



UNIVERSITÀ DEL SALENTO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
“ENNIO DE GIORGI”  
Corso di laurea in Fisica

---

TESI DI LAUREA

# Modellizzazione di nuclei pari-dispari

*Laureanda:*  
Miriam VERGARA

*Relatore:*  
Prof. Giampaolo CO'

---

Anno Accademico 2020/2021



# Indice

<b>1</b>	<b>Modello a particelle indipendenti</b>	<b>3</b>
1.1	Ipotesi del modello . . . . .	3
1.2	Hartree-Fock . . . . .	4
1.3	Il modello BCS . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Simmetria sferica</b>	<b>9</b>
2.1	Nuclei pari-pari . . . . .	9
2.2	Nuclei pari-dispari . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Dettagli del calcolo</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>17</b>
4.1	Struttura del Mg nel modello a shell . . . . .	17
4.2	Deformazione . . . . .	19
4.3	Pairing . . . . .	26
4.4	Confronto con i risultati di Bruyère le Châtel . . . . .	28
4.5	Confronto con i dati sperimentali . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>



# Capitolo 1

## Modello a particelle indipendenti

### 1.1 Ipotesi del modello

Il modello a campo medio è il punto di partenza dal quale evolvono tutte le teorie a multi-corpi, e attua un'approssimazione che trasforma il problema a molti corpi in molti problemi ad un corpo.

Un'espressione generale dell'hamiltoniana che descrive il sistema a molti corpi è:

$$H = \sum_i^A \left( \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A V(i, j) + \dots , \quad (1.1)$$

dove  $A$  indica il numero di particelle che compongono il sistema, ognuna di massa  $m_i$ . Il termine all'interno della parentesi indica l'energia cinetica di ogni particella e  $V(i, j)$  il potenziale di interazione tra due particelle. I puntini indicano termini più complessi rispetto all'interazione a due corpi, cioè interazioni a tre, quattro ecc. corpi, termini che comunque trascuriamo nella nostra trattazione.

Aggiungiamo e sottraiamo all'hamiltoniana (1.1) un termine di potenziale medio  $U(i)$  che agisce su una particella, l' $i$ -esima, alla volta:

$$H = \sum_i^A \left( \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U(i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^A V(i, j) - \sum_i^A U(i) . \quad (1.2)$$

Il termine tra parentesi tonde, denominato  $H_0$ , è somma di operatori che agiscono su una particella singola alla volta. Possiamo definire allora la somma di questi operatori come hamiltoniane di singole particelle  $h(i)$ :

$$H_0 = \sum_i^A h(i) \equiv \sum_i^A \left( \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + U(i) \right) . \quad (1.3)$$

Il modello a campo medio consiste nel trascurare i termini aggiuntivi ad  $H_0$  nell'equazione (1.2). Con questa approssimazione il modello a molti-corpi viene trasformato in una

somma di problemi ad un corpo. Il modello è anche detto a particelle indipendenti perché le particelle descritte non interagiscono tra loro.

Il fatto che  $H_0$  sia somma di termini indipendenti implica che i suoi autostati possono essere costruiti come prodotti degli autostati di  $h(i)$ :

$$h(i) |\phi(i)\rangle = \epsilon_i |\phi(i)\rangle . \quad (1.4)$$

L'autofunzione dell'hamiltoniana  $H_0$  è costituita da una combinazione lineare di prodotti delle autofunzioni di singola particella  $|\phi_i\rangle$

$$H_0 |\Phi\rangle = \left( \sum_i h(i) \right) |\Phi\rangle = E |\Phi\rangle ; \quad |\Phi\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle \dots |\phi_A\rangle . \quad (1.5)$$

Poiché stiamo trattando un sistema di fermioni identici,  $|\Phi\rangle$  deve essere antisimmetrico per lo scambio di due di loro. Dato che l'equazione di Schrödinger è lineare, ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione. Quindi  $|\Phi\rangle$  può essere espresso come la somma delle combinazioni lineari generate dal determinante delle soluzioni ottenute scambiando due particelle alla volta. Questa soluzione prende il nome di determinante di Slater:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \det(\phi_i) . \quad (1.6)$$

Nel modello a campo medio, la soluzione del problema a multi-corpi è ottenuta risolvendo, per ogni particella, l'equazione di Schrödinger di singola particella (1.4). Con le autofunzioni  $\phi_i$  si costruisce il determinante di Slater (1.6).

## 1.2 Hartree-Fock

C'è una teoria microscopica che permette di definire le equazioni del modello di campo medio: è la teoria Hartree-Fock.

Usando la rappresentazione dei numeri di occupazione, è possibile esprimere l'hamiltoniana di un sistema di fermioni interagenti come:

$$H = \sum_{\nu\nu'} \left( T_{\nu\nu'} + \sum_i \bar{V}_{\nu i \nu' i} \right) a_\nu^+ a_{\nu'} + \frac{1}{4} \sum_{\mu\mu'\nu\nu'} \bar{V}_{\nu\mu\nu'\mu'} N [a_\nu^+ a_\mu^+ a_{\mu'} a_{\nu'}] - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij} , \quad (1.7)$$

dove  $a_\nu$  e  $a_\nu^+$  sono rispettivamente operatori di distruzione e creazione e  $N$  l'operatore di prodotto normale ordinato [Co20]. Il termine proporzionale ad  $a_\nu^+ a_{\nu'}$  rappresenta il termine ad un corpo,  $T$  l'operatore dell'energia cinetica e  $\bar{V}$  l'interazione antisimmetrizzata definita come

$$\bar{V}_{\nu i \nu' i} \equiv \langle \nu i | V | \nu' i \rangle - \langle \nu i | V | i \nu' \rangle \quad (1.8)$$

Gli operatori  $a_\nu$  e  $a_\nu^+$  sono definiti rispetto ad una base di funzioni d'onda di singola particella che nello stato fondamentale al di sotto della superficie di Fermi ha tutti gli

stati occupati mentre quelli al di sopra vuoti. Per definizione, il valore di aspettazione del prodotto normale ordinato rispetto a questo stato fondamentale è nullo. Quindi il valore di aspettazione dell'hamiltoniana completa (1.7) rispetto al determinante di Slater che descrive lo stato ad energia minima è:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle &= \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} \langle \Phi_0 | a_{\nu}^+ a_{\nu} | \Phi_0 \rangle - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij} \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu\mu'\nu\nu'} \bar{V}_{\nu\mu\nu'\mu'} \langle \Phi_0 | N[a_{\nu}^+ a_{\mu}^+ a_{\mu'} a_{\nu'}] | \Phi_0 \rangle \\ &= \sum_i \epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{ij} \bar{V}_{ijij} = E , \end{aligned} \quad (1.9)$$

con  $\epsilon_i$  autovalore dell'energia associato all'hamiltoniana di singola particella e con la somma su  $\nu$  che si trasforma in una somma sui soli stati buca  $i$ . L'espressione precedente mette in evidenza che nel calcolare valori di aspettazione su determinanti di Slater si trascura parte dell'hamiltoniana, come presentato in maniera più intuitiva nella sezione 1.1. Tale semplificazione è un'importante caratteristica dei modelli a particelle indipendenti. Il termine che viene trascurato è normalmente chiamato *interazione residua*. La teoria Hartree-Fock, una volta fissata l'interazione tra due nucleoni, quindi l'hamiltoniana, seleziona il determinante di Slater che minimizza l'energia. Alla base della teoria di Hartree-Fock vi è il principio variazionale. Si considera l'energia del sistema come funzionale della funzione d'onda che descrive il sistema:  $E(\Psi)$ . Si può provare che la ricerca del minimo di questo funzionale corrisponde a risolvere l'equazione di Schrödinger [Eis76]. Questo è vero se la ricerca è fatta considerando l'intero spazio di Hilbert di tutte le funzioni d'onda a molti-corpi  $\Psi$  che possono descrivere il sistema [Rin80].

L'approssimazione Hartree-Fock consiste nella ricerca del minimo nel sottospazio composto da tutte le possibili funzioni d'onda  $\Phi$  esprimibili come singolo determinante di Slater. Poiché le funzioni d'onda di singola particella che formano il determinante di Slater devono essere ortonormali, il principio variazionale è espresso come un problema variazionale vincolato, in cui sono inserite le condizioni di ortonormalizzazione:

$$\delta E[\Phi] = \delta \langle \Phi | H | \Phi \rangle - \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta \langle i | j \rangle = 0 , \quad (1.10)$$

dove  $|\Phi\rangle$  è il determinante di Slater formato dalle funzioni d'onda  $|i\rangle$  e  $\lambda_{ij}$  il moltiplicatore di Lagrange. Sostituendo l'espressione (1.7) si ottiene

$$\sum_i \delta \langle i | T | i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{ij} [\delta \langle ij | V | ij \rangle - \delta \langle ij | V | ij \rangle] - \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta \langle i | j \rangle = 0 . \quad (1.11)$$

Sviluppando i calcoli variazionali e trovando una base di singola particella che diagonalizzi l'hamiltoniana di singola particella  $h$  mediante una trasformazione unitaria si giunge alla

relazione [Co20]

$$h|k\rangle = T|k\rangle + \sum_j [\langle j|V|j\rangle|k\rangle - \langle j|V|k\rangle|j\rangle] = \epsilon_k|k\rangle . \quad (1.12)$$

Nello spazio delle configurazioni, dove  $|k\rangle \equiv \phi_k(\mathbf{r})$ , tale espressione diventa

$$h\phi_k(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\phi_k(\mathbf{r}) + \underbrace{U(\mathbf{r})\phi_k(\mathbf{r})}_{\text{Hartree}} - \underbrace{\int d^3r' W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\phi_k(\mathbf{r}')}_{\text{Fock-Dirac}} = \epsilon_k\phi_k(\mathbf{r}) , \quad (1.13)$$

dove il potenziale medio, di Hartree, definito come

$$U(r) = \sum_j \langle j|V|j\rangle = \sum_j \int d^3r' \phi_j^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}') , \quad (1.14)$$

descrive l'interazione della particella  $k$  con tutte le altre e la cui somma è effettuata su tutti gli stati al di sotto dell'energia di Fermi. Il fattore legato al termine di Fock-Dirac è non locale ed è definito come

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_j \phi_j^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_j(\mathbf{r}') . \quad (1.15)$$

Il termine di Fock-Dirac è detto anche di scambio e modifica la pura equazione differenziale di campo medio inserendo l'effetto del principio di esclusione di Pauli.

### 1.3 Il modello BCS

Abbiamo constatato che nella teoria di Hartree-Fock l'interazione residua è trascurata, tuttavia ci sono dei fenomeni che possono essere spiegati solo considerandola. Uno dei più evidenti è il fatto che tutti i nuclei pari-pari abbiano spin nullo. La spiegazione di questa osservazione è da ricercare nell'interazione di appaiamento che accoppia nucleoni dello stesso tipo in modo che ogni coppia abbia spin nullo [Mar09]. Una teoria che tratta l'appaiamento è la teoria di Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS).

Mentre nella teoria Hartree-Fock gli stati di singola particella al di sotto della superficie di Fermi sono totalmente occupati e quelli sopra sono vuoti, nella teoria BCS ogni stato di singola particella  $|k\rangle$  ha una probabilità  $v_k^2$  di essere occupato ed una  $u_k^2 = 1 - v_k^2$  di essere vuoto.

Nella teoria BCS stato fondamentale di un nucleo pari-pari è definito come

$$|BCS\rangle = \left( \prod_{k>0}^{\infty} (u_k + v_k a_k^+ a_{-k}^+) \right) |-\rangle , \quad (1.16)$$

dove  $|-\rangle$  indica lo stato di vuoto. Scopo della teoria BCS è determinare i valori di  $u_k$  e  $v_k$ . L'hamiltoniana può essere espressa come somma di termini, alcuni dei quali contenenti

prodotti normali ordinati. Questi termini risultano essere nulli quando si calcola il valore d'aspettazione dell'hamiltoniana rispetto allo stato fondamentale BCS (1.16). Poiché lo stato fondamentale BCS (1.16) non conserva il numero di particelle, si inserisce un vincolo nella ricerca del minimo in modo che il numero di fermioni sia conservato in media. Applicando il principio variazionale si ha

$$\delta E^{\text{BCS}}(|BCS\rangle) = \delta \langle BCS|H - \lambda \mathcal{N}|BCS\rangle = \delta \langle BCS|U|BCS\rangle = 0 , \quad (1.17)$$

dove

$$\mathcal{N} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{+} a_{\nu} , \quad (1.18)$$

è l'operatore numero di particelle,  $\lambda$  il moltiplicatore di Lagrange e  $U$  è definito come [Don08]

$$U = \sum_{k>0} \left[ (\epsilon_k - \lambda) 2v_k^2 + \sum_{k'>0} \langle k - k | V | k' - k' \rangle u_{k'} v_{k'} u_k v_k \right] . \quad (1.19)$$

dove  $\epsilon_k$  è l'energia cinetica dello stato  $|k\rangle$ . Il calcolo della variazione (1.17) conduce alle seguenti equazioni [Dug01]

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{(\epsilon_k - \lambda)^2 - \Delta_k^2} \right] , \quad (1.20)$$

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\Delta_i}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda) + \Delta_i^2}} \langle kk | V | ii \rangle . \quad (1.21)$$

Nella precedente equazione  $\lambda$ , detto gap di energia, è dato dall'espressione:

$$\lambda = \frac{2 \sum_k v_k^2 - \sum_k \left( 1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}} \right)}{\sum_k \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}}} . \quad (1.22)$$



# Capitolo 2

## Simmetria sferica

Le equazioni descritte nel capitolo precedente devono essere esplicitate in modo da poterle risolvere numericamente. A tal fine occorre sfruttare la simmetria rotazionale legata ai sistemi finiti, dove si fissa un centro delle coordinate e si usano coordinate polari sferiche. Nella nostra trattazione consideriamo una forza efficace  $V(r, r')$  che definisce un'interazione a campo finito e che comprende i quattro termini centrali tradizionali (scalare, di isospin, di spin e di spin-isospin), il termine di spin orbita a campo zero, il termine dipendente dalla densità scalare e il termine dipendente dal tensore-isospin.

### 2.1 Nuclei pari-pari

Nella trattazione dello studio di un nucleo pari-pari assumiamo che la funzione d'onda di singola particella, con cui si costruisce il determinante di Slater, possa essere fattorizzata come

$$\Phi_k(x) = R_k(r) |\tilde{k}\rangle \chi_{t_k} \quad (2.1)$$

dove con  $x$  si indica la coordinata generalizzata che comprende la distanza  $r$  (modulo del vettore posizione rispetto al centro del nucleo), lo spin e l'isospin dei nucleoni che si considerano. La parte radiale della funzione d'onda è definita come

$$R_k(r) \equiv R_{n_k l_k j_k, m_k}^{t_k}(r) \quad (2.2)$$

con  $n_k$  numero quantico principale,  $l_k$  numero quantico associato al momento angolare orbitale,  $j_k$  numero quantico relativo al momento angolare totale,  $t_k$  terza componente dell'isospin e  $m_k$  proiezione di  $j_k$  sull'asse  $z$ . La parte angolare che dipende dalle coordinate angolari  $\Omega_k \equiv (\theta_k \phi_k)$  e dalla terza componente dello spin  $s_k$ , è descritta dalla relazione

$$|\tilde{k}\rangle \equiv |l_k \frac{1}{2} j_k m_k\rangle = \sum_{\mu_k s_k} \langle l_k \mu_k \frac{1}{2} s_k | j_k m_k \rangle Y_{l_k \mu_k}(\Omega_k) \chi_{s_k}, \quad (2.3)$$

dove il termine racchiuso dal simbolo  $\langle \rangle$  rappresenta i coefficienti di Clebsch-Gordan,  $Y_{l_k \mu_k}$  è l'armonica sferica e  $\chi_{s_k}$  lo spinore di Pauli. Assumiamo inoltre che la (2.2) sia invariante sotto inversione temporale ossia che  $R_{n_k l_k j_k, m_k}^{t_k}(r) = R_{n_k l_k j_k, -m_k}^{t_k}(r)$ , questo implica che ogni livello energetico di singola particella diventa doppiamente degenere e che il nucleo assume la forma di un ellissoide con  $z$  asse di simmetria.

Applicando il principio variazionale per trovare il minimo del funzionale dell'energia  $E[\Phi]$  si giunge ad un insieme di equazioni differenziali del tipo

$$\left[ \langle \tilde{k} | -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 | \tilde{k} \rangle + \mathcal{U}_k(r) + \mathcal{K}(r) \right] R_k(r) - \int dr' r'^2 \mathcal{W}_k(r, r') R_k(r') = \epsilon_k R_k(r). \quad (2.4)$$

dove  $\mathcal{U}_k(r)$  è il potenziale di Hartree

$$\mathcal{U}_k(r) = \sum_{i=1}^A v_i^2 \int dr' r'^2 R_i^2(r') \langle \tilde{k} \tilde{i} | V(r, r') | \tilde{i} \tilde{k} \rangle, \quad (2.5)$$

$\mathcal{W}_k(r, r')$  il termine di Fock-Dirac

$$\mathcal{W}_k(r, r') = \sum_{i=1}^A v_i^2 \left[ R_i^*(r') R_i(r) \langle \tilde{k} \tilde{i} | V(r, r') | \tilde{i} \tilde{k} \rangle \right], \quad (2.6)$$

Il termine  $\epsilon_k$  indica l'energia associata alle funzioni d'onda di singola particella mentre  $\mathcal{K}(r)$  è correlato alla dipendenza dell'interazione dalla densità come

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^A v_i^2 v_j^2 \int dr' r'^2 & \left[ R_i^*(r) R_j^*(r') \langle \tilde{i} \tilde{j} | \frac{\partial V(r, r')}{\partial \rho} | \tilde{i} \tilde{j} \rangle R_i(r) R_j(r') \right. \\ & \left. - R_i^*(r) R_j^*(r') \langle \tilde{i} \tilde{j} | \frac{\partial V(r, r')}{\partial \rho} | \tilde{j} \tilde{i} \rangle R_j(r) R_i(r') \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Come indicato nel Cap.(3)  $v_k^2$  è la probabilità di occupazione degli stati di singola particella, tale valore è ottenuto risolvendo l'insieme di equazioni BCS (1.20) (4.1).

Nella rappresentazione sferica delle funzioni d'onda di singola particella (2.1), l'equazione per il termine  $\Delta_k$  diventa

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\Delta_i}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda) + \Delta_i^2}} \langle k k 00 | V(r, r') | i i 00 \rangle, \quad (2.8)$$

dove  $|\alpha \alpha 00\rangle$  indica uno stato in cui gli stati  $\phi_\alpha$  di singola particella sono accoppiati al momento totale angolare  $J = 0$  e alla proiezione dell'asse  $z$   $M = 0$ . L'energia totale di un nucleo pari-pari con numero di massa  $A$  e  $Z$  protoni può essere espressa come

$$\begin{aligned} E \equiv E(A, Z) = & \sum_k v_k^2 \epsilon_k - \frac{1}{2} \sum_k v_k^2 \int_0^\infty dr r^2 [\mathcal{U}_k(r) + 2 \mathcal{K}(r)] R_k^2(r) \\ & + \frac{1}{2} \sum_k v_k^2 \int_0^\infty dr dr' r^2 r'^2 \mathcal{W}_k(r, r') R_k(r) R_k(r'). \end{aligned} \quad (2.9)$$

La distribuzione di densità del sistema ha una dipendenza esplicita dalle coordinate angolari e perde la simmetria sferica. Per avere una stima della componente non sferica della densità nucleare sviluppiamo in multipoli:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_k |\phi_k(x)|^2 = \sum_L \rho_L(r) Y_{L0}(\Omega), \quad (2.10)$$

I termini dello sviluppo sono dati da:

$$\begin{aligned} \rho_L(r) &= \int d\Omega Y_{L0}(\Omega) \rho(r, \Omega) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_k \sum_{\mu_k=-l_k}^{l_k} \sum_{s_k=\pm 1/2} v_k^2 (-1)^{\mu_k} \hat{l}_k^2 \hat{j}_k^2 \hat{L} R_k^2(r) \\ &\quad \left( \begin{array}{ccc} l_k & l_k & L \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} l_k & l_k & L \\ \mu_k & -\mu_k & 0 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} l_k & \frac{1}{2} & j_k \\ \mu_k & s_k & -m_k \end{array} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove al posto dei coefficienti di Clebsch-Gordan abbiamo usato i simboli  $3j$  di Wigner.

Nei nostri calcoli abbiamo considerato i raggi quadratici medi di protoni (p) e neutroni (n), che descrivono le caratteristiche delle distribuzioni di densità e sono definiti come:

$$R_\alpha = \left[ \frac{\int d^3r r^2 \rho^\alpha(\mathbf{r})}{\int d^3r \rho^\alpha(\mathbf{r})} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\int dr r^4 \rho_0^\alpha(r)}{\int dr r^2 \rho_0^\alpha(r)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha \equiv p, n. \quad (2.12)$$

Il termine  $\rho_0^\alpha(r)$  indica il multipolo  $L = 0$  della densità dei protoni o neutroni. Per stimare le deformazioni nucleari si utilizza il parametro

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{5\pi}{9}} \frac{1}{AR^2} Q_{20}, \quad (2.13)$$

che ci consente di confrontare facilmente nuclei con dimensioni e numero di nucleoni differenti. All'interno di tale equazione  $R = 1.2 A^{1/3}$  fm e

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \Phi | r^2 Y_{20} | \Phi \rangle = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int dr r^4 \rho_2(r) \quad (2.14)$$

rappresenta il momento di quadrupolo della distribuzione di densità, con  $\rho_2(r)$  il termine  $L = 2$  della densità nucleare espresso nell'equazione (2.11).

## 2.2 Nuclei pari-dispari

La composizione di questi nuclei si ottiene aggiungendo un singolo nucleone alla struttura del nucleo pari-pari. Occorre prendere la base di funzioni d'onda di singola particella di

HF e imporre di sistemare la particella non appaiata in un determinato stato. Durante tutto il processo di calcolo imponiamo per la suddetta particella la condizione  $v_k^2 = 1$ , ossia effettuiamo un'operazione di blocco sul parametro variazionale esclusivamente per la particella aggiunta lasciando che questo possa variare per le altre particelle appaiate. Inoltre poiché la parte radiale della funzione d'onda di singola particella  $R_{n_k l_k j_k, m_k}^{t_k}(r)$  soddisfa la simmetria per inversione temporale, occorre tenere in considerazione questa condizione nella sommatoria presente in (2.5) e (2.6) dove fissiamo  $v$  e  $k$ . Nel calcolo di

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\Delta_i}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda) + \Delta_i^2}} \langle kk\ 00 | V(r, r') | ii\ 00 \rangle , \quad (2.15)$$

che implica il calcolo di  $U$  (??),  $W_k$  dev'essere fissato ad 1 per lo stato in cui inseriamo la particella spaiata. Gli osservabili come  $E(A, Z)$  e la distribuzione di probabilità  $\rho_L(r)$  (2.11) emergono in maniera consequenziale grazie alla condizione imposta di avere la particella su un livello fissato.

# Capitolo 3

## Dettagli del calcolo

Nel nostro modello la sola informazione esterna richiesta è l'interazione effettiva nucleone-nucleone. Usiamo una interazione a raggio finito. Contrariamente a quanto avviene usando interazioni di contatto, cioè a raggio zero, a nostra scelta permette di usare la stessa interazione sia per i calcoli HF che per quelli BCS.

Per i nostri calcoli abbiamo scelto una interazione ben nota in letteratura, l'interazione di Gogny [Dec80], i cui termini centrali sono normalmente espressi come

$$v_{\text{Gogny}}(r_{12}) = \sum_{j=1}^2 e^{-\left(\frac{r_{12}}{\mu_j}\right)^2} (W_j + B_j P_\sigma - H_j P_\tau - M_j P_\sigma P_\tau) \quad (3.1)$$

dove  $P_\sigma = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)$  è l'operatore di scambio dello spin,  $P_\tau = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)$  l'operatore di scambio dell'isospin, e  $\mu_j$ ,  $B_j$ ,  $H_j$ ,  $M_j$ ,  $W_j$  sono delle costanti reali i cui valori sono fissati dal confronto con l'esperimento.

In aggiunta ai termini centrali, l'interazione di Gogny ha anche un termine che dipende dalla densità

$$\left[ V_\rho^{(1)} + V_\rho^{(3)} \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \right] \rho^\alpha \left( \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \delta(\mathbf{r}_{12}) , \quad (3.2)$$

e un termine di spin-orbita a rango zero

$$iW_{ls}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{k}^\dagger \times \delta(\mathbf{r}_{12}) \mathbf{k} , \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{k}$  è l'impulso relativo delle due particelle interagenti, nello spazio delle coordinate  $\mathbf{k} = -\frac{1}{2}(\nabla_1 - \nabla_2)$ .

I valori dei parametri  $\mu_j$ ,  $B_j$ ,  $H_j$ ,  $M_j$ ,  $W_j$ ,  $V_\rho^{(1)}$ ,  $V_\rho^{(3)}$  e  $W_{ls}$  sono scelti con una procedura di fit a numerosi dati sperimentali, tra i quali energie di legame e raggi di carica. Per i nostri calcoli abbiamo scelto una parametrizzazione della forza detta D1S [Ber91], molto usata in letteratura. Nel nostro approccio utilizziamo l'espressione dell'interazione riscritta nei canali scalare, di isospin, di spin e spin-isospin:

$$\begin{aligned} v_{\text{Gogny}}(r_{12}) &= v^{(1)}(r_{12}) + v^{(2)}(r_{12}) \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \\ &+ v^{(3)}(r_{12}) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) + v^{(4)}(r_{12}) \boldsymbol{\sigma}(1) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nella figura 3.1 mostriamo le trasformate di Fourier delle funzioni  $v^{(n)}$  dell'equazione (3.4).

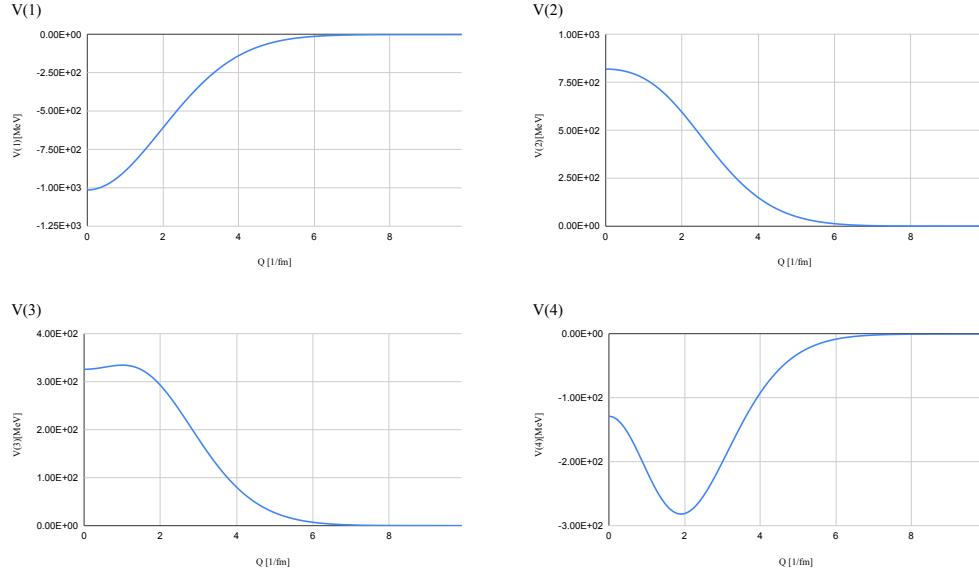


Figura 3.1: Le funzioni  $v^{(n=1,4)}$  dell'equazione 3.4 nello spazio degli impulsi.

Dai grafici vediamo come le funzioni  $V(1)$  e  $V(4)$  rappresentano i canali attrattivi e  $V(2)$  e  $V(3)$  quelli repulsivi. Queste funzioni sono a rango finito, infatti a  $q=6 \text{ fm}^{-1}$  sono quasi nulle. Se fossero a rango zero sarebbero delle costanti nello spazio degli impulsi.

In aggiunta ai calcoli fatti con la D1S abbiamo utilizzato anche un'altra parametrizzazione della forza di Gogny: la D1ST2 [Ang12] che contiene un termine tensoriale.

$$V_{\text{tensor}}(r_{12}) = [V_T + V_{T\tau} \boldsymbol{\tau}(1) \cdot \boldsymbol{\tau}(2)] S_{12} \exp\left[-\frac{(r_1 - r_2)^2}{\mu_T^2}\right]. \quad (3.5)$$

Dove  $\boldsymbol{\tau}(i)$  indica l'operatore di Pauli agente sull'  $i$ -esimo nucleone e  $S_{12}$  l'operatore tensore definito come

$$S_{12} = 3 \frac{[\sigma(1) \cdot r_{12}] [\sigma(2) \cdot r_{12}]}{r_{12}^2} - \sigma(1) \cdot \sigma(2). \quad (3.6)$$

con  $i$  e  $j$  indici relativi alle particelle considerate.

L'aggiunta di questo termine è stata fatta senza modificare i valori dei parametri della D1S. I valori dei parametri  $V_T$ ,  $V_{T\tau}$  e  $\mu_T^2$  sono stati fissati per riprodurre le differenza tra le energie dei livelli  $1p_{1/2}$  e  $1p_{3/2}$  di protoni e neutroni nel nucleo di  $^{16}\text{O}$  [Ang12]. Le funzioni  $V^{(5)}$  e  $V^{(6)}$  nello spazio dei momenti sono presentate nella figura 3.2

Le equazioni radiali differenziali HF sono risolte mediante un metodo iterativo. Ad ogni iterazione le equazioni (2.5), che definiscono la parte radiale delle funzioni d'onda

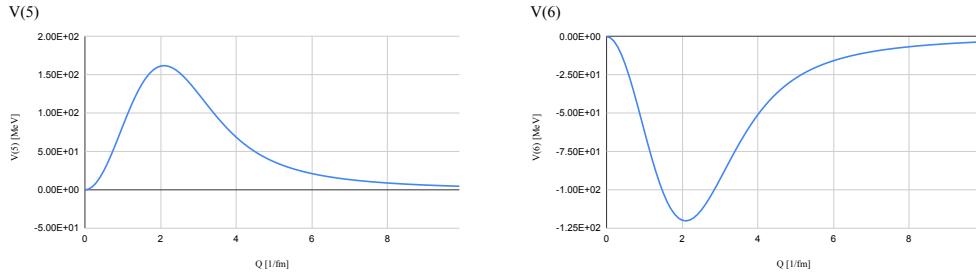


Figura 3.2: Le funzioni  $v^{(n=5,6)}$  nello spazio degli impulsi.

di singola particella, sono risolte usando una tecnica di sviluppo in onde piane [Gua82a] [Gua82b] che permette di trattare efficientemente il problema del termine di scambio. Le funzioni d'onda radiali sono inserite nelle equazioni BCS per modificare il  $v^2$ , ossia la loro probabilità di occupazione. Il processo iterativo termina quando la differenza tra le energie di legame per nucleone tra due iterazioni successive è inferiore ad un valore specifico, che nel nostro caso è stato scelto come  $10^{-6}$  MeV.

La procedura iterativa inizia utilizzando le funzioni d'onda di singola particella ottenute risolvendo l'equazione di Schrödinger per un potenziale di Woods-Saxon deformato:

$$V_{\text{Woods-Saxon}}(r, \Omega) = \frac{U_0}{1 + \exp(u)} + \frac{U_{so}}{r} \frac{\exp(u)}{[1 + \exp(u)]^2} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} + V_C - \Lambda Y_{20}(\Omega), \quad (3.7)$$

con  $u = (r - R_0)/a$ ,  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{s}$  rispettivamente operatore di momento angolare orbitale e di spin,  $V_C$  potenziale di Coulomb, e  $Y_{20}(\Omega)$  armonica sferica. I valori dei parametri  $U_0$ ,  $U_{so}$ ,  $R_0$  e  $a$  sono presi dalla letteratura per descrivere ragionevolmente la distribuzione di materia del nucleo di interesse. Per produrre una soluzione deformata sono necessari valori di  $|\Lambda|$  dell'ordine delle decine di MeV. I risultati finali del calcolo sono indipendenti dal potenziale che attiva la procedura iterativa, tranne che per un dettaglio. Effettuando dei calcoli si osserva che la procedura iterativa trova un minimo energetico con lo stesso tipo di deformazione dell'insieme di funzioni d'onda di partenza. Se ad esempio si parte da una deformazione prolata, impostando  $\Lambda > 0$ , si trova un minimo energetico che mantiene la deformazione prolata. Le energie relative alle soluzioni oblata e prolata per un determinato nucleo sono differenti, si definisce soluzione ottimale quella con il valore minore di  $E(A, Z)$ , ossia la soluzione che fornisce più legame al sistema.



# Capitolo 4

## Risultati

Il modello descritto nei capitoli precedenti è stato applicato allo studio degli isotopi del Mg. In questa sezione discuteremo i nostri risultati relativi alle energie di legame, ai raggi protonici e neutronici di alcuni di questi isotopi.

### 4.1 Struttura del Mg nel modello a shell

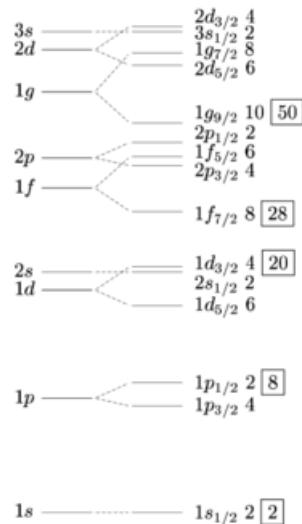


Figura 4.1: Schema dei livelli energetici di singola particella nel modello a shell.

Nella figura viene rappresentato lo schema dei livelli energetici di singola particella nel modello nucleare a strati. Analizziamo lo schema dei livelli per i nuclei di Mg. Nel Mg i 12 protoni occupano tutti gli stati fino al livello  $1d_{5/2}$  che risulta occupato parzialmente

da 4 protoni. Nel nostro studio abbiamo considerato isotopi del Mg che vanno da  $A = 20$  fino ad  $A = 40$  che sono i nuclei sperimentalmente noti [BNL]. Nell'isotopo più leggero da noi considerato,  $A = 20$ , gli 8 neutroni completano lo stato  $1p_{1/2}$ , in  $A=26$  i 14 neutroni chiudono lo stato  $1d_{5/2}$ . Per  $A=32$  i 20 neutroni occupano i livelli sino a chiudere lo stato  $1d_{3/2}$  e nell'isotopo più pesante preso in esame  $A=40$  i 28 neutroni completano il livello  $1f_{7/2}$ . Il resto dei nuclei occupa solo parzialmente i livelli, ad esempio nell'isotopo  $A=22$  2 dei 10 neutroni occupano lo stato  $1d_{5/2}$  che rimane perciò incompleto.

## 4.2 Deformazione

Il primo passo del nostro studio consiste nel determinare, per ogni nucleo, se il massimo dell'energia di legame sia prodotto in deformazione oblata o prolata. Nella figura 4.2 riportiamo i grafici relativi alle energie di legame ricavate mediante la D1S per le deformazioni oblata e prolata. Nel pannello in alto confrontiamo le energie di legame per nucleone per la deformazione prolata (punti blu) e oblata (punti rossi). Notiamo che le energie di legame degli isotopi del Mg con un numero di nucleoni compreso tra 24 – 30 presentano massimi, infatti osserviamo dalla figura che si forma quasi un plateau. Il resto degli isotopi, che mostrano grandi differenze, sia positive sia negative, nel numero di neutroni rispetto a quello dei protoni, presenta invece dei valori decrescenti.

Nel pannello centrale della figura 4.2 sono presentate le differenze relative definite come:

$$\Delta = \frac{BE(\text{prolato}) - BE(\text{oblato})}{BE(\text{prolato}) + BE(\text{oblato})}. \quad (4.1)$$

Le differenze relative tra le energie ottenute con deformazioni oblata e prolata sono molto piccole, in valore assoluto sono minori del 1%. L'andamento del  $\Delta$  mostra come, per la maggioranza degli isotopi, sia la deformazione prolata a presentare le maggiori energie di legame. Le differenze maggiori sono quelle degli isotopi  $^{33,24}\text{Mg}$ . Solo pochi isotopi come ad esempio il  $^{22}\text{Mg}$  o il  $^{34}\text{Mg}$  presentano un  $\Delta$  negativo. Chiameremo, d'ora in poi, **soluzioni ottimali** quelle con massima energia di legame.

Nel pannello inferiore sono riportati i valori del  $\beta_2$ , il parametro adimensionale che quantifica la deformazione, definito nell'equazione (2.13), per le soluzioni ottimali. È evidente che l'andamento di questi valori segua quello del pannello superiore. Per la maggioranza degli isotopi abbiamo un  $\beta_2$  prolato, solo per l'isotopo  $^{22}\text{Mg}$  e  $^{34}\text{Mg}$  compare un  $\beta_2$  oblato. Notiamo come gli isotopi  $^{26,27,32}\text{Mg}$  presentino un  $\Delta$  negativo e un  $\beta_2$  pari a zero. Questo perchè per tali nuclei le differenze tra le energie di legame delle deformazioni sono molto piccole.

Normalmente si considera fortemente deformato un nucleo con un  $\beta_2 \sim \pm 0.4$ . Questo significa che nei nostri calcoli anche gli isotopi che presentano i maggiori valori di  $\beta_2$  sono poco deformati.

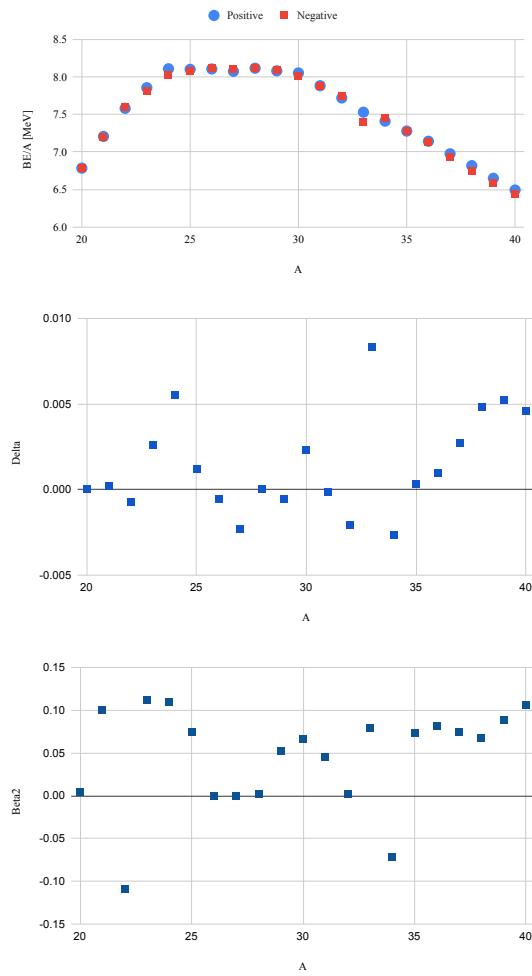


Figura 4.2: Pannello superiore: energie di legame per nucleone calcolate con l'interazione D1S per deformazione oblata, punti rossi, e prolata, punti blue. Pannello centrale: differenze relative  $\Delta$ , Eq. (4.1), tra le energie ottenute con le differenti deformazioni. Pannello inferiore:  $\beta_2$  per le soluzioni ottimali.

La figura 4.3 è analoga alla figura 4.2, ma presenta i risultati ottenuti con la forza D1ST2a [Ang12], che contiene dei termini tensoriali rispetto alla D1S.

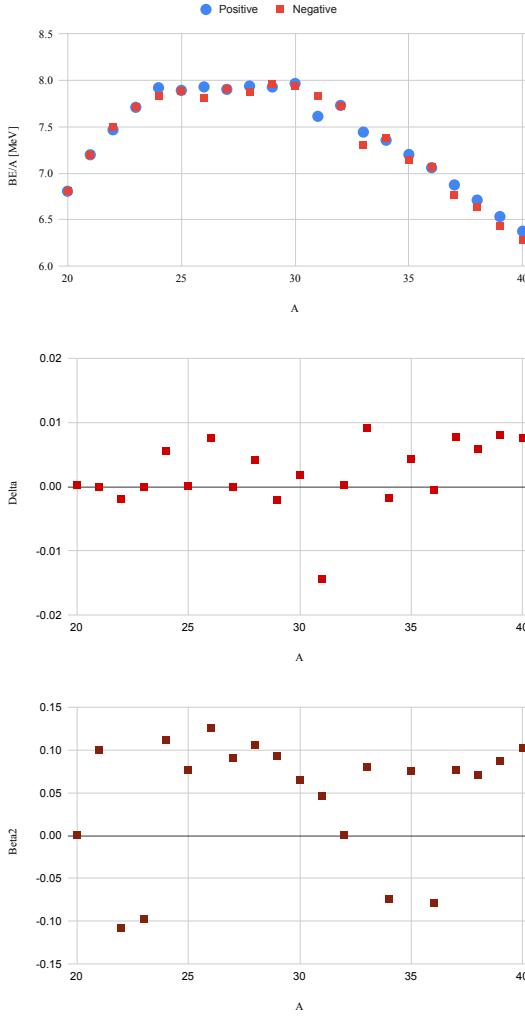


Figura 4.3: Come la figura 4.2 per i risultati ottenuti con l’interazione D1ST2a.

Nel pannello superiore confrontiamo le energie di legame della D1ST2 per la deformazione prolata (punti blu) e oblata (punti rossi). Come per la D1S le energie di legame degli isotopi del Mg con un numero di nucleoni compreso tra 24 – 30 presentano massimi.

Nel pannello centrale rappresentiamo le differenze relative (4.1) tra deformazione oblata e prolata. La maggior parte degli isotopi presenta un  $\Delta$  positivo ad eccezione dei  $^{22,29,3,34}\text{Mg}$ , il  $^{33}\text{Mg}$  invece possiede il valore maggiore. Vediamo quindi la deformazione prolata prevalere nettamente su quella oblata.

Nel pannello inferiore sono presentati i valori di  $\beta_2$  per le soluzioni ottimali. Solo gli isotopi  $^{22,23,34,36}\text{Mg}$  hanno un  $\beta_2$  oblato.

Poniamo inoltre l'attenzione sull'isotopo  $^{24}\text{Mg}$ , esso è il più abbondante in natura, possiede 12 protoni e 12 neutroni ed è stabile. Presenta un comportamento simile in entrambe le rappresentazioni mostrando di avere un  $\Delta$  positivo e un  $\beta_2$  prolato.

Constatiamo un comportamento anomalo per il  $^{31}\text{Mg}$  che presenta un  $\Delta$  negativo e un  $\beta_2$  prolato. Il calcolo parte con una deformazione oblata, ma il processo iterativo trova un minimo per una deformazione prolata, che essenzialmente coincide con quella che abbiamo ottenuto attivando il processo iterativo da una deformazione prolata. Le energie di legame per nucleone delle due soluzioni sono 7.8366 MeV e 7.8378 MeV, e le deformazioni  $\beta_2$  0.04582 e 0.04576. All'interno dell'incertezza numerica è la stessa soluzione.

Una situazione analoga è quella dell'isotopo  $^{23}\text{Mg}$  possiede un  $\beta_2$  oblato e ha un  $\Delta=0$ .

Dall'analisi effettuata emergono alcune differenze tra i calcoli con le due interazioni, non tutti gli isotopi hanno lo stesso comportamento. Se confrontiamo i grafici 4.2 e 4.3 ci sono degli isotopi che presentano un  $\Delta$  negativo per la D1S e un  $\Delta$  positivo per la D1ST2, ad esempio il  $^{26}\text{Mg}$ . Per la D1S il  $^{23}\text{Mg}$  ha un  $\beta_2$  prolato mentre per la D1ST2 oblato, così come per il  $^{36}\text{Mg}$ . Il termine tensoriale ha modificato il comportamento delle deformazioni dei nuclei.

Nella figura 4.4 sono rappresentate le differenze relative delle energie di legame della D1S e della D1ST2 per le soluzioni ottimali.

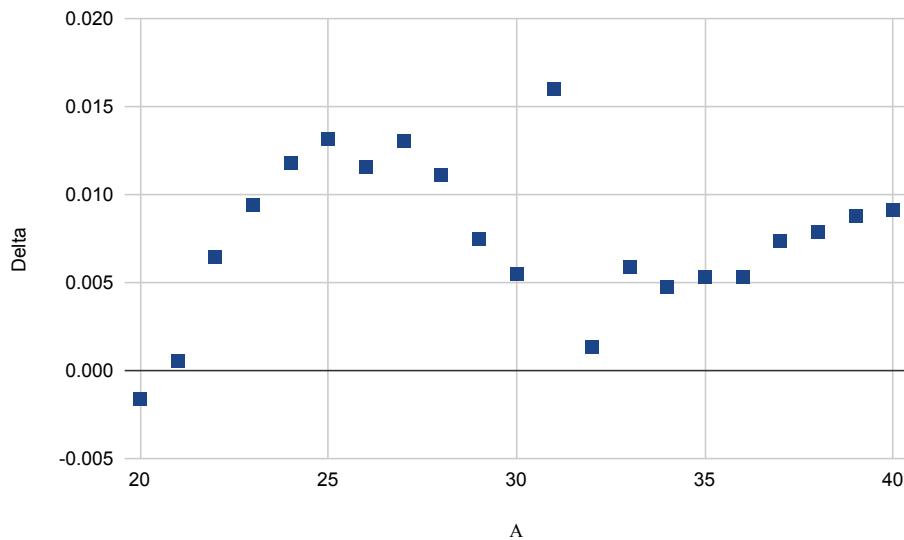


Figura 4.4: Differenze delle energie tra la D1S e la D1ST2 per le soluzioni ottimali.

Le differenze relative sono state calcolate mediante la formula:

$$\Delta = \frac{BE(D1S) - BE(D1ST2)}{BE(D1S) + BE(D1ST2)}. \quad (4.2)$$

Le differenze sono piccole, come emerge dall'andamento del  $\Delta$  le energie di legame della D1S sono relativamente maggiori rispetto a quelle della D1ST2 ad esclusione dell'isotopo  $^{20}\text{Mg}$  in cui troviamo un valore negativo. L'isotopo  $^{31}\text{Mg}$  possiede il  $\Delta$  maggiore, dunque è il nucleo per il quale l'energia di legame calcolata con la D1S si discosta maggiormente da quella calcolata con la D1ST2. Il valor medio del modulo delle differenze è  $0.05 \pm 0.01$ . Come passo successivo del nostro studio, ci occupiamo di analizzare l'andamento dei raggi protonici e neutronici degli isotopi del magnesio presi in esame per entrambe le interazioni. Nella figura 4.5 rappresentiamo il confronto per la D1S tra i raggi protonici e neutronici delle deformazioni prolata (punti blu) e oblata (punti rossi).

Nel pannello in alto confrontiamo i dati della D1S relativi ai raggi protonici per le deformazioni positiva e negativa. I valori tendono a sovrapporsi, per gli isotopi  $^{25,26,27,32,33}\text{Mg}$  si evidenzia un leggero distacco tra le due deformazioni. Per gli isotopi compresi nella fascia 20-30 troviamo dei minimi, a partire dall'isotopo con  $A=31$  i valori crescono. Nel pannello in basso confrontiamo invece i dati della D1S relativi ai raggi neutronici. Per entrambe le deformazioni i valori assumono un andamento crescente e tendono a sovrapporsi. Soltanto gli isotopi  $^{26}\text{Mg}$  e  $^{38}\text{Mg}$  mostrano un minimo distacco per le due deformazioni. Dalla figura 4.5 è evidente, ad esclusione di alcune eccezioni, che rispettivamente i raggi protonici e neutronici assumono valori simili nelle deformazioni positiva e negativa.

Nella figura 4.6 rappresentiamo il confronto per la D1ST2a tra i raggi protonici e neutronici delle deformazioni prolata(punti blu) e oblata(punti rossi).

Nel pannello superiore confrontiamo i raggi protonici delle deformazioni prolata e oblata della D1ST2a. Anche in questo caso, come per la D1S, troviamo per gli isotopi dei minimi nella fascia compresa tra i nuclei con  $A=20$  e  $A=30$ . A partire dall'isotopo  $^{31}\text{Mg}$  i valori crescono. Le differenze tra le due deformazioni si evidenziano leggermente per gli isotopi  $^{22}\text{Mg}$ ,  $^{23}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$  e  $^{33}\text{Mg}$ , per il resto si sovrappongono. Nel pannello inferiore confrontiamo i raggi neutronici della D1ST2a nelle deformazioni prolata e oblata. I valori hanno un andamento crescente e si sovrappongono ad esclusione degli isotopi  $^{31,33,37,38,39}\text{Mg}$ . Anche per la D1ST2a sia in una che nell'altra deformazione i valori dei raggi sono simili. Il valor medio del modulo delle differenze rispettivamente dei raggi protonici e neutronici della D1S è pari a  $0.001 \pm 0.001$  e  $0.002 \pm 0.002$ . Per la D1ST2a il valor medio del modulo delle differenze è  $0.002 \pm 0.001$  per i raggi protonici e  $0.004 \pm 0.005$  per i raggi neutronici.

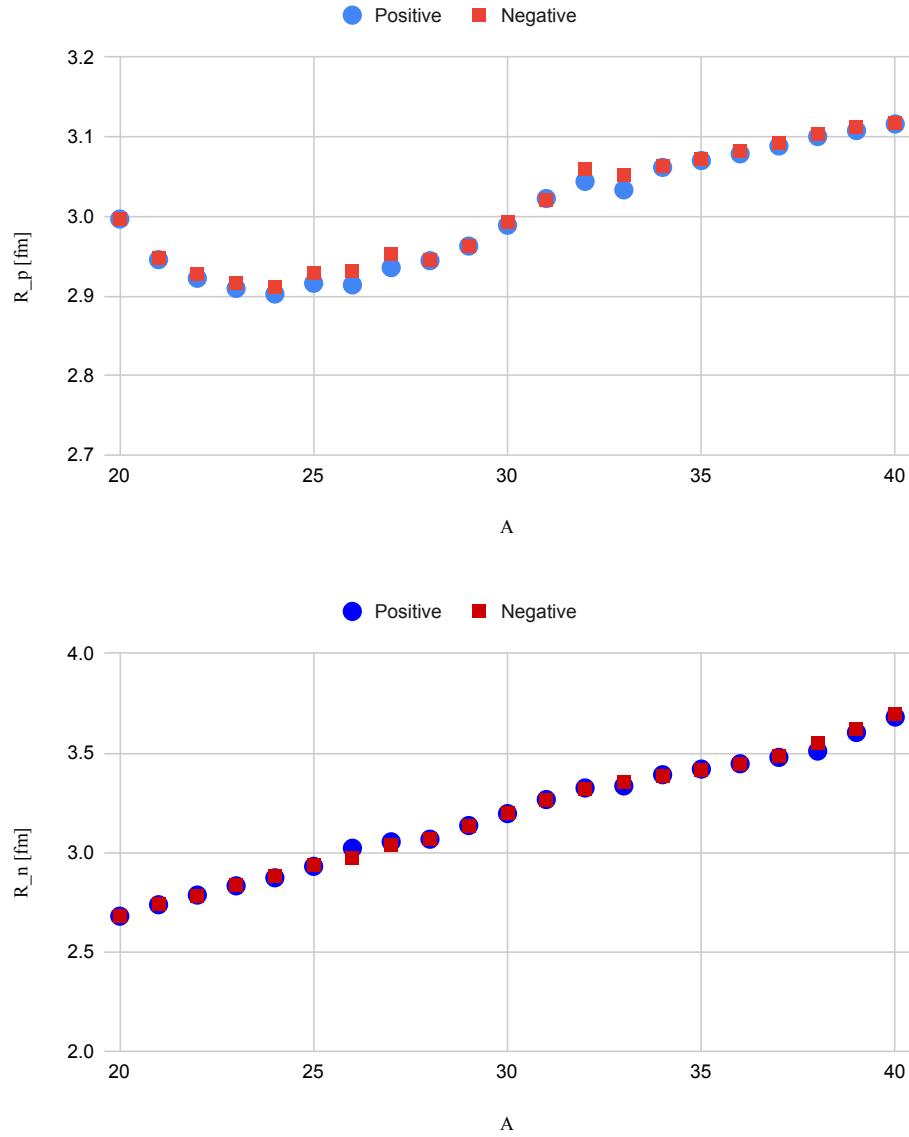


Figura 4.5: Pannello superiore: confronto dei raggi protonici delle deformazioni prolata(punti blue) e oblata(punti rossi) nella D1S. Pannello inferiore: confronto dei raggi neutronici delle deformazioni prolata(punti blue) e oblata (punti rossi) nella D1S.

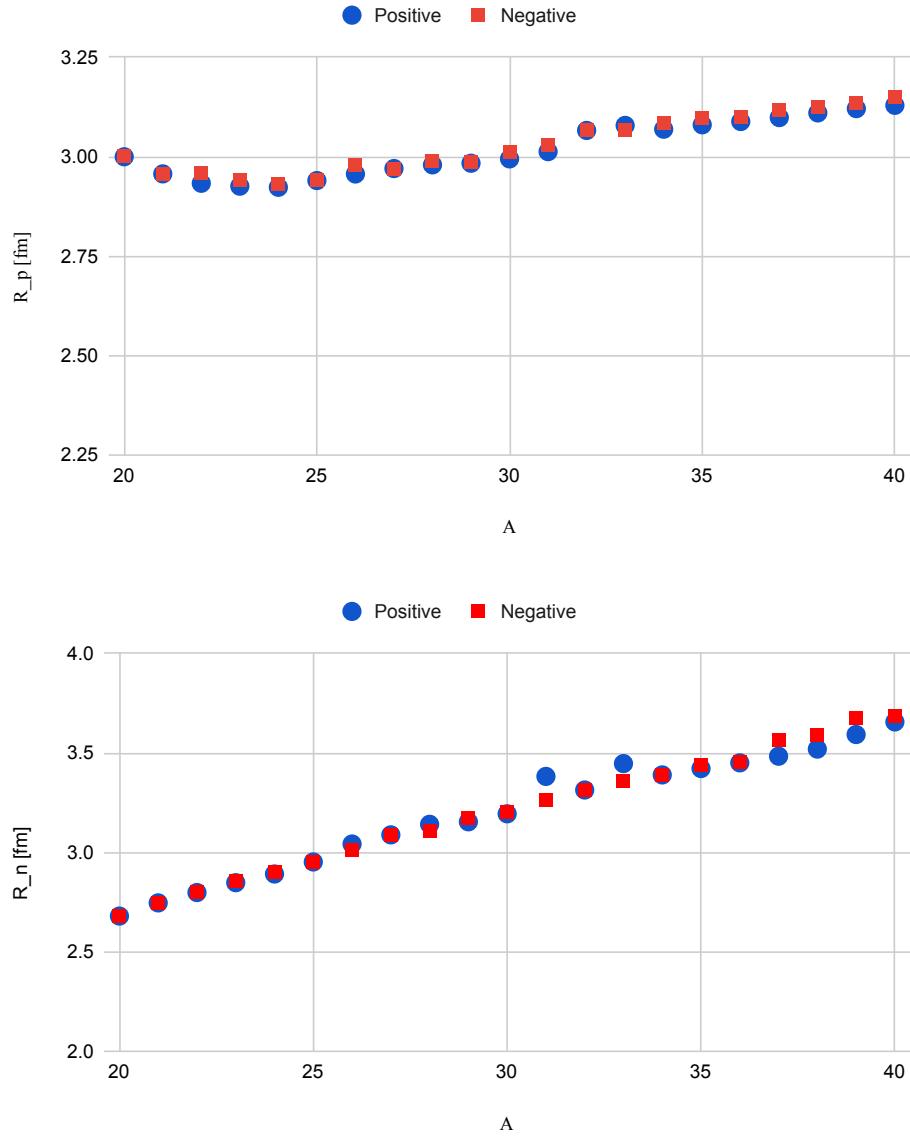


Figura 4.6: Pannello superiore: confronto dei raggi protonici delle deformazioni prolata(punti blu) e oblata(punti rossi) nella D1ST2a. Pannello inferiore: confronto dei raggi neutronici delle deformazioni prolata(punti blu) e oblata (punti rossi) nella D1ST2a.

### 4.3 Pairing

Un altro aspetto interessante da valutare è la rilevanza dell'appaiamento (pairing) che nel nostro calcolo viene valutato risolvendo le equazioni BCS. È importante ricordare che le equazioni BCS sono risolte separatamente per protoni e neutroni. In altre parole non c'è interazione di pairing protone-neutrone.

Per ogni isotopo studiato abbiamo considerato importante il pairing se i valori di  $v^2$  per almeno un livello di singola particella si discostavano di 0.1% rispetto ai valori del calcolo HF, ovvero 1 e 0.

A	D1S	D1ST2
	- +	- +
20	1 1	1 1
21	0 0	1 1
22	0 1	1 1
23	0 0	0 0
24	0 0	0 0
25	1 0	0 0
26	1 0	2 -1
27	1 -1	-1 -1
28	1 1	2 -1
29	1 0	0 0
30	2 0	1 0
31	0 0	0 0
32	1 -1	1 1
33	2 -1	2 -1
34	1 -1	1 1
35	0 0	0 0
36	0 0	1 0
37	0 0	0 0
38	-1 -1	2 -1
39	-1 0	-1 0
40	0 0	2 0

Tabella 4.1: Tabella che indica la presenza di pairing. Il significato dei numeri è il seguente: 0 assenza di pairing, 1 pairing tra i protoni, -1 pairing tra i neutroni, 2 pairing sia tra protoni che tra neutroni.

Nella tabella 4.1 riportiamo i casi in cui compare il pairing per i calcoli effettuati con le interazioni delle D1S e D1ST2a. Il significato dei simboli è il seguente: con 0 abbiamo indicato l'assenza di pairing, con 1 e -1 la presenza del termine di interazione rispettiva-

mente per il protone e il neutrone, infine con 2 la presenza per entrambi i nucleoni. Dalla 4.1 vediamo che ci sono molti casi in cui il pairing non è attivo, come per l'isotopo  $^{31}\text{Mg}$  o il  $^{24}\text{Mg}$ .

Bisognerebbe legare questi risultati alla struttura a strati di ogni isotopi discussa nel paragrafo 4.1. La situazione è piuttosto complicata e, al momento, non sembra ci siano andamenti regolari, ma il tutto è piuttosto casuale.

## 4.4 Confronto con i risultati di Bruyère le Châtel

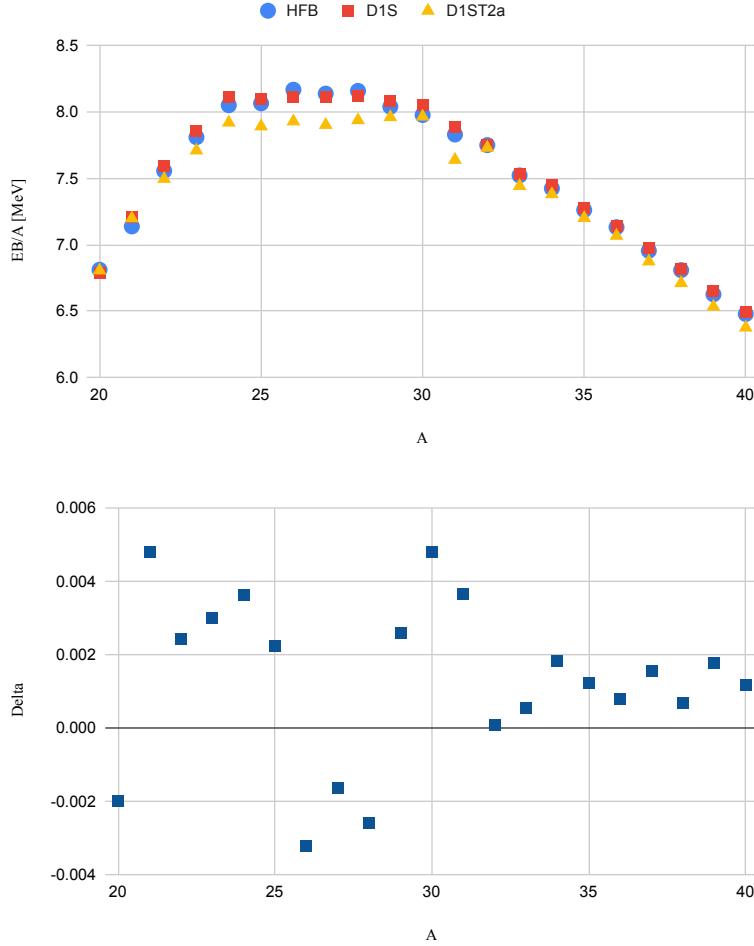


Figura 4.7: Pannello superiore: confronto tra le energie di legame calcolate con HFB (punti blu), e le soluzioni ottimali ottenute con la D1S (punti rossi) e la D1ST2a (punti gialli). Pannello inferiore: differenze relative  $\Delta$ , Eq. (4.3), tra le energie della D1S e di HFB.

I calcoli di Bruyère le Châtel [CEA] descrivono una fisica analoga a quella descritta da noi ma con un approccio leggermente differente, ossia Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB). In questo modo di affrontare il problema non c'è una separazione tra il calcolo delle funzioni d'onda (HF) e l'occupazione dei singoli stati (BCS) ma tutto è fatto coerentemente risolvendo un sistema di equazioni integro-differenziali accoppiate. Il confronto tra i nostri risultati e quelli ottenuti con HFB serve per validare il nostro modello. I calcoli HFB sono

stati fatti usando l'interazione D1S, quindi il confronto significativo è con le soluzioni ottimali che otteniamo con questa forza. Inseriamo anche i risultati delle soluzioni ottimali ottenute con la D1ST2a per valutare il ruolo del tensore.

Nella figura 4.7 sono presentate le energie di legame ricavate con HFB (punti blu), e quelle delle soluzioni ottimali ottenute con la D1S (punti rossi) e la D1ST2a (punti gialli). Nel pannello superiore confrontiamo le energie di legame dei rispettivi modelli. Anche per HFB le energie hanno dei massimi per gli isotopi che vanno dal 24 al 30, mentre per i restanti abbiamo valori decrescenti. In corrispondenza degli isotopi compresi nella fascia 23-31 le energie di legame associate rispettivamente ai diversi modelli tendono a discostarsi maggiormente tra di loro, intorno ai valori più bassi invece le differenze si attenuano e i dati tendono a sovrapporsi. Per gli isotopi  $^{26}\text{Mg}$ ,  $^{27}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Mg}$  l'energia di legame di HFB è quella più alta, diversamente dall'isotopo  $^{20}\text{Mg}$  in cui è la più bassa. Nella regione dei massimi le energie di legame della D1ST2a rappresentano i valori più piccoli. In particolare per l'isotopo  $^{31}\text{Mg}$  è evidente la differenza tra l'energia associata alla D1ST2a e le altre.

Nel pannello inferiore sono mostrate le differenze relative  $\Delta$  ottenute applicando la formula:

$$\Delta = \frac{BE(\text{D1S}) - BE(\text{HFB})}{BE(\text{D1S}) + BE(\text{HFB})}. \quad (4.3)$$

Dalla figura 4.7 si vede come queste differenze siano molto piccole. Il valor medio del modulo delle differenze è  $0.002 \pm 0.001$ , se confrontato con quello relativo alle differenze della D1ST2a notiamo come quest'ultimo sia molto più grande. La maggioranza degli isotopi presenta un  $\Delta$  positivo. Gli isotopi  $^{20}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$ ,  $^{27}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Mg}$  presentano un  $\Delta$  negativo, in questi casi dunque le energie HFB sono più grandi di quelle ottenute da noi. Notiamo che il  $^{21}\text{Mg}$  e il  $^{30}\text{Mg}$  hanno lo stesso  $\Delta$ , questo si verifica anche per la coppia di isotopi  $^{24}\text{Mg}$  e  $^{31}\text{Mg}$ .

La base di dati di Bruyère le Châtel [CEA] fornisce i valori dei raggi delle distribuzioni di protoni e neutroni per gli isotopi pari-pari. Nella figura 4.8 confrontiamo i valori di questi raggi con quelli relativi alle soluzioni ottimali della D1S. Nel pannello superiore confrontiamo i raggi protonici della HFB (punti blu) con quelli relativi alle soluzioni ottimali della D1S (punti rossi). Esclusi gli isotopi  $^{20}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Mg}$ ,  $^{30}\text{Mg}$ ,  $^{32}\text{Mg}$  in cui i valori si sovrappongono, per il resto i dati si differenziano. Per questi isotopi i raggi protonici della HFB risultano maggiori rispetto a quelli calcolati con la D1S.

Nel pannello inferiore confrontiamo i raggi neutronici della HFB (punti blu) con quelli delle soluzioni ottimali della D1S (punti rossi). Anche in questo caso i valori per i due modelli si discostano tra loro, i raggi della HFB risultano ancora una volta quelli più alti. Fanno eccezione gli isotopi  $^{20}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Mg}$ ,  $^{30}\text{Mg}$  in cui i risultati si sovrappongono. La media del modulo delle differenze dei raggi protonici è  $0.02 \pm 0.01$ , quella relativa ai raggi neutronici è  $0.01 \pm 0.01$ .

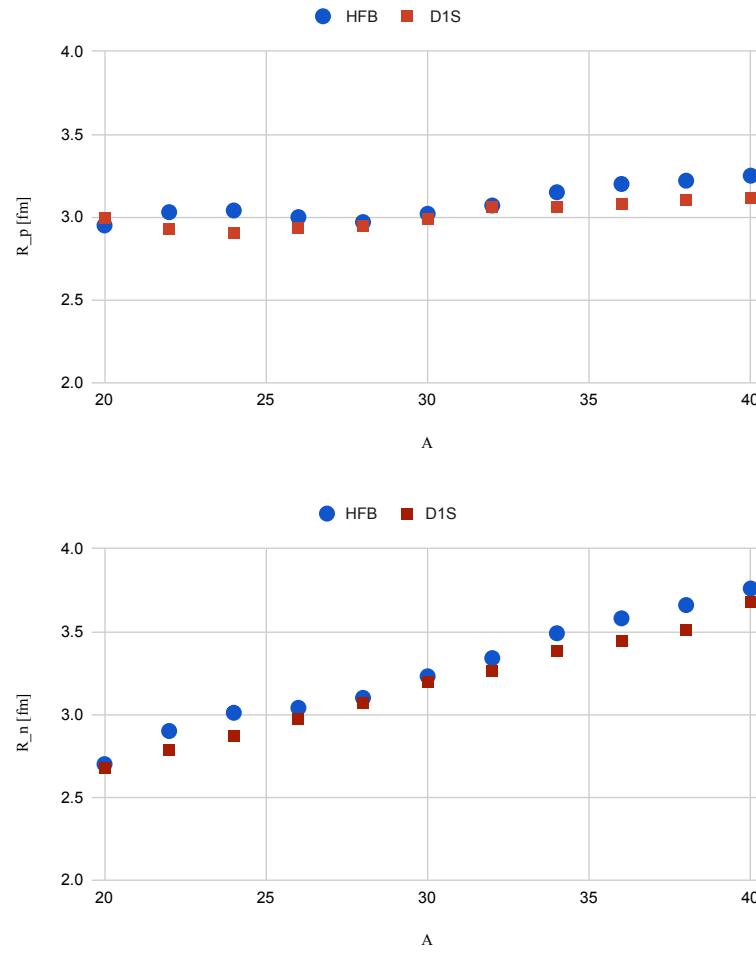


Figura 4.8: Pannello superiore: confronto dei raggi protonici calcolati con HFB (punti blu) e la D1S (punti rossi). Pannello inferiore: confronto dei raggi neutronici calcolati con HFB (punti blu) e la D1S (punti rossi).

## 4.5 Confronto con i dati sperimentali

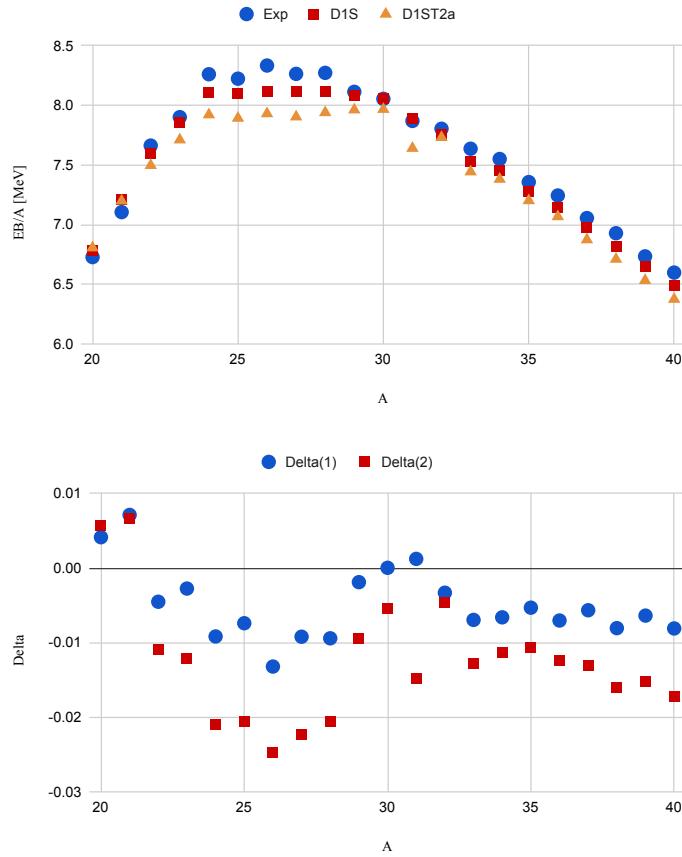


Figura 4.9: Pannello superiore: confronto tra le energie di legame sperimentali (punti blu), e quelle ottenute per le soluzioni ottimali con la D1S (punti rossi) e la D1ST2a (punti gialli). Pannello inferiore: differenze relative tra le energie della D1S e della D1ST2a con i dati sperimentali, punti blu e rossi rispettivamente.

In questo paragrafo confrontiamo i risultati dei nostri calcoli con i dati sperimentali. La figura 4.9 mostra il confronto tra le energie sperimentali, le energie della D1S e della D1ST2a. Nel pannello in alto presentiamo i valori delle energie di legame sperimentali (punti blu), e quelle delle soluzioni ottimali della D1S (punti rossi) e della D1ST2a (punti gialli). L'andamento dei dati sperimentali, in accordo con i casi studiati in precedenza, mostra la presenza di massimi per i nuclei compresi nella fascia 24-30 e per i restanti un andamento decrescente. Le energie si discostano maggiormente tra di loro nella zona dei massimi e per gli isotopi  $^{31}\text{Mg}$  e  $^{24}\text{Mg}$ .

In generale, le energie sperimentali sono maggiori di quelle ottenute dai nostri calcoli. Fanno eccezione gli isotopi  $^{20}\text{Mg}$ ,  $^{21}\text{Mg}$ . Nel pannello in basso mostriamo le differenze relative tra le energie ottimali e quelle sperimentali. Nello specifico i punti blu indicano le differenze tra D1S ed energie sperimentali, e i punti rossi tra D1ST2a e dati sperimentali.

Le differenze relative rappresentate nella figura 4.9 sono molto piccole, inferiori allo 0.3%. Il valor medio del modulo delle differenze tra la D1S e le energie sperimentali è  $0.006 \pm 0.003$ , quello relativo ai moduli delle differenze tra la D1ST2a e le energie sperimentali è  $0.01 \pm 0.01$ .

I dati sperimentali riguardanti le dimensioni nucleari sono ottenuti considerando esperimenti di diffusione elastica tra elettroni e nuclei. Il confronto tra esperimento e teoria deve essere fatto confrontando distribuzioni di carica. Dal punto di vista teorico, queste ultime sono ottenute facendo una convoluzione delle distribuzioni di protoni che sono calcolate considerandoli puntiformi con il fattore di forma elettrico del protone. Ottenute le distribuzioni di carica si calcolano i raggi quadratici medi di carica e si confrontano con i valori sperimentali [Ang13].

Dal punto di vista pragmatico, si è verificato che è possibile legare raggi di distribuzioni di neutroni puntiformi con quelli di carica usando una semplice relazione

$$\langle r_{ch}^2 \rangle = \langle r_{pp}^2 \rangle + R_p^2 + \frac{N}{Z} R_n^2 + \frac{3\hbar^2}{4m_p^2 c^2} \quad (4.4)$$

dove  $\langle r_{ch}^2 \rangle$  e  $\langle r_{pp}^2 \rangle$  sono, rispettivamente, i raggi delle distribuzioni di carica puntiformi,  $R_p = 0.8775$  fm è il raggio di carica del protone e  $R_n^2 = -0.1149$  fm<sup>2</sup> il quadrato del raggio di carica del neutrone,  $m_p$  la massa del protone. I soli dati empirici sui raggi di carica sono relativi agli isotopi  $^{24,25,26}\text{Mg}$  [Ang13] i cui valori sono, rispettivamente 3.06, 3.03, 3.03 fm. Utilizzando la (4.4) abbiamo ottenuto i valori di  $\sqrt{\langle r_{pp}^2 \rangle}$  che confrontiamo con i risultai ottenuti con le interazioni D1S e D1ST2a nella tabella 4.2.

A	exp.	D1S	D1ST2a
24	2.94	2.87	2.89
25	2.91	2.93	2.95
26	2.92	2.97	3.04

Tabella 4.2: Raggi di protoni, in fm, sperimentalni confrontati con quelli ottenuti usando le interazioni D1S e D1ST2a.

Nei nostri calcoli il valore del raggio di carica aumenta aumentando  $A$ . Ricordiamo che cambia solo il numero di neutroni, quindi, nel nostro modello, questo incremento è dovuto all'interazione tra protoni e neutroni. Questo non è quello che è osservato sperimentalmente, poiché il valore del raggio di carica del  $^{24}\text{Mg}$  è maggiore di quello degli altri due isotopi. I raggi ottenuti con la D1ST2a sono leggermente maggiori di quelli ottenuti con la D1S.

Sperimentalmente sono note le distribuzioni di carica dei tre isotopi che abbiamo considerato sopra [Vri87]. Il confronto tra le distribuzioni di carica sperimentali e quelle ottenute nei nostri calcoli, facendo la convoluzione delle distribuzioni di protoni con il fattore di forma elettromagnetico del protone, è presentato nelle figure 4.10, 4.11 e 4.12. In queste figure le distribuzioni sperimentali sono presentate dalle linee blu, quelle ottenute con la D1S dalle linee rosse e quelle ottenute con la D1ST2a dalle linee gialle.

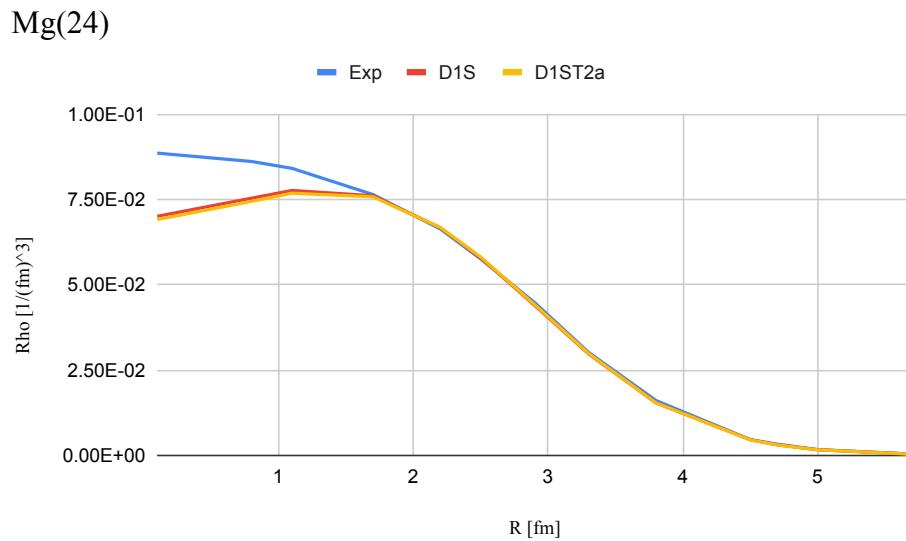


Figura 4.10: Confronto tra la distribuzione di carica sperimentale (linea blu) e quelle ottenute dalle soluzioni ottimali con le interazioni D1S (linea rossa) e D1ST2a (linea gialla), per l'isotopo  $^{24}\text{Mg}$ .

Sulla parte superficiale c'è un buon accordo sebbene le curve si differenzino al centro. La parte superficiale è quella importante per la definizione dei raggi, ecco perché i raggi sperimentali sono ben riprodotti. Nella regione centrale le distribuzioni di carica sperimentali sono più elevate di quelle relative alla D1S e D1ST2a che sono sovrapposte tra loro ad eccezione dell'isotopo  $^{26}\text{Mg}$  in cui sono distanziate.

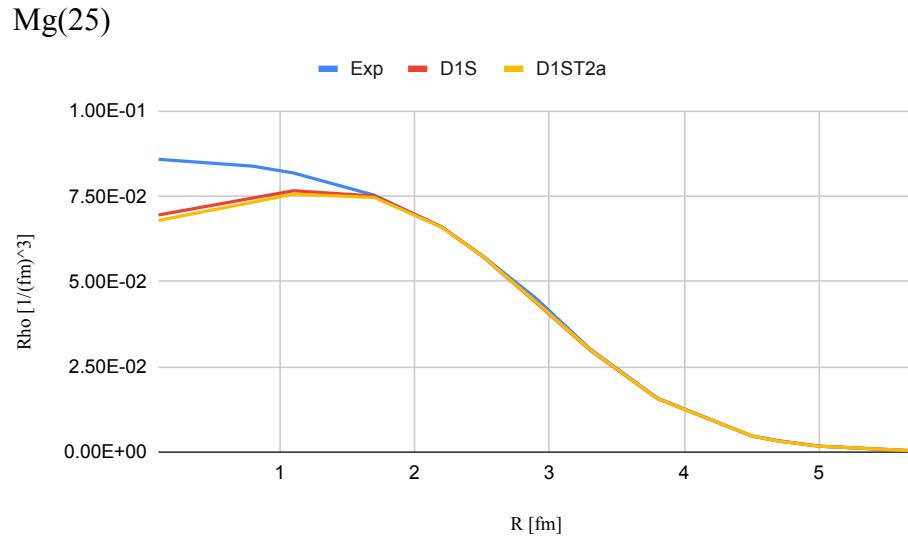


Figura 4.11: Come la figura 4.11 per l'isotopo  $^{25}\text{Mg}$ .

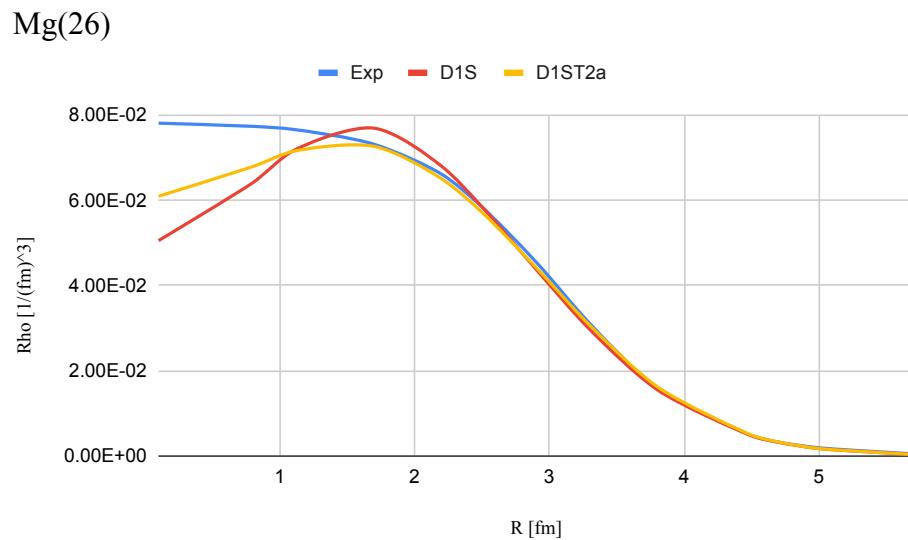


Figura 4.12: Come la figura 4.11 per l'isotopo  $^{26}\text{Mg}$ .

# Capitolo 5

## Conclusioni

Nella nostra trattazione abbiamo usato il modello HF+BCS, avvalendoci di interazioni a raggio finito. Le funzioni d'onda di singola particella sono caratterizzate dalla proiezione del momento angolare sull'asse  $z$  di quantizzazione e dalla invarianza temporale della parte radiale della funzione d'onda che permette di non considerare il segno della proiezione  $m$ .

Tramite i calcoli di HF otteniamo le funzioni d'onda radiali, e risolvendo le equazioni BCS il valore di occupazione di ogni stato di singola particella. La deformazione è ottenuta perché per un  $j$  fissato non tutti gli stati con differente  $m$  sono occupati.

Al nucleone dispari è associato uno stato specifico con occupazione completa e il livello sul quale viene posizionato caratterizza l'input del calcolo.

I nostri calcoli sono risolti applicando un metodo iterativo. In generale, il nostro metodo trova minimi per la deformazione oblata(negativa) e prolata(positiva).

I calcoli sono effettuati usando due interazioni, la D1S e la D1ST2a dove inseriamo un termine tensoriale. Le differenze nelle energie di legame per oblato e prolato sono molto piccole sia per la D1S che per la D1ST2a, infatti sono inferiori al 1%, tranne un caso in D1ST2a che arriva al 2%.

I calcoli sono stati effettuati considerando le soluzioni ottimali ossia le soluzioni per le quali l'energia di legame è massima. La particella spaiata viene posizionata su livelli diversi per poi selezionare quello contraddistinto dall'energia massima.

Abbiamo poi confrontato i nostri dati con i risultati di Bruyères le Châtel che conferma la validità del modello anche se più semplice di HFB, dove il problema viene risolto grazie a equazioni integro-differenziali accoppiate. Abbiamo trovato un valor medio del modulo delle differenze delle energie di legame inferiore rispetto a quello trovato per la D1ST2a.

L'analisi delle deformazioni dei  $\beta_2$  ha rilevato la prevalenza per la maggior parte degli isotopi della deformazione prolata su quella oblata. Abbiamo riscontrati valori relativamente piccoli, basti osservare ad esempio figure 4.2 e ???. Per la D1S e la D1ST2a abbiamo trovato isotopi che presentano valori massimi di  $\beta_2$  compresi nell'intervallo [0.10 - 0.15], tali isotopi risultano comunque poco deformati in quanto si considera fortemente deformato un nucleo con  $\beta_2$  pari a 0.4.

Dai dati relativi alla D1S e D1ST2a emerge che le soluzioni con e senza il tensore sono molto simili, solo per pochi nuclei si hanno soluzioni ottimali con deformazioni differenti.

Nel confronto con i dati sperimentali le soluzioni con D1S sono migliori di quelle con D1ST2a. Questo indica che è necessaria una nuova procedura per modificare i valori di tutti i parametri della forza quando si inserisce il tensore.

Inoltre, abbiamo osservato per alcuni isotopi la presenza del pairing che modifica la probabilità di occupazione e che nel nostro caso indica una situazione complicata con andamenti che non sembrano regolari.

# Bibliografia

- [Ang00] M. Anguiano Millán, *Restauración de simetría del numero de partículas en teorías de campo medio con la fuerza de Gogny*, Universidad Autonoma de Madrid (Spain), (2000), non pubblicata.
- [Ang12] M. Anguiano, M. Grasso, G. Co', V. De Donno, and A. M. Lallena, Phys. Rev. C 86, 054302 (2012).
- [Ang13] I. Angel, K. P. Marinova, Atomic Data and Nuclear Data Tables 99, 69 (2013).
- [Ber91] J. F. Berger, M. Girod, D. Gogny, Comput. Phys. Commun. 63, 365 (1991).
- [BNL] Libreria di dati di Brookhaven,  
<https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/>
- [CEA] S. Hilaire and M. Girod, *Hartree-Fock-Bogoliubov results based on the Gogny force. AMEDEE database.*  
[http://www-phynu.cea.fr/HFB-Gogny\\_eng.htm](http://www-phynu.cea.fr/HFB-Gogny_eng.htm)
- [Co20] G. Co', *Molti corpi in Meccanica Quantistica, note delle lezioni A. A. 2020-2021*, non pubblicato,  
<http://www.dmf.unisalento.it/~gpc0/FISMAT/many2021.pdf>
- [Co21] G. Co', M. Anguiano, A. M. Lallena, Phys. Rev. C 104, 014313 (2021).
- [Dec80] J. Dechargè, D. Gogny, Phys. Rev. C 21, 1568 (1980).
- [Don08] V. De Donno, *Nuclear excited states within the Random Phase Approximation theory*, Tesi di Dottorato, Lecce , (2008), non pubblicata,  
[http://www.dmf.unisalento.it/~gpc0/PhD\\_DeDonno.pdf](http://www.dmf.unisalento.it/~gpc0/PhD_DeDonno.pdf)
- [Dug01] T. Duguet, P. Bonche, P.-H. Heenen, J. Meyer, Phys. Rev. C 65, 014310 (2001).
- [Eis76] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Microscopic theory of the nucleus*, North Holland, Amsterdam (1976).
- [Gua82a] R. Guardiola, J. Ros, J. Comput. Phys. 45, 374 (1982).

- [Gua82b] R. Guardiola, H. Schneider, J. Ros, An. Fis. 78, 154 (1982).
- [Mar09] E. Marra, *Interazione di appaiamento di rango finito in nuclei semi-magici*, Università del Salento, (2009),  
<http://www.fisica.unisalento.it/~gpc0/stud.html>
- [Rin80] P. Ring, P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer, Berlino (1980).
- [Suh07] J. Suhonen, *From nucleons to nucleus*, Springer, Berlino (2007).
- [Vri87] H. De Vries, C. W. De Jager, C. De Vries, Atomic Data and Nuclear Data Tables 36, 495 (1987).