Università degli Studi di Lecce

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Effetti di distorsione coulombiana in diffusione leptonica da nuclei

Relatori:

Chiar.mo Prof. Raimondo ANNI

Chiar.mo Prof. Giampaolo CO'

Laureanda:

Viviana DE DONNO

ANNO ACCADEMICO 2002-2003

Al caro Professore Anni

"Quanto l'uomo con i suoi sforzi appassionati riesce a strappare alla verità è una parte minima. Ma quegli sforzi ci liberano dalle catene dell'io e ci rendono compagni degli uomini migliori e più grandi."

(A.Einstein)

Ringraziamenti

Ringrazio sentitamente il Chiar.mo Prof. Giampaolo Co' per la sua grande disponibilità, per la sua costante presenza in tutto il periodo di preparazione, stesura e revisione del mio lavoro e per avermi attentamente seguita e criticamente stimolata nella crescita scientifica.
Infine, con profondo affetto, ringrazio la mia famiglia e Antonio per il sostegno e l'amore che hanno saputo darmi.

Introduzione

La corretta descrizione del moto di un leptone nel campo coulombiano del nucleo è una problematica rilevante in fisica nucleare.

Elettroni, soprattutto, ma anche muoni, sono stati utilizzati per lo studio della struttura del nucleo, e vengono utilizzati tutt'ora. Le sonde elettromagnetiche presentano alcuni vantaggi rispetto a quelle adroniche: l'interazione elettromagnetica è nota con grande precisione, inoltre la costante di accoppiamento è piccola e permette quindi di descrivere con grande accuratezza i fenomeni elettromagnetici con metodi perturbativi, infine le sonde elettromagnetiche non disturbano fortemente gli stati nucleari in quanto l'interazione elettromagnetica è notevolmente più debole dell'interazione nucleare. Le energie degli elettroni utilizzati per questi scopi sono superiori al centinaio di MeV. Ci si trova quindi in regime ultrarelativistico, per questo motivo la massa a riposo dell'elettrone viene normalmente trascurata. Nei moderni centri sperimentali si utilizzano elettroni di alcuni GeV e rivelatori con capacità risolutiva di pochi keV. L'enorme capacità risolutiva in energia di questi apparati fornisce dati estremamente precisi che pongono severe restrizioni ai modelli teorici utilizzati per interpretarli. É necessario quindi controllare al meglio il meccanismo di reazione tra elettrone e nucleo, in modo da estrarre informazioni sempre più accurate sulla struttura del nucleo.

Un altro campo di interesse per l'interazione tra elettrone e nucleo riguarda i decadimenti β. In questo caso le energie degli elettroni emessi sono dell'ordine di pochi MeV. Il moto è sempre di tipo relativistico, ma ci troviamo in un regime energetico differente. In questo caso la massa a riposo dell'elettrone non può essere trascurata.

Infine un campo di interesse più recente è legato alla fisica del neutrino. Molti dei rivelatori di neutrini si basano sull'interazione tra neutrini e nuclei. In alcune di queste reazioni il neutrino viene assorbito dal nucleo con la conseguente emissione di un leptone carico. La conoscenza della sezione d'urto tra neutrino e nucleo deve essere il più possibile precisa per poter ricostruire i flussi di neutrini. É evidente quindi la necessità di trattare correttamente il moto del leptone uscente. In questo campo le energie dei leptoni uscenti dipendono dalle energie dei neutrini incidenti. Ad esempio le energie di neutrini provenienti dal sole sono di pochi MeV, quelli provenienti dalle supernovae sono concentrati tra i $10MeV$ e $30MeV$, quelli atmosferici hanno energie più alte, dell'ordine di vari GeV.

La trattazione corretta del problema consiste nel risolvere l'equazione di Dirac per il leptone considerato che si muove nel campo generato dalla distribuzione di carica del nucleo. La soluzione di questo problema non è semplice, ma sopratutto è molto complicato implementarla nel calcolo delle sezioni d'urto. É molto più semplice considerare la funzione d'onda del leptone come fosse un'onda piana. Per questo motivo in letteratura sono stati sviluppati dei metodi semi-empirici che permettono di utilizzare le onde piane nel calcolo degli osservabili, ma inseriscono correzioni per considerare la presenza del campo coulombiano del nucleo.

Dato che non esistono soluzioni analitiche dell'equazione di Dirac per il moto in un campo centrale prodotto da una distribuzione di carica, abbiamo costruito un codice che produce numericamente queste soluzioni. La costruzione di questo codice è la parte più rilevante del lavoro di tesi. La necessità di avere soluzioni valide per i diversi regimi energetici ci ha imposto di considerare la massa del leptone diffuso. Questa è una novità rispetto a quanto si può trovare in letteratura.

Le soluzioni così ottenute sono poi usate per valutare la validità di alcuni dei trattamenti semi-empirici delle correzioni coulombiane. Le varie approssimazioni sono state ottenute per descrivere il moto di leptoni per specifici fenomeni e quindi il loro regime di validità può essere limitato.

Capitolo 1

Equazione di Dirac e funzioni d'onda

Alla base della nostra discussione sui processi di diffusione leptonica da nuclei vi è la teoria quantistica relativistica. Nei paragrafi seguenti esporremo sinteticamente tale teoria per una particella libera e tratteremo il caso di una particella soggetta ad un potenziale coulombiano ricavando le funzioni d'onda che ne descrivono il moto.

In tale trattazione utilizzeremo le unità naturali $\hbar = c = 1$.

1.1 Gli stati fermionici

La funzione d'onda $\psi(\boldsymbol{r})$ che descrive il moto di una particella di spin $1/2$ soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$, soddisfa l'equazione di Dirac:

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m + V(r))\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.1}$$

dove m, $\boldsymbol{p}$ ed E sono rispettivamente la massa a riposo, il momento e l'energia della particella. L'operatore $\boldsymbol{\alpha}$ è composto da tre matrici α_i. Le matrici α_i e β sono hermitiane e soddisfano le seguenti proprietà di anticommutazione:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2I\delta_{ij} \\ \alpha_i\beta &= 0 \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = I \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove I è la matrice identità 4×4.

Nella nostra trattazione useremo la rappresentazione di Dirac-Pauli delle matrici α_i e β:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

dove I è la matrice identità 2×2 e σ_i sono le matrici di spin di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

1.2 Funzioni d'onda per la particella libera

In assenza di potenziale, le soluzioni dell'equazione (1.1) sono autostati del momento del tipo:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{p}) \exp(i\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{1.6}$$

dove $u(\boldsymbol{p})$ è una funzione spinoriale di quattro componenti indipendente da $\boldsymbol{r}$.

Le soluzioni indipendenti $u(\boldsymbol{p})$, per un arbitrario $\boldsymbol{p}$, sono quattro e sono date in forma esplicita dalle seguenti espressioni:

$$u^s = N \begin{pmatrix} \chi^s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E+m} \chi^s \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$u^{s+2} = N \begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{|E|+m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

avendo indicato con N la costante di normalizzazione, con $\boldsymbol{\sigma}$ l'operatore di spin a tre componenti σ_1, σ_2, σ_3 e con χ^s $(s = 1,\ 2)$ lo spinore a due componenti di Pauli:

$$\chi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$\chi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Gli spinori $u^{1,2}$ corrispondono a funzioni d'onda che descrivono stati di particelle di energia positiva, mentre gli spinori $u^{3,4}$ a funzioni d'onda che descrivono stati di energia negativa che nell'interpretazione di Feymann rappresentano stati di antiparticelle.

Il valore della costante N è fissato per definire la normalizzazione covariante ($2E$ particelle per unità di volume):

$$\begin{aligned}
(u^s)^\dagger u^s &= 2E \\
(u^{s+2})^\dagger u^{s+2} &= -2E \\
(u^r)^\dagger u^s &= 2E\delta_{rs}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

tale valore risulta:

$$N = \sqrt{E+m} \tag{1.12}$$

É possibile sviluppare in multipoli le soluzioni (1.6):

$$e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(pr) Y^*_{l,m}(\widehat{p}) Y_{l,m}(\widehat{r}) \tag{1.13}$$

dove $\widehat{p} \equiv (\theta_1, \phi_1)$ e $\widehat{r} \equiv (\theta_2, \phi_2)$, avendo indicato con le coppie θ_1, ϕ_1 e θ_2, ϕ_2 gli angoli individuati, nella solita definizione di coordinate polari sferiche, rispettivamente dai vettori $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{r}$.

Scegliendo l'asse di quantizzazione $\widehat{z}$ lungo la direzione di $\boldsymbol{p}$, l'espressione (1.13) si semplifica come segue:

$$e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(pr) Y_{l,m}(\widehat{r}) \delta_{m,0} \tag{1.14}$$

Definiamo a questo punto l'armonica sferica di spin:

$$Y^{\mu}_{l,j}(\widehat{r}) = \sum_{m,s} \langle l \; m \; \frac{1}{2} \; s \mid j \; \mu \rangle Y_{l,m}(\widehat{r}) \chi^s \tag{1.15}$$

dove $\langle l \; m \; \frac{1}{2} \; s \mid j \; \mu \rangle$ sono i coefficienti di Clebsh-Gordan. Usiamo la notazione compatta $Y^{\mu}_{l,j} = \Phi^{\mu}_{k}$, avendo definito k l'autovalore dell'operatore $-(1 + \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\sigma})$

relativo all'autofunzione $Y^{\mu}_{l,j}(\widehat{r})$ che assume l'espressione:

$$k = \begin{cases} -(l+1) & \text{per } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{per } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.16}$$

Per cui possiamo scrivere:

$$(1 + \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Phi^{\mu}_{k}(\widehat{r}) = -k\Phi^{\mu}_{k}(\widehat{r}) \tag{1.17}$$

L'autovalore k identifica sia j sia l, quest'ultimo, sebbene non sia una costante del moto, caratterizza la parità delle armoniche sferiche di spin.

Sfruttando la (1.14) e le relazioni di ortogonalità e completezza dei coefficienti di Clebsh-Gordan si ha dalla (1.15):

$$Y_{l,0}(\widehat{r})\chi^{s} = \sum_{j=l\pm\frac{1}{2}} \langle l \ 0 \ \frac{1}{2} \ s \mid j \ s\rangle \Phi^{s}_{k}(\widehat{r}) \tag{1.18}$$

Lo sviluppo in onde parziali dell'onda piana può essere scritto come:

$$e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\chi^{s} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^{l} j_{l}(pr) \sum_{j=l\pm\frac{1}{2}} \langle l \ 0 \ \frac{1}{2} \ s \mid j \ s\rangle \Phi^{s}_{k}(\widehat{r}) \tag{1.19}$$

Possiamo così riscrivere la funzione d'onda (1.6) nel modo che segue:

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=l\pm\frac{1}{2}} A j_{l}(pr)\Phi^{s}_{k}(\widehat{r}) \tag{1.20}$$

dove:

$$A = \sqrt{E+m}\sqrt{4\pi(2l+1)}\langle l \ 0 \ \frac{1}{2} \ s \mid j \ s\rangle i^{l} \tag{1.21}$$

1.3 Equazione di Dirac in potenziale centrale

Nel caso di potenziale centrale l'operatore hamiltoniano

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m + V(r) \tag{1.22}$$

commuta con $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ dove:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

quindi le soluzioni dell'equazione di Dirac (1.1) sono contemporaneamente autofunzioni degli operatori H, J^2, J_z. Per potenziali a simmetria sferica la dipendenza angolare della funzione d'onda è identica a quella della soluzione libera e soltanto la parte radiale viene modificata dal potenziale. La parte angolare della funzione d'onda è data dalle armoniche sferiche di spin definite nella (1.15). Quindi lo spinore a quattro componenti ψ può essere rappresentato in termini di una componente superiore e una inferiore, nella seguente forma:

$$\psi_k^\mu(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} g_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \\ if_k(r)\Phi_{-k}^\mu(\widehat{r}) \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

La (1.24) è un autostato di J^2, J_z, e $\boldsymbol{\sigma^2}$ perchè le armoniche sferiche di spin ne sono autostati. Richiediamo che la (1.24) sia autostato anche dell'operatore hamiltoniano, in questo modo otteniamo un sistema di due equazioni differenziali accoppiate per $g_k(r)$ e $f_k(r)$ (vedi Appendice A):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr} g_k(r) = -\dfrac{k+1}{r} g_k(r) + (E+m-V(r)) f_k(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr} f_k(r) = \dfrac{k-1}{r} f_k(r) - (E-m-V(r)) g_k(r) \end{cases} \tag{1.25}$$

1.4 Diffusione da carica puntiforme

Per risolvere il sistema di equazioni (1.25) nel caso di un potenziale elettromagnetico generato da una carica puntiforme, dapprima poniamo:

$$g_k(r) = \frac{u_1(r)}{r} \qquad f_k(r) = \frac{u_2(r)}{r} \tag{1.26}$$

per cui il sistema assume l'espressione:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr} u_1(r) = -\dfrac{k}{r} u_1(r) + (E+m-V(r)) u_2(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr} u_2(r) = \dfrac{k}{r} u_2(r) - (E-m-V(r)) u_1(r) \end{cases} \tag{1.27}$$

dove $V(r) = -Z\alpha/r$ avendo denotato con α la costante di struttura fine.

Definiamo le funzioni $\Phi_1(r)$ e $\Phi_2(r)$ come:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \sqrt{E+m}\,(\Phi_1(r) + \Phi_2(r)) \\ u_2(r) &= i\sqrt{E-m}\,(\Phi_1(r) - \Phi_2(r)) \end{aligned} \tag{1.28}$$

e indichiamo:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2} \\ p &= \sqrt{E^2 - m^2} \\ y &= \frac{\alpha Z E}{p} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Utilizzando la variabile $x = 2ipr$, possiamo riscrivere il sistema (1.27) nella seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\Phi_1(x) = A(x)\Phi_1(x) + B(x)\Phi_2(x) \\ \\ \frac{d}{dx}\Phi_2(x) = -A(x)\Phi_2(x) + C(x)\Phi_1(x) \end{cases} \tag{1.30}$$

dove abbiamo denotato con $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ rispettivamente:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} + i\frac{\alpha Z E}{px} \\ B(x) &= -\frac{k}{x} + i\frac{m\alpha Z}{px} \\ C(x) &= -\frac{k}{x} - i\frac{m\alpha Z}{px} \end{aligned} \tag{1.31}$$

Il calcolo esplicito è presentato in Appendice B. Derivando rispetto ad x la prima equazione delle (1.30) ed eliminando $\Phi_2(x)$ troviamo che $\Phi_1(x)$ soddisfa la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2}\Phi_1(x) - \frac{1}{B(x)}\left(\frac{d}{dx}B(x)\right)\frac{d}{dx}\Phi_1(x) \\ &\quad - \left(B(x)C(x) + A^2(x) - \frac{A(x)}{B(x)}\frac{d}{dx}B(x) + \frac{d}{dx}A(x)\right)\Phi_1(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Esplicitando le espressioni di $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ e utilizzando le definizioni (1.29) l'equazione precedente può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi_1(x) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Phi_1(x) - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + iy\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma^2}{x^2}\right]\Phi_1(x) = 0 \tag{1.33}$$

Definendo la funzione $M(x)$ come:

$$M(x) \propto x^{\frac{1}{2}}\Phi_1(x) \tag{1.34}$$

possiamo ricondurre la (1.33) nella forma di un'equazione di Whittaker:

$$\frac{d^2}{dx^2}M(x) - \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + iy\right)\frac{1}{x} + \frac{\gamma^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right]M(x) = 0 \tag{1.35}$$

la cui soluzione regolare nell'origine è la funzione di Whittaker $M_{-(\frac{1}{2}+iy),\gamma}(x)$ [Abr70], legata alle funzioni ipergeometriche confluenti di Kummer dalla seguente relazione:

$$M_{-(\frac{1}{2}+iy),\gamma}(x) = e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{2}+\gamma}F(1+\gamma+iy, 1+2\gamma, x) \tag{1.36}$$

Con le espressioni ottenute, possiamo scrivere infine:

$$\Phi_1(r) = N(\gamma + iy)e^{i\eta}\,(2p)^\gamma\,\Phi(r) \tag{1.37}$$

dove abbiamo posto:

$$\Phi(r) = r^\gamma e^{-ipr}F(1+\gamma+iy, 1+2\gamma, 2ipr) \tag{1.38}$$

e abbiamo introdotto la costante di normalizzazione N e la fase η.

Considerando le equazioni complesse coniugate delle (1.30) troviamo che sono identiche alle (1.30) se viene soddisfatta la relazione:

$$\Phi_1^*(x) = \Phi_2(x) \tag{1.39}$$

Questa richiesta ci permette di determinare l'espressione per $e^{i\eta}$. Uguagliando infatti l'espressione ottenuta per $\Phi_2(x)$ sostituendo nella prima delle (1.30) la (1.37) e quella fornita dalla relazione (1.39) otteniamo:

$$e^{-2i\eta} = -\frac{\gamma + iy}{\gamma - iy} \frac{r}{k - \dfrac{imy}{E}} \left[\frac{1}{\Phi^*(r)} \frac{d}{dr} \Phi(r) - ip \left(1 + \frac{y}{pr} \right) \frac{\Phi(r)}{\Phi^*(r)} \right] \tag{1.40}$$

Esplicitando nella (1.40) le espressioni di $\Phi(r)$ e $\Phi^*(r)$ (vedi Appendice C) troviamo:

$$e^{2i\eta} = -\frac{k - \dfrac{imy}{E}}{\gamma + iy} \tag{1.41}$$

avendo indicato con m la massa della particella.

Le espressioni esplicite di $g_k(r)$ e di $f_k(r)$ vengono ottenute a partire dalle (1.26) e (1.28), considerando per $\Phi_1(r)$ l'espressione che si ricava inserendo la (1.38) nella (1.37) e valutando $\Phi_2(r)$ tramite la (1.39):

$$g_k(r) = \frac{\sqrt{E+m}}{r} N \, (2pr)^\gamma \left[(\gamma + iy) e^{-ipr + i\eta} F(1 + \gamma + iy, 1 + 2\gamma, 2ipr) + cc \right] \tag{1.42}$$

$$f_k(r) = \frac{i\sqrt{E-m}}{r} N \, (2pr)^\gamma \left[(\gamma + iy) e^{-ipr + i\eta} F(1 + \gamma + iy, 1 + 2\gamma, 2ipr) - cc \right] \tag{1.43}$$

1.5 Comportamento asintotico di $g_k(r)$ e di $f_k(r)$

Possiamo ricavare il comportamento asintotico di $g_k(r)$ e di $f_k(r)$ sfruttando alcune proprietà delle funzioni ipergeometriche confluenti (vedi Appendice

D). In tale limite è possibile riscrivere la (1.42) e la (1.43) nel seguente modo:

$$\lim_{r\to\infty} g_k(r) = \frac{\sqrt{E+m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\,\Gamma(2\gamma+1)\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+iy)}e^{ipr+i\eta}(2ipr)^{-\gamma+iy} + cc\right] \tag{1.44}$$

$$\lim_{r\to\infty} f_k(r) = \frac{i\sqrt{E-m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\,\Gamma(2\gamma+1)\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+iy)}e^{ipr+i\eta}(2ipr)^{-\gamma+iy} - cc\right] \tag{1.45}$$

Rielaborando le espressioni precedenti, possiamo scrivere il comportamento asintotico di $g_k(r)$ e di $f_k(r)$ come segue:

$$\lim_{r\to\infty} g_k(r) = \frac{2\sqrt{E+m}}{r} N \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+iy)|} e^{-\frac{\pi}{2}y}\sin(pr+\delta) \tag{1.46}$$

$$\lim_{r\to\infty} f_k(r) = -\frac{2\sqrt{E-m}}{r} N \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+iy)|} e^{-\frac{\pi}{2}y}\cos(pr+\delta) \tag{1.47}$$

dove abbiamo indicato con δ il cosidetto sfasamento coulombiano:

$$\delta = -\arg\Gamma(\gamma+iy) + \eta - \frac{\pi}{2}\gamma + y\ln(2pr) \tag{1.48}$$

L'espressione dello sfasamento, nel caso di potenziale nullo, diviene:

$$\delta = -\frac{\pi}{2}\chi \tag{1.49}$$

In tal caso il comportamento asintotico di $g_k(r)$ riproduce quello delle funzioni di Bessel:

$$\lim_{\rho\to\infty} j_l(\rho) = \frac{\sin\left(\rho - l\frac{\pi}{2}\right)}{\rho} \tag{1.50}$$

ponendo la costante di normalizzazione:

$$N = \frac{e^{\frac{\pi}{2}y}}{2\sqrt{E+m}} \frac{|\Gamma(\gamma+iy)|}{\Gamma(2\gamma+1)} \tag{1.51}$$

Per ottenere gli spinori con la normalizzazione covariante fissata dalle (1.11) dobbiamo quindi moltiplicare gli spinori così ottenuti per la costante A definita nella (1.21).

1.6 Effetto delle dimensioni finite del nucleo

Nella trattazione precedente abbiamo considerato il nucleo come una carica puntiforme, vogliamo adesso analizzare gli effetti delle dimensioni finite del nucleo. Queste divengono importanti nel trattare la diffusione di elettroni ad alta energia ($\geq 20MeV$). Infatti una parte significativa di essi penetra nel nucleo per cui la sezione d'urto dipende anche dalla distribuzione della carica nucleare.

In questo caso le equazioni che forniscono $g_k(r)$ e $f_k(r)$ all'interno del nucleo sono date dalle (1.25) dove il potenziale $V(r)$ dipende dalla distribuzione di carica del nucleo. Fuori dal nucleo invece il potenziale è uguale a quello coulombiano che la carica nucleare produrrebbe se fosse localizzata al centro del nucleo. Le soluzioni saranno calcolate con un'integrazione numerica a partire dall'origine e verranno raccordate fuori dal nucleo, dove dobbiamo considerare solo il potenziale coulombiano, con una combinazione lineare delle funzioni coulombiane regolare e irregolare:

$$g_k(r) = \cos(\overline{\delta})g_k^{c,r}(r) + \sin(\overline{\delta})g_k^{c,i}(r) \tag{1.52}$$

$$f_k(r) = \cos(\overline{\delta})f_k^{c,r}(r) + \sin(\overline{\delta})f_k^{c,i}(r) \tag{1.53}$$

dove abbiamo contrassegnato con gli apici r e i rispettivamente le funzioni legate alle soluzioni regolari e irregolari. L'apice c indica le funzioni puramente coulombiane già scritte esplicitamente nella (1.42) e nella (1.43). Lo sfasamento $\overline{\delta}$ è stato introdotto dalle dimensioni finite del nucleo.
Dalla (1.52) e dalla (1.53) ricaviamo (vedi Appendice E):

$$\tan(\overline{\delta}) = \frac{f_k(r)g_k^{c,r}(r) - f_k^{c,r}(r)g_k(r)}{f_k^{c,i}(r)g_k(r) - f_k(r)g_k^{c,i}(r)} \tag{1.54}$$

Capitolo 2

Soluzione numerica delle equazioni del moto

In questo capitolo esporremo dapprima le tecniche usate per risolvere numericamente il sistema di equazioni differenziali (1.25). Ricaveremo da tale sistema due equazioni differenziali del secondo ordine rispettivamente per $g_k(r)$ e per $f_k(r)$ e tramite un'appropriata sostituzione otterremo delle equazioni differenziali del secondo ordine prive del termine con la derivata prima. Potremo quindi risolvere tali equazioni applicando l'algoritmo di Numerov. Successivamente presenteremo le tecniche usate per calcolare le funzioni d'onda coulombiane di diffusione di elettroni relativistici.
Daremo infine una breve presentazione delle densità di carica utilizzate nel nostro lavoro.

2.1 Risoluzione numerica delle equazioni differenziali

Il sistema di equazioni differenziali che dobbiamo risolvere per ottenere la parte radiale delle funzioni d'onda è dato dalla (1.27). Indicando con:

$$\begin{aligned} D(r) &= E + m - V(r) \\ H(r) &= -(E - m - V(r)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

possiamo riscrivere il sistema nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}u_1(r) = -\dfrac{k}{r}u_1(r) + D(r)u_2(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr}u_2(r) = \dfrac{k}{r}u_2(r) + H(r)u_1(r) \end{cases} \tag{2.2}$$

Dal sistema precedente si può ricavare un'equazione differenziale del secondo ordine per $u_1(r)$. Definendo $v_1(r)$ come:

$$u_1(r) = \sqrt{D(r)}v_1(r) \tag{2.3}$$

possiamo riscrivere tale equazione nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2}v_1(r) = \Bigg[& -\frac{1}{2D(r)}\frac{d^2}{dr^2}D(r) + \frac{3}{4}\frac{1}{(D(r))^2}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)^2 \\ & + \frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\frac{d}{dr}D(r) + D(r)H(r) + \frac{k(k+1)}{r^2}\Bigg] v_1(r) \end{aligned} \tag{2.4}$$

I calcoli effettuati per ricavare la (2.4) sono riportati in dettaglio in Appendice F. Con la sostituzione (2.3) abbiamo ottenuto un'equazione differenziale del secondo ordine priva del termine con la derivata prima. Tale equazione può essere risolta numericamente con il metodo di Numerov (vedi Appendice G).

Un procedimento analogo può essere seguito per ottenere un'equazione differenziale del secondo ordine senza derivata prima per $v_2(r)$ definita come:

$$u_2(r) = \sqrt{-H(r)}v_2(r) \tag{2.5}$$

In tal modo otteniamo (vedi Appendice F):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2}v_2(r) = \Bigg[& -\frac{1}{2H(r)}\frac{d^2}{dr^2}H(r) + \frac{3}{4}\frac{1}{(H(r))^2}\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)^2 \\ & -\frac{k}{r}\frac{1}{H(r)}\frac{d}{dr}H(r) + D(r)H(r) + \frac{k(k-1)}{r^2}\Bigg] v_2(r) \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Calcolo delle funzioni d'onda coulombiane

Per calcolare numericamente le funzioni d'onda coulombiane utilizziamo, invece delle espressioni di difficile programmazione trovate nel primo capitolo, le serie di Elton. Questo approccio consiste nello scrivere:

$$\begin{aligned} g_k(r) &= \frac{G_k(r)}{r} \\ f_k(r) &= -\frac{F_k(r)}{r} \end{aligned} \tag{2.7}$$

e considerare lo sviluppo in serie di potenze di $G_k(x)$ e $F_k(x)$:

$$\begin{aligned} G_k(x) &= x^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ F_k(x) &= x^\gamma \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \end{aligned} \tag{2.8}$$

con

$$x = pr \tag{2.9}$$

e

$$\gamma = \pm\sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2} \tag{2.10}$$

in accordo con le relazioni indicate nella (1.29). Il segno positivo e quello negativo della (2.10) forniscono rispettivamente la soluzione regolare e irregolare nell'origine.

Imponendo che le (2.7) soddisfino le equazioni (1.25) troviamo per $G_k(r)$ e $F_k(r)$ le seguenti equazioni differenziali accoppiate:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}G_k(r) = -\dfrac{k}{r}G_k(r) - (E + m - V(r))F_k(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr}F_k(r) = \dfrac{k}{r}F_k(r) + (E - m - V(r))G_k(r) \end{cases} \tag{2.11}$$

Sostituendo nelle equazioni così ricavate le (2.8) troviamo che i coefficienti delle serie sono dati da:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= \frac{\alpha Z}{\gamma - k} \end{aligned} \tag{2.12}$$

con le relazioni di ricorrenza:

$$\begin{aligned} i(i+2\gamma)a_i &= -\Lambda\alpha Z a_{i-1} - \Omega(\gamma + i - k)b_{i-1} \\ i(i+2\gamma)b_i &= -\Omega\alpha Z b_{i-1} + \Lambda(\gamma + i + k)a_{i-1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

dove abbiamo indicato con Λ e Ω rispettivamente:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{E-m}{p} \\ \Omega &= \frac{E+m}{p} \end{aligned} \tag{2.14}$$

In Appendice H riportiamo il calcolo effettuato per ottenere tali espressioni.

2.3 Densità di carica

Per studiare la sensibilità delle soluzioni dell'equazione di Dirac ai dettagli della distribuzione di carica del nucleo abbiamo utilizzato diversi tipi di distribuzione: una densità di carica uniforme, una distribuzione di Fermi e uno sviluppo su un set completo di funzioni ortonormali e precisamente di Fourier-Bessel. I primi due approcci ipotizzano per la densità di carica una particolare forma dipendente da alcuni parametri che vengono fissati in modo da riprodurre i dati sperimentali delle corrispondenti sezioni d'urto. Il terzo è invece una tecnica chiamata "indipendente dal modello". Le prime analisi condotte per ricavare informazioni sulla densità di carica a partire dallo studio della diffusione elastica su nuclei risalgono agli inizi degli anni '50 ad opera di Hofstadter a Stanford. In tali esperimenti si avevano a disposizione elettroni di energia tale da misurare sezioni d'urto che si estendevano su 2 decadi fino a un valore di momento massimo trasferito di circa $1fm^{-1}$. I dati sperimentali risultavano così adeguatamente riprodotti da una distribuzione di carica nucleare descritta da funzioni estremamente semplici. La scelta più diffusa era il modello di Fermi che contiene due soli parametri indipendenti R e D:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{D}}} \tag{2.15}$$

Il parametro ρ_0 è fissato dalla condizione di normalizzazione della densità:

$$\int d^3\boldsymbol{r}\rho(r) = Z \tag{2.16}$$

Attualmente l'intervallo di momento trasferito sul quale sono distribuiti i dati è notevolmente più esteso raggiungendo $4fm^{-1}$ mentre le sezioni d'urto si estendono su ben 12 decadi. Conseguentemente è aumentato il numero di parametri necessari per ottenere un buon adattamento coi dati sperimentali. Per questo motivo si preferisce solitamente utilizzare uno sviluppo della densità di carica nucleare su un set completo di funzioni ortonormali piuttosto che adoperare funzioni estremamente complicate. In quest'approccio, il ruolo dei parametri liberi è svolto dai coefficienti dello sviluppo che vengono quindi fissati in modo da avere il migliore accordo con i dati sperimentali.

Indichiamo con $A_n(r)$ una base di funzioni ortonormali su cui sviluppiamo la densità di carica $\rho(r)$, quest'ultima può essere dunque espressa nella seguente forma:

$$\rho(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n A_n(r) \tag{2.17}$$

Sebbene matematicamente tale scrittura sia corretta solo se la sommatoria si estende su un numero infinito di funzioni, operativamente è necessario che essa si riduca ad un numero finito di termini, ciò introduce un errore nella procedura di estrazione della densità. Il valore dei coefficienti c_n è fissato in modo da avere il migliore adattamento con i dati sperimentali.

La base di Fourier-Bessel ha trovato larga applicazione in letteratura per lo studio di sezioni d'urto elastiche e inelastiche. Essa è costituita dalle funzioni di Bessel di ordine zero date da:

$$j_0(pr) = \frac{\sin(pr)}{pr} \tag{2.18}$$

con la condizione:

$$j_0(p_n R_c) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_n = \frac{n\pi}{R_c} \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.19}$$

Condizione necessaria per poter sviluppare una funzione sulla base di Fourier-Bessel è che essa si annulli per $r > R_c$, con questa ipotesi possiamo riscrivere la (2.17) nel seguente modo:

$$\rho(r) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \dfrac{\sin(p_n r)}{p_n r} & \text{per } r \leq R_c \\ 0 & \text{per } r > R_c \end{cases}$$

Osserviamo che la base descritta dipende da un parametro: R_c. I parametri c_n sono stati ottenuti riproducendo i dati sperimentali della sezione d'urto elastica [[1]Ann95] [[2]Ann95].

Per quanto riguarda la distribuzione di Fermi abbiamo fissato i parametri in modo da riprodurre la densità fornita con uno sviluppo sulle funzioni di

Fourier-Bessel. Abbiamo scelto tali parametri per riprodurre essenzialmente la superficie del nucleo, definita come la zona in cui la densità varia dal 90% del suo valore iniziale al 10%. Abbiamo effettuato la nostra analisi lavorando su nuclei di ${}^{16}_{8}O$, ${}^{40}_{20}Ca$ e ${}^{208}_{82}Pb$. Per gli ultimi due nuclei la densità ottenuta con lo sviluppo su una base di funzioni di Fourier-Bessel è ben riprodotta, almeno sulla superficie, da una distribuzione di Fermi con valori dei parametri dati da :

$$\begin{aligned} D &= 0.56 fm \\ R &= r_0 A^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{2.20}$$

dove

$$r_0 = 1.10 fm \tag{2.21}$$

Nel caso dell'${}^{16}_{8}O$ una migliore scelta dei parametri è rappresentata da:

$$\begin{aligned} D &= 0.52 fm \\ R &= r_0 A^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \tag{2.22}$$

dove

$$r_0 = 1.03 fm \tag{2.23}$$

Riportiamo in fig. 2.1 la distribuzione di carica di Fermi dell'${}^{16}_{8}O$ ottenuta con i valori dei parametri (2.22) e (2.23) e del ${}^{40}_{20}Ca$ e del ${}^{208}_{82}Pb$ con i parametri indicati in (2.20) e (2.21) e la distribuzione data con lo sviluppo su una base di Fourier-Bessel.

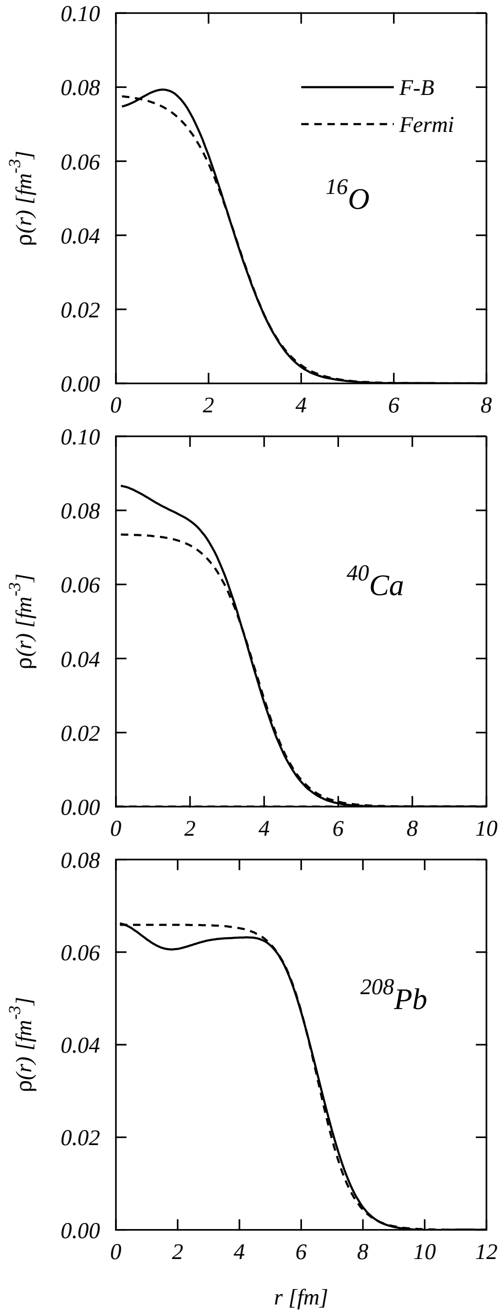

Figura 2.1: Distribuzione di carica di Fourier-Bessel e di Fermi per nuclei di ${}^{16}_{8}$O, ${}^{40}_{20}$Ca e ${}^{208}_{82}$Pb.

Vogliamo adesso analizzare gli effetti delle diverse distribuzioni di carica sulle funzioni d'onda al variare dell'energia cinetica e del momento angolare dell'elettrone incidente. Scegliamo per l'energia i valori: $100MeV$, $10MeV$ e $1MeV$, e per il momento angolare i valori:

$$\begin{aligned} L &= 0 \quad \text{e} \quad J = \frac{1}{2} \\ L &= 1 \quad \text{e} \quad J = \frac{1}{2} \\ L &= 1 \quad \text{e} \quad J = \frac{3}{2} \\ L &= 2 \quad \text{e} \quad J = \frac{5}{2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Come bersagli consideriamo un nucleo leggero, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, e un nucleo pesante, ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$.

Riportiamo in fig. 2.2 la componente superiore delle funzioni d'onda radiali per elettroni di energia cinetica di $100MeV$ su bersagli di ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ per i diversi valori del momento angolare.
In ogni grafico abbiamo riportato la funzione d'onda che è la soluzione corretta dell'equazione di Dirac (che in seguito per brevità chiameremo semplicemente funzione d'onda di Dirac) ottenuta con la distribuzione di densità uniforme (linee punteggiate), con quella di Fermi con parametri dati dalle (2.22) e (2.23) (linee tratteggiate) e con quella fornita da uno sviluppo sulla base di Fourier-Bessel (linee continue). Osserviamo che nel caso $L = 0$ e $J = 1/2$ e $L = 1$ e $J = 1/2$ le tre distribuzioni forniscono funzioni d'onda che praticamente si sovrappongono, mentre per valori superiori di momento angolare totale la distribuzione uniforme fornisce una funzione d'onda che si discosta notevolmente dalle altre due.

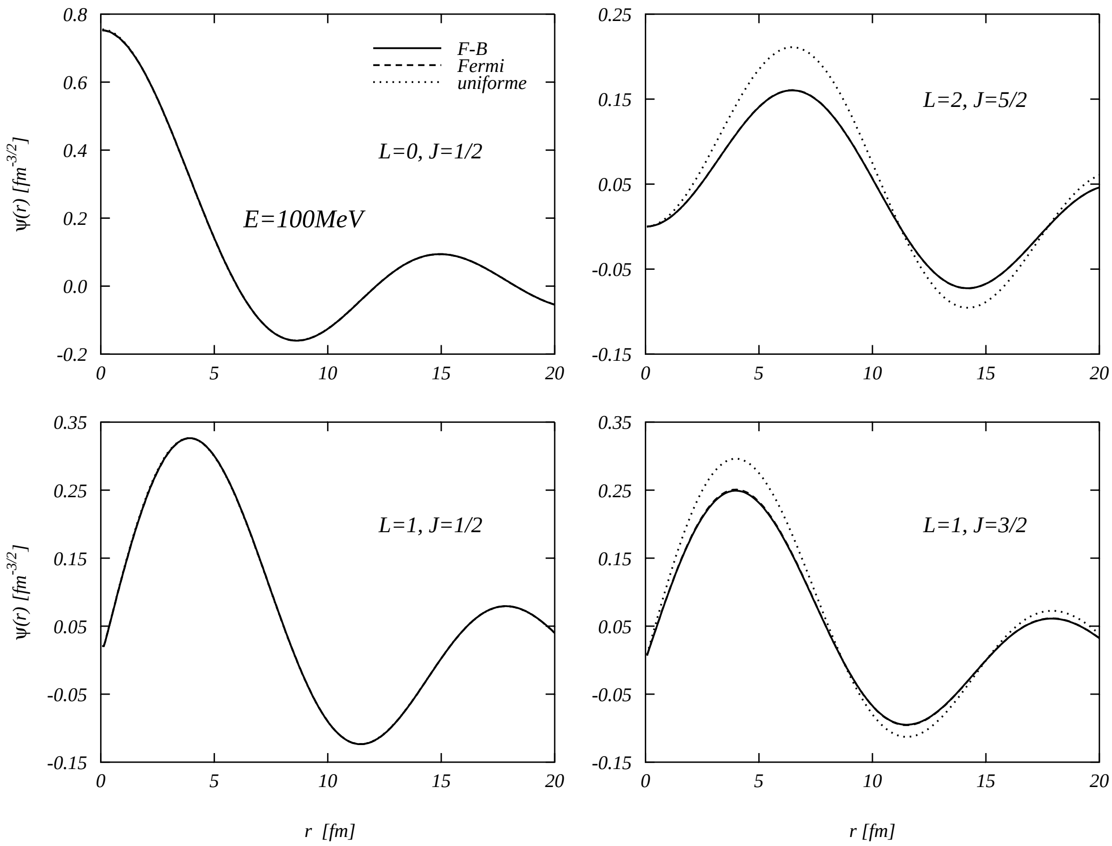

Figura 2.2: Funzioni d'onda radiali per diffusione da $^{16}_{8}$O ottenute con diverse ditribuzioni di carica.

Riportiamo in fig. 2.3 i grafici analoghi a quelli presentati in fig. 2.2 per energia di $10 MeV$.
Osserviamo come le funzioni d'onda ottenute con una distribuzione uniforme si differenziano dalle altre due, questa volta, per il valore più piccolo di momento angolare totale, $J = 1/2$, mentre per i valori superiori le curve risultano sovrapposte.

In fig. 2.4 presentiamo le funzioni per un'energia cinetica di $1 MeV$. In questo caso abbiamo disegnato le funzioni d'onda fino a $500 fm$ per mostrarne l'andamento oscillatorio.
Osserviamo come si presentino delle differenze tra le funzioni d'onda ottenute con distribuzione uniforme e le altre due per ogni valore del momento angolare considerato, queste differenze però tendono a scomparire per $L = 2$ e $J = 5/2$.

Riportiamo quindi una seconda serie di grafici che si riferisce alla diffusione da un nucleo di $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. Le fig. 2.5, fig. 2.6 e fig. 2.7 sono analoghe rispettivamente alle fig. 2.2, fig. 2.3 e fig. 2.4 avendo riportato in ogni grafico le funzioni d'onda ottenute con le diverse densità utilizzando come valori dei parametri della distribuzione di Fermi quelli indicati nella (2.20) e nella (2.21).
Analizzando la fig. 2.5 notiamo che a differenza delle funzioni d'onda ottenute per lo scattering dal nucleo di $^{16}_{8}\mathrm{O}$, le tre distribuzioni forniscono funzioni che si sovrappongono per tutti e tre i valori di momento angolare considerato. Possiamo notare solo alcune leggere differenze tra la distribuzione uniforme e le altre due al diminuire del momento angolare. Al diminuire dell'energia

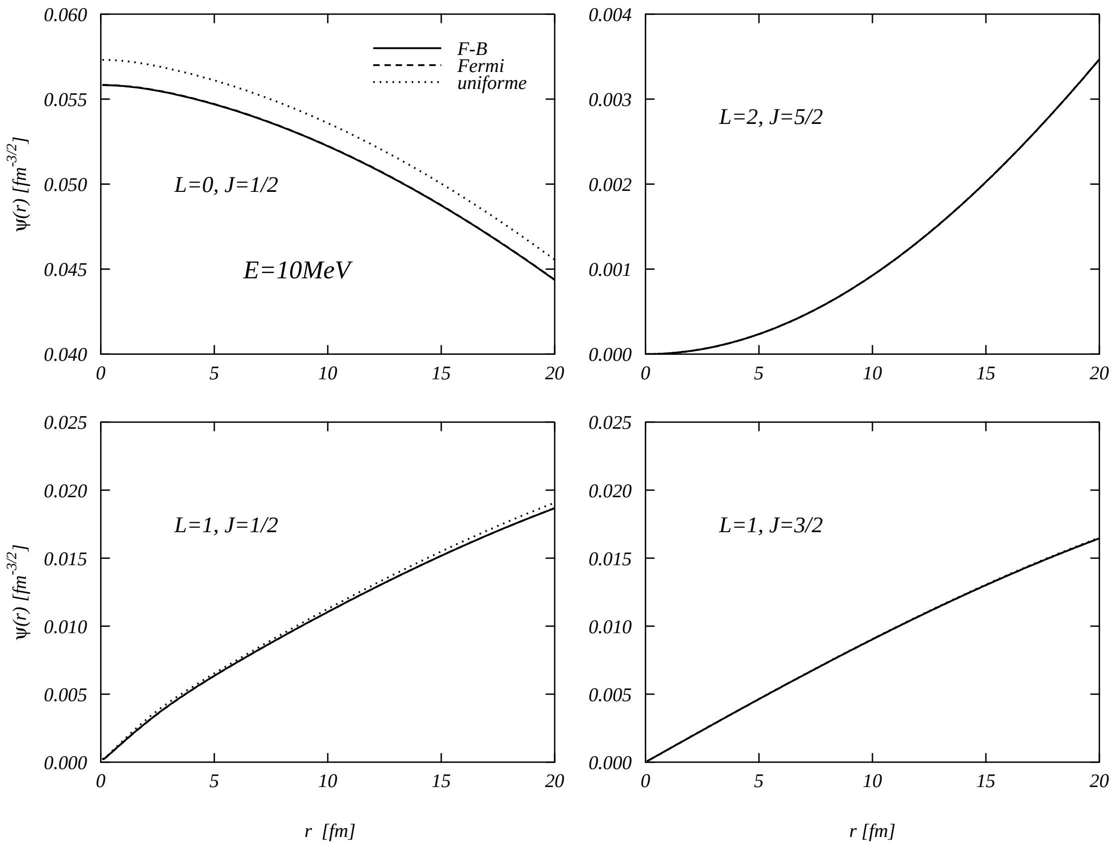

Figura 2.3: Funzioni d'onda radiali per diffusione da $^{16}_{8}$O ottenute con diverse ditribuzioni di carica.

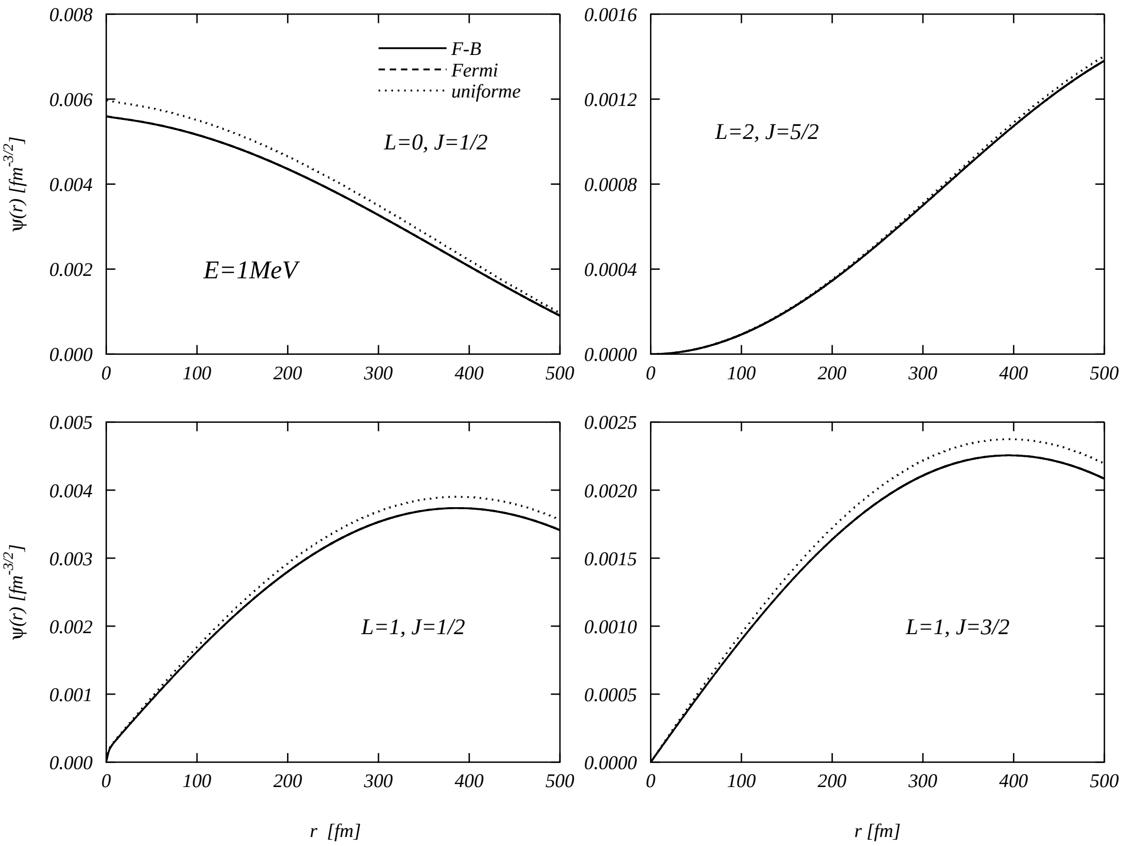

Figura 2.4: Funzioni d'onda radiali per diffusione da $^{16}_{8}O$ ottenute con diverse ditribuzioni di carica.

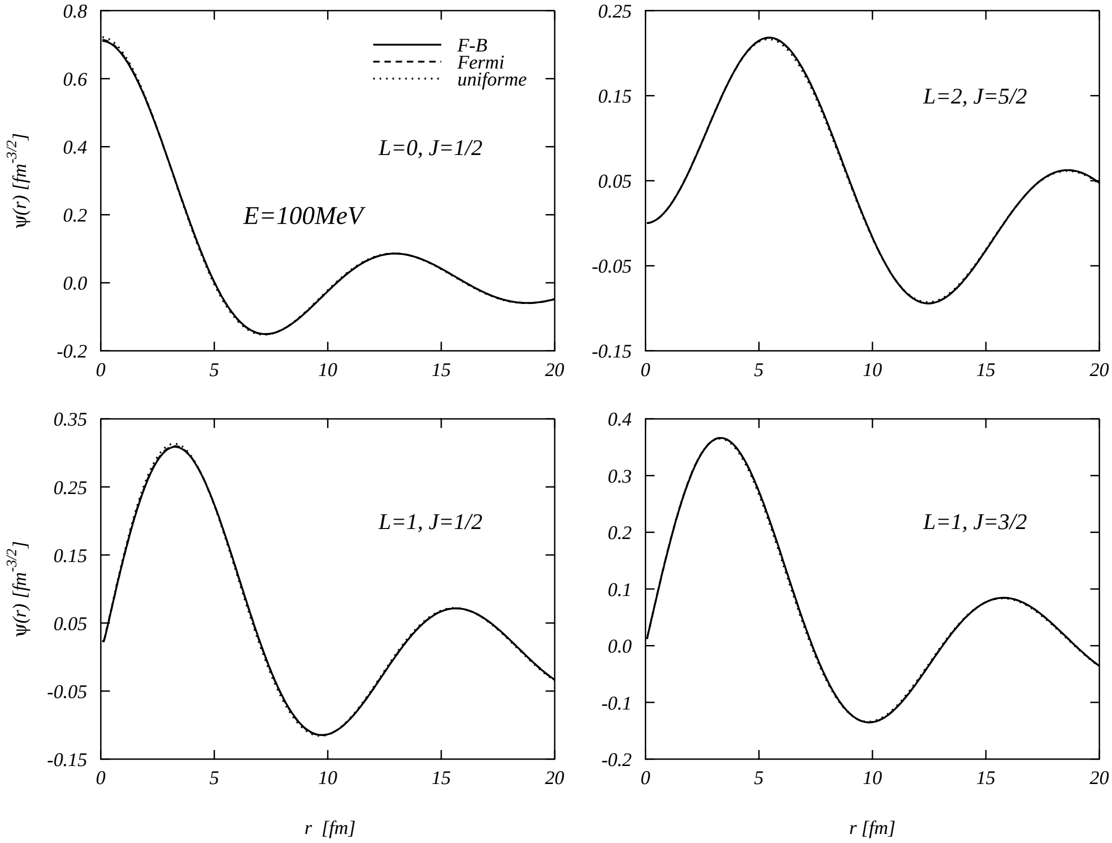

Figura 2.5: Funzioni d'onda radiali per diffusione da $^{208}_{16}$Pb ottenute con diverse ditribuzioni di carica.

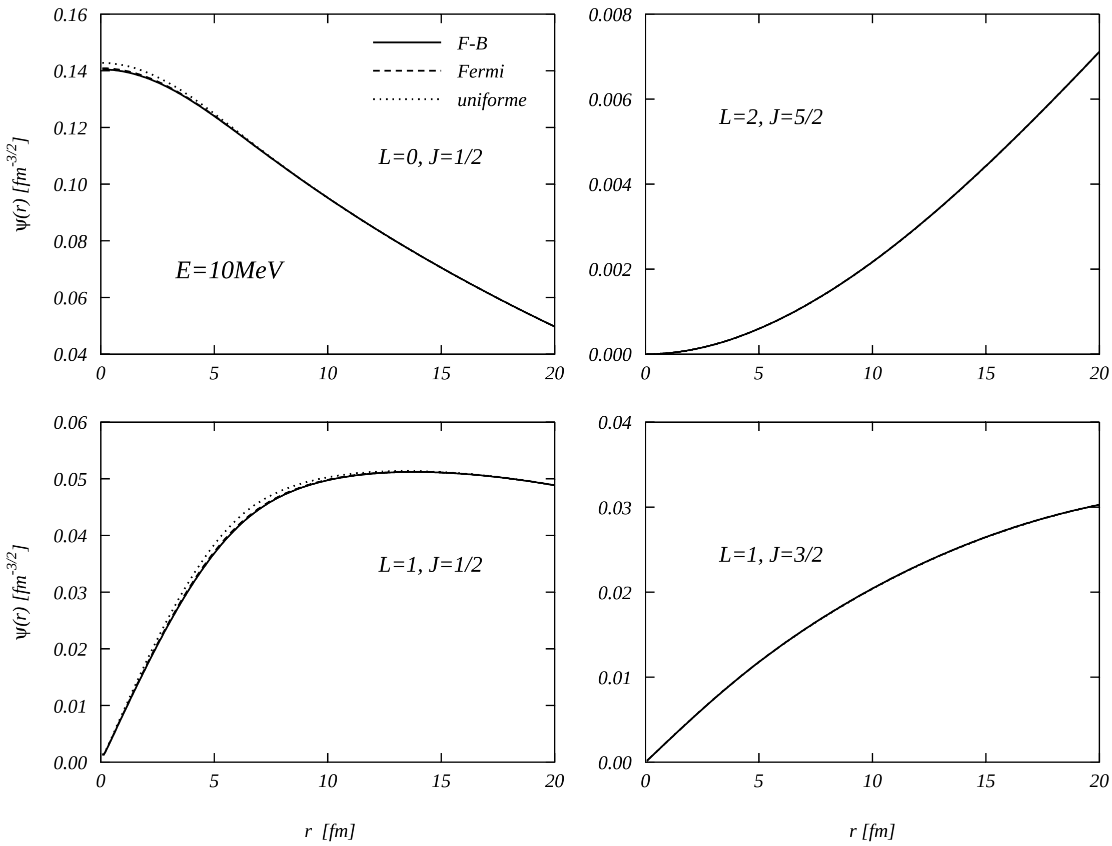

Figura 2.6: Funzioni d'onda radiali per diffusione da ${}^{208}_{82}$Pb ottenute con diverse ditribuzioni di carica.

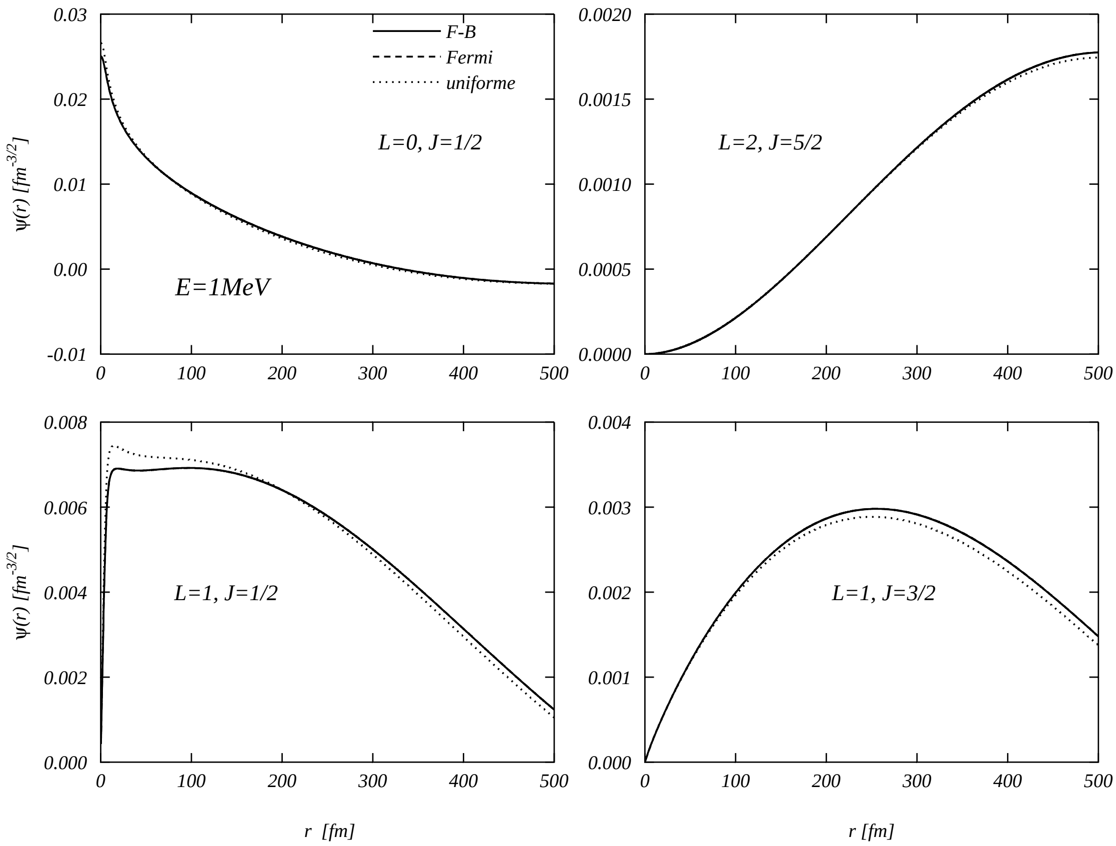

Figura 2.7: Funzioni d'onda radiali per diffusione da $^{208}_{82}$Pb ottenute con diverse ditribuzioni di carica.

troviamo comportamenti analoghi a quelli presentati per l'$^{16}_{8}$O anche se le differenze risultano lievemente inferiori.

Diamo una possibile interpretazione dei risultati ottenuti. A $100 MeV$ le onde $L = 2$, $J = 5/2$ e $L = 1$, $J = 3/2$ sono sensibili alle differenze prodotte da superfici diffuse (Fourier-Bessel e Fermi) e definite (sfere rigide). Nel caso dell'$^{16}_{8}$O la superficie si trova a circa $4 fm$ dal centro del nucleo, dove le onde d e p hanno massimi. Nel caso del $^{208}_{82}$Pb la superficie è a circa $7 fm$ quindi anche le onde d e p sono sensibili alla parte centrale della distribuzione, più che alla superficie. Ad energie più basse le onde con $J = 1/2$ hanno sensibilità ai dettagli della distribuzione di carica, mentre le altre onde sono piccate al di fuori del nucleo e sono sensibili alle proprietà globali della carica nucleare.

In seguito, otterremo le funzioni d'onda di Dirac utilizzando le densità di carica ottenute con uno sviluppo su una base di Fourier-Bessel dato che sono le densità che meglio riproducono i dati sperimentali di diffusione elastica. Comunque non abbiamo osservato apprezzabili differenze tra le funzioni d'onda ottenute con tali densità e quelle parametrizzate con la funzione di Fermi.

2.4 Sensibilità delle funzioni d'onda alla massa del leptone

Nel nostro studio abbiamo ottenuto le funzioni d'onda del leptone incidente senza trascurarne la massa e abbiamo anche ricavato le espressioni

(2.12), (2.13) e (2.14) per calcolare numericamente le funzioni coulombiane pure senza considerare il limite, usualmente riportato in letteratura, di massa a riposo trascurabile. Vogliamo analizzare la sensibilità delle funzioni d'onda s alla massa a riposo e, a tal scopo, riportiamo in fig. 2.8 le funzioni d'onda ottenute per diffusione da ${}^{16}_{8}$O e da ${}^{208}_{82}$Pb per valori di energia cinetica del leptone incidente di $100MeV$, $10MeV$ e $1MeV$ con massa a riposo del proiettile uguale o diversa da zero.

Osserviamo come per i valori più alti di energia le funzioni d'onda si sovrappongono completamente come atteso, in quanto l'energia dell'elettrone risulta trascurabile. Il comportamento rimane analogo per energia di $10MeV$. Considerando un'energia cinetica di $1MeV$, cioè confrontabile con la massa a riposo dell'elettrone, osserviamo delle leggere differenze tra le funzioni d'onda. Ci aspettiamo che passando a proiettili più pesanti, quali i muoni, le differenze aumentino e diventino osservabili anche ad energie maggiori.

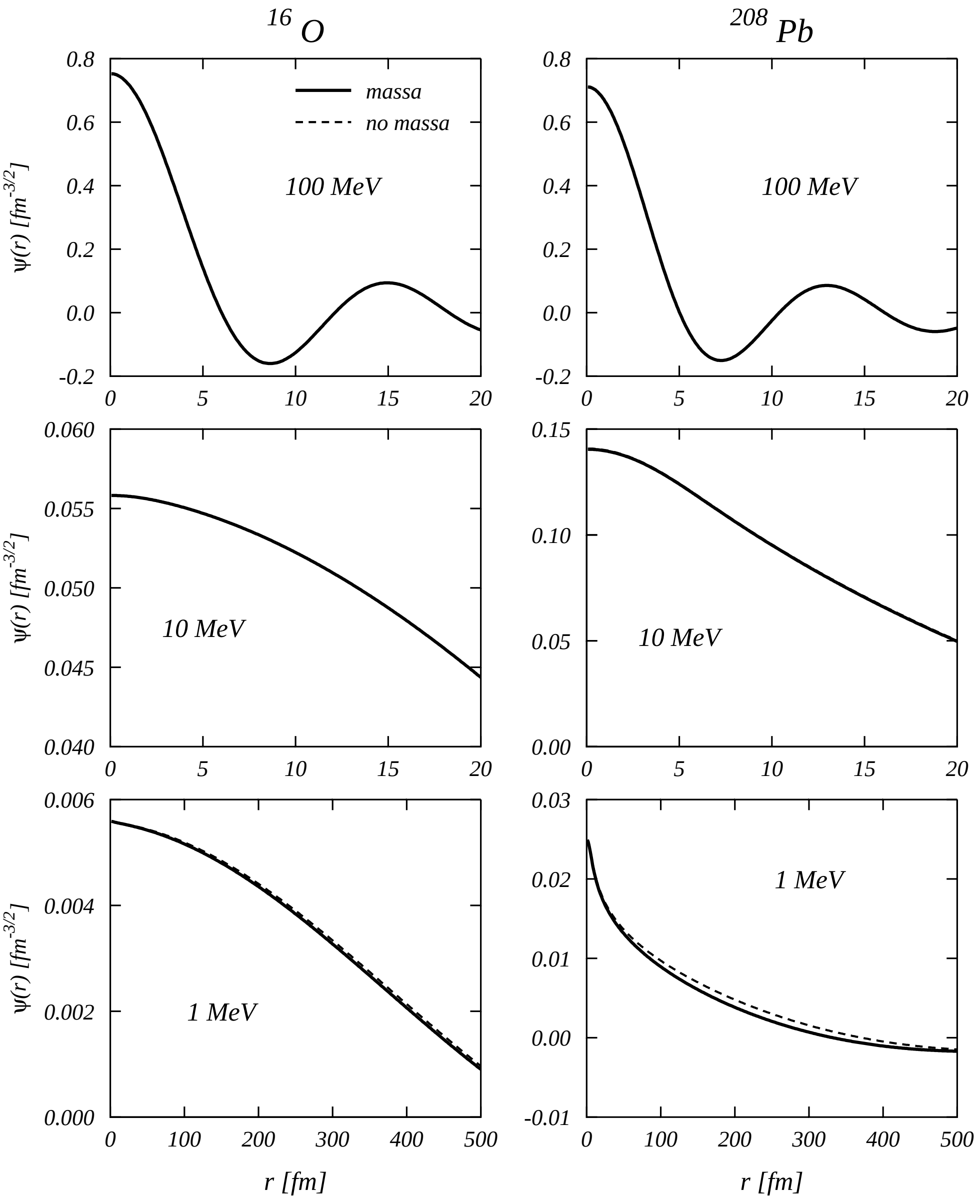

Figura 2.8: Funzioni d'onda radiali per diffusione da ${}^{16}_{8}$O e da ${}^{208}_{82}$Pb ottenute considerando la massa del leptone in onda s uguale o diversa da zero al variare della sua energia cinetica.

Capitolo 3

Applicazioni

In questo capitolo studieremo la validità dell'utilizzazione di onde piane per la descrizione del moto di un leptone relativistico in un campo coulombiano. Questa approssimazione è spesso usata nel calcolo di processi di diffusione ultrarelativistici da nuclei. D'altra parte l'approssimazione di onda piana è sempre usata nella descrizione di processi legati all'interazione debole, come decadimenti radioattivi o interazioni di cambio carica con neutrini. Il nostro metodo di studio consiste nel confronto, nel caso di diffusione da nuclei di ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ e ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$, tra le funzioni d'onda ottenute tramite la risoluzione numerica delle equazioni differenziali (1.25), le funzioni coulombiane pure ottenute considerando puntiforme il nucleo, e le funzioni di Bessel.
Nel caso delle interazioni deboli in letteratura sono state proposte metodologie per considerare in maniera approssimata l'effetto del campo coulombiano, senza distruggere la semplicità delle soluzioni di onda piana. Verificheremo la validità di alcune di queste approssimazioni.

3.1 Confronto con le funzioni coulombiane e onde piane

Vogliamo confrontare le funzioni d'onda di Dirac con le funzioni coulombiane pure e le funzioni di Bessel per due nuclei bersaglio differenti: un nucleo leggero (${}^{16}_{8}\mathrm{O}$) e un nucleo pesante (${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$). Nella nostra analisi considereremo solo le grandi componenti della funzione di Dirac. Conduciamo la nostra analisi per diversi valori dell'energia cinetica e del momento angolare dell'elettrone incidente.

Analizziamo dapprima funzioni d'onda ottenute per un'energia cinetica dell'elettrone di $100 MeV$, con valori del momento angolare dati dalla (2.24). Riportiamo in fig. 3.1 le tre funzioni sopra citate per diffusione di un elettrone di energia cinetica di $100 MeV$ da un nucleo di ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$. In fig. 3.2 riportiamo grafici analoghi per il ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$.
Possiamo osservare come le funzioni d'onda puramente coulombiane non descrivano adeguatamente le funzioni d'onda di Dirac per nessuno dei due nuclei considerati. Un accordo si osserva solo per un valore del momento angolare $L = 2$ e $J = 5/2$ nel caso dell'${}^{16}_{8}\mathrm{O}$. Questo comportamento può essere spiegato in una interpretazione semiclassica perché all'aumentare del momento angolare la particella mantiene una distanza tale dal nucleo bersaglio da avvertire il potenziale da esso generato come quello prodotto da una carica puntiforme. Il disaccordo si manifesta ancora più palesemente nel caso del ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$. Anche questo è un risultato prevedibile in quanto sono cresciute le dimensioni del nucleo. Solo nel limite di un nucleo puntiforme le funzioni

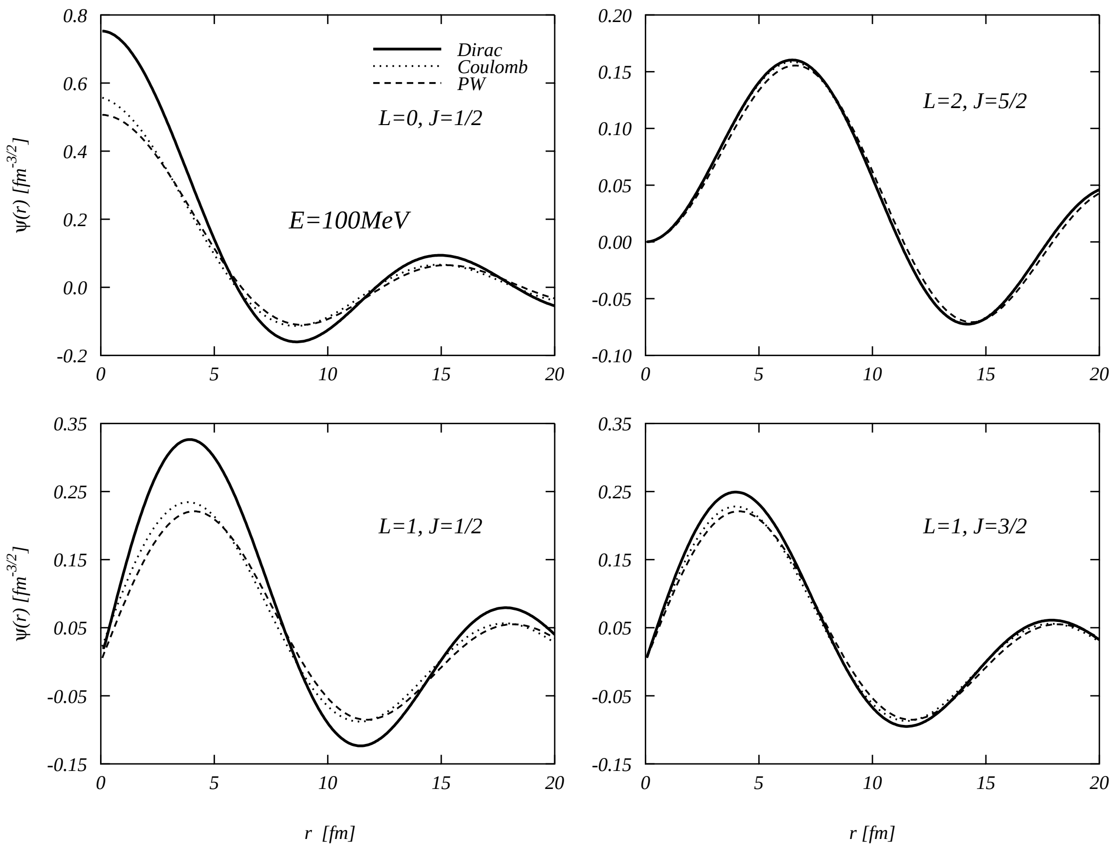

Figura 3.1: Funzioni d'onda di Dirac, funzioni coulombiane pure e funzioni di Bessel per diffusione da ${}^{16}_{8}$O per energia cinetica di $100MeV$.

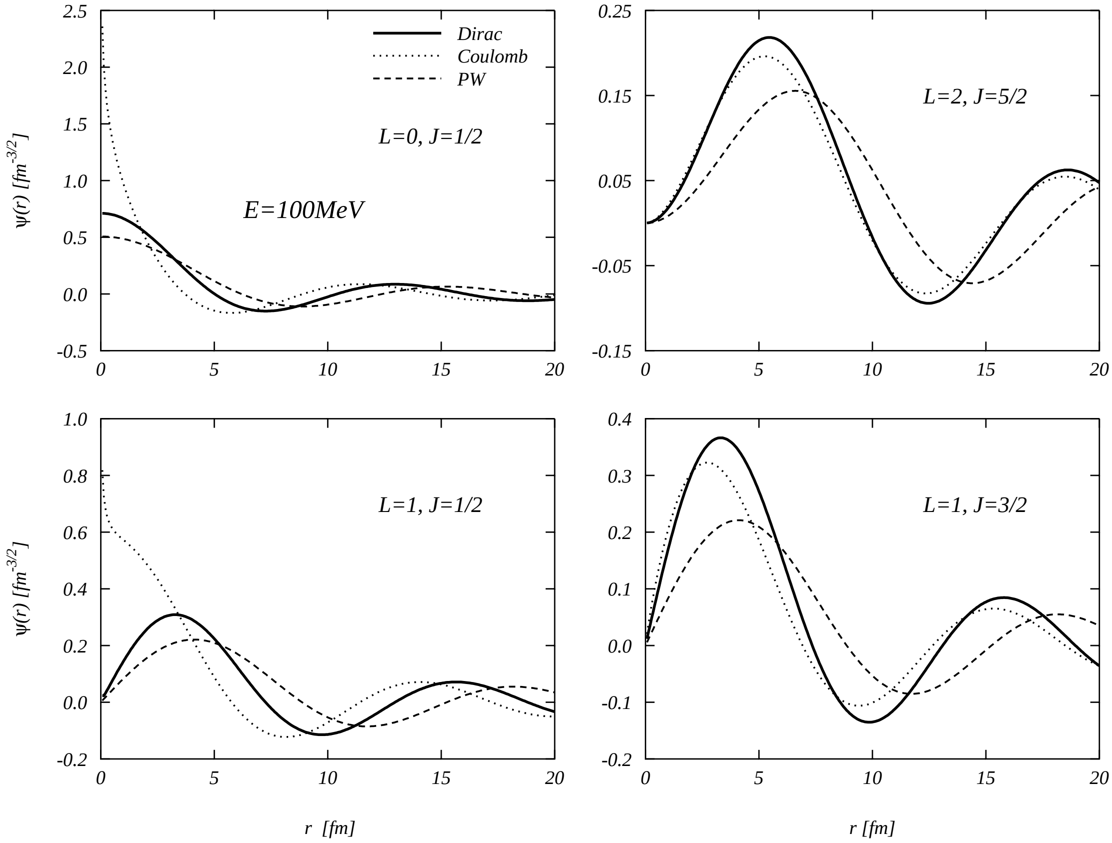

Figura 3.2: Funzioni d'onda di Dirac, funzioni coulombiane pure e funzioni di Bessel per diffusione da $^{208}_{82}$Pb per energia cinetica di $100 MeV$.

d'onda puramente coulombiane riproducono le funzioni d'onda di Dirac. Anche l'andamento delle funzioni di Bessel riproduce apprezzabilmente quello delle funzioni d'onda di Dirac solo nel caso dell'$^{16}_{8}$O con valore del momento angolare $L = 2$ e $J = 5/2$. Considerando valori più bassi del momento angolare e passando a nuclei più pesanti quali il $^{208}_{82}$Pb tale andamento si discosta però irreparabilmente da quello delle funzioni di Dirac. Questo comportamento è naturalmente atteso in quanto all'aumentare della carica del nucleo si intensifica il potenziale coulombiano, per cui inevitabilmente le funzioni d'onda si discostano da quelle che descrivono una particella libera. Anche in questo caso l'interpretazione semiclassica fornisce una spiegazione: l'accordo che si osserva all'aumentare di L è dovuto alla maggiore distanza della particella incidente dal nucleo e dunque a una conseguente minore intensità del potenziale a cui essa è soggetta. Evidenziamo quindi come l'onda piana che solitamente viene utilizzata nel calcolo di elementi di matrice in processi di diffusione leptonica da nuclei, sia differente dalla funzione d'onda di Dirac. Quindi non è corretto ricorrere a questa semplificazione. L'onda piana può approssimare la soluzione corretta solo quando viene studiata la diffusione da nuclei leggeri per alti valori del momento angolare.

É interessante analizzare tali comportamenti anche a basse energie. Ripetiamo dunque la stessa analisi considerando come proiettili elettroni di energia cinetica pari a $10 MeV$. In fig. 3.3 e in fig. 3.4 riportiamo la funzione d'onda di Dirac, la funzione d'onda puramente coulombiana e quella di particella libera rispettivamente per diffusione da $^{16}_{8}$O e da $^{208}_{82}$Pb.

Come già osservato per energia di $100 MeV$ nella diffusione da $^{16}_{8}$O, la

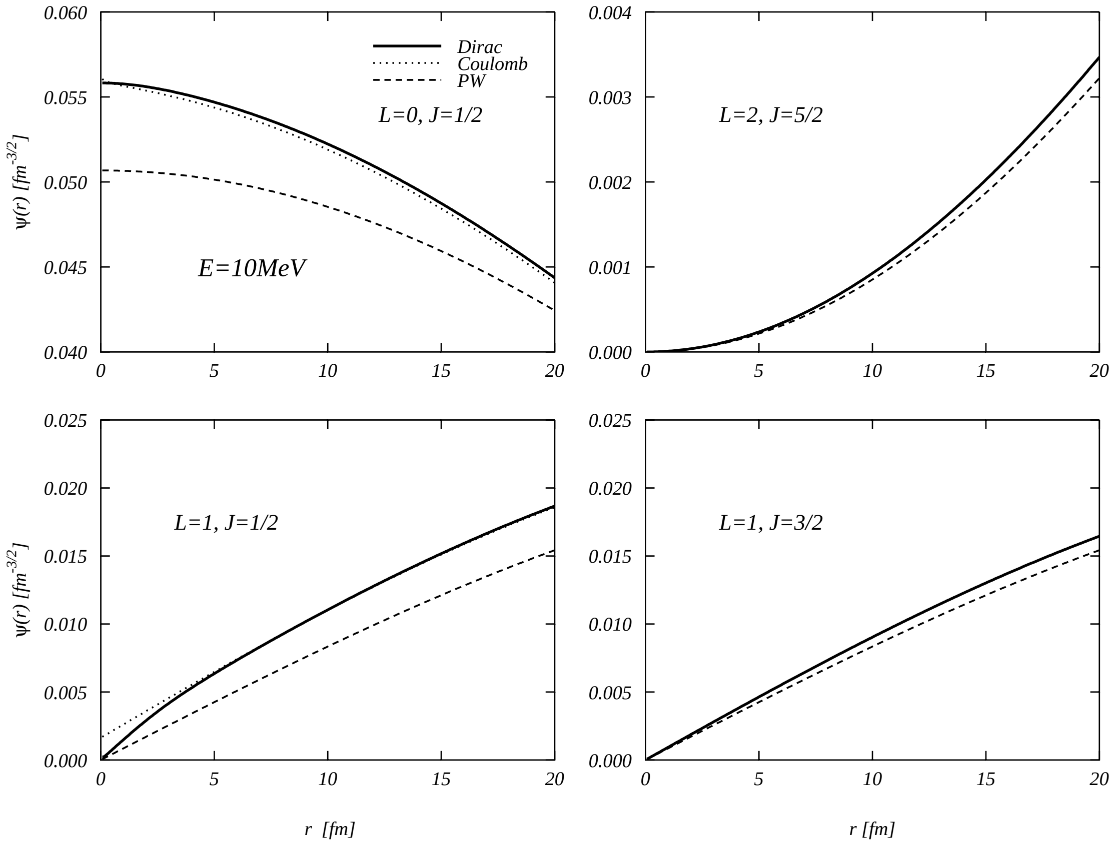

Figura 3.3: Funzioni d'onda di Dirac, funzioni coulombiane pure e funzioni di Bessel per diffusione da $^{16}_{8}$O per energia cinetica di $10 MeV$.

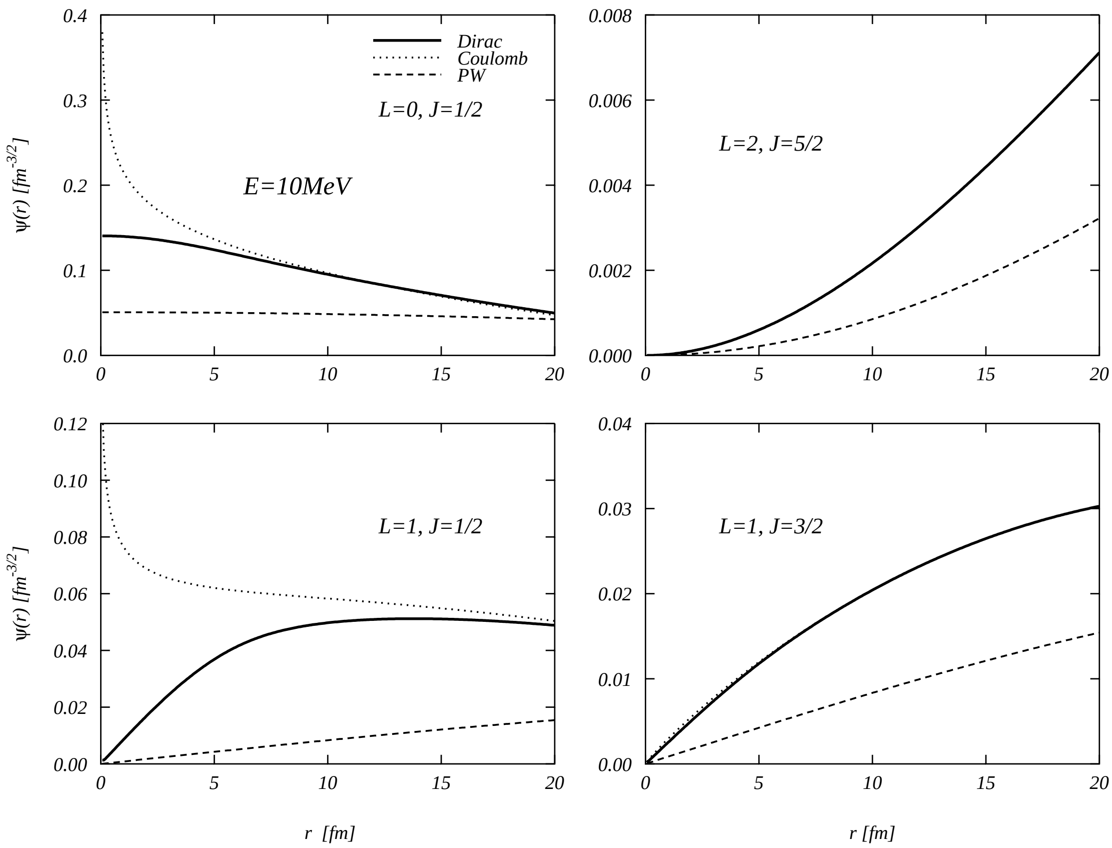

Figura 3.4: Funzioni d'onda di Dirac, funzioni coulombiane pure e funzioni di Bessel per diffusione da $^{208}_{82}$Pb per energia cinetica di $10MeV$.

funzione d'onda di Bessel approssima la funzione d'onda di Dirac per i valori più grandi di momento angolare. Le onde piane non costituiscono un'adeguata descrizione delle funzioni d'onda di Dirac per il nucleo di ${}^{208}_{82}$Pb. La funzione d'onda di Dirac, nel caso del bersaglio più leggero, è invece ben descritta dalla funzione d'onda puramente coulombiana, ciò è dovuto alla bassa energia del proiettile e quindi al basso momento trasferito che non permette una buona risoluzione dei dettagli della distribuzione di carica del nucleo bersaglio.
Nel caso del ${}^{208}_{82}$Pb, le funzioni d'onda coulombiane per $L = 0$ e $J = 1/2$ e $L = 1$ e $J = 1/2$ si discostano in modo evidente dalle funzioni d'onda di Dirac. Per verificare invece la coincidenza delle due funzioni d'onda nel limite di carica puntiforme presentiamo in fig. 3.5 le funzioni d'onda ottenute per un potenziale coulombiano generato dalla carica del ${}^{208}_{82}$Pb concentrata in sfere uniformemente cariche di raggio differente: da $7fm$ (che possiamo considerare una stima del raggio del ${}^{208}_{82}$Pb) fino a $0fm$ cioè per una carica puntiforme. Osserviamo come dalla funzione d'onda di Dirac si passa alla divergente funzione coulombiana pura per piccoli valori di r al diminuire del raggio considerato. Per ottenere una funzione d'onda puramente coulombiana dobbiamo porre attenzione ad un problema di calcolo numerico che si presenta nel caso di onda s: l'espressione che compare in parentesi quadre nella (2.4) contiene due termini opposti che matematicamente si annullano ma numericamente producono una distorsione della funzione d'onda. Riportiamo in Appendice I i dettagli di come abbiamo risolto il problema.

Analizziamo ora i grafici riportati nelle fig. 3.6 e fig. 3.7 ottenuti per

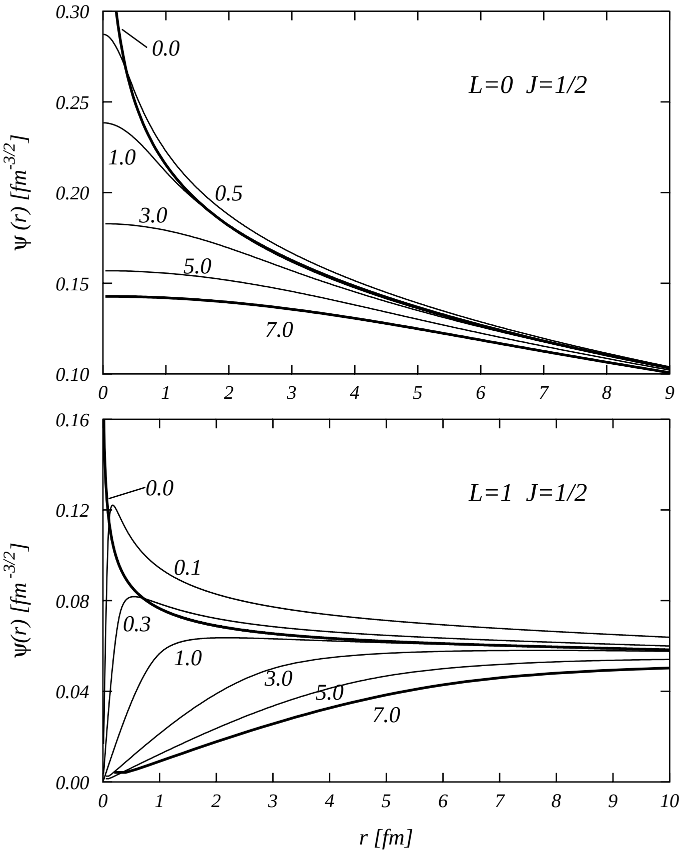

Figura 3.5: Funzioni d'onda di Dirac per la diffusione da un nucleo di carica pari a quella del $^{208}_{82}$Pb ma di raggio differente per elettrone di energia cinetica di $10MeV$. Su ogni curva è riportato il valore del raggio considerato espresso in fm.

energia cinetica di $1 MeV$ per ${}^{16}_{8}$O e ${}^{208}_{82}$Pb rispettivamente.
Osserviamo come nel caso dell'${}^{16}_{8}$O le funzioni d'onda coulombiane si sovrappongano a quelle di Dirac mentre le onde piane se ne discostino, in special modo per i valori inferiori di momento angolare. Per il ${}^{208}_{82}$Pb le onde piane sono assolutamente inadeguate per descrivere le funzioni d'onda di Dirac mentre le funzioni d'onda coulombiane si sovrappongono bene tranne le divergenze per bassi valori della coordinata radiale, già osservate in modo più pronunciato per energia cinetica di $10 MeV$. Dai grafici possiamo osservare anche come, per energia cinetica dell'elettrone incidente di $1 MeV$, le onde che contribuiscono in maniera significativa sono le onde con $L = 0$ e $J = 1/2$ e $L = 1$ e $J = 1/2$ sia nel caso dell'${}^{16}_{8}$O che del ${}^{208}_{82}$Pb.

3.2 Prescrizioni

L'Approssimazione di Born delle Onde Piane (PWBA) descrive le funzioni d'onda dei leptoni carichi che colpiscono un nucleo tramite le onde piane trascurando l'effetto dell'interazione coulombiana fra il proiettile e il nucleo bersaglio. Riportiamo in questo paragrafo alcune delle approssimazioni più usate in letteratura per correggere le onde piane dalla presenza del campo di Coulomb.

Un primo fenomeno prodotto dalla presenza del campo coulombiano del nucleo consiste nell'accelerazione dell'elettrone incidente e la decelerazione di quello uscente. Questo significa che il momento trasferito è maggiore di quello stimato come differenza tra gli impulsi asintotici. Per considerare

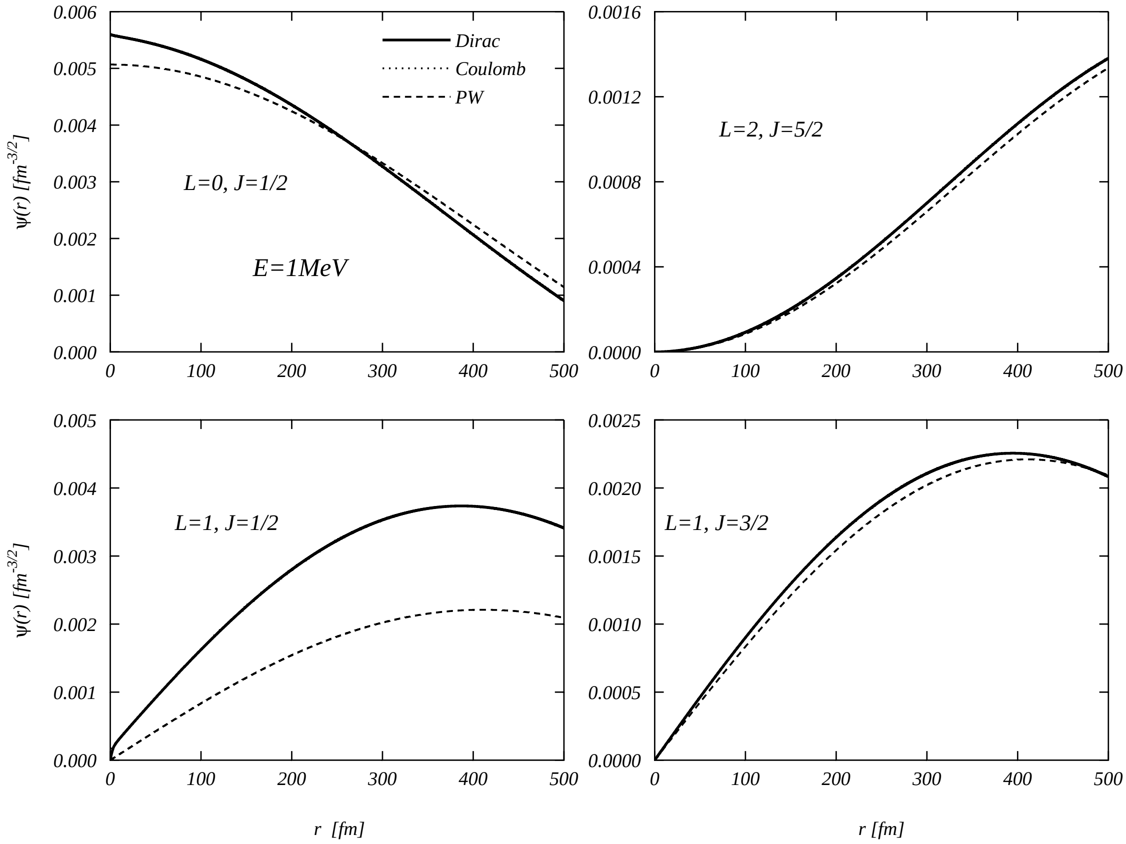

Figura 3.6: Funzioni d'onda di Dirac, funzioni coulombiane pure e funzioni di Bessel per diffusione da ${}^{16}_{8}$O per energia cinetica di $1MeV$.

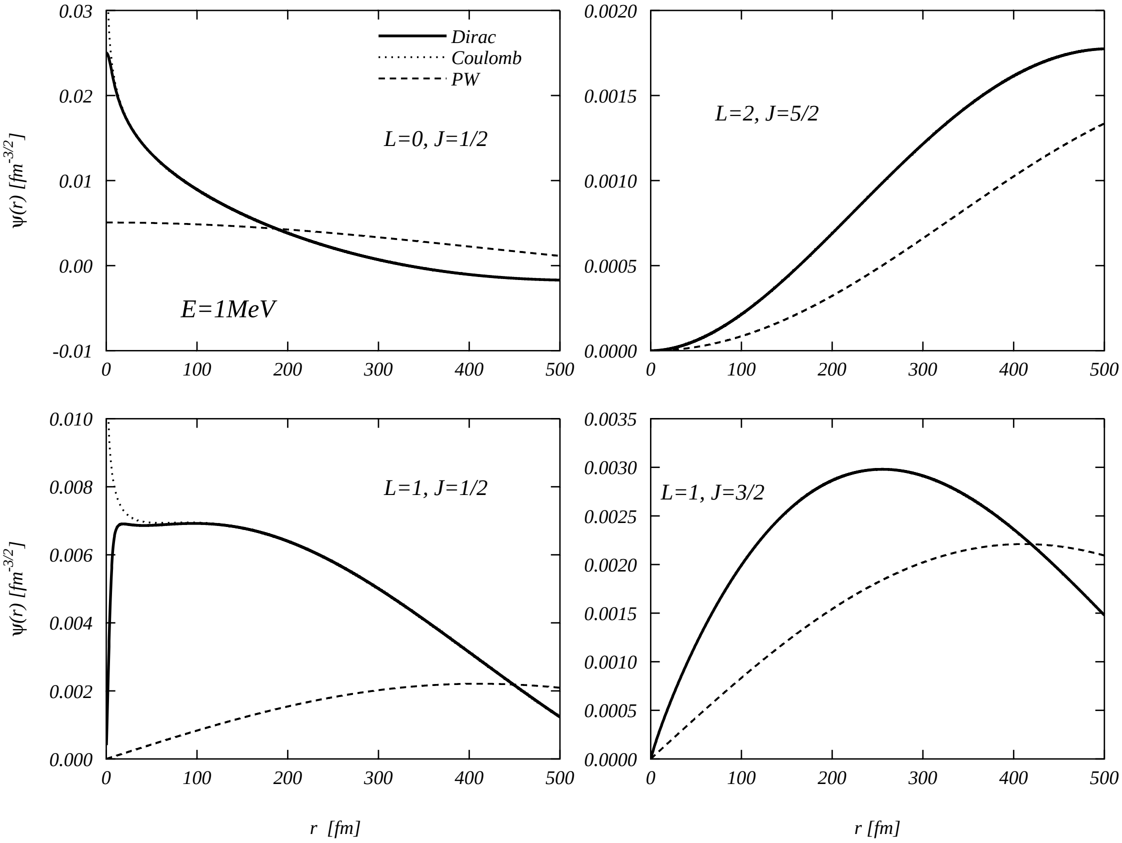

Figura 3.7: Funzioni d'onda di Dirac, funzioni coulombiane pure e funzioni di Bessel per diffusione da $^{208}_{82}$Pb per energia cinetica di $1MeV$.

questo effetto Czyż e Gottfried [Tra01] [Czy63] hanno introdotto un momento effettivo trasferito nel seguente modo:

$$\boldsymbol{q}_{eff} = \boldsymbol{p}_{i,eff} - \boldsymbol{p}_{f,eff} = \boldsymbol{q} + (\frac{\boldsymbol{p}_i}{|\boldsymbol{p}_i|} - \frac{\boldsymbol{p}_f}{|\boldsymbol{p}_f|})\overline{V}_C \tag{3.1}$$

avendo indicato con $\boldsymbol{q}$ il momento trasferito misurato nel sistema del laboratorio:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f \tag{3.2}$$

dove $\boldsymbol{p}_i$ e $\boldsymbol{p}_f$ sono rispettivamente i momenti asintotici iniziale e finale dell'elettrone. L'energia di interazione coulombiana tra l'elettrone e il nucleo bersaglio è rappresentata da $\overline{V}_C$.
Il momento effettivo della particella, in vicinanza del nucleo, può essere dunque così riscritto:

$$\boldsymbol{p}_{eff} = \boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\overline{V}_C \tag{3.3}$$

Questa approssimazione è stata ottenuta in un regime ultrarelativistico trascurando quindi la massa della particella incidente. La relazione che lega l'energia iniziale (e finale) dell'elettrone, nel sistema di riferimento del laboratorio, al suo momento iniziale (e finale) è dunque data da:

$$E_{i,f} = |\boldsymbol{p}_{i,f}| \tag{3.4}$$

Per valutare $\overline{V}_C$ gli autori hanno utilizzato uno sviluppo di Taylor dell'interazione coulombiana attorno l'origine e hanno considerato solo il termine di ordine zero ossia il valore del potenziale al centro del nucleo: $V_C(0)$. Quindi, per un modello nucleare di una sfera uniforme di carica Ze e raggio R, $\overline{V}_C$ è dato dall'espressione:

$$\overline{V}_C \approx V_C(0) = -\frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R} \tag{3.5}$$

In questo modello, la funzione d'onda che descrive l'elettrone è approssimata nel seguente modo:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{p}_{eff}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.6}$$

Un altro fenomeno prodotto dal campo coulombiano è la focalizzazione delle funzioni d'onda. L'attrazione prodotta dal nucleo concentra la densità di probabilità di trovare l'elettrone diffuso nelle vicinanze del nucleo. Per considerare questo effetto Rosenfelder [Tra01] [Ros80] ha usato la conservazione della corrente e ha proposto di utilizzare un fattore $|\boldsymbol{p}_{eff}|/|\boldsymbol{p}|$ che modifica le funzioni d'onda nel modo seguente:

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \frac{|\boldsymbol{p}_{eff}|}{|\boldsymbol{p}|}e^{i\boldsymbol{p}_{eff}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.7}$$

dove, come nel caso precedente:

$$\boldsymbol{p}_{eff} = \boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\overline{V}_C \tag{3.8}$$

Secondo Rosenfelder $\overline{V}_C$ è il valore medio del potenziale coulombiano. Tuttavia, nei suoi calcoli, Rosenfelder utilizza il valore $V_C(0)$. Anche in questo caso le verifiche della validità delle ipotesi sono state fatte per elettroni con energie superiori ai $100 MeV$.

Nelle precedenti approssimazioni la massa a riposo dell'elettrone è sempre stata trascurata. Per questo motivo Engel [Eng98] propone una diversa definizione di energia e momento effettivi che riportiamo di seguito:

$$E_{eff} = E - V(0) \tag{3.9}$$

$$p_{eff} = \sqrt{E_{eff}^2 - m^2} \tag{3.10}$$

dove E è l'energia totale della particella. Engel ha elaborato inoltre un modo di estendere la Effective Momentum Approximation di Rosenfelder a particelle massive quali i muoni. Per quanto riguarda i muoni di bassa energia, Engel, sulla base di considerazioni semi-empiriche, suggerisce di utilizzare l'espressione

$$\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{p}_{eff}|E_{eff}}{|\boldsymbol{p}|E}} e^{i\boldsymbol{p}_{eff}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.11}$$

al posto della (3.7).

Nel nostro lavoro abbiamo studiato la validità di una definizione di energia effettiva simile a quella di Engel che utilizzi però, al posto del potenziale calcolato al centro del nucleo, il potenziale medio generato su tutto lo spazio:

$$E_{eff} = E - \frac{1}{R}\int_0^R V(r')dr' \tag{3.12}$$

dove E è l'energia totale della particella e R è il raggio del nucleo dato da:

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \tag{3.13}$$

e dove, come stima di r_0, assumiamo la (2.23) per nuclei con $A \leq 16$ e la (2.21) per nuclei con $A > 16$. Nel seguito chiameremo hp1 questa prescrizione.

Abbiamo studiato anche la validità di momento effettivo che esula dalle trattazioni presentate perché considera il momento dell'elettrone come una quantità dipendente da r. Definiamo l'energia effettiva della particella nel campo coulombiano del nucleo bersaglio come:

$$E_{eff}(\boldsymbol{r}) = E - \frac{1}{r}\int_0^r V(r')dr' \tag{3.14}$$

Quindi definiamo:

$$p_{eff}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{E^2_{eff}(\boldsymbol{r}) - m^2} \tag{3.15}$$

Nel prossimo paragrafo questa prescrizione sarà identificata come hp2.

3.3 Studio delle diverse prescrizioni

Come già abbiamo accennato, l'ipotesi di momento effettivo formulata da Rosenfelder è stata costruita in regime ultrarelativistico trascurando la massa a riposo dell'elettrone. Essa viene invece presa in considerazione dall'ipotesi di Engel. Risulta quindi significativo analizzare le varie ipotesi per differenti regimi energetici: un'energia cinetica dell'elettrone incidente di $100MeV$, un'energia di $1MeV$, confrontabile quindi con la massa a riposo dell'elettrone, e un'energia intermedia di $10MeV$. Vogliamo anche analizzare la validità di tali ipotesi per differenti valori del momento angolare dati dalla (2.24). Il nostro intento è anche quello di verificare le ipotesi al variare delle dimensioni del nucleo bersaglio e della sua carica per questo consideriamo il caso di un nucleo leggero quale l'$^{16}_{8}$O e di un nucleo pesante quale il $^{208}_{82}$Pb.

Analizziamo dapprima la diffusione da $^{16}_{8}$O. In fig. 3.8 riportiamo la funzione d'onda di Dirac e la funzione di Bessel modificata con l'approssimazione di Rosenfelder e di Engel e con le nostre due ipotesi di momento effettivo, per valore del momento angolare $L = 0$ e $J = 1/2$ al variare dell'energia.

Osserviamo come in nessun regime energetico le funzioni di Bessel modificate con le prescrizioni sopra citate riproducano adeguatamente le funzioni d'onda di Dirac. Le onde piane modificate si discostano in maniera sempre più evidente al diminuire dell'energia fino a non riprodurre, per energia di $1MeV$, neppure l'ordine di grandezza della funzione d'onda di Dirac. Nel caso $E = 1MeV$ l'approssimazione che meglio riproduce la corretta funzione d'onda è l'approssimazione hp1 in cui utilizziamo il potenziale medio per calcolare E_{eff} (eq. (3.12)). Il confronto è presentato nel pannello b della figura. A $100MeV$ le diverse approssimazioni, pur non riproducendo l'ampiezza della funzione d'onda di Dirac, ne riproducono adeguatamente la posizione dei massimi e dei minimi.

Seguono, in fig. 3.9, grafici analoghi a quelli presentati in fig. 3.8 per valore del momento angolare $L = 1$ e $J = 1/2$.
Possiamo ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso precedente. Le differenze tra le funzioni di Bessel approssimate e le funzioni di Dirac aumentano passando da un'energia di $100MeV$ a una di $10MeV$ e quindi a un'energia di $1MeV$. Anche qui, per energia cinetica della particella incidente di $100MeV$, possiamo osservare come le funzioni d'onda piane modificate riproducono la posizione dei massimi e dei minimi, in special modo quelle ottenute con le nostre due ipotesi.

Continuiamo la nostra analisi presentando le funzioni d'onda di Dirac e quelle di Bessel approssimate per valore del momento angolare $L = 1$ ma

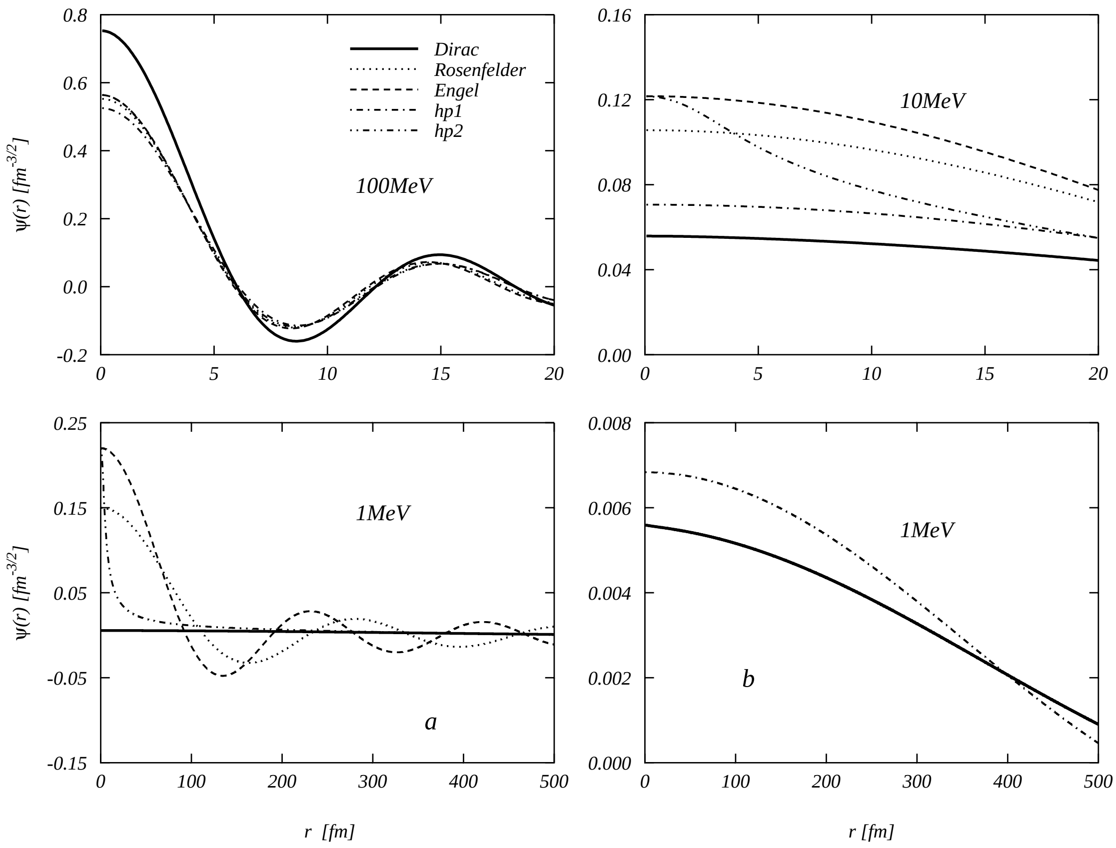

Figura 3.8: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da $^{16}_{8}$O per elettrone con $L = 0$ e $J = 1/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. La linea continua indica la soluzione corretta dell'equazione di Dirac. Le linee a tratti e a punti indicano le funzioni d'onda ottenute utilizzando le prescrizioni di momento effettivo di Engel, eq. (3.10), e Rosenfelder, eq. (3.7), rispettivamente. Con hp1 e hp2 presentiamo i risultati ottenuti utilizzando E_{eff} data dalla (3.12) e quindi p_{eff} dato dalla (3.15).

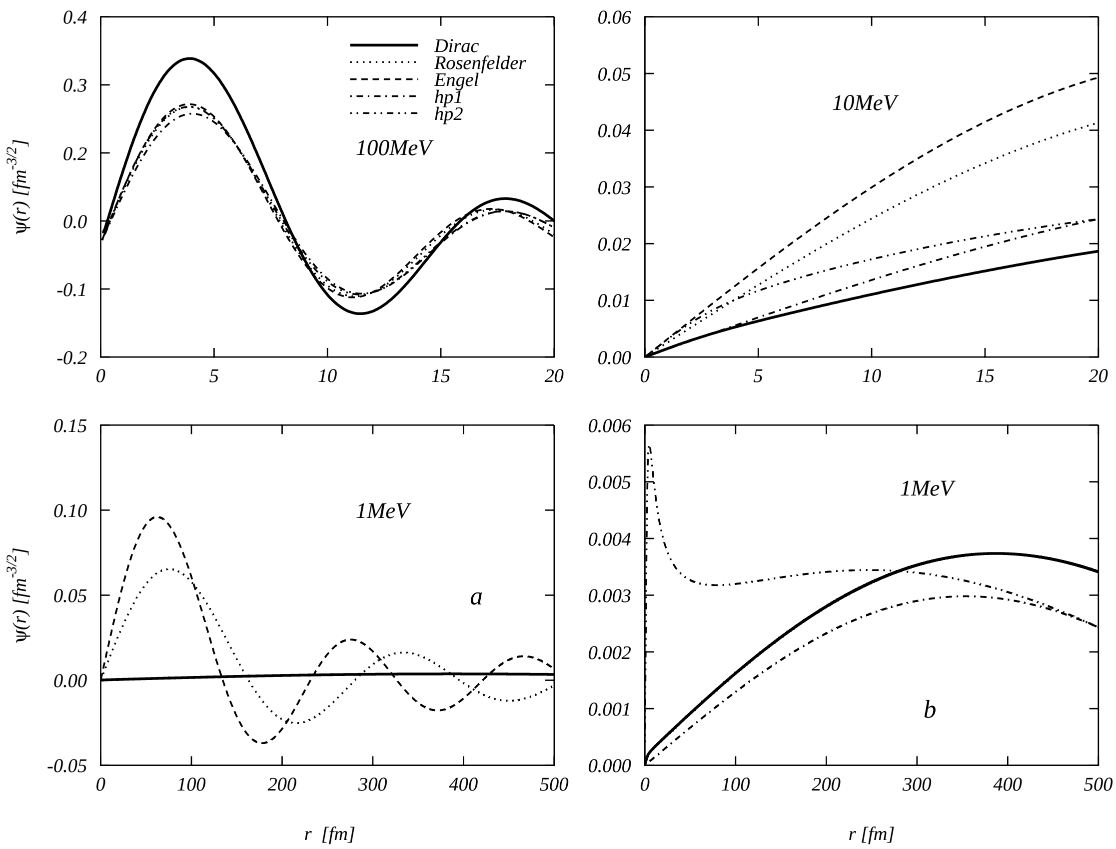

Figura 3.9: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da $^{16}_{8}$O per elettrone con $L = 1$ e $J = 1/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

$J = 3/2$ (vedi fig. 3.10).

Anche in questo caso per energie di $10MeV$ e di $1MeV$ le funzioni d'onda approssimate non riproducono le funzioni d'onda di Dirac. Si evince però che per energie di $100MeV$ l'approssimazione di Engel riproduce la posizione del primo massimo della funzione d'onda di Dirac e la sua ampiezza, discostandosene per valori superiori della coordinata radiale. L'approssimazione di Engel, così come quella di Rosenfelder, produce una compressione eccessiva della lunghezza d'onda utilizzando quindi un momento effettivo troppo grande. Per quanto riguarda le nostre approssimazioni, come notato anche nelle figure precedenti, a $100MeV$ riproducono in modo apprezzabile la posizione dei massimi e dei minimi della funzione d'onda di Dirac. Dobbiamo ricordare come le approssimazioni che stiamo utlizzando non dipendano dal valore di J ma solo da L per cui prescrivono una descrizione con la medesima funzione d'onda per elettroni con la stessa energia cinetica e con lo stesso valore di momento angolare L.

Come ultima analisi per la diffusione da $^{16}_{8}$O riportiamo in fig. 3.11 i risultati relativi a $L = 2$ e $J = 5/2$.

Anche per questo caso si osserva un buon accordo per un valore di energia incidente di $100MeV$. La nostra prescrizione hp1 è quella che meglio riproduce la soluzione corretta. La seconda nostra ipotesi (hp2) non riproduce adeguatamente l'ampiezza del primo massimo mentre le approssimazioni di Rosenfelder e di Engel riducono eccessivamente la lunghezza d'onda delle funzioni di Bessel così come già osservato per valori inferiori di L.

Quindi per quanto riguarda la diffusione da $^{16}_{8}$O, il regime energetico ri-

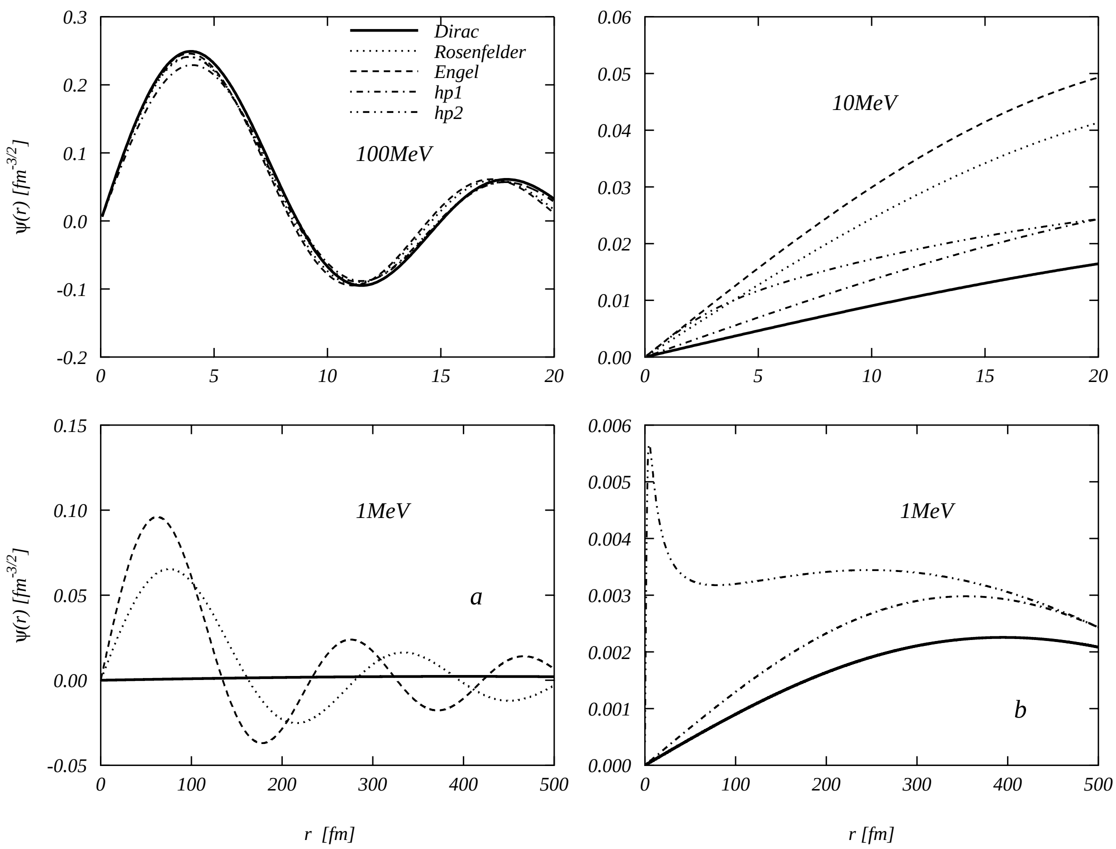

Figura 3.10: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da ${}^{16}_{8}O$ per elettrone con $L = 1$ e $J = 3/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

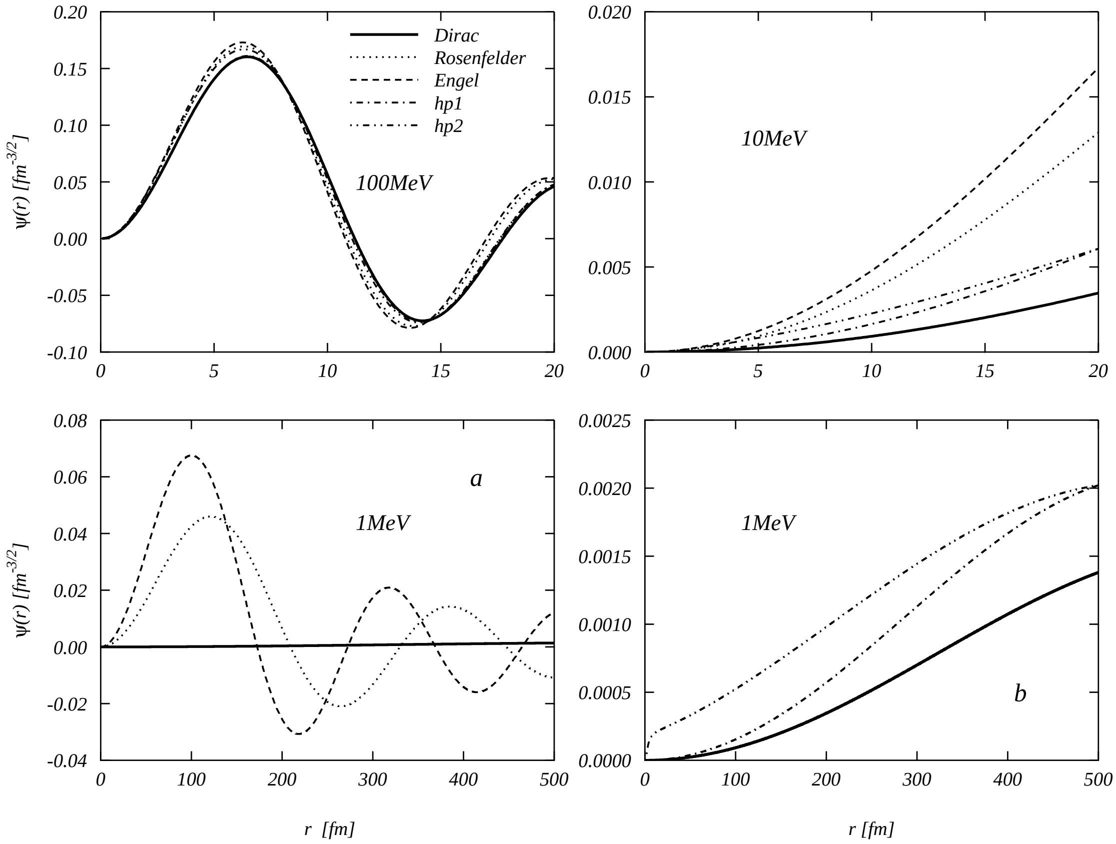

Figura 3.11: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da $^{16}_{8}$O per elettrone con $L = 2$ e $J = 5/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

sulta di grande rilevanza per la validità delle approssimazioni in quanto solo per energia cinetica dell'elettrone incidente di $100MeV$ è possibile osservare un certo accordo. Il valore di momento angolare considerato ha una rilevanza minore, comunque si osserva un miglioramento dell'accordo all'aumentare di L.

Effettuiamo ora la stessa analisi per diffusione da un nucleo pesante e precisamente da un nucleo di $^{208}_{82}$Pb. Presentiamo in fig. 3.12, fig. 3.13, fig. 3.14, fig. 3.15 i grafici analoghi rispettivamente a quelli presentati in fig. 3.8, fig. 3.9, fig. 3.10, fig. 3.11.
Possiamo fare considerazioni analoghe a quelle svolte per l'$^{16}_{8}$O: osserviamo che la validità delle prescrizioni adottate è limitata ai casi in cui i valori dell'energia incidente sono pari a $100MeV$. Per $L = 0$ e $J = 1/2$ l'approssimazione di Engel presenta un'eccessiva compressione della funzione d'onda mentre quella di Rosenfelder riesce a descrivere apprezzabilmente la funzione d'onda di Dirac. Le funzioni di Bessel modificate con le nostre ipotesi presentano un'ampiezza iniziale differente da quella della funzione d'onda di Dirac mentre riproducono adeguatamente le oscillazioni successive della funzione. Per $L = 1$ e $J = 1/2$ l'onda piana con l'approssimazione di Rosenfelder segue l'andamento del primo picco ma poi presenta una riduzione eccessiva della funzione d'onda. Tale riduzione è presente in maniera più evidente nell'approssimazione di Engel. Come negli altri casi le nostre prescrizioni non riescono a riprodurre adeguatamente l'ampiezza ma solo la posizione dei massimi e dei minimi. Analoghe considerazioni valgono per il caso $L = 1$ e $J = 3/2$ ma ora la prescrizione di Rosenfelder non riproduce più l'ampiezza

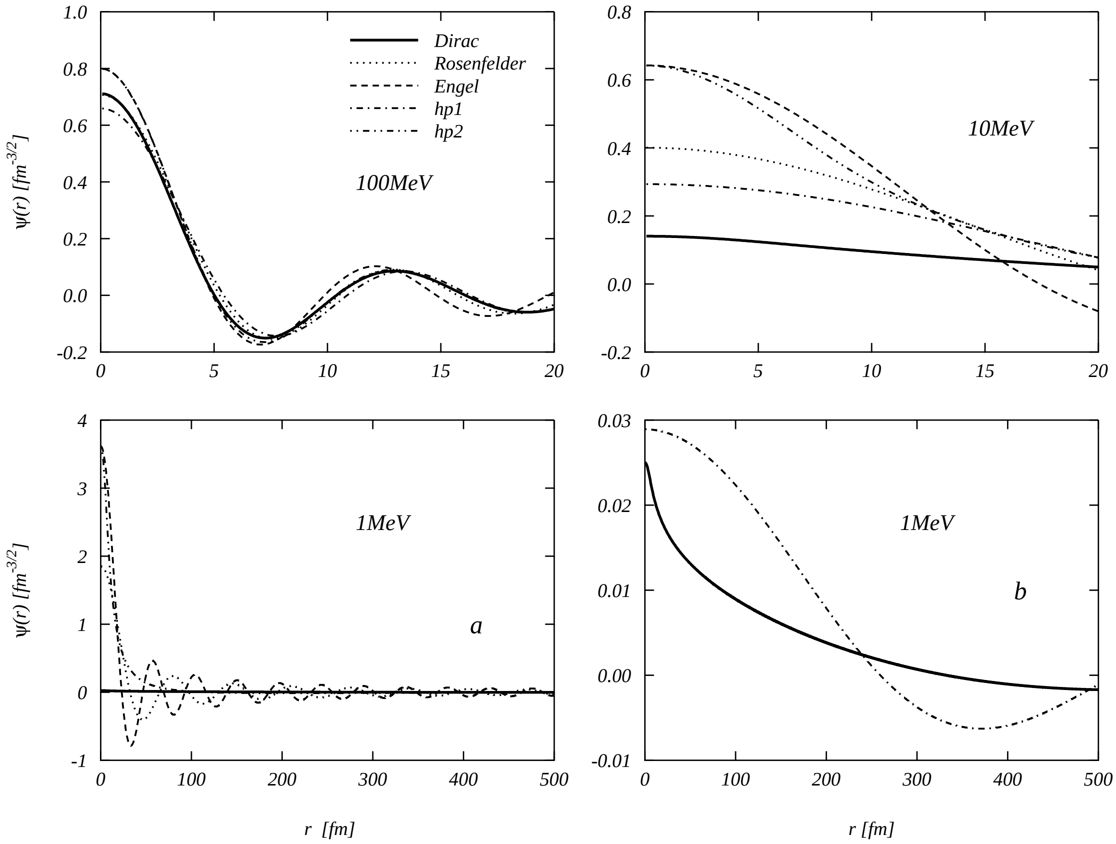

Figura 3.12: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da $^{208}_{82}$Pb per elettrone con $L = 0$ e $J = 1/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

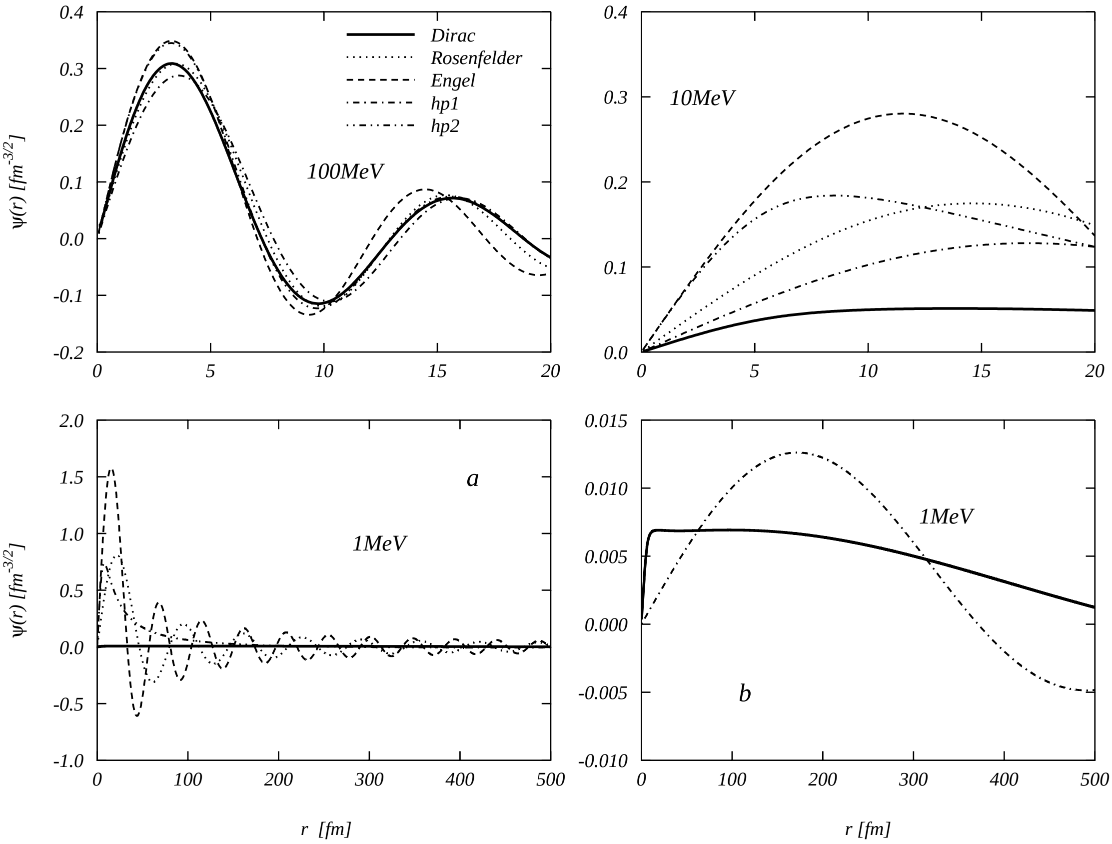

Figura 3.13: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da $^{208}_{82}$Pb per elettrone con $L = 1$ e $J = 1/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

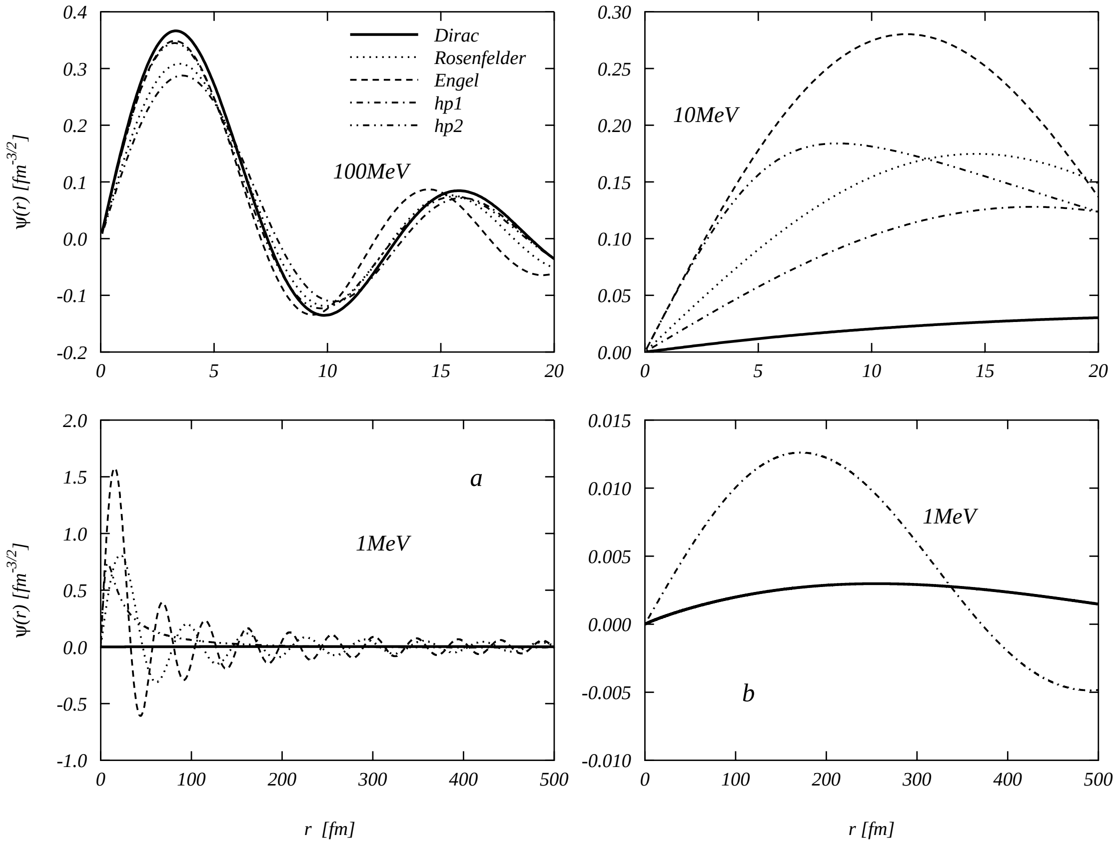

Figura 3.14: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da ${}^{208}_{82}$Pb per elettrone con $L = 1$ e $J = 3/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

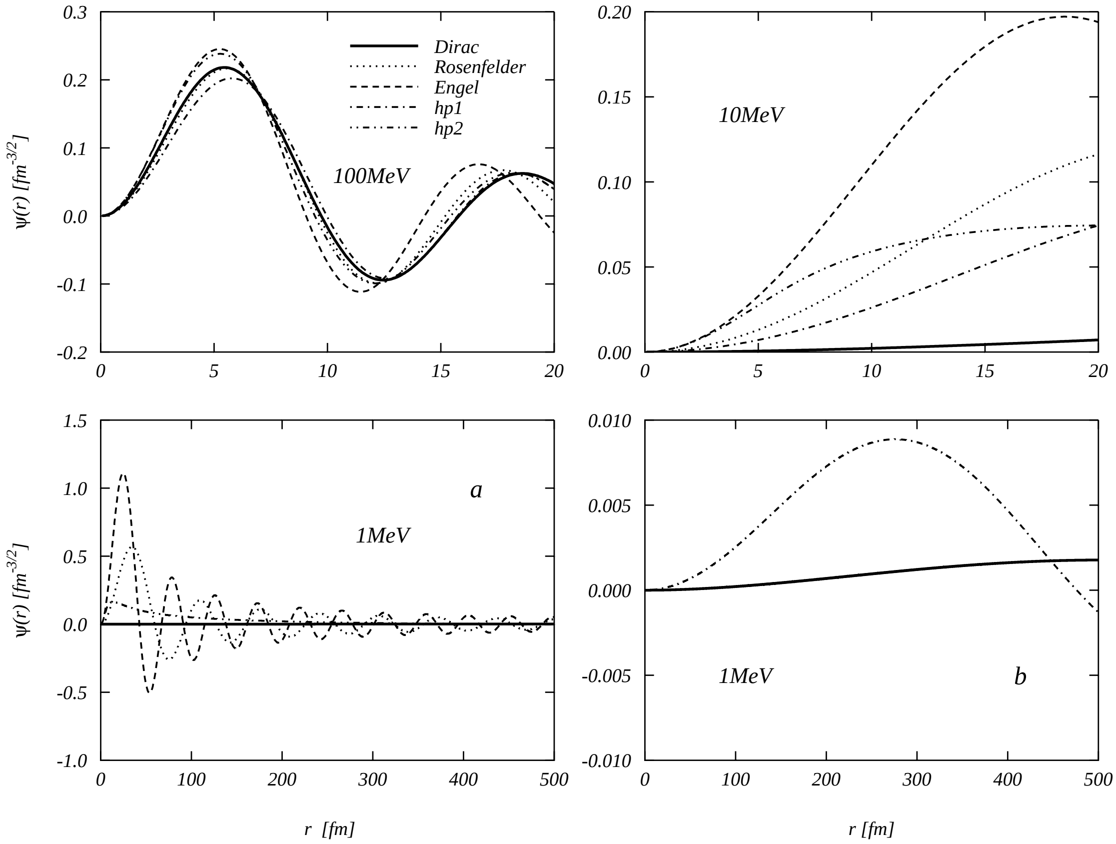

Figura 3.15: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con le approssimazioni di Rosenfelder, Engel e con le nostre due ipotesi per diffusione da ${}^{208}_{82}$Pb per elettrone con $L = 2$ e $J = 5/2$ al variare della sua energia cinetica incidente. Il significato delle linee è analogo a quello presentato in fig. 3.8.

corretta. Possiamo condurre la stessa analisi per il caso $L = 2$ e $J = 5/2$ in cui la prescrizione di Rosenfelder riproduce il primo massimo ma poi prescrive una compressione eccessiva della funzione d'onda.

Si evince quindi anche per il ${}^{208}_{82}$Pb la possibilità di utilizzare le approssimazioni per riprodurre le funzioni d'onda di Dirac solo per grandi valori dell'energia cinetica dell'elettrone incidente. Per quanto riguarda il comportamento al variare dei valori di momento angolare abbiamo anche qui che l'accordo migliora all'aumentare di L.

Passando dal nucleo leggero dell'${}^{16}_{8}$O al nucleo pesante del ${}^{208}_{82}$Pb notiamo un accordo a partire da valori inferiori del momento angolare. Per quanto riguarda l'adattamento alle funzioni di Dirac delle funzioni di Bessel differentemente modificate non si nota un'ipotesi che si possa considerare valida per tutti i casi considerati neppure ad energia di $100 MeV$. Come comportamenti generali validi per ogni valore di momento angolare e di energia cinetica possiamo osservare che le ipotesi di Rosenfelder e di Engel prescrivono un momento effettivo maggiore di quello utile per descrivere le funzioni d'onda di Dirac. Le nostre due ipotesi, pur non descrivendo adeguatamente l'ampiezza della funzione d'onda riescono però a riprodurre meglio le posizioni di massimi e minimi per energia dell'elettrone incidente di $100 MeV$. Ad un'energia di $10 MeV$ le funzioni modificate con le nostre prescrizioni, pur non riproducendo le funzioni di Dirac, riescono a riprodurne l'ordine di grandezza. Ad un'energia di $1 MeV$ solo l'ipotesi hp1 riesce a riprodurre l'ordine di grandezza della funzione d'onda di Dirac.

3.4 Funzione di Fermi

A partire dallo studio dei decadimenti β^- è stata formulata una prescrizione che riconduce le onde piane alle funzioni d'onda corrette dei processi di diffusione in regime non relativistico. Un fattore correttivo moltiplica la funzione d'onda piana ed è dato dalla radice quadrata di una funzione di Fermi [Bla79]:

$$F(Z,E) = \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}} \tag{3.16}$$

dove E è l'energia dell'elettrone incidente, Z è il numero atomico del bersaglio e l'espressione di η è:

$$\eta = \frac{Ze^2}{v} \tag{3.17}$$

avendo indicato con v la velocità asintotica dell'elettrone.

Verifichiamo la validità di questa prescrizione riportando in fig. 3.16 le funzioni di Dirac e le onde piane approssimate tramite la funzione di Fermi nel caso di onda s ed energia cinetica dell'elettrone incidente di $1MeV$ per $^{16}_{8}$O e $^{208}_{82}$Pb.

Osserviamo come in tal modo le funzioni d'onda piana non riescano a descrivere adeguatamente le funzioni d'onda di Dirac ma rappresentino comunque un'approssimazione migliore rispetto a quelle considerate in precedenza, riuscendo a riprodurre l'ordine di grandezza delle funzioni corrette. Nel caso del nucleo più leggero tali funzioni riescono, in una certa misura, anche a seguire l'andamento delle funzioni d'onda di Dirac.

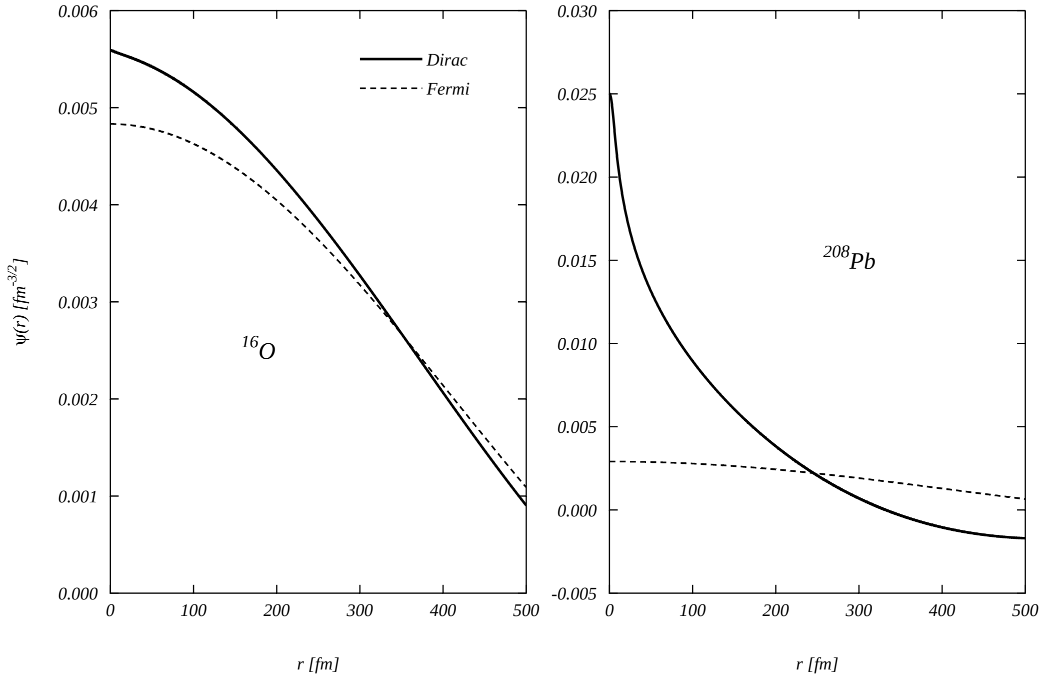

Figura 3.16: Funzioni d'onda di Dirac e funzioni di Bessel modificate con la funzione di Fermi per diffusione da ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ e da ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ per elettrone in onda s con energia cinetica incidente di $1 MeV$.

Conclusioni

Nel nostro lavoro ci siamo interessati della diffusione leptonica da nuclei. Abbiamo trovato la soluzione analitica dell'equazione differenziale di Dirac per diffusione da carica puntiforme legando le componenti radiali superiore e inferiore della funzione d'onda alle funzioni ipergeometriche confluenti di Kummer come indicato nella (1.42) e nella (1.43). Abbiamo ricavato queste soluzioni includendo la massa del leptone incidente. Solitamente invece, in letteratura, vengono risolte le equazioni differenziali per le componenti del quadrispinore trascurando la massa del leptone e ricavando dunque funzioni d'onda valide solo nel limite in cui la massa del leptone è trascurabile. Per considerare le dimensioni finite del nucleo bersaglio abbiamo poi introdotto uno sfasamento $\overline{\delta}$ definito da (1.54). Abbiamo dunque costruito un codice che permette di produrre le soluzioni dell'equazione di Dirac per un nucleo bersaglio esteso. A tal fine abbiamo riscritto le equazioni differenziali per le componenti radiali utilizzando le sostituzioni (2.3) e (2.5) e ricavando, in tal modo, due equazioni differenziali del secondo ordine prive di derivata prima. Questa formulazione ci ha permesso di utilizzare il metodo di Numerov per la loro risoluzione. Questa scelta è una novità rispetto a ciò che viene presentato in letteratura. Infatti solitamente viene risolto numericamente il sistema di equazioni differenziali del primo ordine accoppiate e questo implica l'ultilizzo di metodi quali ad esempio quello di Runge-Kutta che necessita del calcolo del termine noto per ogni ciclo risolutivo. Nel nostro caso invece è sufficiente calcolare solo una volta il termine noto per ogni punto della griglia.

Abbiamo quindi raccordato le soluzioni dell'equazione di Dirac con le onde coulombiane pure tramite lo sfasamento asintotico $\overline{\delta}$. Per ottenere numericamente le funzioni coulombiane pure, abbiamo scritto queste ultime sottoforma di una serie di potenze e quindi ricavato analiticamente le relazioni di ricorrenza tra i coefficienti includendo anche in questo caso gli effetti della massa. Una volta ottenute le funzioni d'onda di Dirac, abbiamo verificato l'influenza su di esse di parametri quali la distribuzione di carica del nucleo e la massa della particella incidente conducendo questa analisi per un elettrone proiettile. Per il primo punto abbiamo ottenuto un buon accordo tra le funzioni d'onda ottenute con diverse parametrizzazioni della distribuzione di carica. Per il secondo punto, anche a basse energie, non abbiamo trovato notevoli differenze tra le funzioni ottenute considerando la massa dell'elettrone e quelle ottenute ponendo tale massa uguale a zero. Possiamo però ragionevolmente immaginare di trovare differenze più evidenti nel considerare leptoni più pesanti. L'aver considerato la massa per ottenere le funzioni d'onda permette dunque l'utilizzo del nostro codice anche per studiare la diffusione di muoni.

Un altro aspetto analizzato è l'approssimazione delle funzioni da noi ottenute con le funzioni coulombiane pure e le onde piane. In letteratura sono proprio le funzioni di Bessel a sostituire le funzioni di Dirac nei calcoli di processi di diffusione leptonica. Dalla nostra analisi, effettuata per diffusione da elettroni di energia cinetica di $100MeV$, $10MeV$ e $1MeV$ con momento angolare dato dalla (2.24) su nuclei di $^{16}_{8}$O e $^{208}_{82}$Pb, abbiamo potuto evidenziare come le onde piane siano assolutamente inadeguate per descrivere le funzioni di Dirac a basse energie. Abbiamo osservato un leggero accordo solo per diffusione da nuclei leggeri di elettroni con alto valore del momento angolare. Le funzioni d'onda coulombiane descrivono invece adeguatamente le funzioni di Dirac a basse energie per nuclei leggeri mentre, per nuclei pesanti, presentano delle divergenze a bassi valori della coordinata radiale dovute al potenziale coulombiano puntiforme fortemente piccato nell'origine. Quindi possiamo osservare come non sia corretto descrivere le funzioni di Dirac in processi di diffusione elettronica per i regimi energetici da noi considerati, con le pure funzioni coulombiane.

Abbiamo inoltre verificato la validità di prescrizioni che si trovano in letteratura che modificano le onde piane tramite l'introduzione di un momento effettivo [Ros80] [Eng98] e abbiamo trovato come con queste prescrizioni sia possibile riprodurre in una certa misura le funzioni d'onda solo per diffusione da elettroni di $100MeV$. Già ad alte energie si può notare come tali ipotesi comportino un momento effettivo tale da ridurre eccessivamente la lunghezza d'onda della funzione di Bessel. Questo appare evidente a energie inferiori, in particolar modo a $1MeV$ dove le funzioni d'onda approssimate presentano diverse oscillazioni laddove la funzione di Dirac non le presenta. Abbiamo considerato anche due nostre ipotesi di momento effettivo che utilizzano un potenziale medio e un momento effettivo dipendente dalla coordinata radiale. Con tali ipotesi siamo riusciti a riprodurre le oscillazioni delle funzioni d'onda di Dirac anche per bassi valori di energia, ma non la loro ampiezza.

Abbiamo anche verificato la validità dell'uso di un fattore correttivo dell'onda piana, esprimibile come una funzione di Fermi, nel caso di onda s utilizzato nel caso di decadimenti β. Abbiamo potuto osservare come questa ipotesi riproduca l'ordine di grandezza delle funzioni di Dirac ma non il loro corretto andamento, notevoli differenze si hanno soprattutto per il $^{208}_{82}$Pb.

Questo nostro lavoro ha messo in evidenza come le prescrizioni normalmente usate in letteratura per simulare la presenza di un campo coulombiano non riproducano adeguatamente le corrette funzioni d'onda di Dirac nei regimi energetici da $1MeV$ a $100MeV$.

Il passo successivo sarà quello di stimare come le differenze tra le funzioni d'onda di Dirac e quelle approssimate e le onde piane si ripercuotano sul calcolo degli osservabili.

Appendice A

Il sistema di equazioni differenziali (1.25)

Dimostriamo dapprima una proprietà delle Φ_k^μ:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \widehat{\boldsymbol{r}})\Phi_k^\mu(\widehat{r}) = -\Phi_{-k}^\mu(\widehat{r}) \tag{A.1}$$

Ricordiamo la definizione di armonica sferica di spin data nella (1.15):

$$\mid l\ \frac{1}{2}\ j\ \mu\rangle = Y_{l,j}^\mu(\widehat{r}) = \sum_{m,s}\langle l\ m\ \frac{1}{2}\ s \mid j\ \mu\rangle Y_{l,m}(\widehat{r})\chi^s \tag{A.2}$$

Introduciamo la seguente notazione per i momenti angolari:

$$\widehat{a} = \sqrt{2a+1} \tag{A.3}$$

e riscriviamo il prodotto scalare $\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}}$ in coordinate sferiche:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}} = \sum_{q=0,\pm1}\sigma_q\widehat{r}_{-q}(-1)^q = -\widehat{1}\left[\sigma^1 \otimes \widehat{r}^1\right]_0^0 \tag{A.4}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo indicato tra parentesi quadre il prodotto tensoriale tra due tensori sferici irriducibili definito nel seguente modo:

$$[A^p \otimes B^q]^r_{m_r} = \sum_{m_p m_q} \langle p\ m_p\ q\ m_q \mid r\ m_r \rangle A^p_{m_p} B^q_{m_q} \tag{A.5}$$

essendo A^p e B^q due tensori sferici irriducibili di rango rispettivamente p e q.

Valutiamo adesso il valore di aspettazione di tale operatore tra due stati:

$$\langle f \mid \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}} \mid i \rangle = \langle l_f\ \frac{1}{2}\ j_f\ \mu_f \mid \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}} \mid l_i\ \frac{1}{2}\ j_i\ \mu_i \rangle \tag{A.6}$$

sfruttando la (A.4) e il teorema di Wigner-Eckart [Edm57] possiamo riscrivere la (A.6) nella seguente forma:

$$\langle f \mid \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}} \mid i \rangle = -\widehat{1}(-1)^{j_f-\mu_f} \begin{pmatrix} j_f & 0 & j_i \\ -\mu_f & 0 & \mu_i \end{pmatrix} \langle l_f\ \frac{1}{2}\ j_f \parallel \left[\sigma^1 \otimes \widehat{r}^1\right]^0_0 \parallel l_i\ \frac{1}{2}\ j_i \rangle \tag{A.7}$$

Il simbolo di Wigner *3j* [Edm57] che compare nella (A.7) è esprimibile come:

$$\begin{pmatrix} j_f & 0 & j_i \\ -\mu_f & 0 & \mu_i \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_f-\mu_f}}{\widehat{j_f}} \delta_{j_f j_i} \delta_{\mu_f \mu_i} \tag{A.8}$$

L'elemento di matrice ridotto della (A.7) è invece dato da [Edm57]:

$$\langle l_f\ \frac{1}{2}\ j_f \parallel \left[\sigma^1 \otimes \widehat{r}^1\right]^0_0 \parallel l_i\ \frac{1}{2}\ j_i \rangle = \\ = \widehat{j_f}\widehat{j_i}\widehat{0} \begin{Bmatrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ l_i & \frac{1}{2} & j_i \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \langle l_f \parallel\ \widehat{r}^1 \parallel l_i \rangle \langle \frac{1}{2} \parallel \sigma^1 \parallel \frac{1}{2} \rangle \tag{A.9}$$

Per valutare la (A.9) ricordiamo che:

$$\langle\frac{1}{2} \parallel \sigma^1 \parallel \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{6} \tag{A.10}$$

Inoltre possiamo scrivere:

$$r_m = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r Y_{1m}(\widehat{r}) \tag{A.11}$$

per cui:

$$\langle l_f \| \ \widehat{r}^1 \ \| l_i\rangle = \langle l_f \| \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1(\widehat{r}) \ \| l_i\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (-1)^{l_f} \frac{\widehat{l_f}\widehat{l_i}\widehat{1}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} l_f & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

Possiamo esplicitare il *9j* che compare nella (A.9) nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} l_f & \frac{1}{2} & j_f \\ l_i & \frac{1}{2} & j_i \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = (-1)^{l_i+\frac{1}{2}+j_f+1} \frac{\delta_{j_f j_i}}{\widehat{j_f}\widehat{1}} \begin{Bmatrix} l_f & l_i & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & j_f \end{Bmatrix} \tag{A.13}$$

Inserendo le equazioni (A.10), (A.12) e (A.13) nella (A.9) e eseguite le dovute semplificazioni, otteniamo infine:

$$\begin{aligned} &\langle l_f \ \frac{1}{2} \ j_f \parallel \left[\sigma^1 \otimes \widehat{r}^1\right]_0^0 \parallel l_i \ \frac{1}{2} \ j_i\rangle = \\ &\qquad = (-1)^{l_i+l_f+\frac{1}{2}+j_f+1} \sqrt{2} \widehat{j_i}\widehat{l_f}\widehat{l_i} \begin{Bmatrix} l_f & l_i & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & j_f \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_f & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.14}$$

Sostituendo l'espressione appena ricavata nella (A.7) e tenendo conto che :

$$\begin{Bmatrix} l_f & l_i & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & j_f \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_f & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}+j_i}}{\sqrt{6}\widehat{l_i}\widehat{l_f}} \delta_{l_f, l_i \pm 1} \tag{A.15}$$

otteniamo:

$$\langle l_f \ \frac{1}{2} \ j_f \ \mu_f \mid \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}} \mid l_i \ \frac{1}{2} \ j_i \ \mu_i \rangle = -\delta_{j_i \ j_f}\delta_{\mu_i \mu_f}\delta_{l_f, l_i \pm 1} \tag{A.16}$$

Per ottenere le due equazioni differenziali (1.25) consideriamo dapprima l'azione dell'operatore $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ sul bispinore $f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r})$. Poiché vale:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\boldsymbol{r}})^2 = I \tag{A.17}$$

dove abbiamo indicato con I la matrice identità 2×2, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) &= \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \\ &= \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\left(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\right) f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \end{aligned} \tag{A.18}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di momento angolare orbitale:

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{A.19}$$

e l'identità:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}I + i\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{A.20}$$

Utilizzando il principio di corrispondenza:

$$\boldsymbol{p} \longrightarrow -i\nabla \tag{A.21}$$

possiamo riscrivere la (A.18) come:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}\left(\frac{1}{i}r\frac{\partial}{\partial r} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{l}\right) f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \tag{A.22}$$

Utilizzando la (1.16) possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\ f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) = -i\left[\frac{d}{dr}f_k(r) + (1+k)\frac{f_k(r)}{r}\right]\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \tag{A.23}$$

Utilizzando la (A.1) e la relazione appena ricavata otteniamo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) &= -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}f_k(r)\Phi_{-k}^\mu(\widehat{r}) \\ &= i\left[\frac{d}{dr}f_k(r)+(1-k)\frac{f_k(r)}{r}\right]\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\Phi_{-k}^\mu(\widehat{r}) \\ &= -i\left[\frac{d}{dr}f_k(r)+(1-k)\frac{f_k(r)}{r}\right]\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \qquad \text{(A.24)}\end{aligned}$$

Riscriviamo ora l'equazione di Dirac (1.1) per lo spinore (1.24), adoperando la rappresentazione delle matrici α_i e β indicata nelle (1.3) e (1.4):

$$\begin{aligned}&\left[\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} V(r) & 0 \\ 0 & V(r)\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} g_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \\ if_k(r)\Phi_{-k}^\mu(\widehat{r})\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r}) \\ if_k(r)\Phi_{-k}^\mu(\widehat{r})\end{pmatrix} \qquad \text{(A.25)}\end{aligned}$$

Sviluppando le due componenti dell'equazione matriciale sopra riportata otteniamo:

$$\begin{cases} i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}g_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r})-(E+m-V(r))f_k(r)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\Phi_k^\mu(\widehat{r})=0 \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}f_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r})-i(E-m-V(r))g_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r})=0\end{cases} \qquad \text{(A.26)}$$

e facendo uso delle proprietà (A.23) e (A.24) il sistema precedente può essere riscritto:

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dr}g_k(r)+\frac{k+1}{r}g_k(r)\right]\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\Phi_k^\mu(\widehat{r})-(E+m-V(r))f_k(r)\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\Phi_k^\mu(\widehat{r})=0 \\ -\left[\frac{d}{dr}f_k(r)+\frac{1-k}{r}f_k(r)\right]\Phi_k^\mu(\widehat{r})-(E-m-V(r))g_k(r)\Phi_k^\mu(\widehat{r})=0\end{cases} \qquad \text{(A.27)}$$

Otteniamo quindi per $g_k(r)$ e $f_k(r)$ le equazioni differenziali accoppiate (1.25):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr} g_k(r) = -\dfrac{k+1}{r} g_k(r) + (E + m - V(r)) f_k(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr} f_k(r) = \dfrac{k-1}{r} f_k(r) - (E - m - V(r)) g_k(r) \end{cases}$$

Appendice B

Il sistema (1.30)

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali (1.27):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}u_1(r) = -\dfrac{k}{r}u_1(r) + (E+m-V(r))u_2(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr}u_2(r) = \dfrac{k}{r}u_2(r) - (E-m-V(r))u_1(r) \end{cases}$$

dove $V(r) = -Z\alpha/r$, definiamo le funzioni $\Phi_1(r)$ e $\Phi_2(r)$ come nella (1.28):

$$\begin{aligned} u_1(r) &= \sqrt{E+m}\,(\Phi_1(r) + \Phi_2(r)) \\ u_2(r) &= i\sqrt{E-m}\,(\Phi_1(r) - \Phi_2(r)) \end{aligned}$$

e utilizziamo i simboli introdotti nella (1.29):

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2} \\ p &= \sqrt{E^2 - m^2} \\ y &= \frac{\alpha Z E}{p} \end{aligned}$$

Otteniamo così le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \sqrt{E+m}\left(\dfrac{d}{dr}\Phi_1(r)+\dfrac{d}{dr}\Phi_2(r)\right)=-\dfrac{k}{r}\sqrt{E+m}\,(\Phi_1(r)+\Phi_2(r)) \\ \qquad\qquad +i\sqrt{E-m}\left(E+m+\dfrac{\alpha Z}{r}\right)(\Phi_1(r)-\Phi_2(r)) \\ i\sqrt{E-m}\left(\dfrac{d}{dr}\Phi_1(r)-\dfrac{d}{dr}\Phi_2(r)\right)=i\dfrac{k}{r}\sqrt{E-m}\,(\Phi_1(r)-\Phi_2(r)) \\ \qquad\qquad -\sqrt{E+m}\left(E-m+\dfrac{\alpha Z}{r}\right)(\Phi_1(r)+\Phi_2(r)) \end{cases} \tag{B.1}$$

e ricavando $\dfrac{d}{dr}\Phi_1(r)$ e $\dfrac{d}{dr}\Phi_2(r)$ otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2i\sqrt{E^2-m^2}\dfrac{d}{dr}\Phi_1(r)=-2i\dfrac{k}{r}\sqrt{E^2-m^2}\Phi_2(r) \\ \qquad -\left[(E-m)\left(E+m+\dfrac{\alpha Z}{r}\right)(\Phi_1(r)-\Phi_2(r))\right. \\ \qquad \left. +(E+m)\left(E-m+\dfrac{\alpha Z}{r}\right)(\Phi_1(r)+\Phi_2(r))\right] \\ 2i\sqrt{E^2-m^2}\dfrac{d}{dr}\Phi_2(r)=-2i\dfrac{k}{r}\sqrt{E^2-m^2}\Phi_1(r) \\ \qquad -\left[(E-m)\left(E+m+\dfrac{\alpha Z}{r}\right)(\Phi_1(r)-\Phi_2(r))\right. \\ \qquad \left. -(E+m)\left(E-m+\dfrac{\alpha Z}{r}\right)(\Phi_1(r)+\Phi_2(r))\right] \end{cases} \tag{B.2}$$

che può essere riscritto come:

$$\left\{\begin{aligned}
2i\sqrt{E^2-m^2}\frac{d}{dr}\Phi_1(r) &= -2i\frac{k}{r}\sqrt{E^2-m^2}\Phi_2(r)\\
&-\Bigg[\left(E^2-m^2\right)\left(\Phi_1(r)-\Phi_2(r)\right)+(E-m)\frac{\alpha Z}{r}\left(\Phi_1(r)-\Phi_2(r)\right)\\
&+\left(E^2-m^2\right)\left(\Phi_1(r)+\Phi_2(r)\right)+(E+m)\frac{\alpha Z}{r}\left(\Phi_1(r)+\Phi_2(r)\right)\Bigg]\\
2i\sqrt{E^2-m^2}\frac{d}{dr}\Phi_2(r) &= -2i\frac{k}{r}\sqrt{E^2-m^2}\Phi_1(r)\\
&-\Bigg[\left(E^2-m^2\right)\left(\Phi_1(r)-\Phi_2(r)\right)+(E-m)\frac{\alpha Z}{r}\left(\Phi_1(r)-\Phi_2(r)\right)\\
&-\left(E^2-m^2\right)\left(\Phi_1(r)+\Phi_2(r)\right)-(E+m)\frac{\alpha Z}{r}\left(\Phi_1(r)+\Phi_2(r)\right)\Bigg]
\end{aligned}\right. \tag{B.3}$$

Utilizzando le (1.29) possiamo rielaborarlo nel modo seguente:

$$\left\{\begin{aligned}
2ip\frac{d}{dr}\Phi_1(r) &= -2i\frac{k}{r}p\Phi_2(r)-\left[2p^2\Phi_1(r)+2\frac{\alpha ZE}{r}\Phi_1(r)+2m\frac{\alpha Z}{r}\Phi_2(r)\right]\\
2ip\frac{d}{dr}\Phi_2(r) &= -2i\frac{k}{r}p\Phi_1(r)+\left[2p^2\Phi_2(r)+2\frac{\alpha ZE}{r}\Phi_2(r)+2m\frac{\alpha Z}{r}\Phi_1(r)\right]
\end{aligned}\right. \tag{B.4}$$

e quindi:

$$\left\{\begin{aligned}
2ip\frac{d}{dr}\Phi_1(r) &= \Phi_2(r)\left(-2i\frac{k}{r}p-2m\frac{\alpha Z}{r}\right)-\Phi_1(r)\left(2p^2+2\frac{\alpha ZE}{r}\right)\\
2ip\frac{d}{dr}\Phi_2(r) &= \Phi_1(r)\left(-2i\frac{k}{r}p+2m\frac{\alpha Z}{r}\right)+\Phi_2(r)\left(2p^2+2\frac{\alpha ZE}{r}\right)
\end{aligned}\right. \tag{B.5}$$

Utilizzando adesso la variabile $x = 2ipr$, possiamo riscrivere il sistema precedente nella seguente forma:

$$\left\{\begin{aligned} -4p^2\frac{d}{dx}\Phi_1(x) &= \Phi_2(x)\left(-(2i\frac{k}{x}p)(2ip) - 2m\frac{\alpha Z}{x}(2ip)\right) \\ &\qquad - \Phi_1(x)\left(2p^2 + 2\frac{\alpha ZE}{x}(2ip)\right) \\ -4p^2\frac{d}{dx}\Phi_2(x) &= \Phi_1(x)\left(-(2i\frac{k}{x}p)(2ip) + 2m\frac{\alpha Z}{x}(2ip)\right) \\ &\qquad + \Phi_2(x)\left(2p^2 + 2\frac{\alpha ZE}{x}(2ip)\right) \end{aligned}\right. \tag{B.6}$$

da cui:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Phi_1(x) &= \Phi_2(x)\left(-\frac{k}{x} + i\frac{m\alpha Z}{px}\right) + \Phi_1(x)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\alpha ZE}{px}\right) \\ \frac{d}{dx}\Phi_2(x) &= \Phi_1(x)\left(-\frac{k}{x} - i\frac{m\alpha Z}{px}\right) - \Phi_2(x)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\alpha ZE}{px}\right) \end{aligned}\right. \tag{B.7}$$

Appendice C

Calcolo dello sfasamento coulombiano

Per trovare la forma esplicita della (1.40) elaboriamo dapprima l'espressione seguente che ivi compare:

$$S = \frac{1}{\Phi^*(r)}\frac{d}{dr}\Phi(r) - ip\left(1 + \frac{y}{pr}\right)\frac{\Phi(r)}{\Phi^*(r)} \tag{C.1}$$

Considerando l'equazione (1.38) otteniamo per la derivata della $\Phi(r)$ l'espressione:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\Phi(r) = r^{\gamma-1}e^{-ipr}\Big[&(\gamma - ipr)F(1+\gamma+iy, 1+2\gamma, 2ipr) \\ &+ r\frac{d}{dr}F(1+\gamma+iy, 1+2\gamma, 2ipr)\Big]\end{aligned} \tag{C.2}$$

Applichiamo la seguente relazione valida per le funzioni ipergeometriche confluenti [Abr70]:

$$(b-1)M(a, b-1, z) = (b-1)M(a, b, z) + zM'(a, b, z) \tag{C.3}$$

Nel nostro caso:

$$\begin{aligned} a &= 1+\gamma+iy \\ b &= 1+2\gamma \\ z &= 2ipr \end{aligned} \tag{C.4}$$

Sostituendo queste variabili nella (C.2) otteniamo la seguente espressione:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = r^{\gamma-1}e^{-ipr}\left[-(\gamma+ipr)F(1+\gamma+iy,1+2\gamma,2ipr) \right. \\ \left. +2\gamma F(1+\gamma+iy,2\gamma,2ipr)\right] \tag{C.5}$$

Sostituiamo l'espressione appena ottenuta nella (C.1) :

$$\frac{1}{\Phi^*(r)}\frac{d}{dr}\Phi(r) - ip\left(1+\frac{y}{pr}\right)\frac{\Phi(r)}{\Phi^*(r)} = \frac{e^{-2ipr}}{rF(1+\gamma-iy,1+2\gamma,-2ipr)} \\ \left[-(\gamma+iy+2ipr)F(1+\gamma+iy,1+2\gamma,2ipr) \right. \\ \left. +2\gamma F(1+\gamma+iy,2\gamma,2ipr)\right] \tag{C.6}$$

Utilizziamo adesso la proprietà di ricorrenza [Abr70]:

$$bM(a+1,b,z) - bM(a,b,z) - zM(a+1,b+1,z) = 0 \tag{C.7}$$

nel caso:

$$\begin{aligned} a &= \gamma+iy \\ b &= 2\gamma \\ z &= 2ipr \end{aligned} \tag{C.8}$$

Applicando la (C.7) a $2iprF(1+\gamma+iy, 1+2\gamma, 2ipr)$ otteniamo infine:

$$\frac{1}{\Phi^*(r)}\frac{d}{dr}\Phi(r) - ip\left(1+\frac{y}{pr}\right)\frac{\Phi(r)}{\Phi^*(r)} =$$
$$= e^{-2ipr}\frac{[2\gamma F(\gamma+iy, 2\gamma, 2ipr) - (\gamma+iy)F(1+\gamma+iy, 1+2\gamma, 2ipr)]}{rF(1+\gamma-iy, 1+2\gamma, -2ipr)} \quad (C.9)$$

Elaboriamo ulteriormente l'espressione appena ricavata utilizzando la relazione di ricorrenza:

$$(a-b)M(a, b+1, z) - aM(a+1, b+1, z) + bM(a, b, z) = 0 \quad (C.10)$$

con a, b, z date dalle (C.8), in tal modo troviamo:

$$\frac{1}{\Phi^*(r)}\frac{d}{dr}\Phi(r) - ip\left(1+\frac{y}{pr}\right)\frac{\Phi(r)}{\Phi^*(r)} = \frac{\gamma - iy}{r} \quad (C.11)$$

Infine, inserendo la (C.11) nella (1.40) otteniamo la (1.41):

$$e^{2i\eta} = -\frac{k - \dfrac{imy}{E}}{\gamma + iy}$$

dove ricordiamo che m rappresenta la massa della particella.

Appendice D

Comportamento asintotico di $g_k(r)$ e di $f_k(r)$

Consideriamo le espressioni esplicite di $g_k(r)$ e di $f_k(r)$ fornite dalle (1.42) e (1.43):

$$g_k(r) = \frac{\sqrt{E+m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\left[(\gamma+iy)e^{-ipr+i\eta}F(1+\gamma+iy,1+2\gamma,2ipr)+cc\right]$$

$$f_k(r) = \frac{i\sqrt{E-m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\left[(\gamma+iy)e^{-ipr+i\eta}F(1+\gamma+iy,1+2\gamma,2ipr)-cc\right]$$

Ricaviamo il loro comportamento asintotico utilizzando il comportamento asintotico delle funzioni ipergeometriche confluenti [Abr70]:

$$\lim_{|z|\to\infty} M(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{z} z^{a-b} \tag{D.1}$$

con:

$$\begin{aligned} a &= 1+\gamma+iy \\ b &= 2\gamma+1 \\ z &= 2ipr \end{aligned} \tag{D.2}$$

Le espressioni (1.42) e (1.43), nella regione asintotica, possono dunque essere riscritte come:

$$\lim_{r\to\infty} g_k(r) = \frac{\sqrt{E+m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\,\Gamma(2\gamma+1)\left[\frac{\gamma+iy}{\Gamma(1+\gamma+iy)} e^{ipr+i\eta}(2ipr)^{-\gamma+iy} + cc\right] \tag{D.3}$$

$$\lim_{r\to\infty} f_k(r) = \frac{i\sqrt{E-m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\,\Gamma(2\gamma+1)\left[\frac{\gamma+iy}{\Gamma(1+\gamma+iy)} e^{ipr+i\eta}(2ipr)^{-\gamma+iy} - cc\right] \tag{D.4}$$

Sfruttando adesso una proprietà delle funzioni Γ:

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) \tag{D.5}$$

con $z = \gamma + iy$, possiamo riscrivere i comportamenti precedenti come nelle (1.44) e (1.45):

$$\lim_{r\to\infty} g_k(r) = \frac{\sqrt{E+m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\,\Gamma(2\gamma+1)\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+iy)} e^{ipr+i\eta}(2ipr)^{-\gamma+iy} + cc\right]$$

$$\lim_{r\to\infty} f_k(r) = \frac{i\sqrt{E-m}}{r} N\,(2pr)^{\gamma}\,\Gamma(2\gamma+1)\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+iy)} e^{ipr+i\eta}(2ipr)^{-\gamma+iy} - cc\right]$$

Riscrivendo in rappresentazione esponenziale i numeri complessi che compaiono tra parentesi quadre:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(\gamma+iy)} &= \frac{e^{-i\arg\Gamma(\gamma+iy)}}{|\Gamma(\gamma+iy)|} \\
(2ipr)^{iy} &= e^{-\frac{\pi}{2}y} e^{iy\lg(2pr)} \\
i^{-\gamma} &= e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma} \qquad \text{(D.6)}
\end{aligned}
$$

possiamo riscrivere le espressioni appena ricavate come segue:

$$
\lim_{r\to\infty} g_k(r) = \frac{\sqrt{E+m}}{r} N \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+iy)|} e^{-\frac{\pi}{2}y} \left[e^{-i\arg\Gamma(\gamma+iy)} + e^{iy\lg(2pr)} + e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma} + e^{ipr+i\eta} + cc \right] \qquad \text{(D.7)}
$$

$$
\lim_{r\to\infty} f_k(r) = \frac{i\sqrt{E-m}}{r} N \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+iy)|} e^{-\frac{\pi}{2}y} \left[e^{-i\arg\Gamma(\gamma+iy)} + e^{iy\lg(2pr)} + e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma} + e^{ipr+i\eta} - cc \right] \qquad \text{(D.8)}
$$

Da queste discendono immediatamente la (1.46) e la (1.47):

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} g_k(r) &= \frac{2\sqrt{E+m}}{r} N \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+iy)|} e^{-\frac{\pi}{2}y} \sin(pr+\delta) \\
\lim_{r\to\infty} f_k(r) &= -\frac{2\sqrt{E-m}}{r} N \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{|\Gamma(\gamma+iy)|} e^{-\frac{\pi}{2}y} \cos(pr+\delta)
\end{aligned}
$$

Ricordiamo che abbiamo definito δ nella (1.48) come:

$$
\delta = -\arg\Gamma(\gamma+iy) + \eta - \frac{\pi}{2}\gamma + y\ln(2pr)
$$

Appendice E

Calcolo di $\overline{\delta}$

Consideriamo le espressioni (1.52) e (1.53), moltiplicando la prima per $f_k^{c,r}(r)$ e la seconda per $g_k^{c,r}(r)$ ricaviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} f_k^{c,r}(r)g_k(r) = \cos(\overline{\delta})f_k^{c,r}(r)g_k^{c,r}(r) + \sin(\overline{\delta})f_k^{c,r}(r)g_k^{c,i}(r) \\ f_k(r)g_k^{c,r}(r) = \cos(\overline{\delta})f_k^{c,r}(r)g_k^{c,r}(r) + \sin(\overline{\delta})f_k^{c,i}(r)g_k^{c,r}(r) \end{cases} \tag{E.1}$$

Sottraendo la prima delle equazioni così ricavate alla seconda otteniamo:

$$\sin(\overline{\delta}) = \frac{f_k(r)g_k^{c,r}(r) - f_k^{c,r}(r)g_k(r)}{f_k^{c,i}(r)g_k^{c,r}(r) - f_k^{c,r}(r)g_k^{c,i}(r)} \tag{E.2}$$

Moltiplicando invece la (1.52) per $f_k^{c,i}(r)$ e la (1.53) per $g_k^{c,i}(r)$ otteniamo:

$$\begin{cases} f_k^{c,i}(r)g_k(r) = \cos(\overline{\delta})f_k^{c,i}(r)g_k^{c,r}(r) + \sin(\overline{\delta})f_k^{c,i}(r)g_k^{c,i}(r) \\ f_k(r)g_k^{c,i}(r) = \cos(\overline{\delta})f_k^{c,r}(r)g_k^{c,i}(r) + \sin(\overline{\delta})f_k^{c,i}(r)g_k^{c,i}(r) \end{cases} \tag{E.3}$$

da cui, sottraendo la prima espressione alla seconda:

$$\cos(\overline{\delta}) = \frac{f_k^{c,i}(r)g_k(r) - f_k(r)g_k^{c,i}(r)}{f_k^{c,i}(r)g_k^{c,r}(r) - f_k(r)^{c,r}g_k^{c,i}(r)} \tag{E.4}$$

Dividendo la (E.2) per la (E.4) otteniamo l'espressione (1.54):

$$\tan(\overline{\delta}) = \frac{f_k(r)g_k^{c,r}(r) - f_k^{c,r}(r)g_k(r)}{f_k^{c,i}(r)g_k(r) - f_k(r)g_k^{c,i}(r)}$$

Appendice F

Equazioni (2.4) e (2.6)

Riscriviamo il sistema di equazioni differenziali (2.2)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}u_1(r) = -\dfrac{k}{r}u_1(r) + D(r)u_2(r) \\ \\ \dfrac{d}{dr}u_2(r) = \dfrac{k}{r}u_2(r) + H(r)u_1(r) \end{cases}$$

Differenziamo la prima equazione del sistema:

$$\frac{d^2}{dr^2}u_1(r) = u_2(r)\frac{d}{dr}D(r) + D(r)\frac{d}{dr}u_2(r) + \frac{k}{r^2}u_1(r) - \frac{k}{r}\frac{d}{dr}u_1(r) \tag{F.1}$$

Otteniamo $u_2(r)$ in funzione di $u_1(r)$ e della sua derivata prima dalla prima equazione:

$$u_2(r) = \frac{1}{D(r)}\left(\frac{d}{dr}u_1(r) + \frac{k}{r}u_1(r)\right) \tag{F.2}$$

Per esprimere invece la derivata prima di $u_2(r)$ in funzione di $u_1(r)$ e della sua derivata prima, sostituiamo nella seconda equazione l'espressione appena trovata per $u_2(r)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}u_2(r) &= \frac{k}{r}u_2(r) + H(r)u_1(r) \\
&= \frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\left(\frac{d}{dr}u_1(r) + \frac{k}{r}u_1(r)\right) + H(r)u_1(r) \\
&= \frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\frac{d}{dr}u_1(r) + \frac{k^2}{r^2}\frac{1}{D(r)}u_1(r) + H(r)u_1(r) \quad \text{(F.3)}
\end{aligned}$$

Sostituendo nella (F.1) le espressioni appena ricavate (F.2) e (F.3) otteniamo un'equazione differenziale del secondo ordine per $u_1(r)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dr^2}u_1(r) &= u_2(r)\frac{d}{dr}D(r) + D(r)\frac{d}{dr}u_2(r) + \frac{k}{r^2}u_1(r) - \frac{k}{r}\frac{d}{dr}u_1(r) \\
&= \frac{1}{D(r)}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)\left(\frac{d}{dr}u_1(r) + \frac{k}{r}u_1(r)\right) \\
&\quad + D(r)\left(\frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\frac{d}{dr}u_1(r) + \frac{k^2}{r^2}\frac{1}{D(r)}u_1(r) + H(r)u_1(r)\right) \\
&\quad + \frac{k}{r^2}u_1(r) - \frac{k}{r}\frac{d}{dr}u_1(r) \\
&= \frac{1}{D(r)}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)\frac{d}{dr}u_1(r) \\
&\quad + \left[\frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right) + D(r)H(r) + \frac{k(k+1)}{r^2}\right]u_1(r) \quad \text{(F.4)}
\end{aligned}$$

Introducendo a questo punto $v_1(r)$ definita nella (2.3) nel seguente modo:

$$u_1(r) = \sqrt{D(r)}\,v_1(r) \tag{F.5}$$

possiamo riscrivere la derivata prima e seconda di $u_1(r)$ come segue:

$$\frac{d}{dr}u_1(r) = \frac{1}{2\,(D(r))^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)v_1(r) + (D(r))^{\frac{1}{2}}\,\frac{d}{dr}v_1(r) \tag{F.6}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}u_1(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(D(r))^{\frac{1}{2}}}\frac{d^2}{dr^2}D(r) - \frac{1}{2}\frac{1}{(D(r))^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)^2\right]v_1(r)$$
$$+\left(\frac{1}{(D(r))^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{dr}D(r)\right)\frac{d}{dr}v_1(r) + (D(r))^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dr^2}v_1(r) \quad \text{(F.7)}$$

Sostituendo le espressioni appena trovate, nella (F.4) otteniamo la (2.4):

$$\frac{d^2}{dr^2}v_1(r) = \left[-\frac{1}{2D(r)}\frac{d^2}{dr^2}D(r) + \frac{3}{4}\frac{1}{(D(r))^2}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\frac{d}{dr}D(r) + D(r)H(r) + \frac{k(k+1)}{r^2}\right]v_1(r)$$

Procediamo in modo analogo per ricavare la (2.6). Differenziamo la seconda equazione del sistema (2.2):

$$\frac{d^2}{dr^2}u_2(r) = u_1(r)\frac{d}{dr}H(r) + H(r)\frac{d}{dr}u_1(r) - \frac{k}{r^2}u_2(r) + \frac{k}{r}\frac{d}{dr}u_2(r) \quad \text{(F.8)}$$

Otteniamo $u_1(r)$ e la sua derivata prima in funzione di $u_2(r)$ e della rispettiva derivata con un procedimento analogo a quello effettuato per ricavare (F.2) e (F.3):

$$u_1(r) = \frac{1}{H(r)}\left(\frac{d}{dr}u_2(r) - \frac{k}{r}u_2(r)\right) \quad \text{(F.9)}$$

$$\frac{d}{dr}u_1(r) = -\frac{k}{r}\frac{1}{H(r)}\frac{d}{dr}u_2(r) + \frac{k^2}{r^2}\frac{1}{H(r)}u_2(r) + D(r)u_2(r) \quad \text{(F.10)}$$

Sostituendo la (F.9) e la (F.10) nella (F.8) troviamo che $u_2(r)$ soddisfa la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2}{dr^2}u_2(r) = \frac{1}{H(r)}\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)\frac{d}{dr}u_2(r)$$
$$+\left[-\frac{k}{r}\frac{1}{H(r)}\left(\frac{d}{dr}H(r)\right) + D(r)H(r) + \frac{k(k-1)}{r^2}\right]u_2(r) \quad \text{(F.11)}$$

Introducendo ora la definizione di $v_2(r)$ data dalla (2.5):

$$u_2(r) = \sqrt{-H(r)}v_2(r)$$

possiamo riscrivere la derivata prima e seconda di $u_2(r)$ nel seguente modo:

$$\frac{d}{dr}u_2(r) = -\frac{1}{2\left(-H(r)\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)v_2(r) + \left(-H(r)\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dr}v_2(r) \qquad \text{(F.12)}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2}u_2(r) = \frac{1}{2}&\left[-\frac{1}{\left(-H(r)\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{d^2}{dr^2}H(r) - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(-H(r)\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)^2\right]v_2(r)\\ &+\left(-\frac{1}{\left(-H(r)\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{d}{dr}H(r)\right)\frac{d}{dr}v_2(r)\\ &+\left(-H(r)\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dr^2}v_2(r) \qquad \text{(F.13)}\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni così ricavate nella (F.11) otteniamo la (2.6):

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dr^2}v_2(r) = &\left[-\frac{1}{2H(r)}\frac{d^2}{dr^2}H(r) + \frac{3}{4}\frac{1}{\left(H(r)\right)^2}\left(\frac{d}{dr}H(r)\right)^2\right.\\ &\left.-\frac{k}{r}\frac{1}{H(r)}\frac{d}{dr}H(r) + D(r)H(r) + \frac{k(k-1)}{r^2}\right]v_2(r)\end{aligned}$$

Appendice G

Il metodo di Numerov

Il metodo di Numerov può essere usato per integrare equazioni differenziali del secondo ordine della forma generale:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = -g(x)y(x) + s(x) \tag{G.1}$$

dove $g(x)$ e $s(x)$ sono funzioni date, e condizioni iniziali della forma:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \end{aligned} \tag{G.2}$$

Dividiamo dunque l'intervallo spaziale di interesse in N intervalli di ampiezza x, siano x_i i nodi della griglia così ottenuta e $y_i = y(x_i)$ i valori della funzione incognita $y(x)$ in corrispondenza di tali punti. Analogamente indichiamo con g_i e s_i i valori delle funzioni $g(x)$ e $s(x)$ negli stessi punti. Al fine di ottenere un'equazione alle differenze finite sviluppiamo $y(x)$ in serie di Taylor attorno ad un punto x_n:

$$\begin{aligned} y_{n-1} = y_n - y_n' \Delta x + \frac{1}{2} y_n'' (\Delta x)^2 - \frac{1}{6} y_n''' (\Delta x)^3 \\ + \frac{1}{24} y_n'''' (\Delta x)^4 - \frac{1}{120} y_n''''' (\Delta x)^5 + O\left[(\Delta x)^6\right] \end{aligned} \tag{G.3}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + y_n' \Delta x + \frac{1}{2} y_n'' (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} y_n''' (\Delta x)^3 \\ + \frac{1}{24} y_n'''' (\Delta x)^4 + \frac{1}{120} y_n''''' (\Delta x)^5 + O\left[(\Delta x)^6\right] \end{aligned} \tag{G.4}$$

Sommando le due equazioni precedenti otteniamo:

$$y_{n+1} + y_{n-1} = 2y_n + y_n'' (\Delta x)^2 + \frac{1}{12} y_n'''' (\Delta x)^4 + O\left[(\Delta x)^6\right] \tag{G.5}$$

Dalla (G.1) abbiamo che:

$$y_n'' = -g_n y_n + s_n \tag{G.6}$$

Indicando temporaneamente con z_n la y_n'' e utilizzando per la derivata seconda di z_n l'approssimazione a tre punti abbiamo:

$$y_n'''' = z_n'' = \frac{z_{n+1} + z_{n-1} - 2z_n}{(\Delta x)^2} + O\left[(\Delta x)^2\right] \tag{G.7}$$

per cui, inserendo l'espressione appena trovata nella (G.5) e tenendo conto della (G.6) otteniamo:

$$\begin{aligned} y_{n+1} + y_{n-1} = 2y_n + (-g_n y_n + s_n) (\Delta x)^2 \\ + \frac{1}{12} (-g_{n+1} y_{n+1} + s_{n+1} - g_{n-1} y_{n-1} + s_{n-1} + 2g_n y_n - 2s_n) (\Delta x)^2 + O\left[(\Delta x)^6\right] \end{aligned} \tag{G.8}$$

da cui la formula dell'algoritmo di Numerov:

$$y_{n+1}\left[1+g_{n+1}\frac{(\Delta x)^2}{12}\right]=2y_n\left[1-5g_n\frac{(\Delta x)^2}{12}\right]-y_{n-1}\left[1+g_{n-1}\frac{(\Delta x)^2}{12}\right]$$
$$+\left(s_{n+1}+10s_n+s_{n-1}\right)\frac{(\Delta x)^2}{12}+O\left[(\Delta x)^6\right] \quad \text{(G.9)}$$

che permette di ottenere y_{n+1} a partire da y_n e y_{n-1} e quindi ricorsivamente, dalle condizioni iniziali date, tutta la funzione sull'intervallo di interesse.

Dalle condizioni iniziali è ovviamente possibile integrare muovendosi sia nella direzione degli x positivi che in quella degli x negativi, e in presenza di simmetria rispetto ad un punto di inversione basterà integrare in una direzione sola.

Appendice H

Le funzioni d'onda coulombiane

Ritroviamo in questa appendice le espressioni fornite dalla (2.12) e dalla (2.13) a partire dal sistema di equazioni differenziali (2.11) a cui devono soddisfare le (2.8). Inserendo nelle equazioni le espressioni di $G_k(r)$ e $F_k(r)$ e delle loro derivate rispettivamente date da:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}G_k(r) &= \gamma p(pr)^{\gamma-1}\sum_{i=0}^{\infty} a_i(pr)^i + p(pr)^{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty} a_i(pr)^{i-1} \qquad (H.1) \\ \frac{d}{dr}F_k(r) &= \gamma p(pr)^{\gamma-1}\sum_{i=0}^{\infty} b_i(pr)^i + p(pr)^{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty} b_i(pr)^{i-1} \qquad (H.2) \end{aligned}$$

otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty}(pr)^{\gamma-1+i}\left[p(\gamma+i+k)a_i + (E+m)b_{i-1} + p\alpha Z b_i\right] = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty}(pr)^{\gamma-1+i}\left[p(\gamma+i-k)b_i - (E-m)a_{i-1} - p\alpha Z a_i\right] = 0 \end{cases} \qquad (H.3)$$

esso ammette soluzioni solo se sussistono le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ b_0 &= \frac{\alpha Z}{\gamma - k} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
p(\gamma + i + k)a_i &= -(E+m)b_{i-1} - p\alpha Z b_i \\
p(\gamma + i - k)b_i &= +(E-m)a_{i-1} + p\alpha Z a_i
\end{aligned} \tag{H.4}
$$

Ricavando a_i dalla prima delle equazioni appena trovate e sostituendola nella seconda otteniamo:

$$
(\gamma+i-k)b_i = \frac{E-m}{p}a_{i-1} - \frac{1}{(\gamma+i+k)}\alpha Z\frac{E+m}{p}b_{i-1} - \frac{(\alpha Z)^2}{(\gamma+i+k)}b_i \tag{H.5}
$$

da questa espressione discende immediatamente la seconda delle (2.13), infine sostituendo l'espressione per b_i così ricavata, nella prima delle (H.4) otteniamo:

$$
(\gamma+i+k)a_i = -\frac{E+m}{p}b_{i-1} - \frac{1}{(\gamma+i-k)}\alpha Z\frac{E-m}{p}a_{i-1} - \frac{(\alpha Z)^2}{(\gamma+i-k)}a_i \tag{H.6}
$$

dalla cui rielaborazione ricaviamo la prima delle (2.13).

Appendice I

Limite di carica puntiforme per onda s

Consideriamo l'equazione (2.4):

$$\frac{d^2}{dr^2}v_1(r) = \left[-\frac{1}{2D(r)}\frac{d^2}{dr^2}D(r) + \frac{3}{4}\frac{1}{(D(r))^2}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\frac{d}{dr}D(r) + D(r)H(r) + \frac{k(k+1)}{r^2} \right] v_1(r)$$

dove $D(r)$ e $H(r)$ sono dati rispettivamente dalle (2.1):

$$\begin{aligned} D(r) &= E + m - V(r) \\ H(r) &= -(E - m - V(r)) \end{aligned}$$

Ricordando che possiamo scrivere:

$$\frac{k(k+1)}{r^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} \tag{I.1}$$

nel caso di momento angolare della particella incidente $L = 0$ e $J = 1/2$ l'espressione tra parentesi quadre nella (2.4) si riduce alla seguente:

$$A = -\frac{1}{2D(r)}\frac{d^2}{dr^2}D(r) + \frac{3}{4}\frac{1}{\left(D(r)\right)^2}\left(\frac{d}{dr}D(r)\right)^2 + \frac{k}{r}\frac{1}{D(r)}\frac{d}{dr}D(r) + D(r)H(r) \tag{I.2}$$

Se consideriamo il nucleo bersaglio come puntiforme allora l'espressione del potenziale è data da: $V(r) = -Z\alpha/r$. Con questa espressione otteniamo:

$$\frac{d}{dr}D(r) = -\frac{Z\alpha}{r^2} \tag{I.3}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}D(r) = 2\frac{Z\alpha}{r^3} \tag{I.4}$$

Sostituendo le espressioni appena trovate nella (I.2) otteniamo che due termini di tale espressione si annullano per ottenere l'espressione finale:

$$A = +\frac{3}{4}\frac{1}{\left(D(r)\right)^2} + D(r)H(r) \tag{I.5}$$

Bibliografia

[Abr70] M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York (1970).

[¹Ann95] R. Anni, G. Co', P. Pellegrino: *Nucl. Phys.*, **A584** (1995) 35.

[²Ann95] R. Anni, G. Co': *Nucl. Phys.*, **A588** (1995) 463.

[Bla79] J. M. Blatt, V. F. Weisskpof: *Theoretical Nuclear Physics*, Dover Publications, New York (1979).

[Czy63] W. Czyż, K. Gottfried: *Ann. of Phys.*, **25** (1963) 47.

[Edm57] A. R. Edmonds: *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Priceton University Press, Priceton (1957).

[Eng98] J. Engel: *Phys. Rev. C*, **57** (1998) 2004.

[Ros80] R. Rosenfelder: *Ann. of Phys.*, **128** (1980) 188.

[Tra01] M. Traini: *Nucl. Phys.*, **A694** (2001) 325.

Indice