua si riferisce al calcolo effettuato attribuendo valori AMA alle costanti di accoppiamento della Δ, la linea punteggiata è relativa ai valori GIU e quella tratteggiata ai valori RYC.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo studiato gli effetti della polarizzazione del fotone nei processi di fotoassorbimento e di fotoemissione allo scopo di ottenere dalla polarizzazione informazioni aggiuntive sulla struttura del nucleo.

Il calcolo della sezione d'urto relativa ad un fotone polarizzato linearmente, presenta un piccolo termine di interferenza, W_{TT}, che è totalmente assente nel caso in cui il fotone utilizzato non sia polarizzato. D'altra parte, l'introduzione di una direzione privilegiata nello spazio, quella di polarizzazione del fotone, ci ha portati a definire l'asimmetria. Questo nuovo parametro si è rivelato particolarmente sensibile alle MEC. Inoltre si è trovato a SRC spente che, mentre la sezione d'urto risultava dipendere in modo significativo dai valori assegnati alle costanti di accoppiamento della corrente Δ, l'asimmetria non dipendeva dall'incertezza associata a tali valori. Tuttavia, il problema della dipendenza dall'incertezza sui parametri associati alla Δ si è ripresentato non solo nella sezione d'urto, ma anche nella asimmetria, nel momento in cui sono stati considerati simultaneamente i contributi di SRC e MEC perchè questi due effetti interferiscono. I risultati ottenuti in questo lavoro sono relativi ad un campo energetico ristretto. Non escludiamo che una successiva analisi a energie superiori a quelle utilizzate, quindi attorno alla regione del picco quasi elastico o oltre, possa rivelare con maggiore evidenza quegli effetti delle SRC o delle MEC che nella regione delle risonanze giganti sono solo delle perturbazioni. Inoltre informazioni interessanti possono essere estratte dallo studio di processi condotti su bersagli diversi dal ^{16}O.

L'utilizzo di fotoni polarizzati non si è rivelato fisicamente significativo nello studio delle multipolarità dell'eccitazione. Le sezioni d'urto e le asimmetrie presentano infatti lo stesso tipo di andamento e, in corrispondenza del multipolo 2^+ hanno entrambe un comportamento anomalo. Ci proponiamo di valutare in futuro gli effetti di tale multipolo.

Appendice A

Il teorema di Wigner–Eckart

Considerato un elemento di matrice di un tensore sferico irriducibile tra due autostati di $\mathbf{J}^2$ e J_z, il teorema di Wigner–Eckart consente di separare la parte puramente geometrica da quella fisica. Prendiamo un tensore sferico irriducibile T_q^k di rango k e componente q e calcoliamo, mediante questo teorema, l'elemento di matrice tra $|j_a m_a\rangle$ e $|j_b m_b\rangle$, autostati simultanei di $\mathbf{J}^2$ e J_z.

$$\langle j_a m_a | T_q^k || j_b m_b \rangle = (-1)^{j_a - m_a} \begin{pmatrix} j_a & k & j_b \\ -m_a & q & m_b \end{pmatrix} \langle j_a || T^k || j_b \rangle. \tag{A.1}$$

La parte geometrica è racchiusa nel $3j$ mentre l'elemento di matrice ridotto contiene la fisica. Consideriamo il caso particolare di un tensore sferico di rango L: l'armonica sferica Y_{LM}. In questo caso, l'elemento di matrice ridotto può essere espresso in termini di funzioni elementari

$$\langle l_a || Y_L || l_b \rangle = (-1)^{l_a} \frac{\widehat{l_a}\widehat{l_b}\widehat{L}}{4\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} l_a & L & l_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

o nel caso di autostati di $\mathbf{l} + s$:

$$\langle l_a \frac{1}{2} j_a || Y_L || l_b \frac{1}{2} j_b \rangle = (-1)^{j_a + \frac{1}{2}} \frac{\widehat{j}_a \widehat{j}_b \widehat{L}}{4\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} j_a & L & j_b \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xi(l_a + l_b + L) \tag{A.3}$$

dove $\widehat{\alpha} = \sqrt{2\alpha + 1}$ e ξ è definito come segue

$$\xi(L) = \begin{cases} 1 & \text{se L è pari} \\ 0 & \text{se L è dispari} \end{cases} . \tag{A.4}$$

Appendice B

Sviluppo in multipoli dello stato finale nucleare per (γ, p)

In questa appendice rendiamo esplicito lo sviluppo in multipoli dei termini relativi al nucleone emesso che compaiono nella (1.30). Nella funzione d'onda del nucleone emesso separiamo la parte di spin

$$|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle \longrightarrow \psi(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\chi_s^{\frac{1}{2}} \tag{B.1}$$

$$|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle|Im_I\rangle = 4\pi\sum_{l\mu}(i)^l R_l(pr)Y^*_{l\mu}(\widehat{p})Y_{l\mu}(\widehat{r})\chi_s^{\frac{1}{2}} \tag{B.2}$$

dove con $R_l(pr)$ abbiamo indicato la parte radiale della funzione d'onda. Nel caso di onda piana sarebbe una funzione di bessel sferica. Sfruttando l'ortogonalità delle armoniche sferiche e le proprietà dei coefficienti di Clebsch–Gordan

$$|\mathbf{p}\frac{1}{2}s\rangle|Im_I\rangle = 4\pi\sum_{l\mu}(i)^l R_l(pr)Y^*_{l\mu}(\widehat{p})\sum_{\mu'}Y_{l\mu'}(\widehat{r})\delta_{\mu\mu'}\chi_s^{\frac{1}{2}}|Im_I\rangle =$$

$$= 4\pi\sum_{l\mu}(i)^l R_l(pr)Y^*_{l\mu}(\widehat{p})\sum_{\mu'}Y_{l\mu'}(\widehat{r})\sum_{jm}\langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle\langle l\mu'\frac{1}{2}s|jm\rangle\chi_s^{\frac{1}{2}}|Im_I\rangle =$$

$$= 4\pi \sum_{l\mu} (i)^l R_l(pr) Y^*_{l\mu}(\widehat{p}) \sum_{jm} \langle l\mu \frac{1}{2} s | jm \rangle \vec{Y}^m_{jl\frac{1}{2}}(\widehat{r}) | I m_I \rangle =$$

$$= 4\pi \sum_{l\mu} (i)^l R_l(pr) Y^*_{l\mu}(\widehat{p}) \sum_{jm} \langle l\mu \frac{1}{2} s | jm \rangle \sum_{m'} \vec{Y}^m_{jl\frac{1}{2}}(\widehat{r}) \delta_{mm'} | I m_I \rangle =$$

$$= 4\pi \sum_{l\mu} (i)^l R_l(pr) Y^*_{l\mu}(\widehat{p}) \sum_{jm} \langle l\mu \frac{1}{2} s | jm \rangle \sum_{m'} \vec{Y}^m_{jl\frac{1}{2}}(\widehat{r})$$

$$\sum_{JM} \langle jm I m_i | JM \rangle \langle jm' I m_I | JM \rangle | I m_I \rangle \qquad \text{(B.3)}$$

Riscriviamo il risultato come

$$|\mathbf{p} \frac{1}{2} s \rangle | I m_I \rangle = 4\pi \sum_{l\mu} \sum_{jm} \sum_{JM} (i)^l Y_{l\mu}(\widehat{p}) \langle l\mu \frac{1}{2} s | jm \rangle \langle jm I m_I | JM \rangle | JM(Ijl); p \rangle \qquad \text{(B.4)}$$

dove

$$|JM(Ijl); p\rangle = R_l(pr) \sum_{m'} \vec{Y}^{m'}_{j,l,\frac{1}{2}} \langle jm' I m_I | JM \rangle | I m_I \rangle. \qquad \text{(B.5)}$$

Appendice C

Sviluppo dell'ampiezza di transizione per fotoemissione di un nucleo

Riscriviamo la sezione d'urto di un processo di fotoemissione di un nucleone, equazione (1.36)

$$\sigma = \frac{2^7\pi^5}{\omega c} \sum_{m_I,s} \Big| \sum_{l,\mu,j,m,J,M,J_\gamma} i^l i^{J_\gamma} Y_{l,\mu}(\widehat{p}) \langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle\langle jmIm_I|JM\rangle$$

$$\sqrt{2J_\gamma+1}\langle JM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle\Big|^2. \tag{C.1}$$

Occupiamoci, in questa appendice, solo della parte relativa al modulo al quadrato. Sciviamo esplicitamente i termini della sommatoria moltiplicandoli per i loro complessi coniugati ottenendo così due sommatorie con indici indipendenti:

$$\Big| \sum_{l,\mu,j,m,J,M,J_\gamma} i^l i^{J_\gamma} Y_{l,\mu}(\widehat{p}) \langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle\langle jmIm_I|JM\rangle \sqrt{2J_\gamma+1}\langle JM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle\Big|^2 =$$

$$\sum_{l,\mu,j,m,J,M,J_\gamma} i^l i^{J_\gamma} Y_{l,\mu}(\widehat{p})\langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle\langle jmIm_I|JM\rangle\sqrt{2J_\gamma+1}\langle JM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle\cdot$$
$$\sum_{l',\mu',j',m',J',M',J'_\gamma}(-i)^{l'}(-i)^{J'_\gamma}Y^*_{l',\mu'}(\widehat{p})\langle l'\mu'\frac{1}{2}s|j'm'\rangle\langle j'm'Im_I|J'M'\rangle\cdot$$
$$\sqrt{2J'_\gamma+1}\langle 00|W_{\mu_\gamma}|JM(Ijl);p\rangle. \tag{C.2}$$

L'unico elemento che relaziona J e μ_γ è $\langle JM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle$. Consideriamo, pertanto, uno alla volta i termini di W_{μ_γ} nella sola parte riguardante i momenti angolari.

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{Y}^{\mu_\gamma}_{J,J-1,1} = \mathbf{j}\cdot\langle J_\gamma{-}1,0,1\mu_\gamma|J_\gamma\mu_\gamma\rangle Y(\widehat{r})_{J-1,0}\xi_{\mu_\gamma} = \langle J_\gamma{-}1,0,1\mu_\gamma\rangle Y_{J_\gamma-1,0}(\widehat{r})\mathbf{j}\cdot\xi_{\mu_\gamma} =$$
$$\langle J_\gamma-1,0,1\mu_\gamma|j_\gamma\mu_\gamma\rangle Y_{J_\gamma-1,0}(\widehat{r})j_{\mu_\gamma}(r)$$

è la μ-esima componente di un tensore di rango J_γ.

Analogamente per gli altri due termini di W_{μ_γ} che sono ancora dei tensori di rango J_γ. Di conseguenza, applicando il teorema di Wigner–Eckart a $\langle JM(Ijl);p|W_{\mu_\gamma}|00\rangle$ si ottiene

$$(-1)^{J-M}\begin{pmatrix} J & J_\gamma & 0 \\ -M & \mu_\gamma & 0 \end{pmatrix}\langle EJ||[W]^J||0\rangle. \tag{C.3}$$

Per le relazioni triangolari cui soddisfa il simbolo $3j$ abbiamo che $\mu_\gamma=-M$ e $J_\gamma=J$. Con questa condizione i coefficienti di Clebsch–Gordan diventano

$$\langle jmIm_I|JM\rangle \longrightarrow \langle jmIm_I|J-\mu_\gamma\rangle$$
$$\langle j'm'Im_I|J'M'\rangle \longrightarrow \langle j'm'Im_I|J'-\mu_\gamma\rangle. \tag{C.4}$$

Inoltre, dai vari elementi di matrice si ottengono le seguenti relazioni:

$$\langle j'm'Im_I|J'-\mu_\gamma\rangle \Longrightarrow -\mu_\gamma-m_I=m',$$

$$\langle jmIm_I|J-\mu_\gamma\rangle \Longrightarrow -\mu_\gamma - m_I = m,$$

$$\langle l'\mu'\frac{1}{2}s|j'm'\rangle = \langle l'\mu'\frac{1}{2}s|j'(-\mu_\gamma - m_I)\rangle \Longrightarrow -\mu_\gamma - m_I - s = \mu',$$

$$\langle l\mu\frac{1}{2}s|jm\rangle = \langle l\mu\frac{1}{2}s|j'(-\mu_\gamma - m_I)\rangle \Longrightarrow -\mu_\gamma - m_I - s = \mu.$$

quindi $m = m'$ e $\mu = \mu'$.

Appendice D

Termine relativistico di spin

Risolviamo esplicitamente il termine $\beta\partial_\nu A_\mu \sigma_{\mu\nu}$ dell'equazione (2.19). Eplicitiamo $\sigma_{\mu\nu}$ nelle sue possibili combinazioni tra gli indici temporali (0) e spaziali (i,j) usando la rappresentazione delle matrici $\boldsymbol{\alpha}$ e β data nell'equazione (2.4) a cui corrisponde

$$\gamma_\mu \equiv (\gamma_0, \gamma_i) \equiv (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}). \tag{D.1}$$

Dalla definizione

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_{nu}] \tag{D.2}$$

otteniamo

$$\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{00} + \sigma_{0i} + \sigma_{i0} + \sigma_{ij} \tag{D.3}$$

con

$$\sigma_{0i} = \frac{i}{2}\Big[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big] =$$

$$\frac{i}{2}\Big[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\Big] = -\frac{i}{2}\Big[2\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\Big] =$$

$$i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = i\alpha_i \tag{D.4}$$

Sfruttando l'antisimmetria

$$\sigma_{i0} = -i\alpha_i \tag{D.5}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{i}{2}\Big[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\Big] =$$

$$\frac{i}{2}\Big[\begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_j\sigma_i \end{pmatrix}\Big] = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & \epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} \tag{D.6}$$

Perciò

$$-\beta\partial_\nu A_\mu \sigma_{\mu\nu} = \beta(\partial_i A_0 \sigma_{0i} + \partial_0 A_i \sigma_{i0} + \partial_j A_i \sigma_{ij}) =$$

$$i\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E} - i\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}. \tag{D.7}$$

dove abbiamo indicato con **E** e **B** rispettivamente il campo elettrico e magnetico cui è soggetta la particella di Dirac.

Appendice E

Sviluppo in commutatori multipli dell'Hamiltoniana

Esprimiamo H' in termini di H partendo dall' equazione (2.24) dalla quale ricaviamo

$$H' \equiv e^{iS} H e^{-iS} - i e^{iS} \frac{\partial}{\partial t} e^{-iS}. \tag{E.1}$$

Trattiamo separatamente i due termini $e^{iS} H e^{-iS}$ e $-ie^{iS}\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}$.

Scriviamo il primo termine come una funzione di λ

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S} H e^{-i\lambda S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right)_{\lambda=0} \tag{E.2}$$

Le derivate di $F(\lambda)$ rispetto a λ possono essere scritte in termini di commutatori multipli, infatti:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = iSe^{i\lambda S} H e^{-i\lambda S} - ie^{i\lambda S} HSe^{-i\lambda S} = e^{i\lambda S} i[S, H] e^{-i\lambda S}. \tag{E.3}$$

Le derivate successive sono della stessa forma, ma presentano un numero di commutatori pari all'ordine della derivata

$$\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} = e^{i\lambda S}(i)^n[S,[S,...,[S,H]...]]e^{-i\lambda S}. \tag{E.4}$$

Consideriamo, ora, la funzione

$$G(\lambda) = -ie^{i\lambda S}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\lambda S} = \sum n = 0^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\partial^n G}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0} \tag{E.5}$$

il calcolo della derivata prima di G ci fornisce

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -i(iS)e^{i\lambda S}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\lambda S} - e^{i\lambda S}\frac{\partial}{\partial t}Se^{-i\lambda S} = e^{i\lambda S}[S\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}S]e^{-i\lambda S} =$$

$$e^{i\lambda S}[S\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}S - S\frac{\partial}{\partial t}]e^{-i\lambda S} = -e^{i\lambda S}\dot{S}e^{-i\lambda S}. \tag{E.6}$$

La derivata seconda sarà:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} = -iSe^{i\lambda S}\dot{S}e^{-i\lambda S} + iSe^{i\lambda S}\dot{S}e^{-i\lambda S} = ie^{i\lambda S}[S,\dot{S}]e^{-i\lambda S} \tag{E.7}$$

Se nello sviluppo di $F(\lambda)$ e di $G(\lambda)$ poniamo $\lambda = 1$ otteniamo la (2.25).

Appendice F

Prima trasformazione unitaria di Foldy–Wouthuysen

Calcoliamo esplicitamente ogni termine dello sviluppo di H' definita in (2.25) Il primo termine è quello che compare in (2.27):

$$i[S,H] = iSH - iHS = i\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}(\beta m+\mathcal{E}+\mathcal{O})\Big) - i(\beta m+\mathcal{O}+\mathcal{E})\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big) =$$

$$\frac{\beta\mathcal{O}\beta}{2} + \frac{\beta\mathcal{O}\mathcal{E}}{2m} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\beta^2\mathcal{O}}{2} - \frac{\mathcal{O}\beta\mathcal{O}}{2m} - \frac{\mathcal{E}\beta\mathcal{O}}{2m} =$$

$$= -\frac{\beta^2\mathcal{O}}{2} + \frac{\beta\mathcal{O}\mathcal{E}}{2m} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\beta^2\mathcal{O}}{2} + \frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{\beta\mathcal{E}\mathcal{O}}{2m} =$$

$$= -\mathcal{O} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2 \tag{F.1}$$

dove abbiamo sfruttato le proprietà di commutazione di $\mathcal{E}$ e β e quelle di anticommutazione di $\mathcal{O}$ e β.

Calcoliamo il termine (2.28)

$$\frac{i^2}{2}[S,[S,H]] = \frac{i}{2}[S,\mathcal{O} + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2] =$$

$$= \frac{i}{2}\Big(- S\mathcal{O} + \frac{S\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] + S\frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2 + \mathcal{O}S - \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}]S - \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}^2 S\Big) =$$
$$\frac{i}{2}\Big(\frac{i\beta}{\mathcal{O}}^2 2m - \frac{i\beta\mathcal{O}}{(2m)^2}\beta[\mathcal{O},\mathcal{E}] - \frac{i\beta\mathcal{O}}{2m^2}\beta\mathcal{O}^2 - \mathcal{O}\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m} - \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}]\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big) + \frac{i}{m}\beta\mathcal{O}^2\frac{\beta\mathcal{O}}{2m}\Big) =$$
$$\frac{i}{2}\Big(\frac{i\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{i\beta\mathcal{O}}{(2m)^2}\beta\mathcal{O}\mathcal{E} + \frac{i\beta\mathcal{O}}{(2m)^2}\beta\mathcal{E}\mathcal{O} - \frac{i\beta\mathcal{O}}{2m^2}\beta\mathcal{O}^2 +$$
$$+\frac{i\beta\mathcal{O}^2}{2m} + \frac{i\beta\mathcal{O}\mathcal{E}}{(2m)^2}\beta\mathcal{O} - \frac{i\beta\mathcal{E}\mathcal{O}\beta\mathcal{O}}{(2m)^2} + \frac{i}{m}\beta\mathcal{O}^2\frac{\beta\mathcal{O}}{2m}\Big) =$$
$$-\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]]. \tag{F.2}$$

Calcoliamo il termine (2.29):

$$\frac{i^3}{3!}[S,[S,[S,H]]] = \frac{i}{3}[S,\Big(- \frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3\Big)] =$$
$$= \frac{1}{3}\Big\{\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big)\Big(-\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m}\Big) + \Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big)\Big(-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]]\Big) + \Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big)\Big(-\frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3\Big) +$$
$$-\Big(\frac{\beta\mathcal{O}^2}{2m}\Big)\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big) - \Big(-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]]\Big)\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big) - \Big(-\frac{1}{2m}\mathcal{O}^3\Big)\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big)\Big\} =$$
$$\frac{i}{3}\Big(-\frac{i\mathcal{O}^3}{4m^2} + \frac{i\beta\mathcal{O}}{16m^3}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] + \frac{i\beta\mathcal{O}^4}{4m^3} - \frac{i\mathcal{O}^3}{4m^2} - \frac{1}{16m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]]\beta\mathcal{O} + \frac{i\mathcal{O}^4}{4m^3}\beta\Big) =$$
$$= -\frac{1}{6m^3}\beta\mathcal{O}^4 + \frac{\mathcal{O}^3}{6m^2}. \tag{F.3}$$

Per quanto riguarda i termini in cui compare la derivata temporale di S cioè le (2.30) e (2.31):

$$-\dot{S} = \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m} \tag{F.4}$$

$$-\frac{i}{2}[S,\dot{S}] = -\frac{i}{2}\Big\{\Big(- \frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big)\Big(- \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\Big) - \Big(- \frac{i\beta\dot{\mathcal{O}}}{2m}\Big)\Big(- \frac{i\beta\mathcal{O}}{2m}\Big)\Big\} =$$
$$\frac{i}{2}\Big(\frac{1}{4m^2}\mathcal{O}\dot{\mathcal{O}} + \frac{1}{4m^2}\dot{\mathcal{O}}\mathcal{O}\Big) = -\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}]. \tag{F.5}$$

Pertanto troncando lo sviluppo al secondo ordine l'hamiltoniana diventa:

$$H' = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}\mathcal{O}^2 + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O},\mathcal{E}] - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O},[\mathcal{O},\mathcal{E}]] - \frac{1}{3m^2}\mathcal{O}^3 +$$
$$i\frac{\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}} - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O},\dot{\mathcal{O}}] + O((1/m)^3). \tag{F.6}$$

Appendice G

Seconda trasformazione unitaria di Foldy–Wouthuysen

L'hamiltoniana H'' che compare nella (2.36) è data da:

$$H'' = H' + i[S, H] - \dot{S}. \tag{G.1}$$

Grazie alle (2.32), (2.33) e (2.35) H' è stata ridefinita come:

$$H' = \beta m + \mathcal{O}' + \mathcal{E}'. \tag{G.2}$$

Il termine successivo è:

$$i[S, H'] = iSH' - iH'S = i\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}'}{2m}(\beta m + \mathcal{E}' + \mathcal{O}')\Big) - i(\beta m + \mathcal{O}' + \mathcal{E}')\Big(-\frac{i\beta\mathcal{O}'}{2m}\Big) =$$

$$\frac{\beta\mathcal{O}'\beta}{2} + \frac{\beta\mathcal{O}'\mathcal{E}'}{2m} + \frac{\beta\mathcal{O}'^2}{2m} - \frac{\beta^2\mathcal{O}'}{2} - \frac{\mathcal{O}'\beta\mathcal{O}'}{2m} - \frac{\mathcal{E}'\beta\mathcal{O}'}{2m}$$

sfruttando le proprietà di commutazione di $\mathcal{E}$ e β e quelle di anticommutazione di $\mathcal{O}$ e β abbiamo che

$$i[S, |H'] = -\frac{\beta^2\mathcal{O}'}{2} + \frac{\beta\mathcal{O}'\mathcal{E}'}{2m} + \frac{\beta\mathcal{O}'^2}{2m} - \frac{\beta^2\mathcal{O}'}{2} + \frac{\beta\mathcal{O}'^2}{2m} - \frac{\beta\mathcal{E}'\mathcal{O}'}{2m} =$$

$$= -\mathcal{O}' + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}', \mathcal{E}'] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{O}'^2. \tag{G.3}$$

L'utimo termine è

$$\dot{S} = -\frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}' \tag{G.4}$$

Dal momento che $\mathcal{O}'$ contiene potenze in $1/m$ del secondo ordine, possiamo trascurare il termine $\beta\mathcal{O}'^2/m$, perciò H'' diventa:

$$H'' = \beta m + \mathcal{O}' + \mathcal{E}' - \mathcal{O}' + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}', \mathcal{E}'] + \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}' =$$

$$= \beta m + \mathcal{E}' + \frac{\beta}{2m}[\mathcal{O}', \mathcal{E}'] + \frac{i\beta}{2m}\dot{\mathcal{O}}'. \tag{G.5}$$

Appendice H

Approssimazione al primo ordine dell'Hamiltoniana di interazione

Ottenuta l'hamiltoniana priva di operatori dispari separiamo il termine cinetico ($\mathcal{O}_0$) da quelli relativi all'interazione elettromagnetica ($\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{E}$) eliminando i termini d'interazione di secondo ordine.

$$H = \beta m + \mathcal{E} + \frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1)^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, [\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, \mathcal{E}]] + \\ - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1)]. \tag{H.1}$$

Esplicitiamo ciascun termine; per quanto riguarda il termine $[\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, [\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, \mathcal{E}]]$: calcoliamo il commutatore interno al primo ordine perturbativo nel potenziale:

$$[\mathcal{O}_0 + \mathcal{O}_1, \mathcal{E}] = \mathcal{O}_0\mathcal{E} + \mathcal{O}_1\mathcal{E} - \mathcal{E}\mathcal{O}_0 - \mathcal{E}\mathcal{O}_1 \to [\mathcal{O}_0, \mathcal{E}] \tag{H.2}$$

dove sono stati trascurati i fattori $\mathcal{O}_1\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}\mathcal{O}_1$ perchè sono termini d'interazione del secondo ordine. Quindi il commutatore più esterno diventa:

$$[\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1,[\mathcal{O}_0,\mathcal{E}]]=\mathcal{O}_0(\mathcal{O}_0\mathcal{E}-\mathcal{E}\mathcal{O}_0)+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_0\mathcal{E}-\mathcal{O}_1\mathcal{E}\mathcal{O}_0-\mathcal{O}_0\mathcal{E}\mathcal{O}_0-\mathcal{O}_0\mathcal{E}\mathcal{O}_1+$$

$$+\mathcal{E}\mathcal{O}_0\mathcal{O}_0+\mathcal{E}\mathcal{O}_0\mathcal{O}_1\rightarrow\mathcal{O}_0\mathcal{O}_0\mathcal{E}-\mathcal{O}_0\mathcal{E}\mathcal{O}_0-\mathcal{O}_0\mathcal{E}\mathcal{O}_0+\mathcal{E}\mathcal{O}_0\mathcal{O}_0=$$

$$\mathcal{O}_0(\mathcal{O}_0\mathcal{E}-\mathcal{E}-\mathcal{E}\mathcal{O}_0)-(\mathcal{O}_0\mathcal{E}-\mathcal{E}\mathcal{O}_0)\mathcal{O}_0=[\mathcal{O}_0,[\mathcal{O}_0,\mathcal{E}]].$$

Quindi all'ordine desiderato

$$-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1,[\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1,\mathcal{E}]]\longrightarrow-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0,[\mathcal{O}_0,\mathcal{E}]]. \qquad \text{(H.3)}$$

Analizziamo il termine

$$-\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1,\dot{\mathcal{O}}_0+\dot{\mathcal{O}}_1]=-\frac{i}{8m^2}[(\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1)(\dot{\mathcal{O}}_0+\dot{\mathcal{O}}_1)-(\dot{\mathcal{O}}_0+\dot{\mathcal{O}}_1)(\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1)]$$

$$\rightarrow-\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0\dot{\mathcal{O}}_1-\dot{\mathcal{O}}_1\mathcal{O}_0]=-\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0,\dot{\mathcal{O}}_1]. \qquad \text{(H.4)}$$

Pertanto all'ordine desiderato

$$-\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0+\mathcal{O}_1,\dot{\mathcal{O}}_0+\dot{\mathcal{O}}_1]\longrightarrow-\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0,\dot{\mathcal{O}}_1]. \qquad \text{(H.5)}$$

L'hamiltoniana diventa

$$H=\beta m+\mathcal{E}+\frac{\beta}{2m}\mathcal{O}_0^2+\frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0\mathcal{O}_1+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_0)+$$

$$-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0,[\mathcal{O}_0,\mathcal{E}]]-\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}_0,\dot{\mathcal{O}}_1]+O((1/m)^3,\mathcal{O}_1^2,\mathcal{O}_1\mathcal{E}). \qquad \text{(H.6)}$$

Appendice I

Hamiltoniana non relativistica

Per caratterizzare l'hamiltoniana di una particella in interazione con un campo elettromagnetico esterno, ricordando che:

$$\mathcal{E} = eF_1\varphi - \frac{ieK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B},$$

$$\mathcal{O}_0 = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}$$

$$\mathcal{O}_1 = -eF_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A} + \frac{ieK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E},$$

non occorre altro che esplicitare ogni termine. Il termine (2.46):

$$\frac{\beta}{2m}\mathcal{O}_0^2 = \frac{\beta}{2m}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}) = \frac{\beta}{2m}p^2; \tag{I.1}$$

il termine (2.47):

$$\frac{\beta}{2m}(\mathcal{O}_0\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_1\mathcal{O}_0) = \frac{\beta}{2m}\Big\{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})\Big(-eF_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}+$$

$$+\frac{ieK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}\Big) + \Big(-eF_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A} + \frac{ieK}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}\Big)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})\Big\} =$$

$$= -\frac{e\beta}{2m}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})(F_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A}) + (F_1\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{A})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})]+$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{ieK\beta}{4m^2}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot(F_2\mathbf{E}))+(\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot(F_2\mathbf{E}))(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})]\\
&-\frac{e\beta}{2m}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{A})+(F_1\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}]-\frac{e\beta}{2m}i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times(F_1\mathbf{A})+(F_1\mathbf{A})\times\mathbf{p}]\\
&-\frac{ieK}{4m^2}[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha}\cdot F_2\mathbf{E})-(\boldsymbol{\alpha}\cdot F_2\mathbf{E})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})]=\\
&=-\frac{e\beta}{2m}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{A})+(F_1\mathbf{A})\cdot\mathbf{p}]-\frac{e\beta}{2m}i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times(F_1\mathbf{A})+(F_1\mathbf{A})\times\mathbf{p}]+\\
&-\frac{iek}{4m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_2\mathbf{E})-(F_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{p}]+\frac{eK}{4m^2}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{p}\times(F_2\mathbf{E})-(F_2\mathbf{E})\times\mathbf{p}]. \qquad \text{(I.2)}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo, infine, il termine in (2.48):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}_0,([\mathcal{O}_0,\mathcal{E}]+i\dot{\mathcal{O}}_1)]=-\frac{ie}{8m^2}[\mathcal{O}_0,\boldsymbol{\alpha}\cdot(F_1\mathbf{E})-\frac{K}{2m}F_2\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}]=\\
&=-\frac{ie}{8m^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}\cdot(F_1\mathbf{E})]=-\frac{ie}{8m^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}\cdot(F_1\mathbf{E})-\boldsymbol{\alpha}\cdot(F_1\mathbf{E})\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}]=\\
&-\frac{ie}{8m^2}[\mathbf{p}\cdot(F_1\mathbf{E})-(F_1\mathbf{E}\cdot\mathbf{p})]+\frac{e}{8m^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[\mathbf{p}\times(F_1\mathbf{E})-(F_1\mathbf{E}\times\mathbf{p})]. \qquad \text{(I.3)}
\end{aligned}
$$

Appendice J

Glossario delle abbreviazioni

SRC	Short Range Correlation
MEC	Mesonic Exchange Current
RPA	Random Phase Approximation
RNO	Rappresentazione dei Numeri di Occupazione
LM	Landau–Migdal
PP	Polarization Potential
MF	Mean Field
FSI	Final State Interaction
CBF	Correlated Basis Function
FHC	Fermi Hypernetted Chain

Bibliografia

[Ahr76] J.Ahrens et al.,*Nucl. Phys. A* **251** (1975), 479.

[Abr70] M. Abramowitz, "Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs and Mathematical Tables", Dover Publications Inc., NY, 1970.

[Ada88] G. S. Adams et al., *Phys. Rev. C* **38** (1988), 2771.

[Ama94] J.E. Amaro, G. Co', A.M. Lallena, *Nucl. Phys. A* **578** (1994), 365.

[Ama98] J.E. Amaro, A.M. Lallena, G. Co',A. Fabrocini *Phys. Rev C* **57** (1998), 3473.

[Ang02] M. Anguiano, G. Co', A.M. Lallena, S.R. Mokhtar, *Ann. Phys.* **296** (2002), 235.

[Ang03] M. Anguiano, G. Co', A.M. Lallena, *J. Phys.G* **29** (2003), 1119.

[Ang04] M. Anguiano, G. Co', A.M. Lallena, *Preprint submitted to Nucl. Phys. A* (2004).

[Bjo64] J.D. Bjorken, S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw–Hill, New York, 1964.

[Bof96] S. Boffi, C. Giusti, F. D. Pacati, M. Radici "Electromagnetic Response of Atomic Nuclei", Clarendom, Oxford, 1996.

[Cla79] J. W. Clark, *Part. Nucl. Phys.* **3** (1979) 89.

[Co'84] G. Co', "A Model for Nucleon Emission Induced by Electron Scattering", Tesi di Dottorato,Università di Bonn 1984, non pubblicata

[Co'95] G.Co', *Nuovo Cimento* **108** (1995) 623

[Edm60] A. R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton University Press, NJ, 1960.

[Eis70] J. Eisenberg, W. Greiner, "Nuclear Theory–Excitation Mechanisms of the Nucleus", North–Holland Publishing Company, Amsterdam 1970.

[Fet71] A. L. Fetter, J.D. Walecka, "Quantum Theory of many–particle systems" McGraw–Hill, NewYork, 1971

[Giu97] C. Giusti, F.D. Pacati, *Nucl. Phys. A* **615** (1997), 373.

[PQW76] E. C. Poggio, H. R. Quinn, S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **13** (1976), 1958.

[Ryc97] J. Ryckebusch, V. Van der Sluys, K. Heyde, H. Holvoet, W. Van Nespen, M. Waroquier, M. Vanderhaeghen, *Nucl. Phys. A* **624** (1997), 581.

[Rin80] P. Ring, P. Schuck, "The Nuclear Many–Body Problem", Springer–Verlag, New York, 1980.

[Ros82] S. Rosati "From nuclei to particles",Proc. Int. School E. Fermi, Couse LXXIX, A.Molinari ed., Nort Holland, Amsterdam 1982

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il prof. Giampaolo Co' per la sua infinita pazienza e disponibilità dimostratemi durante tutta la stesura della tesi.

Un particolare grazie ai miei fratelli per essere stati mio esempio e guida durante tutto il corso dei miei studi.

Un ringraziamento speciale va a Sandro che, con amore, è stato presente in ogni istante del lavoro condividendo con me le emozioni che questa tesi ha comportato.

Un sincero ringraziamento è per i miei genitori che hanno sempre saputo incoraggiarmi anche nelle situazioni più difficili, dandomi fiducia e forza per affrontare ogni problema.

Infine un enorme grazie a tutti gli amici del Fiorini che con la loro simpatia e allegria hanno reso divertenti e indimenticabili questi quattro anni trascorsi insieme.