



UNIVERSITÀ DEL SALENTO

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Modello a campo medio di nuclei deformati

Relatore:

Chiar.mo Prof. Giampaolo CO'

Laureanda:
Yvonne CALÒ

Anno Accademico 2014-2015

Indice

1	Introduzione	3
2	Modello a <i>shell</i> sferico	5
2.1	Modelli a campo medio	5
2.2	Particella in campo centrale	6
2.3	Interazione spin-orbita	7
3	Deformazioni nucleari	11
3.1	<i>Hamiltoniana</i> con termine di deformazione	11
4	Applicazioni specifiche	15
4.1	Calcolo delle soluzioni della hamiltoniana deformata	15
4.2	Dettagli numerici	17
5	Risultati	21
5.1	Risultati per nuclei pari-dispari	23
5.1.1	Isotopi del Neon	23
5.1.2	Isotopi del Calcio	25
5.1.3	Isotopi dello Stagno	27
5.2	Terre rare	33
6	Conclusioni	37

Capitolo 1

Introduzione

Nearly all of physics is many-body physics at the most microscopic level of understanding, appropriate to the energy scale of the particular branch of physics under consideration. Thus, the subject of quantum many-body theory (QMFT) can fairly be said to virtually strengthen from beneath all of modern physics. The fundamentally many-particle nature of nuclei, atoms, molecules, solids, and fluids are all manifestly apparent, but even the single nucleon problem is itself becoming a multiparticle problem at the deepest level of understanding. -Adelchi Fabrocini [Cov07].

Leggendo documenti in cerca di idee, la mia attenzione si è soffermata sulla frase sopra citata. È una chiara sintesi delle ragioni che hanno spinto il Professore Fabrocini a dedicare la propria vita lavorativa ai problemi inerenti i sistemi a *molti corpi*, in particolare relativi ai sistemi nucleari.

Penso sia un buon inizio trasmettere l'entusiasmo che trapela dalle parole riportate, compagno nell'affrontare la questione riguardante sistemi quantistici a *molti corpi* proposta dal mio relatore ; l'argomento suggerito è l'analisi dei nuclei atomici deformati.

Lo studio del nucleo atomico comporta non poche difficoltà a causa della complessità delle forze nucleari e del numero di particelle da cui è composto. Le difficoltà crescono all'aumentare di A , numero di massa.

Le equazioni che descrivono il sistema dinamico a *molti corpi* in regime non relativistico sono le le equazioni di Schrödinger e sono ben definite qualunque sia il numero di nucleoni. Pensare, però, di determinare in maniera esatta, cioè senza alcuna approssimazione, le soluzioni di tali equazioni è utopico (nel senso comune del termine). L'applicazione a questo problema delle più moderne tecniche di calcolo numerico richiederebbe comunque tempi superiori all'età dell'universo.

Negli anni si sono sviluppati modelli semplificati e approssimati che riescono a descrivere bene il comportamento dei nuclei e le loro proprietà sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo. L'idea alla base di tali modelli nasce spesso dal parallelismo con altre branche della fisica, come la fisica atomica, molecolare, dello stato solido e anche dell'idrodinamica.

Non esiste, però, un modello unico in grado di descrivere, in maniera unificata e coerente, tutte le evidenze sperimentali.

È interesse del presente lavoro il calcolo dello spettro energetico relativo ad una hamiltoniana che tenga conto delle deformazioni del nucleo. Come detto poco sopra, trovare la soluzione esatta al problema non è possibile e bisogna, pertanto, introdurre delle approssimazioni. Per questo studio abbiamo utilizzato un modello a campo medio, il quale ipotizza che i nucleoni si muovano, senza interagire tra loro, all'interno di un potenziale medio che li confina in una limitata regione dello spazio: il nucleo. In questo modello, il problema a molticorpi è trasformato in molti problemi ad un corpo, ognuno dei quali è facilmente risolvibile.

Questo modello è noto in letteratura come modello a *shell*, ed il suo maggiore successo consiste nel prevedere la corretta sequenza dei numeri magici. Gli osservabili che questo modello riesce a descrivere bene sono quelli dove le proprietà di tutto il sistema sono determinate dal comportamento di un singolo nucleone. Uno degli osservabili meglio descritti è il momento angolare del nucleo determinato dal momento angolare dello stato di singola particella occupato dall'ultimo nucleone spaiato.

L'accordo con i valori empirici del momento angolare dei nuclei è soddisfacente per nuclei pari-dispari vicini alla chiusura di *shell*. Per gli altri nuclei pari-dispari il modello a *shell* sferico non produce risultati soddisfacenti. Le ragioni delle discrepanze tra i dati empirici e quelli previsti dal modello a *shell* sferico possono essere varie; in questo lavoro, ci promettiamo di investigarne specificamente una: la possibilità che la sequenza dei livelli prevista dal modello sferico sia modificata da deformazioni che sono presenti in nuclei lontani dalla chiusura di *shell*. Lavoreremo sempre all'interno di un modello di campo medio, detto anche a particelle indipendenti, ma elimineremo la simmetria sferica.

Nei capitoli successivi presenterò il modello mettendo in evidenza la differenza con le previsioni del modello sferico, e poi mostrerò i risultati ottenuti applicandolo a catene di isotopi ed isotonici nucleari, medio-pesanti.

Capitolo 2

Modello a *shell* sferico

2.1 Modelli a campo medio

Affrontare il problema dello studio della struttura nucleare si traduce nel risolvere un problema a molticorpi, ovvero, in meccanica quantistica non-relativistica, nel risolvere l'equazione di Schrödinger per un insieme di A particelle che interagiscono tra loro. La soluzione di questo problema senza fare alcuna approssimazione, è estremamente complessa già per $A=12$. Tali difficoltà spingono a formulare modelli approssimati che permettano una buona descrizione dei fenomeni che si vogliono indagare.

L'approssimazione qui adottata è quella di campo medio nella quale non si considerano interazioni reciproche tra nucleoni. I nucleoni muovono indipendentemente uno dall'altro e interagiscono con un campo medio. Quindi i nucleoni, come gli elettroni, hanno livelli energetici che verranno occupati all'aumentare del numero di protoni e neutroni in accordo con il principio di esclusione di Pauli. Al riempimento completo di un certo livello energetico, o *shell*, corrisponde l'evenienza di un numero magico.

Il modello a campo medio è in grado di prevedere alcune delle evidenze empiriche come i numeri magici e lo spin dei nuclei. Tale modello attribuisce le caratteristiche nucleari al nucleone spaiato. Ad esempio, in questo modello, il momento angolare totale j di tutto il nucleo corrisponde a quello dello stato occupato da tale nucleone.

Formalmente il fatto di trattare i nucleoni come particelle indipendenti soggette ad un certo potenziale si traduce nell'aggiungere e sottrarre all'hamiltoniana nucleare un termine ad un corpo: il campo medio.

L'hamiltoniana del sistema può essere scritta come segue:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A T(i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) \\ &= \left[\sum_{i=1}^A T(i) + \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] + \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) - \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^A h(i) + \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V(i,j) - \sum_{i=1}^A V_0(i) \right] = H_0 + V_{res}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove $T(i)$ è l'energia cinetica associata al singolo nucleone, V_0 rappresenta il potenziale medio di cui esso risente, $V(i, j)$ è l'interazione reciproca tra nucleoni e la sommatoria è su tutte le particelle costituenti il nucleo.

Nel modello a campo medio si prende in considerazione solo il termine H_0 e si trascura il contributo di interazione residua V_{res} . Ogni prodotto degli autostati ϕ_i dell'hamiltoniana di singola particella $h(i)$ è autostato di H_0 . Il pedice i indica tutti i numeri quantici che caratterizzano lo stato di singola particella.

Poiché il sistema è formato da fermioni si deve garantire l'antisimmetria della funzione d'onda per lo scambio di due particelle. Il determinante di Slater di ϕ_i è un autostato di H_0 e ha le caratteristiche di antisimmetria richieste dal sistema fermionico:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_{1(x_1)} & \dots & \phi_{1(x_n)} \\ \phi_{2(x_1)} & \dots & \phi_{2(x_n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n(x_1)} & \dots & \phi_{n(x_n)} \end{vmatrix} .$$

2.2 Particella in campo centrale

Poiché il nucleo è un sistema a molticorpi che si sviluppa intorno ad un punto, esso è ben descritto in termini di potenziale centrale. Allora l'hamiltoniana di singola particella è:

$$h(i) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r_i) , \quad (2.2)$$

dove μ è la massa ridotta del nucleone e $V(r_i)$ il potenziale.

L'equazione di Schrödinger nella rappresentazione delle coordinate per una funzione d'onda $\phi_i(\mathbf{r}_i)$, che rappresenta uno stato di data energia ϵ_i , è la seguente:

$$\epsilon_i \phi_i(\mathbf{r}_i) = h(i) \phi_i(\mathbf{r}_i) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \phi_i(\mathbf{r}_i) + V(r_i) \phi_i(\mathbf{r}_i) . \quad (2.3)$$

Data la simmetria del problema conviene effettuare l'opportuno cambio in coordinate polari sferiche. Le funzioni $\phi_i(\mathbf{r}_i)$, soluzioni dell'equazione, possono essere sviluppate in serie di armoniche sferiche poiché il potenziale dipende solo da r_i ed essere scritte come:

$$\phi_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{n,l,m,\sigma} R_{nl}(r_i) Y_{lm}(\Omega_i) \chi_\sigma , \quad (2.4)$$

in cui χ_σ è lo spinore di Pauli e descrive lo spin del nucleone, Ω_i indica l'angolo solido, $Y_{lm}(\Omega_i)$ è l'armonica sferica e $R_{nl}(r_i)$ è la parte radiale della funzione d'onda che dipende solo dalla distanza dal centro.

Sostituendo la (2.4) nell'equazione agli autovalori (2.3) si trova una forma dell'equazione di Schrödinger in cui non compaiono operatori che agiscano sulla parte angolare della funzione d'onda di singola particella, infatti, le armoniche sferiche sono autostati di L^2 , i cui autovalori sono $l(l+1)\hbar^2$ con l numero intero. Nell'aver fattorizzato le funzioni d'onda come prodotto di una parte radiale, di una angolare e una di spin è possibile eliminare la dipendenza dalla parte angolare e di spin delle funzioni d'onda.

Si ottiene l'equazione radiale:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r_i} \frac{d^2}{dr_i^2} r_i + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_i^2} + V(r_i) \right] R_{nl}(r_i) = \epsilon_{nl} R_{nl}(r_i) . \quad (2.5)$$

I pedici n, l indicano i numeri quantici principale e orbitale, rispettivamente. Di conseguenza le autofunzioni e gli autovalori non dipendono più dal numero quantico m , ma soltanto da n ed l . Per un valore fissato di l , la degenerazione di ogni livello energetico è $2l + 1$ ed è dovuta ai diversi possibili valori di m .

2.3 Interazione spin-orbita

L'analisi sinora fatta non è esaustiva nella descrizione del problema nucleare. Ci sono altri fattori la cui influenza non può essere trascurata per avere accordo tra lo spettro energetico ricavato teoricamente e quello che si ottiene in sede sperimentale. Innanzitutto, bisogna tener conto dell'interazione spin-orbita.

Benché l'origine dell'interazione tra momento angolare orbitale e momento intrinseco di spin sia puramente relativistica, è possibile inserire questa interazione nell'ambito di una trattazione non relativistica aggiungendo al potenziale centrale un termine di accoppiamento spin-orbita:

$$V(r_i) = V_{centrale}(r_i) - \frac{2\alpha}{\hbar^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} ,$$

con \mathbf{L} e \mathbf{S} momento angolare totale e di spin rispettivamente, e α costante che prendiamo positiva.

Introducendo il momento angolare totale della particella, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, si vede che è possibile esprimere il prodotto scalare $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ in termini della nuova grandezza definita. Si ha:

$$J^2 = L^2 + S^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} ,$$

da cui:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) . \quad (2.6)$$

In virtù della presenza dell'interazione spin-orbita è conveniente sviluppare la funzione d'onda in termini di autostati di \mathbf{L}^2 , \mathbf{S}^2 , \mathbf{J}^2 , J_z grazie all'utilizzo dei coefficienti di Clebsh-Gordan:

$$\phi_{nljm}(\mathbf{r}_i) = R_{nlj}(r_i) \sum_{\mu, \sigma} \langle l\mu \frac{1}{2}\sigma | jm \rangle Y_{l\mu}(\Omega_i) \chi_{\sigma} = R_{nlj}(r_i) Y_{lj}^m(\Omega_i) , \quad (2.7)$$

dove è stata definita l'armonica sferica di spin Y_{lj}^m , autofunzione degli operatori J^2 , J_z , L^2 ed S^2 con autovalori $j(j+1)\hbar^2$, $m\hbar$, $l(l+1)\hbar^2$ e $\frac{3}{4}\hbar^2$, rispettivamente.

Si sono definiti gli opportuni autovalori e autovettori. Tenuto conto della (2.6), si trova una equazione in cui non compaiono operatori differenziali che agiscono sulle variabili angolari e, quindi, l'armonica sferica di spin è un fattore comune che si elide. Si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r_i} \frac{d^2}{dr_i^2} r_i + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_i^2} + V_c(r_i) - \alpha \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \right] R_{nlj}(r_i) Y_{lj}^m(\theta_i, \phi_i) \\ & = \epsilon_{nlj} R_{nlj}(r_i) Y_{lj}^m(\theta_i, \phi_i) . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Poiché j può assumere valori $l \mp \frac{1}{2}$, il contributo dato dal termine scalare $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ all'hamiltoniana è

$$-(l+1) \quad \text{per} \quad j = l - \frac{1}{2} , \quad (2.9)$$

$$l \quad \text{per} \quad j = l + \frac{1}{2} . \quad (2.10)$$

Per ogni fissato l si hanno due livelli energetici, come si può vedere dalla figura 2.1; quello con energia inferiore corrispondente a $j = l - \frac{1}{2}$, quello con energia maggiore a $j = l + \frac{1}{2}$:

$$\epsilon_{nlj} = \epsilon_{nl} + \alpha(l + 1) , \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{nlj} = \epsilon_{nl} - \alpha l , \quad (2.12)$$

dove ϵ_{nl} è l'energia di particella singola nel caso di campo centrale senza la presenza del termine di spin-orbita.

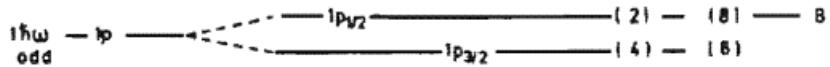


Figura 2.1: effetto dell'interazione spin-orbita sul livello $1p$. La figura è stata estratta dalla 5.1 [Rin-Sch80].

Ogni livello energetico, caratterizzato dai numeri quantici n, l e j , ha degenerazione $2j + 1$. I buoni numeri quantici che descrivono il sistema sono in questo caso n, l, s, j , e m . In questa sezione è stato mostrato l'effetto dell'interazione spin-orbita sul livello $1p$. La serie di livelli del modello a *shell* sferico con interazione spin-orbita è riportata nell'ultima sezione, in cui è utile un immediato confronto tra il modello a *shell* deformato e quello sferico.

Ogni livello è indicato secondo la notazione spettroscopica; a destra di ogni livello è indicato il numero di fermioni che possono occupare quel livello. All'aumentare del numero di nucleoni gli stati vengono occupati secondo il principio di esclusione di Pauli. Ogni livello può essere occupato da $2j + 1$ nucleoni.

Nel modello a particella singola la costruzione dello stato fondamentale del sistema di A nucleoni si effettua occupando ogni stato $|nlsm\rangle$ con al più una particella fino a che tutti gli A nucleoni

non risultano sistematici. Se il numero di protoni o neutroni è pari ad un numero magico l'ultimo nucleone occupa lo stato corrispondente alla chiusura di una *shell*. Alla chiusura della *shell* $1s - 1p$ si ha il numero magico 8, della *shell* $1d - 2s$ il 20, della *shell* $1f - 2p$ il 50. Si procede analogamente per spiegare l'evenienza dei restanti numeri magici.

Il modello a *shell* sferico con termine di interazione spin-orbita funziona bene nel prevedere i valori dei momenti angolari e dello spin dei nuclei con numero di protoni o neutroni vicini ai numeri magici. In particolare, riproduce bene gli spin dei nuclei pari-dispari.

Capitolo 3

Deformazioni nucleari

3.1 *Hamiltoniana con termine di deformazione*

Il modello estremo a particella singola, come già detto, è molto spesso in grado di prevedere i valori degli spin per i nuclei pari-dispari. Esistono però dei valori empirici degli spin dei nuclei che non trovano riscontro col modello sferico (vd. figura 3.1).

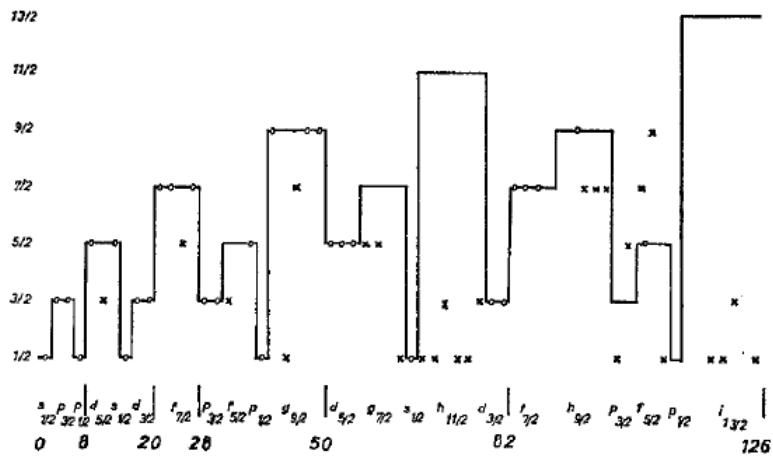


Figura 3.1: Spin dei nuclei con numero dispari di neutroni. La linea continua rappresenta la previsione del modello a *shell*, i cerchi e le crocette rappresentano, invece, i valori ricavati sperimentalmente [Eis-Gre57].

Sempre nell'ambito di un modello a particelle indipendenti, una possibile spiegazione di questa differenza può essere dovuta alla presenza di deformazioni che modificano la sequenza dei livelli di

singola particella. Ci si propone, qui, di creare un modello che tenga conto della possibile simmetria non sferica.

Facciamo l'ipotesi che il nucleo non sia sferico ma che abbia una simmetria rotazionale lungo un asse (simmetria ellissoidale); sceglieremo come asse di rotazione z . Fissiamo il sistema delle coordinate sull'asse z in corrispondenza del centro dell'ellissoide di rotazione, e utilizziamo coordinate polari sferiche. Se consideriamo il nucleo come una goccia di liquido incomprimibile, possiamo identificare un punto sulla superficie con la seguente espressione

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} P_{\lambda}(\cos \theta) \right], \quad (3.1)$$

dove R_0 è il raggio della sfera il cui volume viene conservato, α_{λ} sono coefficienti costanti, P_l sono polinomi di Legendre e θ è l'angolo definito rispetto l'asse z . Il termine $\lambda = 0$ implica una contrazione del raggio, ma conserva la simmetria sferica. I termini con $\lambda = 1$ descrivono una traslazione del sistema. Il primo termine che indica una deformazione del nucleo è quello per $\lambda = 2$.

Nel nostro modello inseriremo nell'hamiltoniana di singola particella un termine prodotto dalla deformazione di quadrupolo che, per comodità, scriveremo proporzionale all'armonica sferica di rango 2, data la relazione tra armoniche sferiche e polinomi di Legendre:

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta).$$

L'equazione di Schrödinger da risolvere ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r_i} \frac{d^2}{dr_i^2} r_i + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_i^2} + V_{centrale}(r_i) - \beta Y_{20}(\Omega_i) \right] Y_{lj}^m(\Omega_i) R_{nlj}(r_i) = \\ & = \epsilon_{nljm} Y_{lj}^m(\Omega_i) R_{nlj}(r_i). \end{aligned} \quad (3.2)$$

La costante β ha le dimensioni di un'energia. Si noti che l'autovalore di energia ϵ dipende, oltre che dai numeri quantici n, l e j , anche da m , proiezione della terza componente del momento angolare sull'asse di quantizzazione. La deviazione rispetto alla simmetria sferica della materia nucleare rompe la degenerazione su j che si ha nel caso di simmetria sferica. Il termine di deformazione inserisce nell'hamiltoniana un termine dipendente dalle variabili angolari che agisce sull'armonica sferica di spin Y_{lj}^m .

Per calcolare il valore di ϵ_{nljm} moltiplico a sinistra per $\phi_i^*(\mathbf{r}_i)$ ed integro su \mathbf{r}_i . Ottengo una correzione al valore di ϵ_{nlj} , proporzionale all'elemento di matrice

$$M_{ba}^{\alpha} = \int dr_i r_i^2 R_{n_b l_b j_b}(r_i) R_{n_a l_a j_a}(r_i) \langle l_b \frac{1}{2} j_b m_b | Y_{20}^{\alpha} | l_a \frac{1}{2} j_a m_a \rangle. \quad (3.3)$$

Per l'ortonormalizzazione delle funzioni d'onda radiali ho che

$$\int dr_i r_i^2 R_{n_b l_b j_b}(\mathbf{r}_i) R_{n_a l_a j_a}(\mathbf{r}_i) = \delta_{n_a n_b} \delta_{l_a l_b} \delta_{j_a j_b}.$$

D'ora in poi eliminerò il sottoindice a .

Per il calcolo dell'elemento di matrice angolare applico il teorema di Wigner-Eckart:

$$\begin{aligned}
 & \langle l \frac{1}{2} j m | Y_{20} | l \frac{1}{2} j m \rangle \\
 &= (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \langle l \frac{1}{2} j \| Y^{(2)} \| l \frac{1}{2} j \rangle \\
 &= (-1)^{j-m} (-1)^{j+\frac{1}{2}} (2j+1) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

dove ho usato i simboli $3j$ di Wigner invece dei coefficienti di Clebsh-Gordan e ho esplicitamente inserito l'espressione dell'elemento di matrice ridotto, indicato dalla doppia barra.

L'espressione (3.4) indica che viene rottata la degenerazione su j , compare, infatti, esplicitamente la dipendenza da m . Resta però la degenerazione su $\pm m$. Infatti, sostituendo nella (3.4) m con $-m$ e tenendo conto delle proprietà dei simboli $3j$ di Wigner, si ha che:

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{j+m} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \langle l \frac{1}{2} j \| Y^{(2)} \| l \frac{1}{2} j \rangle \\
 &= (-1)^{j+m} (-1)^{2j+2} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \langle l \frac{1}{2} j \| Y^{(2)} \| l \frac{1}{2} j \rangle \\
 &= (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \langle l \frac{1}{2} j \| Y^{(2)} \| l \frac{1}{2} j, \rangle
 \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato che m e j sono semi-integeri.

Lo spettro energetico è dato da :

$$\epsilon_{nljm} = \epsilon_{nlj} - \beta (-1)^{j-m} (-1)^{j+\frac{1}{2}} (2j+1) \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Presento ora una motivazione della scelta arbitraria del segno $-$ nell'espressione precedente. La scelta è legata al desiderio di mantenere una corrispondenza tra il segno del parametro di deformazione e quello del momento di quadrupolo. Per valori positivi del momento di quadrupolo Q si hanno nuclei prolatti, a forma di sigaro, e per $Q < 0$ si hanno nuclei oblati, a forma di disco volante, e tale corrispondenza rimane per β .

Indico qui sotto come quanto affermato può essere compreso. Per semplificare la discussione considero il potenziale centrale come una buca di oscillatore armonico anisotropo

$$H_{sp} = -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 (1 - \beta Y_{20}) r^2(\Omega). \tag{3.5}$$

Inserendo in questa ultima equazione l'espressione di Y_{20} in coordinate cartesiane

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \right). \tag{3.6}$$

ottengo

$$\begin{aligned}
 H_{sp} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \\
 &+ \frac{1}{2} \mu [(\omega_x^2)x^2 + (\omega_y^2)y^2 + (\omega_z^2)z^2], \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

dove ho definito

$$\omega_x^2 = \omega_y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right), \quad (3.8)$$

$$\omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \right). \quad (3.9)$$

Il fatto che $\omega_x^2 = \omega_y^2$ è conseguenza della simmetria ellissoidale per rotazione intorno all'asse z . Dalle (3.8) e (3.9) si deduce che per $\beta > 0$ la particella oscilla più rapidamente nel piano equatoriale $x-y$ rispetto all'oscillazione lungo l'asse z . Questo corrisponde ad avere dei nuclei prolati. Per β negativi si ha la situazione opposta, cioè oscillazioni maggiori lungo z che nel piano $x-y$ e quindi nuclei oblati.

Capitolo 4

Applicazioni specifiche

4.1 Calcolo delle soluzioni della hamiltoniana deformata

Per calcolare le soluzioni della hamiltoniana del sistema che tenga conto della deformazione (3.1) è indispensabile definire la forma del potenziale centrale. Nel nostro caso consideriamo un potenziale di Woods-Saxon che ha la seguente forma:

$$V(r_i) = \frac{U_0}{1 + e^x} + \left[\frac{\hbar c}{m_\pi c^2} \right]^2 \frac{U_{SO}}{ar_i} \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} - V_{Coulomb}(r_i) , \quad (4.1)$$

dove è stato definito $e^x = e^{\frac{r-R_0}{a}}$ e abbiamo definito con $m_\pi c^2$ la massa del pion. I parametri dei quali si deve fissare il valore sono: U_0 , la profondità della buca di potenziale, U_{SO} l'intensità dell'interazione spin-orbita, R_0 , corrispondente, circa, al raggio del nucleo e a , la diffusività.

$$R_0 = r_0 A^{1/3}; \quad V_0 \approx 50 \text{ [MeV]}; \quad a \approx 0.5 \text{ [fm]}; \quad r_0 \approx 1.2 \text{ [fm]}.$$

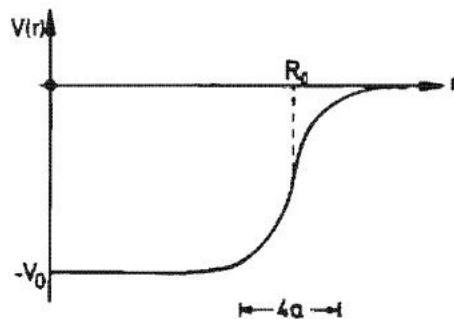


Figura 4.1: Forma del potenziale di Wood-Saxon e relativi parametri [Rin-Sch80]

Definiamo le seguenti quantità

$$V_C(r_i) = \frac{U}{1 + e^x} , \quad (4.2)$$

$$V_{S.O.}(r_i) = \left(\frac{\hbar c}{m_\pi c^2} \right) \frac{U_{SO}}{a r_i} \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} , \quad (4.3)$$

$$V_{Coulomb}(r_i) = \begin{cases} (Z-1) \frac{e^2}{r_i} & \text{se } r_i \geq R \\ \frac{(Z-1)e^2}{2R} \left[3 - \frac{r_i^2}{R^2} \right] & \text{se } r_i \leq R . \end{cases} \quad (4.4)$$

Il metodo numerico della soluzione dell'equazione di Schrödinger di singola particella è basato sullo sviluppo della parte radiale della funzione d'onda su una base di autostati di oscillatore armonico:

$$R_{nlj}(r_i) = \sum_k a_k(nlj) R_{nl}^{HO}(r_i) , \quad (4.5)$$

in cui le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico sono:

$$R_{nl}^{HO}(r_i) = \sqrt{\frac{2(m-1)!}{\Gamma(m+l+\frac{1}{2})b^3}} \left(\frac{r_i}{b} \right)^l L_{m-1}^{l+\frac{1}{2}} \left(\frac{r_i^2}{b^2} \right) e^{\frac{r_i^2}{2b^2}} , \quad (4.6)$$

dove L è il polinomio di Laguerre:

$$L_{m-1}^{l+\frac{1}{2}}(x^2) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m+l+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+l+\frac{3}{2})} (-1)^\mu \frac{1}{\mu!(m-\mu-1)!} x^{2\mu} ; \quad (4.7)$$

le funzioni Γ sono definite come

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1} ,$$

per $x > 0$, e

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} , \quad (4.8)$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar c^2}{\mu c^2 b^2} . \quad (4.9)$$

Le funzioni d'onda dell'oscillatore armonico sono soluzioni della seguente equazione di Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r_i} \frac{d^2}{dr_i^2} r_i + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_i^2} + \frac{1}{2} \omega^2 r_i^2 \right] R_{nl}^{HO}(r_i) = \epsilon_{nl}^{HO} R_{nl}^{HO}(r_i) ; \quad (4.10)$$

l'energia dipende dai soli numeri quantici n ed l :

$$\epsilon_{nl}^{HO} = \left(2n + l - \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad n = 1, 2, 3, \dots . \quad (4.11)$$

Sfruttando lo sviluppo delle funzioni d'onda sulla base di oscillatore armonico si può riscrivere la (3.1) come:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r_i} \frac{d^2}{dr_i^2} r_i + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r_i^2} + V_C(r_i) + V_{S.O.}(r_i) \right. \\ & \left. + V_{Coulomb}(r_i) - \beta Y_{20}(\Omega_i) \right] Y_{lj}^m(\Omega_i) \sum_k a_k(nlj) R_{nl}^{HO}(r_i) = \\ & = \epsilon_{nljm} Y_{lj}^m(\Omega_i) \sum_k a_k(nlj) R_{nl}^{HO}(r_i); \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sottraendo a (4.13) la (4.11) si ha:

$$\begin{aligned} & [V_C(r_i) + V_{S.O.}(r_i) + V_{Coulomb}(r_i) - \beta Y_{20}(\Omega_i) - \frac{1}{2}\omega^2 r_i^2 + \\ & + \epsilon_{nl}^{HO}] Y_{lj}^m(\Omega_i) \sum_k a_k(nlj) R_{nl}^{HO}(r_i) = \epsilon_{nljm} Y_{lj}^m(\Omega_i) \sum_k a_k(nlj) R_{nl}^{HO}(r_i). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Moltiplicando a sinistra per $R_{n'l'}^{*HO}(r_i) Y_{l'j'}^{*m'}(\Omega_i)$ e integrando:

$$\begin{aligned} & \int d^3 r_i R_{n'l'}^{*HO}(r_i) Y_{l'j'}^{*m'}(\Omega_i) \sum_k a_k(nlj) [V_C(r_i) + V_{S.O.}(r_i) + \\ & + V_{Coulomb}(r_i) - \beta Y_{20}(\Omega_i) - \frac{1}{2}\omega^2 r_i^2 + \epsilon_{nl}^{HO}] R_{nl}^{HO}(r_i) Y_{lj}^m(\Omega_i) = \\ & = \epsilon_{nljm} \int d^3 r_i R_{n'l'}^{*HO}(r_i) Y_{l'j'}^{*m'}(\Omega_i) \sum_k a_k(nlj) R_{nl}^{HO}(r_i) Y_{lj}^m(\Omega_i). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sviluppando e tenendo presente le condizioni di normalizzazione della funzione radiale e delle armoniche sferiche otteniamo:

$$\begin{aligned} & \sum_k a_k(nlj) [\epsilon_{nl}^{HO} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta_{jj'} - \beta \delta_{nn'} \int d\Omega_i Y_{l'j'}^{*m'}(\Omega_i) Y_{20}(\Omega_i) Y_{lj}^m(\Omega_i) + \\ & + \delta_{mm'} \delta_{ll'} \delta_{jj'} \int r_i^2 dr_i R_{n'l'}^{*HO}(r_i) R_{nl}^{HO}(r_i) (V_C(r_i) + V_{S.O.}(r_i) + V_{Coulomb}(r_i) - \frac{1}{2}\omega^2 r_i^2)] \\ & = \epsilon_{nljm} \sum_k a_k(nlj) \delta_{nn'} = \epsilon_{nljm} a_{k'}(nlj). \end{aligned} \quad (4.15)$$

In questo caso, fissati i numeri quantici l, j ed m si fa variare solo il numero quantico principale n , che indica il numero di nodi della funzione radiale. L'equazione precedente diventa:

$$\begin{aligned} & \sum_k a_k(nlj) [\epsilon_{nl}^{HO} \delta_{nn'} - \beta \delta_{nn'} \int d\Omega_i Y_{l'j'}^{*m'}(\Omega_i) Y_{20}(\Omega_i) Y_{lj}^m(\Omega_i) + \\ & + \int r_i^2 dr_i R_{n'l'}^{*HO}(r_i) R_{nl}^{HO}(r_i) (V_C(r_i) + V_{S.O.}(r_i) + V_{Coulomb}(r_i) - \frac{1}{2}\omega^2 r_i^2)] \\ & = \epsilon_{nljm} a_{k'}(nlj). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Il calcolo del termine di deformazione è stato presentato nel capitolo precedente, in particolare (3.4).

4.2 Dettagli numerici

Nel precedente paragrafo, ai fini della risoluzione della hamiltoniana 3.1, vengono sviluppate le funzioni d'onda su una base di oscillatore armonico. Questa tecnica trasforma il problema della soluzione numerica di un'equazione differenziale in un problema di diagonalizzazione di matrice. La soluzione dell'equazione Eq. (4.17) fornisce i valori dei coefficienti a_k dello sviluppo.

L'equazione agli autovalori è stata risolta con un codice FORTRAN che utilizza tecniche standard di diagonalizzazione.

Abbiamo studiato la convergenza numerica delle soluzioni in funzione del numero dei coefficienti dello sviluppo.

Come esempio mostriamo i risultati ottenuti per lo stato $1s_{1/2}$ dell'isotopo ^{16}O . Nella tabella 4.1 vengono riportati i valori dei coefficienti a_k e della corrispondente energia di singola particella ϵ in funzione del numero di termini dello sviluppo.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	ϵ [MeV]
1	1	0	0	0	0	0	0	0	-18.95074
2	0.99831	0.05803	0	0	0	0	0	0	-19.05614
3	0.99795	0.05014	0.03968	0	0	0	0	0	-19.13536
4	0.99780	0.04635	0.04477	-0.01550	0	0	0	0	-19.15059
5	0.99786	0.04671	0.04354	-0.01350	-0.00480	0	0	0	-19.15234
6	0.99780	0.04644	0.04420	-0.01550	-0.00147	-0.00706	0	0	-19.15668
7	0.99781	0.04652	0.04408	-0.01527	-0.00204	-0.00613	-0.00182	0	-19.15701
8	0.99780	0.04652	0.04413	-0.01539	-0.00183	-0.00659	-0.00107	-0.00138	-19.15722

Tabella 4.1: Coefficienti dello sviluppo delle funzioni d'onda ed energie corrispondenti a differenti ordini di troncamento dello sviluppo.

Guardando ai valori dell'energia si osserva convergenza sulla quarta cifra significativa dopo quattro termini di sviluppo, e sulla quinta cifra dopo sette. I risultati che presenteremo sono stati ottenuti considerando otto termini.

Il termine di deformazione inserito nell'hamiltoniana non modifica apprezzabilmente gli autovalori del sistema, anche se cambia il valore dell'energia.

A titolo d'esempio, nella tabella 5.2 sono riportati i valori delle energie, in MeV, per la componente $m = 1/2$ dello stato $1d_{5/2}$ del nucleo di ^{40}Ca al variare di β nella prima riga e i primi tre coefficienti dello sviluppo nelle successive righe.

β (Mev)	0	4.5	6.5	8.5	10	12.5	16
ϵ (Mev)	10.35	10.99	11.28	11.57	11.79	12.15	12.65
a_1	-0.49508	-0.49508	-0.49508	-0.49508	-0.49508	-0.49508	-0.49508
a_2	0.39624	0.39624	0.39624	0.39624	0.39624	0.39624	0.39624
a_3	-0.43400	-0.43400	-0.43400	-0.43400	-0.43400	-0.43400	-0.43400

Tabella 4.2: Stato caratterizzato da $j = 5/2$ e $m = 1/2$ per i protoni del ^{40}Ca . L'energia di singola particella ϵ è espressa in MeV.

Si vede dalla tabella come i coefficienti dello sviluppo a_i siano costanti al variare di β . Ciò dimostra che, dal punto di vista numerico, il termine βY_{20} nella 3.1 non ha alcuna influenza sulle funzioni d'onda di singola particella.

Per quanto riguarda i valori dei parametri del potenziale di Woods-Saxon (4.1) abbiamo considerato parametri standard presi dalla letteratura [Rin-Sch80]. I valori della profondità della buca

$U_0 = 50$ MeV e del potenziale di spin-orbita U_{so} sono identici per tutti i nuclei, e anche il valore di $a \simeq 0.5$ fm è lo stesso per tutti i nuclei. Abbiamo preso $U_{so} = -7$ MeV per i protoni e $U_{so} = -6.54$ MeV per i neutroni e $a = 0.53$ fm.

I valori di R_0 cambiano apprezzabilmente tra una catena e l'altra degli isotopi considerati; non variano molto all'interno nella catena degli isotopi di uno stesso elemento, invece. I valori dei parametri che sono stati utilizzati nel capitolo successivo sono riportati nella tabella 4.3. Nel calcolo si sono cambiati i parametri solo nel passaggio da una catena di isotopi ad un'altra; per isotopi e isotonici delle terre rare sono stati utilizzati gli stessi parametri.

Elemento	$b[fm]$	$R_0[fm]$
$^{40}_{\Lambda}Ne$	1.7	3.4
$^{40}_{\Lambda}Ca$	1.89	4.36
$^{130}_{\Lambda}Sn$	2.21	5.9
$^{164}_{\Lambda}Ho$	2.30	6.58

Tabella 4.3: Parametri del potenziale Wood-Saxon utilizzati all'interno del programma di calcolo. Il valore della profondità della buca è stato preso da [Rin-Sch80]. R_0 corrisponde, circa, al raggio nucleare e dipende dal numero di massa: $R_0 = r_0 A^{1/3}$. U_0 è la profondità della buca e b è l'ampiezza dell'oscillatore armonico: $b = \sqrt{\hbar/\mu\omega_0} = 1.010 A^{1/6}$ fm.

Capitolo 5

Risultati

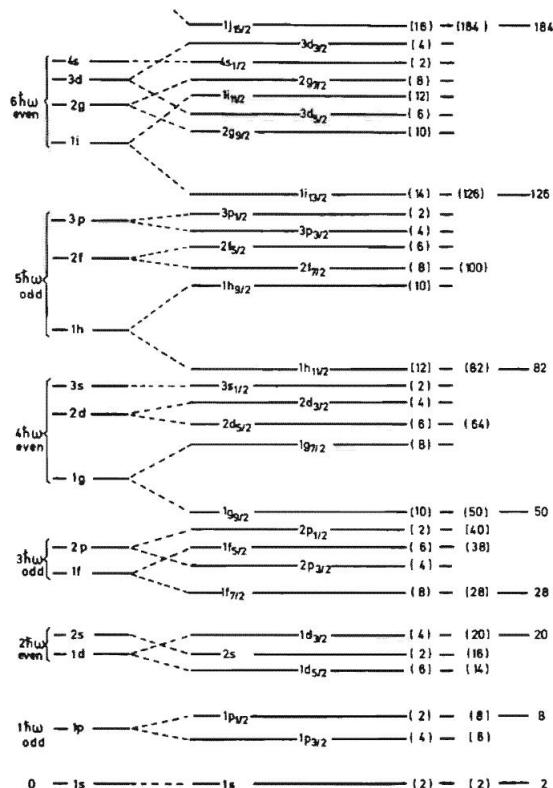


Figura 5.1: Livelli nucleari del modello a shell sferico con termine spin-orbita. [May-Jen55].

Nella figura 5.1 è riportata la sequenza dei livelli energetici per il modello a *shell* sferico con termine di interazione spin-orbita. Ogni livello può essere occupato da $2j + 1$ nucleoni; i fermioni del nucleo occupano via via i livelli disponibili e con energia inferiore.

Come già detto, nel modello a campo medio, gli osservabili del nucleo sono determinati dallo stato occupato dal nucleone spaiato. Non prenderemo, quindi, in considerazione i nuclei pari-pari

che, per effetto del termine di *pairing*, presentano spin sempre nullo. Tratteremo solo i nuclei pari-dispari.

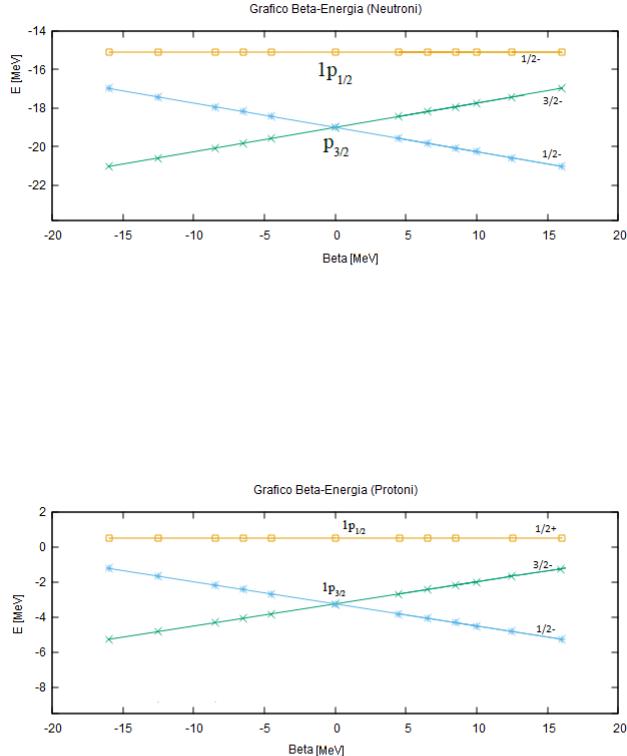


Figura 5.2: Livelli energetici al variare del parametro di deformazione. La figura in alto fa riferimento ai neutroni, quella in basso ai protoni, del nucleo dell'ossigeno. Nei grafici riportati ogni livello è indicato secondo la notazione spettroscopica (in corrispondenza di $\beta = 0$). A destra è segnata la proiezione di j sull'asse z e la parità corrispondente allo stato.

Scopo di questo capitolo è, come accennato, studiare l'effetto della deformazione sui valori delle energie dei vari livelli energetici. Si è visto nel capitolo precedente come le funzioni d'onda varino in maniera non apprezzabile in presenza di un campo deformante. Si sono analizzate, in prima battuta, tre regioni differenti corrispondenti alle chiusure delle *shell* $1p$, $1d - 2s$, $1f - 2p$ rispettivamente. Il completamento di una shell corrisponde, infatti, al caso di simmetria sferica. I nuclei interessati sono gli isotopi del neon, del calcio e dello stagno.

L'effetto della presenza di un campo deformato, dettato dall'aggiunta del termine proporzionale all'armónica sferica Y_{20} , rompe la simmetria sferica del sistema. Un livello sferico è $2j + 1$ volte degenero, ma questa degenerazione viene rotta dalla presenza del termine di deformazione, come è stato visto, mantenendo la degenerazione su m . I livelli della figura 5.1 vengono separati in $(2j + 1)/2$ livelli.

L'occupazione dei vari stati segue la procedura che è stata già esposta nel caso del modello a *shell* sferico. Ogni livello può essere occupato, in seguito alla rottura della degenerazione su j , da due nucleoni.

Si sono riprodotti gli andamenti delle energie dei livelli energetici per i protoni e i neutroni al variare del parametro di deformazione β . Come si può osservare dalla figura 5.2, gli andamenti sono speculari per β positivi e negativi.

Inoltre, gli andamenti relativi ai protoni e quelli relativi ai neutroni sono i medesimi. L'unica differenza è data dai valori assunti dalle energie. I livelli energetici associati ai neutroni sono più bassi; ciò segue dal fatto che i neutroni sono privi di carica, perciò non risentono della repulsione *coulombiana* di cui, invece, risentono i protoni e che causa un incremento dei valori delle energie dei diversi stati. Gli andamenti in figura 5.2, mostrano come per lo stato $1p_{1/2}$ l'energia è costante al variare del parametro di deformazione. In corrispondenza di questo stato si ha la chiusura della *shell* e quindi simmetria sferica del sistema. Il nucleo dell' ${}^8_8\text{O}$ è sferico, è un nucleo doppio magico, pertanto il modello a *shell* sferico descrive bene il sistema. I contributi dei vari nucleoni globalmente si compensano annullando il contributo del termine di deformazione.

Si è preso il nucleo dell' ${}^8_8\text{O}$ come esempio prima di procedere con lo studio delle catene degli isotopi già menzionate.

Gli stati di spin $1/2$, invece, secondo il modello elaborato, non sono sensibili alla deformazione perché è nullo l'elemento di matrice 3.4.

Dalle figure si osserva che lo *shift* fra i livelli che presentano lo stesso valore di n, l, s, j , ma differente proiezione del momento angolare totale sull'asse z, aumenta al crescere del parametro β . Per β positivi questi livelli sono ordinati per valori crescenti di m . Il livello caratterizzato dal minore valore di m è deviato verso il basso, quello con m maggiore verso l'alto.

I livelli che hanno n, l, s, j differenti, dati dalla rottura della degenerazione su j di quelli del modello a *shell* sferico con termine di interazione spin-orbita (figura 5.1), per via delle deviazioni appena descritte, possono incrociarsi. Si ha così una ricombinazione dei livelli energetici che fa sì che gli stati non vengano più occupati secondo l'ordine della figura 5.1. Il fenomeno della ricombinazione dei livelli riesce talvolta a spiegare i valori empirici dei momenti angolari dei nuclei.

5.1 Risultati per nuclei pari-dispari

Dopo aver esposto a grandi linee qual è l'effetto della deformazione sui livelli energetici, studiamo se, e sotto quali condizioni, il modello proposto riesce a prevedere i risultati sperimentali. Si prenderanno come campioni gli isotopi pari-dispari di neon, calcio e stagno. Ciascuno di questi nuclei ha un numero di protoni pari ad un numero magico; quindi, i protoni, oltre ad accoppiarsi con momento angolare totale nullo, occupano tutti gli stati corrispondenti alla chiusura di *shell*. Nel nostro modello lo spin totale del nucleo pari-dispari è dato dal momento angolare dello stato occupato dal nucleone spaiato.

5.1.1 Isotopi del Neon

Consideriamo la catena degli isotopi del Neon ($Z=10$). Come già detto si considerano soltanto gli isotopi dispari del Ne; negli isotopi pari, infatti, i nucleoni si accoppiano in modo tale da avere momento angolare totale nullo. Ciò cui si è interessati è lo stato occupato dal neutrone dispari spaiato. Da [BNL] sono stati presi i dati per j^π , momento angolare totale del sistema e rispettiva parità, corrispondenti ai vari isotopi dispari del Ne. Nella tabella 5.1 sono riportati i valori ricavati sperimentalmente per j^π , quelli previsti dal modello a *shell* sferico e i valori di β che permettono di spiegare le possibili divergenze tra ciò che si misura sperimentalmente e ciò che prevede il modello sferico.

Isotopo	N	$j^\pi(\text{exp})$	$j^\pi(\text{sph})$	$\beta [\text{MeV}]$
^{17}Ne	7	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}^-$	0
^{19}Ne	9	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	—
^{21}Ne	11	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	-40
^{23}Ne	13	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	0
^{25}Ne	15	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	0
^{27}Ne	17	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	0
^{29}Ne	19	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	0

Tabella 5.1: Nella prima riga sono riportati gli isotopi dispari del Neon considerati in questo lavoro. Nella seconda riga sono indicati i valori di j^π sperimentali (exp.) di tali isotopi estratti dalla compilazione della Ref. [BNL]. Nella terza riga sono mostrati valori di j^π previsti dal modello sferico. L'ultima riga mostra i valori di β che riescono a descrivere i valori empirici del momento angolare nel nostro modello a campo medio deformato. Il momento angolare del ^{19}Ne non è descritto dal nostro modello. Con il simbolo ‘-’ intendiamo che il nostro modello non è in grado di spiegare il valore empirico del momento angolare totale.

Nella catena degli isotopi del Ne si possono vedere esempi del fenomeno di ricombinazione dei livelli di cui si è parlato in precedenza. I livelli energetici $1d_{5/2}$, $1d_{3/2}$ e $2s_{1/2}$ hanno energie differenti rispetto al modello a *shell* sferico e variano al variare di β . Dopo determinati valori di β questi livelli invertono l'ordine che hanno nel modello a *shell* sferico; l'energia del livello $1d_{3/2}$ risulta inferiore all'energia del livello $1d_{5/2}$ e $2s_{1/2}$. Anche il livello $1d_{5/2}$ ha energia superiore al livello $2s_{1/2}$ per β superiore a 20MeV. I livelli energetici sono così ricombinati.

In riferimento alla figura 5.1, si osserva che l'isotopo ^{19}Ne non segue lo schema dei livelli proposto nel modello a *shell* sferico con termine spin-orbita. Neppure il modello elaborato è però in grado di prevedere la mancata corrispondenza tra il valore di j empirico e quello del modello a campo medio sviluppato nei precedenti capitoli. I modelli a particella singola sono modelli estremamente semplificati che non tengono conto delle interazioni tra nucleoni e vari altri fenomeni legati alla struttura nucleare.

Nel caso del Neon, il nono neutrone dovrebbe giacere sul livello superiore sopra i livelli p , ovvero $1d_{5/2}$, nel modello a *shell* sferico. In assenza della deformazione i livelli degeneri del $1d_{5/2}$ hanno energie inferiori al $1s_{1/2}$. Per effetto della deformazione i livelli degeneri vengono separati e per $\beta > 0$ il livello a energia inferiore è la componente $m = 5/2$ mentre per $\beta < 0$ è $m = 1/2$.

Prima di analizzare nello specifico cosa accade occorre delineare il criterio con il quale i vari livelli vengono occupati: ogni livello può essere occupato da al più due nucleoni; ogni nucleone occupa lo stato con minore energia disponibile; si procede gradatamente all'occupazione degli stati finché non è stato attribuito ad ogni nucleone lo stato da esso occupato; il nucleone spaiato determina le caratteristiche del nucleo in esame.

Nel caso del ^{21}Ne il valore sperimentale di j^π , $\frac{3}{2}^+$, può essere giustificato se si prende $\beta \simeq -40[\text{MeV}]$. Fissati n , l , j , si osserva che per β negativi l'ordinamento dei livelli, dal livello ad energia inferiore a quello ad energia maggiore, avviene per m decrescenti. Gli andamenti dei livelli energetici sono speculari rispetto a quelli che si hanno per β positivi. In virtù di questa considerazione, si comprende per quale motivo, talvolta, è possibile spiegare il valore del momento angolare sperimentale solo per valori positivi o negativi della deformazione. Ad esempio, nel caso del ^{21}Ne , il valore empirico del momento angolare può essere spiegato solo se si considera un β negativo. L'11- esimo neutrone occupa lo stato $1d_{3/2}$ invece dello stato $1d_{5/2}$. Quello che ci si aspetta per $\beta > 0$ sono nuclei prolati, mentre per $\beta < 0$ nuclei oblati.

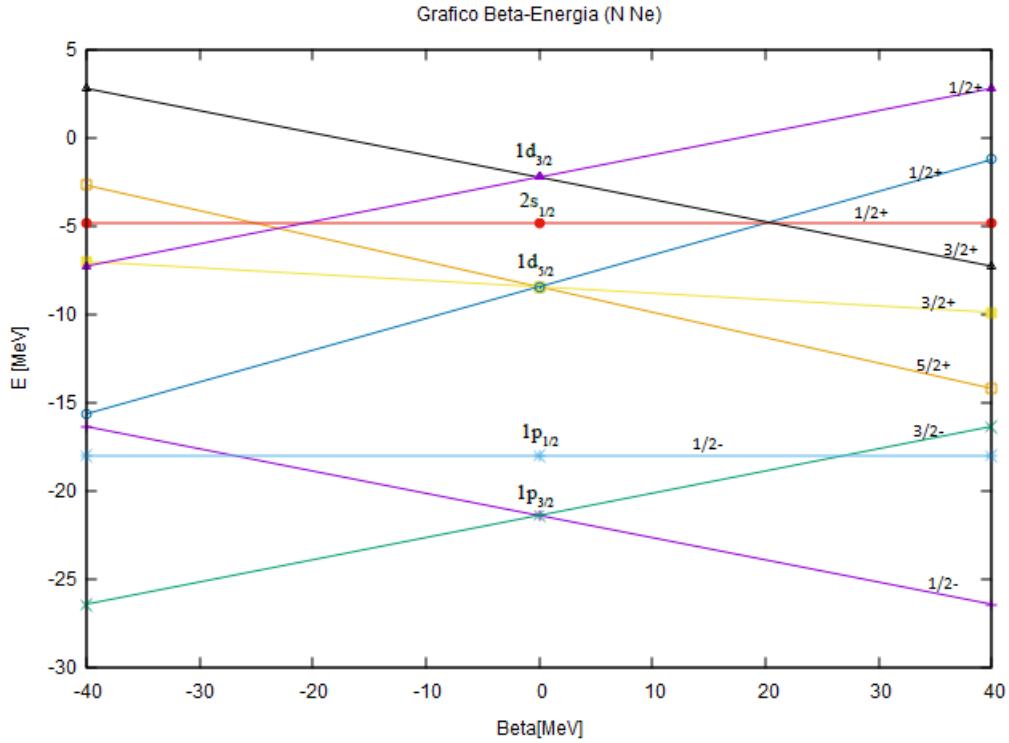


Figura 5.3: livelli energetici da $1p_{3/2}$ a $1d_{3/2}$ al variare del parametro β , con $\beta \in [0, 40]$ MeV. Rappresentano i livelli che vengono occupati dai neutroni della catena degli isotopi del Neon.

Il nostro modello, quindi, è in grado di prevedere il tipo di deformazione cui il nucleo in esame è soggetto. A questo punto si può confrontare la previsione del nostro modello a *shell* deformato riguardo al tipo di deformazione con quella empirica tabulata in [Sto05]. Il valore sperimentale del momento di quadrupolo elettrico è $+0.103b$. Quindi il nostro modello a campo medio non prevede la giusta deformazione del nucleo.

5.1.2 Isotopi del Calcio

Studiamo ora la catena degli isotopi del calcio. Nella tabella 5.2 vengono riportati i valori del momento angolare totale e rispettiva parità per la catena degli isotopi pari-dispari del calcio.

Dal confronto tra i risultati riportati in tabella, si osserva che il caso degli isotopi pari-dispari del calcio è un campione molto particolare perché rispetta l'ordine di occupazione degli stati quantistici previsto dal modello a *shell* sferico con accoppiamento spin-orbita. L'unica eccezione riguarda il ^{53}Ca . Dalla figura 5.4 si vede che il neutrone spaiato, il 33-esimo, va ad occupare lo stato $2p_{3/2}$ invece dello stato $1f_{5/2}$ per i valori di β riportati in tabella. Secondo il nostro modello il ^{53}Ca può avere forma sia oblata che prolata. In [Sto05] non sono riportati i valori di Q_{exp} per questo isotopo.

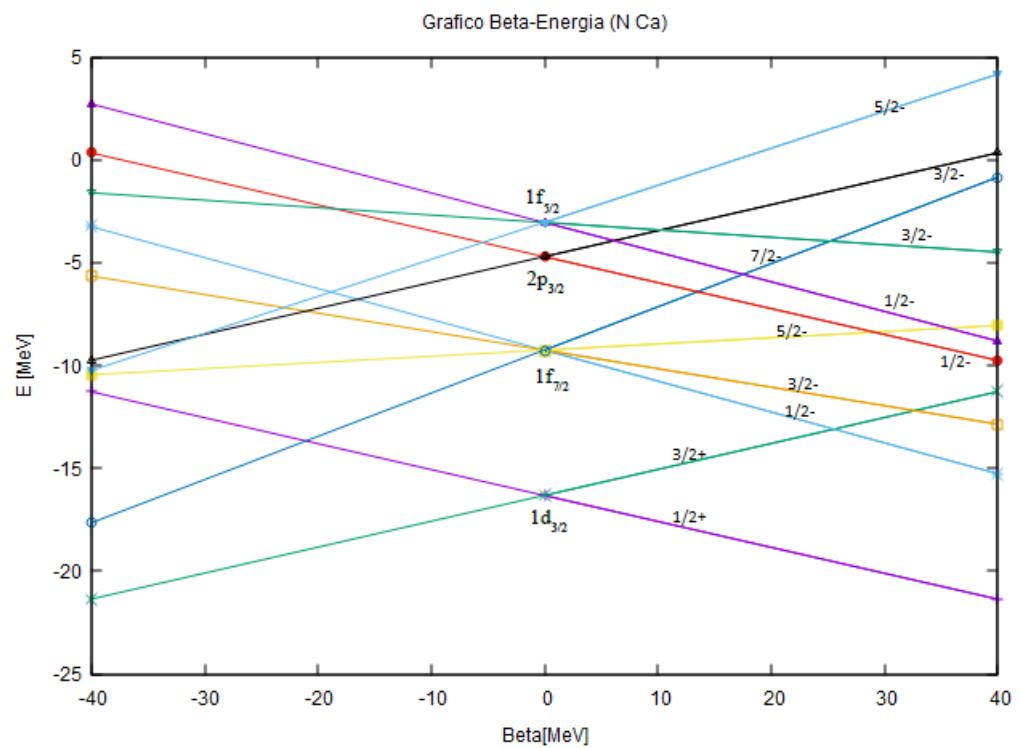


Figura 5.4: livelli energetici da $1d_{3/2}$ a $1f_{5/2}$ al variare del parametro β , con $\beta \in [0, 40]$ MeV. Rappresentano i livelli che vengono occupati dai neutroni della catena degli isotopi del Calcio.

Isotopo	N	$j^\pi(\text{exp})$	$j^\pi(\text{sph})$	$\beta [MeV]$
^{37}Ca	17	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	0
^{39}Ca	19	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	0
^{41}Ca	21	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{7}{2}^-$	0
^{43}Ca	23	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{7}{2}^-$	0
^{45}Ca	25	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{7}{2}^-$	0
^{47}Ca	27	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{7}{2}^-$	0
^{49}Ca	29	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{3}{2}^-$	0
^{51}Ca	31	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{3}{2}^-$	0
^{53}Ca	33	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-$	$\in [-18, -10] \text{ o } \simeq 10$
^{55}Ca	35	$\frac{5}{2}^-$	$\frac{5}{2}^-$	0

Tabella 5.2: Stati occupati dal nucleone dispari degli isotopi pari-dispari del Calcio [BNL].

5.1.3 Isotopi dello Stagno

Consideriamo infine gli isotopi pari-dispari dello stagno ($Z = 50$). Analogamente a quanto fatto per le catene di isotopi analizzate in precedenza, si riportano nella tabella (5.3) i valori sperimentali del momento angolare totale e parità dello stato occupato dal nucleone spaiato, le previsioni fornite dal modello a *shell* sferico con accoppiamento ls (vd. figura 5.1) e il valore di β in grado di riprodurre i dati empirici nel caso questi non corrispondano a quelli previsti dal modello a particella singola sferico.

Nel caso dello stagno l'effetto della ricombinazione dei livelli energetici è considerevole. Dal confronto tra i dati sperimentali e quelli previsti del modello a *shell* sferico si deduce che questo è un esempio di nucleo in cui la deformazione è notevole. Per gli isotopi ^{101}Sn , ^{103}Sn , ^{105}Sn e ^{107}Sn il valore del momento angolare totale sperimentale è $j^\pi(\text{exp}) = \frac{5}{2}^+$. Dalla figura 5.1 si vede che per un numero di protoni compreso tra 51 e 58 lo stato occupato dal nucleone spaiato dovrebbe essere $1g_{7/2}$, invece le deviazioni dei livelli $2d_{5/2}$ e $1g_{7/2}$ fanno sì che, per i valori di β riportati in tabella, $2d_{5/2}$ sia energeticamente favorito e pertanto viene occupato prima (vd. figura 5.5). Nel caso dello ^{101}Sn il nostro modello non è in grado di prevedere il risultato empirico.

Il caso dello ^{111}Sn è esattamente opposto a quello degli isotopi dello stagno appena discussi; il valore che il momento angolare totale assume è $j^\pi = \frac{7}{2}^+$, e la giustificazione di quanto accade è la medesima.

Dal confronto tra valori sperimentali e teorici del modello a *shell* sferico per ^{113}Sn , ^{115}Sn e ^{117}Sn si deduce che è la ricombinazione dei livelli $2d_{5/2}$, $2d_{3/2}$ e $3s_{1/2}$ a causare le discrepanze tra teoria ed esperimenti, come si può vedere dalla figura 5.6. I valori di β riportati in tabella sono quelli in grado di prevedere il mancato accordo tra risultati empirici e teorici.

La ricombinazione dei livelli $2d_{3/2}$ e $1h_{11/2}$ spiega i valori di $j^\pi(\text{exp})$ per lo ^{129}Sn e ^{131}Sn , come si può vedere dalla figura 5.7.

Invece, per quanto riguarda gli ultimi due nuclei della catena degli isotopi, ^{133}Sn e ^{135}Sn , sono i livelli $2f_{7/2}$ e $1h_{9/2}$ ad essere coinvolti. Ciò che accade è una inversione dei due livelli già per $\beta = 0$ rispetto al modello a *shell* sferico (vd. figura 5.8).

Si è visto il comportamento di tre diversi nuclei al variare del numero di neutroni. Essi possono risultare più o meno deformati in funzione di questa variazione e il modello a *shell* deformato riesce a predire piuttosto bene il fenomeno di ricombinazione dei livelli energetici, purché si prenda un

Isotopo	N	j^π (exp)	j^π (sph)	β [MeV]
^{101}Sn	51	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	—
^{103}Sn	53	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	≤ -10 o > 20
^{105}Sn	55	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	$\in [10, 20]$ o $\in [-3, -7]$
^{107}Sn	57	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	< -20 o > 20
^{109}Sn	59	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	0
^{111}Sn	61	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	< -10 o > 5
^{113}Sn	63	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	< -15 o > 15
^{115}Sn	65	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\in [-7, 0]$ o $\in [0, 7]$
^{117}Sn	67	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	—
^{119}Sn	69	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	0
^{121}Sn	71	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{11}{2}^-$	$\simeq 6, 7$ o $\in [-8, -5]$
^{123}Sn	73	$\frac{11}{2}^-$	$\frac{11}{2}^-$	0
^{125}Sn	75	$\frac{11}{2}^-$	$\frac{11}{2}^-$	0
^{127}Sn	77	$\frac{11}{2}^-$	$\frac{11}{2}^-$	0
^{129}Sn	79	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{11}{2}^-$	—
^{131}Sn	81	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{11}{2}^-$	—
^{133}Sn	83	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{9}{2}^-$	0
^{135}Sn	85	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{9}{2}^-$	0

Tabella 5.3: Nella tabella sono messi a confronto i valori del momento angolare totale sperimentale (sp) presi dalla compilazione di Ref. [BNL] e quelli previsti dal modello a *shell* sferico (shell). È riportato il valore di β che si deve usare nel modello a *shell* deformato elaborato per riprodurre il valore empirico di j^π .

valore del parametro di deformazione adeguato al caso particolare analizzato.

Non sempre, però, il valore di β corrisponde alla reale deformazione. Nella tabella 5.4 di seguito riportata sono indicati i valori del momento di quadrupolo che sono stati misurati per alcuni isotopi dello stagno.

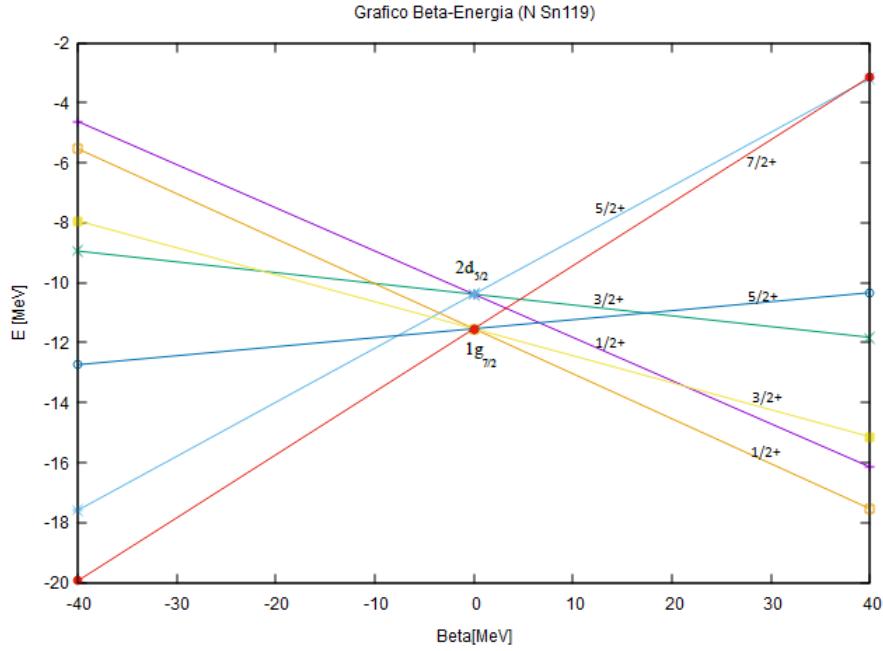


Figura 5.5: livelli energetici interessati alla ricombinazione dei livelli $1g_{7/2}$ e $2d_{5/2}$ del modello a *shell* sferico e che spiegano i valori empirici di j^π per i seguenti isotopi: ^{101}Sn , ^{103}Sn , ^{105}Sn , ^{107}Sn e ^{111}Sn .

Isotopo	^{111}Sn	^{113}Sn	^{115}Sn	^{117}Sn	^{119}Sn	^{121}Sn
$Q_{exp} [b]$	+0.18(9)	0.41(4)	0.26(3)	-0.42(5)	0.128(7)	-0.02(2)
Isotopo	^{123}Sn	^{125}Sn	^{127}Sn	^{129}Sn	^{131}Sn	
$Q_{exp} [b]$	+0.03(4)	+0.1(2)	+0.30(13)	+0.05(11)	-0.04(8)	

Tabella 5.4: Valori misurati sperimentalmente del momento di quadrupolo elettrico per gli isotopi dello stagno. Q non è stato misurato per tutti gli isotopi. Fra parentesi è indicata l'incertezza relativa alla misura. Quando il segno di Q_{exp} non è specificato vuol dire che non è stato individuato sperimentalmente [Sto05]

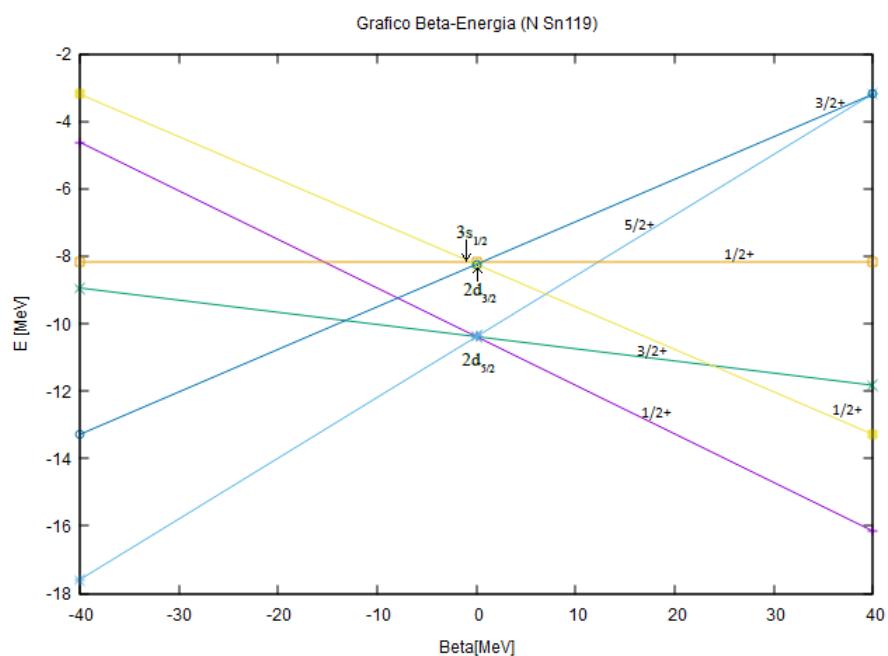


Figura 5.6: livelli energetici interessati alla ricombinazione dei livelli $2d_{3/2}$, $2d_{5/2}$ e $3s_{1/2}$ del modello a *shell* sferico e che spiegano i valori empirici di j^π per i seguenti isotopi: ^{113}Sn , ^{115}Sn .

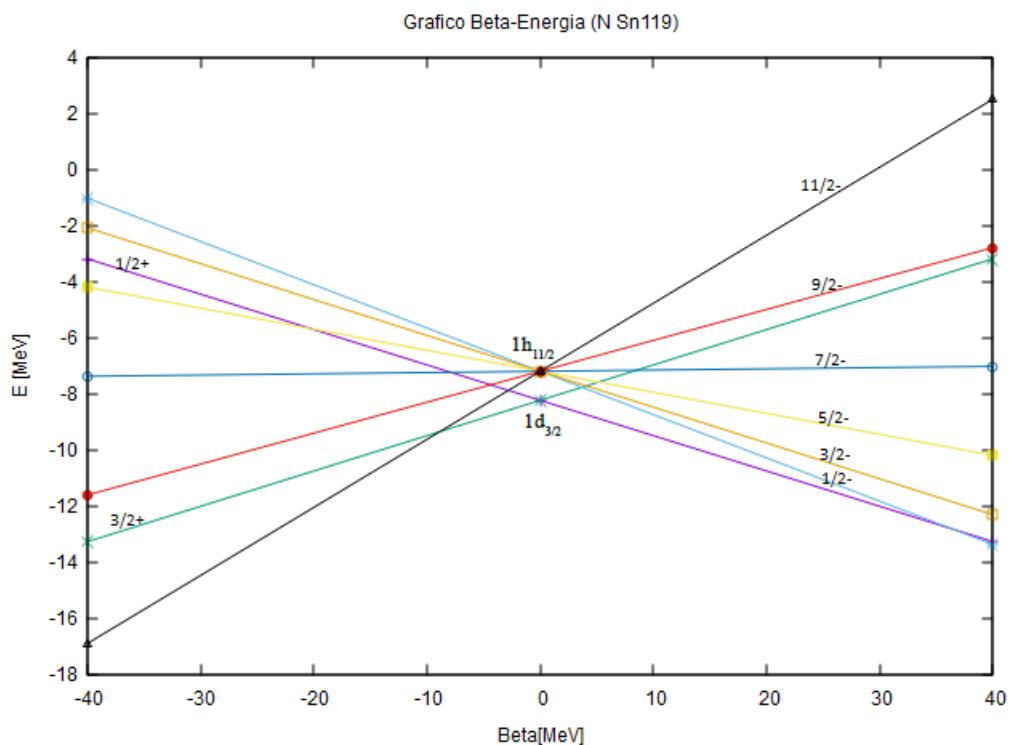


Figura 5.7: livelli energetici interessati alla ricombinazione dei livelli $2d_{3/2}$ e $1h_{11/2}$ del modello a *shell* sferico e che spiegano i valori empirici di j^π per i seguenti isotopi: ^{129}Sn , ^{131}Sn .

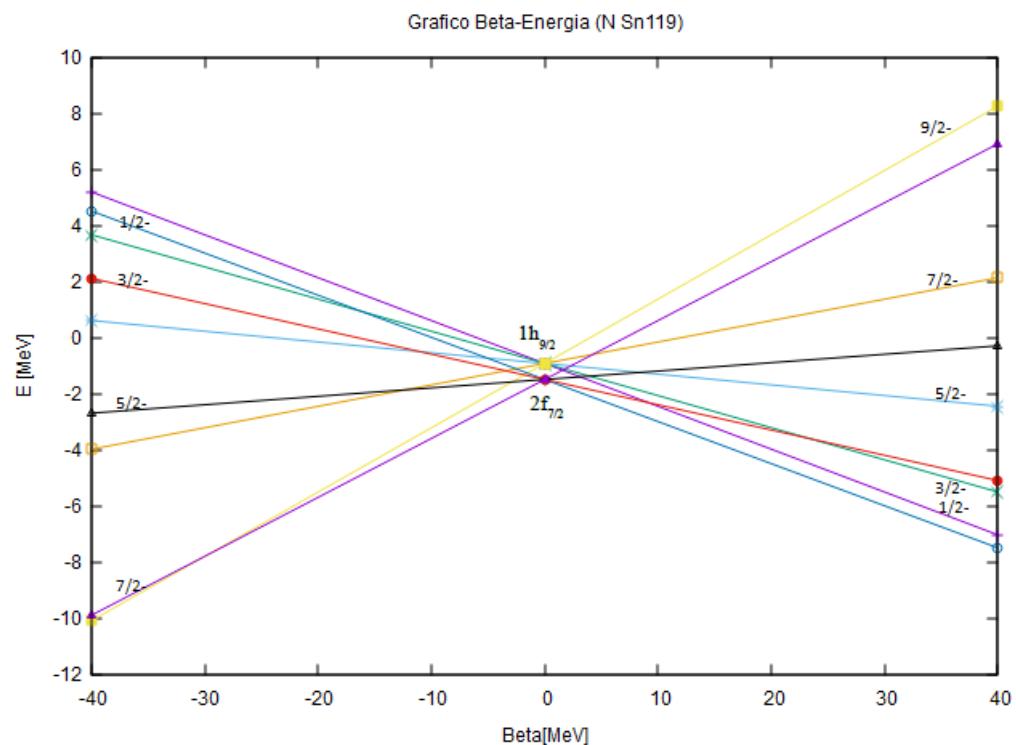


Figura 5.8: livelli energetici interessati alla ricombinazione dei livelli $2f_{7/2}$ e $1h_{9/2}$ del modello a *shell* sferico e che spiegano i valori empirici di j^π per i seguenti isotopi: ^{133}Sn , ^{135}Sn .

5.2 Terre rare

Per i nuclei delle terre rare, con $150 < A < 193$, la deformazione è considerevole.

Studiamo in questo paragrafo il comportamento di alcuni nuclei nella regione delle terre rare. Innanzitutto si è considerata la catena degli isotopi dell'Olmio. Nella tabella 5.5 sono riportati i valori di j^π sperimentali, teorici ricavati dal modello a *shell* sferico e i valori di β per i quali, nel modello sviluppato in questo lavoro, i dati empirici trovano corrispondenza con l'apparato teorico.

Isotopo	Z	$j^\pi(\text{exp})$	$j^\pi(\text{sph})$	$\beta [\text{MeV}]$
^{171}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{170}Ho	67	6^+	—	
^{169}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{168}Ho	67	3^+	—	
^{167}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{166}Ho	67	0^-	—	
^{165}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{164}Ho	67	1^+	—	
^{163}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{162}Ho	67	1^+	—	
^{161}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{160}Ho	67	$\frac{5}{2}^+$	—	
^{159}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{158}Ho	67	5^+	—	
^{157}Ho	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
^{156}Ho	67	4^-	—	
^{155}Ho	67	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	—

Tabella 5.5: Nella tabella sono messi a confronto i valori del momento angolare totale sperimentale [BNL] il momento angolare totale previsto dal modello a *shell* sferico; è, inoltre, riportato il valore di β che si deve assumere nel modello a *shell* deformato elaborato affinché si riesca a spiegare la mancata corrispondenza tra dati empirici e modello a *shell* sferico, per la catena degli isotopi dell'Olmio.

Nel caso della catena degli isotopi dell'Olmio, per i nuclei dispari-dispari, il momento angolare totale assume i valori più svariati; questo caso esce fuori dal dominio del modello estremo a particella singola. Non si ha più, infatti, un solo nucleone spaiato; pertanto, esistono diverse combinazioni dei momenti angolari dei due nucleoni spaiati che determinano il momento angolare totale del sistema nucleare nel suo complesso. Per quanto riguarda i nuclei pari-dispari si può vedere dalla tabella 5.5 che non ci sono isotopi per i quali esiste corrispondenza tra modello a *shell* sferico e dati sperimentali. Poiché si tratta di un nucleo in cui Z è dispari, i nuclei descrivibili mediante un modello a particelle indipendenti sono quelli con N pari. I neutroni si accoppiano in modo da avere momento angolare totale 0. È sempre il 67- esimo protone a determinare il valore di j . Esso dovrebbe occupare il livello $2d_{3/2}$, ovvero $j^\pi(\text{sph}) = \frac{3}{2}^+$, secondo il modello a *shell* sferico. Si può spiegare il valore di j^π empirico per tutti gli isotopi pari-dispari dell'olmio.

Nella tabella 5.6 sono riportati i valori empirici del momento di quadrupolo di alcuni isotopi dell'olmio. Dal segno di Q_{exp} si deduce il tipo di deformazione che caratterizza il nucleo e si deduce

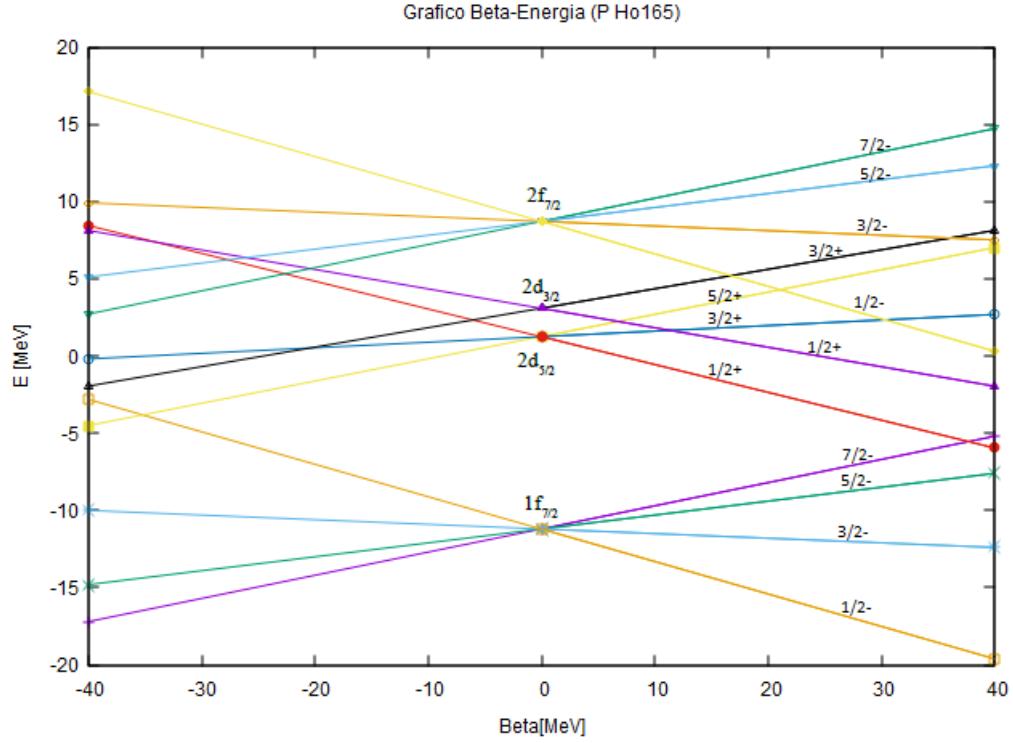


Figura 5.9: Livelli energetici al variare di β per gli stati corrispondenti alla catena degli isotopi dell'olmio interessati alla ricombinazione dei livelli in grado di spiegare le discrepanze tra valori empirici e valori teorici del momento angolare totale. È stato inserito sia il livello $1f_{7/2}$ che $2f_{7/2}$ per mostrare come il valore $\frac{7}{2}^-$ di j^π è dovuto all'abbassamento dei livelli dati dalla rottura della degenerazione su j del livello $2f_{7/2}$. I livelli $3s_{1/2}$, $1h_{11/2}$ e $1h_{9/2}$, intermedi tra $2d_{3/2}$ e $2f_{7/2}$, non sono stati riportati nella figura per avere una migliore leggibilità. I valori di β riportati nella tabella 5.5 sono stati presi tenendo conto però anche dei livelli intermedi assenti in figura.

se il nostro modello a campo medio prevede la corretta deformazione.

Isotopo	^{155}Ho	^{157}Ho	^{159}Ho	^{161}Ho	^{163}Ho	^{165}Ho
Q_{exp} [barn]	+1.52(10)	+2.97(13)	3.19(13)	3.22(11)	3.6(6)	3.58(2)

Tabella 5.6: Valori misurati sperimentalmente del momento di quadrupolo elettrico per gli isotopi dell'olmio. Q non è stato misurato per tutti gli isotopi. Fra parentesi è indicata l'incertezza relativa alla misura. Quando il segno di Q_{exp} non è specificato vuol dire che non è stato individuato sperimentalmente. [Sto05]

L'altro campione esaminato nella regione delle terre rare è quello di alcuni degli isotonni pari-

dispari con $N = 92$. Anche in questo caso è riportata la consueta tabella (tabella 5.7) utile ad un immediato confronto tra dati sperimentali, predizioni del modello a *shell* sferico e l'adeguata stima del parametro di deformazione β per una corretta descrizione del sistema nucleare in esame.

Isotopo	N	$j^\pi(\text{exp})$	$j^\pi(\text{sph})$	$\beta [\text{MeV}]$
$^{153}_{61}Pm$	61	$\frac{5}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	—
$^{155}_{63}Eu$	63	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{5}{2}^+$	0
$^{157}_{65}Tb$	65	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	0
$^{159}_{67}Ho$	67	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	> 30
$^{161}_{69}Tm$	69	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	—
$^{163}_{71}Lu$	71	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{11}{2}^-$	$\in [-15, -5] \text{ o } \in [10, 15]$
$^{165}_{73}Ta$	73	—	$\frac{11}{2}^-$	—
$^{167}_{75}Ir$	75	$\frac{9}{2}^-$	$\frac{11}{2}^-$	$> 25 \text{ o } \in [-30, -25]$

Tabella 5.7: Nella tabella sono messi a confronto i valori del momento angolare totale sperimentale [BNL] e quelli del momento angolare totale previsto dal modello a *shell* sferico; è, inoltre, riportato il valore di β che si deve assumere nel modello a *shell* deformato elaborato affinché si riesca a spiegare la mancata corrispondenza tra dati empirici e modello a *shell* sferico, per la catena degli isotoni con $N = 92$.

I valori di β riportati in tabella 5.7 sono estratti dalla figura 5.2. A rigore si dovrebbero graficare i livelli energetici al variare del parametro di deformazione per ognuno degli isotoni riportati nella tabella. Si osserva, però, che i valori delle energie degli stati di interesse non variano di molto e anche gli andamenti dei livelli energetici in funzione della deformazione sono molto simili poiché i parametri del potenziale sono pressoché gli stessi per tutta la catena degli isotoni considerata, come è già stato detto.

Si osserva dalla mancata corrispondenza tra $j^\pi(\text{exp})$ e $j^\pi(\text{sph})$ che i nuclei della catena degli isotopi sono molto deformati. Nella tabella 5.7 con il - sono stati indicati i casi in cui il nostro modello non è in grado di prevedere i risultati sperimentali.

Nella tabella 5.8 si riportano i valori sperimentali del momento di quadrupolo di alcuni isotoni. Non tutti sono stati misurati.

Isotopo	^{154}Sm	^{155}Eu	^{156}Gd	^{157}Tb	^{161}Tm
$Q_{\text{exp}} [\text{barn}]$	-1.87(4)	+2.49(2)	-1.93(4)	+1.40(8)	+2.90(7)

Tabella 5.8: Valori misurati sperimentalmente del momento di quadrupolo elettrico per alcuni degli isotoni considerati. Q non è stato misurato per tutti gli isotopi. Fra parentesi è indicata l'incertezza relativa alla misura. Quando il segno di Q_{exp} non è specificato vuol dire che non è stato individuato sperimentalmente. [Sto05]

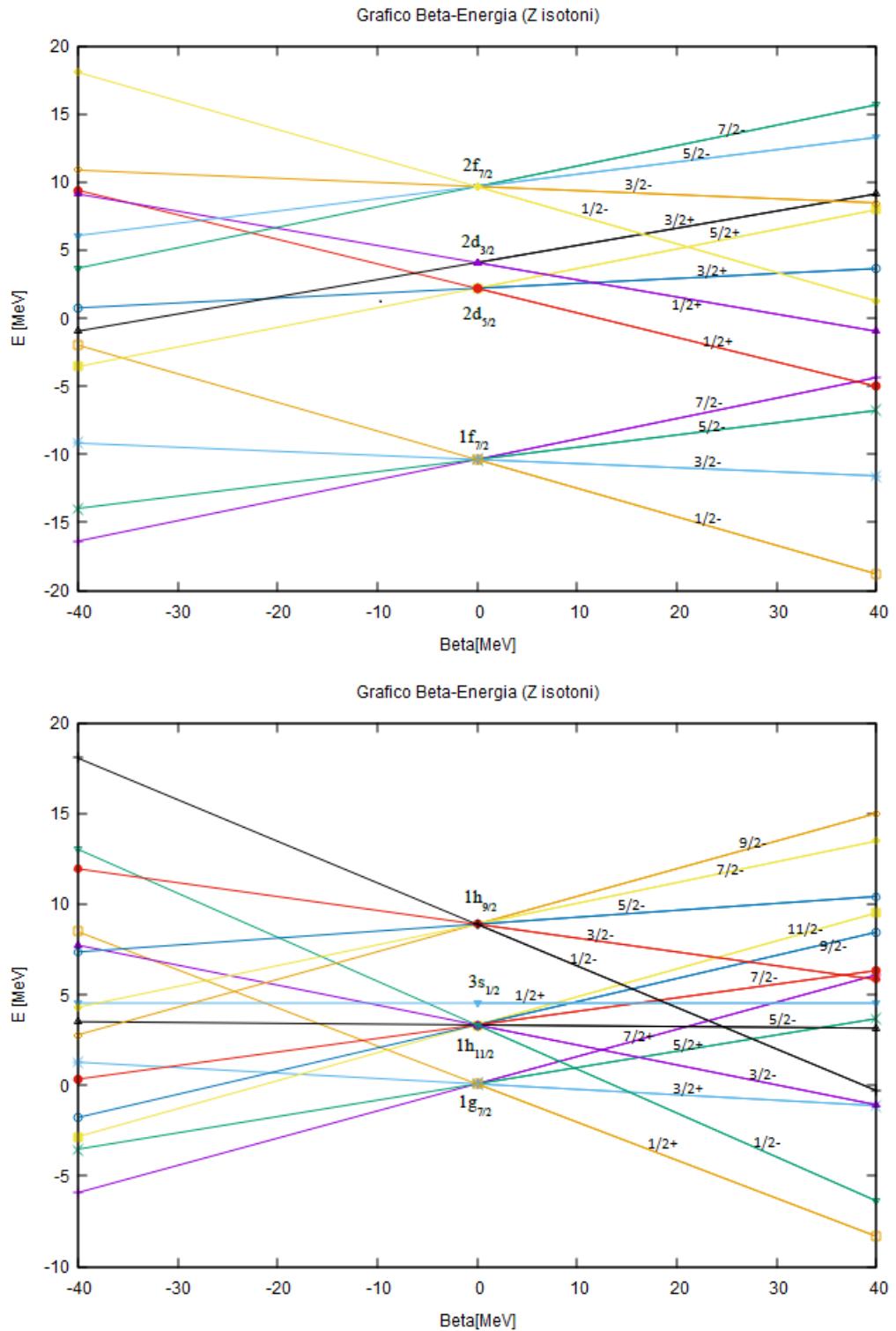


Figura 5.10: Livelli energetici al variare di β per gli stati corrispondenti alla catena degli isotoni. Sono stati riprodotti solo gli andamenti di alcuni stati ai fini di spiegare le discrepanze tra $j^\pi(exp)$ e $j^\pi(sph)$ della tabella 5.7.

Capitolo 6

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo corretto il tradizionale modello a campo medio, a *shell*, del nucleo inserendo un termine che rompe la simmetria sferica. Il termine inserito è proporzionale a Y_{20} , il più semplice termine di deformazione, che produce una simmetria di rotazione intorno ad un asse, generando quindi nuclei a forma ellissoidale.

L'inserimento di un termine di deformazione nell'hamiltoniana di singola particella distrugge la degenerazione energetica degli stati di singola particella che, in simmetria sferica, hanno la stessa energia per un valore fissato del momento angolare j . A causa della deformazione, gli stati che hanno diversi valori della proiezione di j sull'asse di simmetria z , caratterizzati dal numero quantico m , hanno diverse energie. La simmetria del sistema, che non distingue z da $-z$, implica una degenerazione per stati con $\pm m$. Questo significa che uno stato che in simmetria sferica era caratterizzato da j , e che aveva una degenerazione $2j + 1$, viene suddiviso in $j + 1/2$ stati, ognuno di loro caratterizzato da $|m|$, con degenerazione 2. La separazione tra i vari livelli dipende dall'intensità del termine di deformazione. Abbiamo definito questa intensità con un parametro β in modo che per valori positivi producesse un nucleo prolato, e per valori negativi un nucleo oblatto, in accordo, quindi, con il segno del momento di quadrupolo elettrico.

La deformazione modifica quindi la sequenza dei livelli energeticamente favoriti per essere occupati secondo il principio di esclusione di Pauli. Abbiamo applicato il modello a quattro regioni della tavola periodica, la regione del neon, del calcio, dello stagno e delle terre rare. Per sequenze di isotopi ed isotoni pari-dispari in ognuna di queste regioni abbiamo confrontato le previsioni del modello sferico con i dati empirici presi dalla compilazione della referenza [BNL]. Nei casi in cui il modello a *shell* sferico falliva nella descrizione, abbiamo individuato il possibile valore di β che permetteva di riprodurre il dato sperimentale.

Questo non è stato sempre possibile, si veda, ad esempio il caso del ^{19}Ne . Altre volte abbiamo trovato una deformazione che permetteva di riprodurre il valore empirico del momento angolare, ma il segno della deformazione non corrispondeva con quello del momento di quadrupolo elettrico, ad esempio per il ^{21}Ne .

Queste discrepanze sono attribuibili alla limitatezza del modello che implica delle ipotesi molto forti. Un primo limite è legato all'ipotesi che il termine di deformazione non abbia alcuna dipendenza dalla distanza r del nucleone dal centro del nucleo. Il nostro modello è estremamente semplice, ma l'introduzione di un termine proporzionale a r^2 sarebbe più consistente con lo sviluppo delle deformazioni in termini di quadrupolo. Infatti l'operatore di quadrupolo elettrico contiene un termine proporzionale a r^2 .

Chiaramente il limite maggiore del modello usato è intriseco nelle ipotesi del modello a campo medio nel quale sono trascurate le interazioni esistenti tra i nucleoni. In ogni caso, calcoli di nuclei

deformati che partono da interazioni tra due nucleoni sono estremamente complessi, anche quelli che utilizzano l'approssimazione di Hartree-Fock.

Bibliografia

- [BNL] *Interactive Chart of Nuclides*, <http://www.nndc.bnl.gov>.
- [Boh-Mot98] A. Bohr , B. R. Mottelson, *Nuclear Structure. Volume I: Single-Particle Motion*, World Scientific, London, (1998).
- [Coh71] B .L. Cohen , *Concepts of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, New-York, (1971).
- [Cov07] A. Covello, L. E. Marcucci, S. Rosati, I. Bombaci, *Theoretical Nuclear Physics in Italy*, World Scientific, London, (2007).
- [Edm57] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, (1957).
- [Eis-Gre57] J. Eisenberg, W. Greiner, *Nuclear Models: Volume I*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1957).
- [May-Jen55] M. G. Mayer , J. H. D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, John Wiley & Sons, New York (1955).
- [Mes61] A. Messiah, *Quantum Mechanics, Volume I*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1961).
- [Rin-Sch80] P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, New York, (1980).
- [Sto05] N. J. Stone, *Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments*, Atomic Data and Nuclear Data Tables 90 (2005) 75-176.