Università del Salento

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA "ENNIO DE GIORGI"

Laurea Magistrale in Fisica Teorica

Gli aspetti geometrici delle teorie di gauge:

i monopoli di Dirac e gli istantoni di Yang Mills

Autore:

Matteo Maria Maglio

Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione

I principi dell'elettromagnetismo, della relatività speciale e generale, delle teorie di gauge e tanto altro in Fisica provengono dalla geometria. In tali contesti un ruolo fondamentale è giocato dalle simmetrie, come è stato enfatizzato da Hermann Weyl, che sono intese oggi in termini di gruppi di Lie, l'ingrediente essenziale dei fibrati vettoriali. Molte situazioni quantistiche in Fisica (i monopoli di Dirac, i campi di Yang-Mills, gli istantoni, ecc.) hanno un analogo in geometria differenziale, permettendo di utilizzare i metodi geometrici per comprendere a fondo questi eventi.

La topologia ha acquisito, nel corso degli anni, una notevole importanza in Fisica. Un problema fisico si dice "ben posto" se esiste una soluzione e se essa è unica. In questo la topologia delle configurazioni, in particolare mediante il gruppo di omologia, riveste un ruolo fondamentale. Per esempio, i metodi topologici in teoria dei campi ci permettono di comprendere il significato delle classi caratteristiche di Chern, che ritroviamo nella teoria degli istantoni di Yang Mills.

Questa breve relazione ha lo scopo di illustrare particolari applicazioni in fisica di alcuni elementi di geometria differenziale. Nella prima parte si introducono gli elementi di geometria differenziale necessari per comprendere a fondo la costruzione, in termini topologici, di teorie fisiche. Sono dati per noti alcuni concetti di geometria differenziale di base, come ad esempio gli spazi tangenti e cotangenti, le forme differenziali e il loro calcolo differenziale. Nella seconda parte si studiano le applicazioni dei principi di geometria differenziale nell'ambito delle teorie di gauge. Nello specifico, partendo dal caso più semplice della teoria di Maxwell con il suo caso particolare dei monopoli di Dirac, si arriva alla formulazione delle teorie di gauge non abeliane con la loro applicazione nell'ambito delle soluzioni di tipo istantoni.

1

Elementi di geometria differenziale

1.1 Le varietà topologiche e i fibrati

Definizione 1.1. Uno spazio topologico M è una varietà m-dim differenziabile se

i) M è provvisto di una famiglia di coppie $\{(U_i, \phi_i)\}$

ii) $\{U_i\}$ è una famiglia di aperti che ricopre M, ossia $\bigcup_i U_i = M$

iii) ϕ_i è un omeomorfismo da U_i in un sottoinsieme aperto $\phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^m$

iv) dati U_i, $U_j \subseteq M$ tali che $U_i \cap U_j \neq 0$, la mappa $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ che mappa $\phi_j(U_i \cap U_j)$ in $\phi_i(U_i \cap U_j)$ è infinitamente differenziabile

Definizione 1.2. Un *fibrato* di una varietà topologica è una terna (E, π, M) dove E ed M sono varietà topologiche, chiamate *spazio totale* e *spazio di base* rispettivamente, e $\pi \colon E \to M$ è una mappa suriettiva continua, chiamata *proiezione.*

Sia $p \in M$; allora la controimmagine di p tramite la mappa proiezione π, $\pi^{-1}(p) =: F_p$, è la *fibra* nel punto p.

Esempio 1.1. Siano M, F due varietà topologiche. Definiamo lo spazio totale $E = M \times F$, varietà topologica per costruzione, e la mappa $\pi \colon M \times F \to M$, che agisce come $(p, f) \mapsto p$, $p \in M$, $f \in F$. Tale mappa è quindi una proiezione ed è continua nel prodotto topologico E. Abbiamo così ottenuto un fibrato, costruito a partire da un prodotto topologico di varietà.

In generale possiamo rappresentare graficamente delle varietà topologiche in modo molto semplice. Per esempio, volendo rappresentare un cilindro, potremmo pensare alla rappresentazione in Fig.(1.1) in cui, preso il rettangolo, si uniscono i due lati secondo l'orientazione delle frecce. Se invece le due orientazioni sui lati sono invertite bisogna ribaltare la striscia all'estremità per far combaciare l'orientazione del lato e questo meccanismo produce il nastro di Möbius.

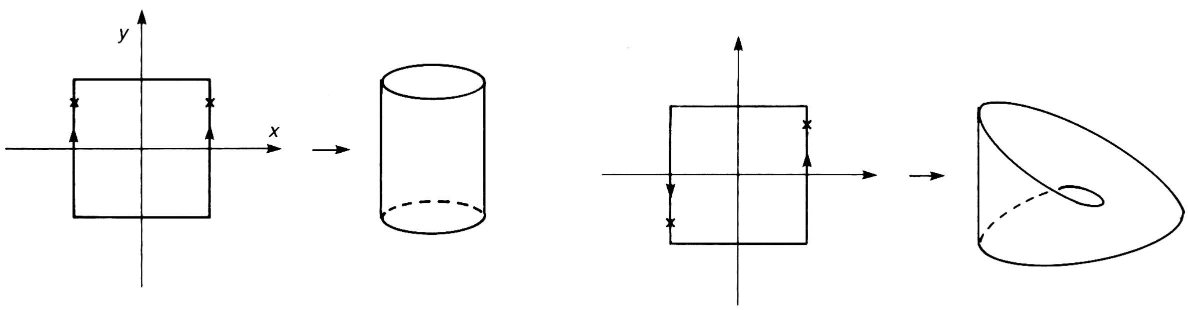


Figura 1.1: Costruzione del cilindro e del nastro di Möbius

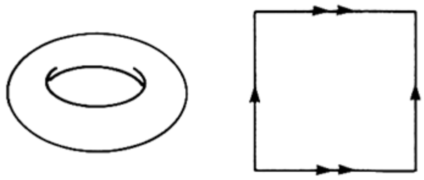


Figura 1.2: Costruzione del toro T^2

Analogamente si può considerare un rettangolo con le orientazioni sui lati dati dalla Fig.(1.2). Quello superiore e inferiore, una volta uniti, danno luogo a un cilindro finito che va richiuso su se stesso, in modo da far combaciare le basi nel senso dell'orientazione segnata. Il risultato di questa operazione è il toro T^2.

A questo punto è facile notare che sia il cilindro che il toro sono dei prodotti topologici di varietà topologiche nel seguente senso

$$C_{fin} = S^1 \times [-1, 1], \qquad C_{inf} = S^1 \times \mathbb{R}, \qquad T^2 = S^1 \times S^1$$

e sono varietà orientabili, mentre il nastro di Möbius non può essere espresso in termini di prodotto topologico ed è una varietà non orientabile.

Esempio 1.2. Consideriamo ora il nastro di Möbius. Guardando la Fig.(1.1) notiamo che possiamo considerare come spazio di base la circonferenza S^1. In questo caso, però, tale oggetto non può essere espresso come un prodotto topologico di S^1 per l'intervallo reale $[-1, 1]$. Tuttavia, definendo una proiezione che agendo sui punti del fibrato dà luogo a punti sullo spazio di base, si osserva che la controimmagine di p è $\pi^{-1}(\{p\}) = [-1, 1]$. In conclusione il nastro di Möbius è un fibrato, ma non un prodotto di varietà.

Osservazione 1.1.1. Occorre notare che nella definizione di fibrato non è specificato il legame che ci deve essere tra lo spazio totale e lo spazio di base. Come abbiamo visto nell'Es.(1.1), lo spazio totale può essere costruito dallo spazio di base come un prodotto topologico, a differenza dell'Es.(1.2).

Definizione 1.3. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato tale che $\forall p \in M : \pi^{-1}(\{p\}) \cong F$, con F una generica varietà, allora $E \xrightarrow{\pi} M$ è chiamato *fibrato di fibre* con F *fibra caratteristica*.

Definizione 1.4. Sia $E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ un fibrato. Una mappa $\sigma : \mathcal{M} \to E$ è chiamata *sezione* del fibrato se

$$\pi \circ \sigma = id_M \, .$$

Definizione 1.5. Siano dati due fibrati $E \xrightarrow{\pi} M$, $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ e due mappe $u : E \to E'$ e $f : M \to M'$, allora la coppia (u, f) è chiamata *morfismo* tra fibrati se il diagramma seguente commuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"] & M' \end{tikzcd}$$

ossia se $\pi' \circ u = f \circ \pi$. Questi due fibrati sono isomorfi se esistono dei morfismi tra fibrati (u, f) e (u^{-1}, f^{-1}). Se accade ciò, la struttura delle fibre del primo fibrato è la stessa di quella del secondo. La coppia (u, f) è chiamata *isomorfismo* tra fibrati.

Occorre notare nella precedente definizione che se due fibrati sono isomorfi allora gli spazi di base sono delle varietà omeomorfe, così come gli spazi totali. I due fibrati, invece, non sono omeomorfi, in quanto le mappe proiezione nei due fibrati sono differenti. Considerando, per esempio, il cilindro e il nastro di Möbius, si vede che hanno lo stesso spazio di base e, intesi come spazi totali, sono omeomorfi. Tuttavia, se questi sono considerati come fibrati, non sono omeomorfi, a causa delle differenti proiezioni su essi definite.

Definizione 1.6.

i) Un fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$ è detto *triviale* se è isomorfo a un fibrato prodotto $M \times F \xrightarrow{\pi} M$.

ii) Un fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$ è detto *localmente triviale* se è localmente isomorfo a un fibrato prodotto.

Esempio 1.3.

(a) Il cilindro è un fibrato triviale, quindi è anche un fibrato localmente triviale.

(b) Il nastro di Möbius non è un fibrato triviale, ma è localmente triviale.

D'ora in avanti prenderemo in considerazione solo fibrati localmente triviali, quindi ogni sezione di un fibrato può essere rappresentata localmente come una mappa dallo spazio di base nella fibra. Questo vale solo localmente e non globalmente, perchè tale fibrato non è globalmente un fibrato prodotto.

Definizione 1.7. Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato e sia f una mappa da una varietà M' in M, allora possiamo costruire il cosiddetto *fibrato pull-back* come

$$E' := \{(m', e) \in M' \times E \,|\, \pi(e) = f(m')\}\,.$$

Successivamente si può costruire π' in modo che $\pi'(m', e) := m'$ e un morfismo $u\colon E' \to E$ tale per cui $u(m', e) := e$. In tal modo, si è costruito il fibrato pull-back $E' \xrightarrow{\pi'} M'$. Graficamente la costruzione può essere schematizzata nel seguente modo

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Osserviamo che possiamo costruire le sezioni sul fibrato pull-back partendo dalle sezioni definite sul fibrato iniziale.

1.2 L'algebra di Grassmann

Definizione 1.8. Sia M una varietà liscia. Una n-forma differenziale è definita come un $\binom{0}{n}$-campo tensoriale ω che è completamente antisimmetrico, ossia

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = sgn(\pi)\, \omega(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$$

dove $\pi \in Perm(n)$ è una permutazione e $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM)$.

Definizione 1.9. L'insieme di tutte le n-forme definite sulla varietà M è definito con $\Omega^n(M)$.

Prese due n-forme, la loro somma sarà una n-forma, ma il loro prodotto non si comporta come una n-forma.

Definizione 1.10. Definiamo il prodotto esterno $\wedge\colon \Omega^n(M) \times \Omega^m(M) \to \Omega^{n+m}(M)$ che agisce come $(\omega, \sigma) \mapsto \omega \wedge \sigma$, definita da

$$(\omega \wedge \sigma)(X_1, \dots, X_{n+m}) := \frac{1}{n!}\frac{1}{m!} \sum_{\pi \in Perm(n+m)} sgn(\pi)\, (\omega \otimes \sigma)(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n+m)})$$

Esempio 1.4. L'esempio più semplice è quello di considerare due 1-forme $\omega \in \Omega^1(M)$, $\sigma \in \Omega^1(M)$, e prendendo il loro prodotto esterno si vede che

$$\omega \wedge \sigma = \omega \otimes \sigma - \sigma \otimes \omega$$

Definizione 1.11. Sia $\omega \in \Omega^n(N)$ e una mappa $h\colon M \to N$ tra due varietà lisce. Allora definiamo

$$(h^*\omega)(X_1, \dots, X_n) := \omega(h_*(X_1), \dots, h_*(X_n))$$

Teorema 1.2.1. *La mappa pull-back è distributiva sotto il prodotto esterno:*

$$h^*(\omega \wedge \sigma) := h^*(\omega) \wedge h^*(\sigma)$$

con $\omega \in \Omega^m(M)$ *e* $\sigma \in \Omega^n(N)$.

Definizione 1.12. Definiamo il modulo $\mathcal{C}^\infty(M)$ come

$$Gr(M) \equiv \Omega(M) := \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^{dimM}(M)$$

in modo da ottenere l'algebra di Grassman su M come un modulo dotato di una mappa bilineare, $(\Omega(M), +, \cdot, \wedge)$, dove la mappa $\wedge\colon \Omega(M) \times \Omega(M) \to \Omega(M)$.

Teorema 1.2.2. *Siano* $\omega \in \Omega^n(M)$ *e* $\sigma \in \Omega^M(M)$ *allora*

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{n \cdot m} \sigma \wedge \omega$$

Definizione 1.13. L'operatore *derivata esterna* è definita come la mappa $d\colon \Omega^n(M) \to \Omega^{n+1}(M)$ che agisce nel seguente modo

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1, \ldots, X_{n+1}) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{n+1})) \\ + \sum_{i<j}^{n+1} \omega([x_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{n+1})\end{aligned}$$

Teorema 1.2.3. *Siano* $\omega \in \Omega^n(M)$ *e* $\varphi \in \Omega^m(M)$ *allora*

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^n \omega \wedge d\varphi$$

Teorema 1.2.4. *La derivate esterna "commuta" con la mappa pull-back. Se infatti* $h\colon M \to N$ *allora*

$$h^*(d\omega) = d(h^*\omega)$$

1.3 I fibrati principali

Definizione 1.14. Sia $(G, \cdot\,)$ un gruppo di Lie e M una varietà liscia, allora la mappa liscia $\triangleright\colon G \times M \to M$ che soddisfa le proprietà

i) $e \triangleright p = p, \qquad \forall p \in M$

ii) $g_2 \triangleright (g_1 \triangleright p) = (g_1 \cdot g_2) \triangleright p, \qquad \forall p \in M,\ \forall g_1,\, g_2 \in G$

è chiamata *azione sinistra* di G sulla varietà M.

Diamo una definizione dell'azione destra del gruppo sulla varietà con gli stessi elementi di ipotesi della definizione precedente per cui

Definizione 1.15. La mappa $\triangleleft\colon M \times G \to M$ è chiamata *azione destra* del gruppo G sulla varietà M se soddisfa le seguenti proprietà

i) $p \triangleleft e = p, \qquad \forall p \in M$

ii) $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 \cdot g_2), \qquad \forall p \in M,\ \forall g_1,\, g_2 \in G$

Data quindi un'azione sinistra $\triangleright$ possiamo definire un'azione destra $\triangleleft\colon M \times G \to M$ come $p \triangleleft g := (g^{-1}) \triangleright p$. Infatti, si vede che

i) $p \triangleleft e = p = e^{-1} \triangleright p = e \triangleright p, \qquad \forall p \in M$

ii) $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = g_2^{-1} \triangleright (g_1^{-1} \triangleright p) = (g_1 \cdot g_2)^{-1} \triangleright p = p \triangleleft (g_1 \cdot g_2), \qquad \forall p \in M,\ \forall g_1,\, g_2 \in G\,.$

Esempio 1.5. Consideriamo un gruppo di Lie G e prendiamo come varietà uno spazio vettoriale $M = V$. Consideriamo una rappresentazione di G su questo spazio vettoriale $R\colon G \to GL(V)$, per cui definiamo l'azione sinistra del gruppo G sullo spazio vettoriale V, $\triangleright\colon G \times V \to V$, come $g \triangleright v := R(g)(v)$, $\forall v \in V,\ g \in G$. Quindi una rappresentazione di un gruppo di Lie G su uno spazio vettoriale è un caso particolare di azione sinistra di gruppo sullo spazio vettoriale.

Definizione 1.16. Consideriamo due gruppi di Lie $(G, \cdot\,)$ e $(H, \circ\,)$ e un omomorfismo tra questi due gruppi $\rho\colon G \to H$, mappa liscia e definita da $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \circ (g_2)$. Siano $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ due varietà lisce. Considerando due azioni a sinistra $\triangleright\colon G \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\blacktriangleright\colon H \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, e una mappa liscia $f\colon M \to \mathcal{N}$, allora f è chiamata $\rho-$equivariante se il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} G \times \mathcal{M} \arrow[r, "\rho \times f"] \arrow[d, "\triangleright"'] & H \times \mathcal{N} \arrow[d, "\blacktriangleright"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "f"] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

ossia se $f(g \triangleright m) = \rho(g) \blacktriangleright f(m),\ \forall m \in M,\ \forall g \in G\,.$

Questo concetto è molto utile in Fisica, per esempio nel caso di esperimenti riguardanti la misura dello spin delle particelle. Se consideriamo $G = SO(1,3)$, il gruppo speciale di Lorentz, $H = SL(2,\mathbb{C})$, il gruppo dello spin, e un omomorfismo tra questi due gruppi, allora è possibile conoscere la risposta dell'osservabile spin nel caso in cui effettuiamo una trasformazione di Lorentz sull'apparato sperimentale. L'omomorfismo ta questi due gruppi è dato da un embedding di $SO(1,3)$ in $SL(2,\mathbb{C})$, una mappa due in uno. Quest'approccio ci permette di capire la risposta dello strumento una volta effettuata una trasformazione di Lorentz, sia essa una rotazione o una traslazione.

Definizione 1.17. Sia $\to\colon G \times M \to M$ un'azione destra del gruppo G su qualche varietà M.

(a) $\forall p \in M$ definiamo la sua *orbita* sotto l'azione destra come l'insieme

$$\mathcal{O}_p := \{q \in M \,|\, \exists\, g \in G : g \triangleright p = q\} \subseteq M$$

(b) definiamo la relazione di equivalenza

$$p \sim q \ :\Leftrightarrow\ \exists\, g \in G : q = g \triangleright p,$$

che soddisfa le proprietà di riflessività, simmetria e transitività. Consideriamo le classi di equivalenza

$$M/\sim\, \equiv M/G$$

queste sono chiamate *spazio delle orbite*.

(c) $\forall p \in M$ definiamo lo *stabilizzatore* come

$$S_p := \{g \in G \,|\, g \triangleright p = p\} \subseteq G$$

Esempio 1.6. Consideriamo, per esempio, $M = \mathbb{R}^2$, $G = SO(2)$ e l'azione sinistra del gruppo sulla varietà, data da $g \triangleright p := R_{vec}(g)p$, con R_{vec} rappresentazione del gruppo su uno spazio vettoriale, quale è $\mathbb{R}^2$. In forma matriciale possiamo considerare

$$R_{vec}(g)\,p = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p1 \\ p2 \end{bmatrix}.$$

In questo caso, prendendo un generico punto $p \in \mathbb{R}^2$, la sua orbita sotto l'azione destra del gruppo è rappresentata da tutti i punti su una circonferenza di raggio pari alla distanza del punto p dall'origine. Un caso particolare è dato dall'origine $(0,0)$, la cui orbita non è una circonferenza ma ovviamente un punto. Prendiamo un punto $p \in (a,0)$, con $a \neq 0$, il suo stabilizzatore sarà solo l'elemento identità $S_p = \{e\}$. Se consideriamo l'origine, invece, si vede che il suo stabilizzatore è l'intero gruppo $SO(2)$, $S_{(0,0)} = SO(2)$.

Definizione 1.18. L'azione di un gruppo si dice *libera* se

$$\forall p \in M\colon S_p = \{e\}$$

.

Osservazione 1.3.1. Se l'azione destra $\triangleright$ del gruppo G sulla varietà M è libera, allora ogni orbita è diffeomorfa al gruppo di lie G, ossia

$$\mathcal{O}_p \cong_{\text{diff}} G.$$

Consideriamo, per esempio, $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $G = SO(2)$, con l'azione destra $\triangleright\colon G \times M \to M$ definita come prima $g \triangleright p := R_{\text{vec}}(g)p$. L'azione del gruppo su questa varietà è libera e si vede che $\mathcal{O}_p \cong_{\text{diff}} S^1 \cong SO(2)$

D'ora in poi faremo riferimento solo a fibrati lisci definiti su varietà lisce.

Definizione 1.19. Un fibrato (E, π, M) è chiamato G*-fibrato principale* se

i) E è dotato di un'azione destra $\triangleleft$ del gruppo G sulla varietà M;

ii) $\triangleleft$ è libera;

iii) il fibrato $E \xrightarrow{\pi} M$ è isomorfo al fibrato $E \xrightarrow{\rho} E/G$, con ρ che associa a $\epsilon \in E \to [\epsilon] \in E/G$.

Osservazione 1.3.2. Poichè l'azioe destra $\triangleleft$ è libera allora $\rho^{-1}([\epsilon]) \cong G$.

Definizione 1.20. Siano dati due G-fibrati principali $P \xrightarrow{\pi} M$, $P' \xrightarrow{\pi'} M'$ e due mappe $u\colon P \to P'$, $f\colon M \to M'$. La coppia (u, f) è una mappa tra fibrati principali se il digramma seguente commuta

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "u'"] & P \arrow[l, "\triangleleft G"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[d, "f"] \\
P' & P' \arrow[l, "\triangleleft' G"'] \arrow[r, "\pi'"] & M'
\end{tikzcd}$$

ossia se

$$f \circ \pi = \pi' \circ u \quad \Rightarrow \quad u(p \triangleleft g) = u(p) \triangleleft' g, \quad \forall p \in P,\ \forall g \in G\,.$$

La precedente definizione può essere generalizzata a due qualsiasi fibrati per cui abbiamo

Definizione 1.21. Siano dati un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$, un G'-fibrato principale $P' \xrightarrow{\pi'} M'$ e le mappe $u\colon P \to P'$, $f\colon M \to M'$, $\rho\colon G \to G'$ omomorfismo tra due gruppi di Lie. La coppia (u, f) è una mappa tra fibrati principali se il digramma seguente commuta

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "u"] & P \arrow[l, "\triangleleft G"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[d, "f"] \\
P' & P' \arrow[l, "\triangleleft' G'"'] \arrow[r, "\pi'"] & M'
\end{tikzcd}$$

ossia se

$$\begin{cases} f \circ \pi = \pi' \circ u \\ u(p \triangleleft g) = u(p) \triangleleft' \rho(g), \quad \forall p \in P,\ \forall g \in G\,. \end{cases}$$

In questo caso richiediamo che ρ sia un omomorfismo tra i due gruppi di Lie per ottenere una mappa tra fibrati consistente con la definizione, quindi deve accadere che

$$\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2), \qquad \forall g_1, g_2 \in G$$

con $g_1, g_2 \in (G, \cdot)$ e $g_1' = \rho(g_1), g_2' = \rho(g_2) \in (G', \circ)$.

Lemma 1.3.1. *Assumiamo di avere due G-fibrati principali $P \xrightarrow{\pi} M$, $P' \xrightarrow{\tilde{\pi}} M$ e una mappa $u\colon P \to P'$. Schematicamente si ha*

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
P \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "u"] \arrow[d, "\triangleleft G"'] & & P' \arrow[ul, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\triangleleft' G"] \\
P' \arrow[rr, "u"] & & P'
\end{tikzcd}$$

La mappa u che soddisfa le proprietà di mappa tra fibrati principali

$$\tilde{\pi} \circ u = \pi, \qquad \Rightarrow \qquad u(p \triangleleft g) = u(p) \triangleleft' g$$

è un diffeomorfismo.

Definizione 1.22. Un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ è chiamato *triviale* se è diffeomorfo come G-fibrato principale al fibrato $M \times G \xrightarrow{\pi_1} M$, con

$$\pi_1(x, g) := x \quad \forall x \in M,\, g \in G$$

e l'azione destra $\blacktriangleleft$ del gruppo G su $M \times G$ definita da

$$(x, g) \blacktriangleleft g' = (x, g \cdot g'), \qquad \forall x \in M,\ \forall g, g' \in G$$

è libera. In altri termini, un G-fibrato principale è chiamato triviale se esiste una mappa tra fibrati principali u tra $P \xrightarrow{\pi} M$ e $M \times G \xrightarrow{\pi_1} M$.

Teorema 1.3.2. *Un G-fibrato principale, $P \xrightarrow{\pi} M$, è triviale se e solo se esiste una sezione liscia $\sigma\colon M \to P$, ossia $\pi \circ \sigma = id_M$.*

1.4 L'omotopia e la contraibilità

Definizione 1.23. Siano M ed N due arbitrari spazi topologici e siano f_0 e f_1 due differenti mappe continue definite da

$$f_0\colon M \to N$$
$$f_1\colon M \to N$$

Le mappe f_0 e f_1 sono dette *omotope* se esiste una mappa continua

$$F\colon M \otimes [0, 1] \to N$$

nota come *omotopia* tale che

$$F(x, 0) = f_0(x), \qquad F(x, 1) = f_1(x)$$

Definizione 1.24. Due spazi topologici M e N sono *omotopicamente equivalenti* se esistono le mappe continue

$$f\colon M \to N, \qquad g\colon M \to N$$

tali che

$$f \circ g\colon N \to N \sim id_M$$
$$g \circ f\colon M \to M \sim id_N$$

Si può dimostrare che l'omotopia è una relazione di equivalenza. Consideriamo ora una curva chiusa in uno spazio topologico M, definita da

$$\gamma\colon [0, 1] \to M$$

con $\gamma(0) = \gamma(1) = a \in M$ e questa curva è chiamata *loop* centrato in a.

Definizione 1.25. La collezione di tutte le classi di omotopia di loop centrati in x_0 su uno spazio topologico M è

$$\pi_1(M, x_0) := \{[\gamma] \,|\, \gamma(t) \text{è un loop in M centrato in } x_0\}$$

dove $(\pi_1(M, x_0), \cdot)$ è un gruppo ed è chiamato *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di M in x_0.

Teorema 1.4.1. *Se M ed N sono due spazi topologici omeomorfi allora sono omotopicamente equivalenti, e quindi hanno lo stesso π_1.*

Questo teorema segue direttamente dalle definizioni precedenti, in quanto un omeomorfismo è una coppia di mappe continue $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to M$ tali che

$$f \circ g = id_N, \qquad g \circ f = id_M.$$

Osservazione 1.4.1. Abbiamo ottenuto così due importanti risultati:

a) l'omotopia è un *invariante topologico* e due spazi sono topologicamente equivalenti se hanno le stesse proprietà topologiche;

b) l'inverso non è sempre vero. Due spazi topologici possono avere lo stesso gruppo fondamentale π_1 ma possono non essere omeomorfi.

Definizione 1.26. Uno spazio topologico è *contraibile* se è omotopicamente dello stesso tipo al singolo punto.

Esempio 1.7.

i) $\mathbb{R}^n$ è contraibile. Per dimostrare questo assunto bisogna trovare due mappe continue $f\colon \mathbb{R}^n \to \{p\}$ e $g\colon \{p\} \to \mathbb{R}^n$. L'unica scelta possibile è

$$f(x) = p, \quad f(p) = 0$$

per cui $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g \circ f(x) = 0$. Definiamo l'omotopia $F\colon \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ come $F(x, t) = tx$ e si vede che è un'omotopia tra f e g, infatti

$$g \circ f \sim id_{\mathbb{R}^n}, \qquad f \circ g \sim id.$$

Abbiamo così dimostrato che $\mathbb{R}^n$ e un punto sono omotopicamente equivalenti, e quindi il primo spazio topologico è contraibile. Si vede infine che $\pi_1(\mathbb{R}^n) = id$.

ii) Dimostriamo in maniera euristica che S^2 non è contraibile. Per provare la contraibilità di questo spazio dovremmo costuire una mappa continua che ci permette di muovere tutti i suoi punti in uno solo. Su S^2 potremmo provare a muovere tutti i punti al polo sud lungo dei cerchi. Così facendo il polo nord non potrà muoversi in ogni direzione senza rompere la continuità.

Teorema 1.4.2. *Dato un G-fibrato fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$, con M spazio di base, se M è contraibile in un punto allora il fibrato è triviale.*

Osservazione 1.4.2. Il teorema precedente dà una condizione necessaria alla riduzione di un fibrato, infatti il fatto che un fibrato sia triviale non implica che lo spazio di base sia contraibile in un punto.

1.5 I fibrati associati

Definizione 1.27. Dato un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ e una varietà liscia F su cui è definita un'azione sinistra del gruppo G come $\triangleright\colon G \times F \to F$, definiamo il *fibrato associato* $P_F \xrightarrow{\pi_F} M$ con

i) sia $\sim_{\text{G}}$ una relazione di equivalenza su $P \times F$ tale che

$$(p, f) \sim_{\text{G}} (p', f') \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, g \in G \,:\, p' = p \triangleleft g, \quad f' = g^{-1} \triangleright f$$

e consideriamo lo spazio quoziente $(P \times F)/\sim_{\text{G}} =: P_F$ costituito dalle classi di equivalenza $[p, f]$ con $p \in P$, $f \in F$;

$$\begin{array}{ccc} P_F & \xrightarrow{\tilde{u}} & P'_F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{\tilde{h}} & M' \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi} & P & \xrightarrow{\lhd G} & P \\ h \downarrow & & u \downarrow & & u \downarrow \\ M' & \xleftarrow{\pi'} & P' & \xrightarrow{\lhd' G} & P' \end{array}$$

ii) definiamo $\pi_F \colon P_F \to M$ che agisce come $[p, f] \mapsto \pi(p)$, che risulta ben definita, in quanto

$$\pi_F([p \lhd g, g^{-1} \rhd f]) = \pi(p \lhd g) = \pi(p) = \pi_F([p, f]).$$

Si può dimostrare che $P_f \xrightarrow{\pi_F} M$ è un fibrato di fibre con fibra caratteristica F.

Definizione 1.28. Consideriamo due fibrati associati, ognuno relativo al suo G-fibrato principale P e P', e aventi la stessa fibra caratteristica F. Definiamo una mappa $(\tilde{u}, \tilde{h})$ tra i suddetti fibrati associati come una mappa (u, h) tra i rispettivi fibrati principali P e P'. Graficamente abbiamo
La mappa tra fibrati principali soddisfa le relazioni

$$u(p \lhd g) = u(g) \lhd' g, \quad \forall p \in P,\ g \in G, \qquad \pi' \circ u = h \circ \pi$$

e, dalla definizione di mappa tra fibrati associati, abbiamo

$$\begin{aligned} \tilde{u}([p, f]) &:= [u(p), f] \\ \tilde{h}(m) &:= h(m) \end{aligned} \qquad \forall p \in P,\ f \in F,\ m \in M$$

Osservazione 1.5.1. É importante notare che due fibrati di fibra F possono essere isomorfi come fibrati (esiste un isomorfismo di fibrati tra di loro), ma possono non essere allo stesso tempo isomorfi come fibrati associati, ossia potrebbe non esistere un isomorfismo di fibrato associato fra di loro.

Definizione 1.29. Ricordando la definizione di fibrato di fibre e fibrato principale triviali, possiamo dire che un fibrato associato è detto triviale se il fibrato principale associato è triviale.

Teorema 1.5.1. *Un fibrato associato triviale è un fibrato di fibre triviale, ma non vale generalmente l'inverso.*

Teorema 1.5.2. *Le sezioni $\sigma \colon M \to P_F$ di un fibrato associato $P_F \xrightarrow{\pi_F} M$ sono in corrispondenza uno a uno alle funzioni F-valutate*

$$\phi \colon P \to F$$

sul fibrato principale associato.

Osservazione 1.5.2. In generale le sezioni non sono delle funzioni. Se il fibrato è localmente triviale allora le sezioni possono essere viste localmente come delle funzioni, ma globalmente non lo sono.

1.6 La connessione

Sia $P \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibrato principale, l'azione destra del gruppo sulla varietà induce un campo vettoriale su questo fibrato. Ogni elemento $A \in T_eG$ nell'algebra di Lie induce un campo vettoriale su P come

$$\forall p \in P, f \in \mathcal{C}^\infty(P) \quad : \quad X_p^A f := f(p \lhd \exp(tA))'(0)$$

É utile definire inoltre una mappa

$$\begin{aligned} i \colon T_eG &\to \Gamma(TP) \\ A &\mapsto X^A \end{aligned}$$

con $\Gamma(TP)$ sezione del fibrato tangente di P. Questo si identifica anche con lo spazio vettoriale su cui si definiscono i campi vettoriali. Questa mappa i è un'omomorfismo, infatti

$$i([\![A, B]\!]) = [i(A), i(B)]$$

dove le parentesi $[\![\ ,\ ]\!]$ indicano le parentisi dell'algebra, mentre le parentesi $[\ ,\ ]$ sono le parentesi di Lie dei campi vettoriali.

Definizione 1.30. Sia $p \in P$ e $P \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibrato principale, definiamo il cosiddetto *sottospazio verticale* del punto p, $V_pP \subset T_pP$, definito da

$$V_pP := \ker(\pi_*) = \{X \in T_pP \,|\, \pi_*(X) = 0\}$$

e questo è un sottospazio vettoriale.

Nota 1.6.1. Diamo un'interpretazione grafica della precedente definizione. Localmente si può considerare il fibrato principale come una varietà su cui in ogni punto si incolla la fibra G come in Fig.(1.3). La mappa proiezione π prende un punto sulla fibra e lo proietta sullo spazio di base, ma il *push-forward* π_* prende un vettore tangente in un punto della fibra e lo proietta sullo spazio di base. Questo concetto può essere chiarito se consideriamo una curva generica γ passante per il punto p sul fibrato. Preso il vettore tangente a questa curva nel punto p, la mappa π proietta la curva sullo spazio di base e la mappa π_* proietta il vettore tangente in un vettore tangente alla curva proiettata. Nella prima situazione in Fig.(1.3) $\pi_*(X) \neq 0$, mentre nella seconda situazione $\pi_*(X') = 0$, quindi quest'ultimo vettore sarà contenuto nel $\ker(\pi_*)$ e apparterrà al sottospazio verticale del punto p.

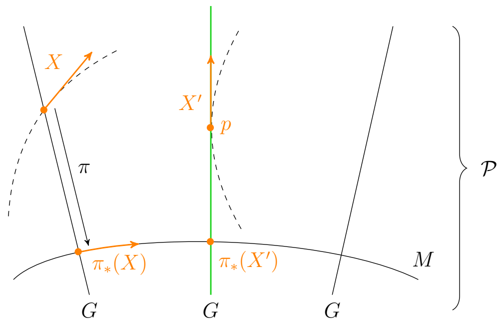


Figura 1.3: Costruzione del sottospazio verticale.

Si vede che $\forall p \in P,\ A \in T_eG\ :\ X_p^A \in V_pP$. L'idea della connessione è quella di scegliere il modo in cui connettere punti indipendenti di fibre vicine in un fibrato principale. Più precisamente diamo la definizione formale:

Definizione 1.31. Una *connessione* su un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ è un'assegnazione per ogni punto $p \in P$ di un sottospazio vettoriale $H_pP \subset T_pP$, chiamato *sottospazio orizzontale*, tale che

i) $H_pP \oplus V_pP = T_pP$

ii) $(\triangleleft g)_*(H_pP) = H_{p\triangleleft g}P$

iii) preso $X_p \in T_pP$, la decomposizione unica

$$X_p = hor(X_p) + vec(X_p)$$

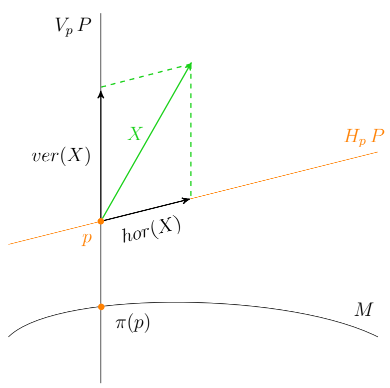
dà luogo, per ogni campo vettoriale liscio $X \in \Gamma(TP)$, a due campi vettoriali lisci $hor(X)$ e $ver(X)$, dove $hor(X_p)$ sta a indicare la componente del campo nel sottospazio orizzontale e $ver(X_p)$ indica la componente nel sottospazio verticale.

Osservazione 1.6.1. Dato un vettore X_p si vede che entrambe le componenti $hor(X_p)$ e $vec(X_p)$ dipendono dalla scelta di H_pP. Vediamo graficamente cosa accade.
Tecnicamente la scelta di un sottospazio orizzontale H_pP in ogni punto $p \in P$ per ottenere una connessione è equivalente a considerare una 1-forma ω_p valutata sull'algebra di Lie indotta da questa scelta. Più precisamente si ha

$$\begin{aligned} \omega_p \colon T_pP &\to T_eG \\ X_p &\mapsto \omega_p(X_p) := i_p^{-1}(ver(X_p)) \ \in T_eG\,, \end{aligned}$$

dove ω_p è una 1-forma sull'intero fibrato principale P chiamata *connessione 1-forma* rispetto alla connessione. Il sottospazio orizzontale H_pP nel punto $p \in P$ è ottenuto dalla 1-forma ω_p come

$$H_pP = \ker(\omega) := \{X_p \in T_pP \,|\, \omega_p(X) = 0\}.$$



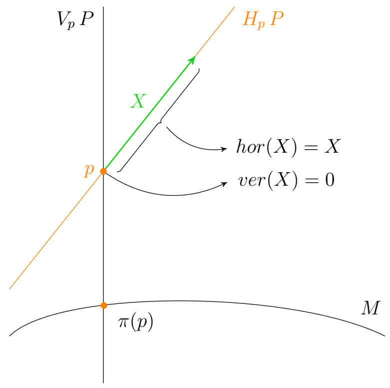


Figura 1.4: Preso $p \in P$ e $X \in T_pP$ nella figura di sinistra la scelta di H_pP induce una componente non nulla sul sottospazio verticale. Nella figura di destra, invece, la scelta di H_pP è tale da annullare la componente verticale.

Teorema 1.6.1. *Una connessione 1-forma ω rispetto a una data connessione ha le proprietà*

i) $\omega \circ i = id_{T_eG} \Rightarrow \omega_p(X_p^A) = A$

ii) $((\triangleleft g)^*\omega)_p(X_p) = (Ad_{g^{-1}})_*(\omega_p(X_p))$

iii) *ω è una 1-forma liscia*

Nota 1.6.2. Ricordiamo che la composizione delle mappe i e ω dà luogo a un collegamento tra gli insiemi $T_eG \xrightarrow{i} V_p \xrightarrow{\omega} T_eG$ per cui la proprietà *i)* del precedente teorema è facilmente dimostrabile. La mappa aggiunta Ad_g è definita da

$$\begin{aligned} Ad_g \colon G &\to G \\ h &\to g\,h\,g^{-1} \end{aligned}$$

e quindi il push-forward di questa mappa è definito da

$$Ad_{g*} \colon T_eG \to T_eG.$$

Nella proprietà *ii)* abbiamo utilizzato una nuova operazione chiamata pull-back di cui diamo la definizione.

Definizione 1.32. Sia $\phi \colon M \to N$ una mappa liscia tra due varietà e sia $f \colon N \to K$, definiamo il *pull-back* di f tramite ϕ come

$$\phi^* f = f \circ \phi$$

e questa è una mappa liscia.

Nel caso delle forme definiamo allo stesso modo il pull-back:

Definizione 1.33. Sia $\phi \colon M \to N$ una mappa tra le varietà M ed N, se $\omega \in T_qN$ e $v \in T_pM$ allora il pull-back di ω tramite ϕ è definito da

$$(\phi^*\omega)(v) = \omega(\phi^* v).$$

Globalmente data una 1-forma ω su N abbiamo una 1-forma su M definita dall'operazione di pull-back

$$(\phi^*\omega)_p = \phi^*(\omega_q)$$

con $\phi(p) = q$. Data una mappa $\phi \colon M \to N$ tra due varietà e una funzione f definita su N abbiamo che la derivata esterna della funzione f è compatibile con l'operazione di pull-back

$$\phi^*(df) = d(\phi^* f).$$

Questa formula è la ragione per cui il differenziale di una funzione deve essere una 1-forma invece di essere un campo vettoriale.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "u"] & P \arrow[l, "\triangleleft G"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[d, "f"] \\
P & P \arrow[l, "\triangleleft G"'] \arrow[r, "\pi"] & M
\end{tikzcd}$$

Figura 1.5: Automorfismo (u, f) di un fibrato principale.

1.6.1 Le rappresentazioni locali di una connessione

Assumiamo di avere un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ e un automorfismo tra fibrati principali (u, f), ossia un isomorfismo tra il fibrato principale P e se stesso. Graficamente si ha
Se su P è definita una connessione 1-forma ω allora potremmo considerare il pull-back di ω tramite u come

$$(u^*\omega)(X) := \omega(u_*X).$$

Questa connessione 1-forma ω è definita globalmente. In ambito fisico gli esperimenti avvengono localmente e perciò possimo considerare un aperto $\mathcal{U} \subseteq M$ della varietà di base e chiederci come costruire la connessione sul fibrato risultante.

Consideriamo una sezione locale

$$\sigma : \mathcal{U} \to P$$

tale che $\pi \circ \sigma = id_{\mathcal{U}}$. Questa sezione locale induce

(a) un campo di *Yang-Mills* definito da

$$\omega^{\mathcal{U}} : \Gamma(T\mathcal{U}) \to T_eG$$
$$\omega^{\mathcal{U}} = \sigma^*\omega$$

e questo è piuttosto chiaro se si osserva la Fig.(1.6);

(b) una banalizzazione locale del fibrato principale, ossia

$$h : \mathcal{U} \times G \to P$$
$$(m, g) \mapsto \sigma(m) \triangleleft g$$

come si vede in Fig.(1.6), che ci permette di definire una rappresentazione locale della connessione ω come

$$(h^*\omega)_{(m,g)} : T_{(m,g)}(\mathcal{U} \times G) \cong T_m\mathcal{U} \oplus T_gG \to TP.$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \times G \arrow[r, "h"] & \mathcal{P} & \\
h^*\omega \arrow[r, bend left] & \mathcal{U} \times G \arrow[u, "\triangleleft G"] \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{P} \arrow[u, "\triangleleft G"'] \arrow[d, "\pi"] & \omega \arrow[l, bend right] \\
 & \mathcal{U} \arrow[r, "id"] & \mathcal{U} \arrow[u, bend right=60, "\sigma"'] & \omega^u \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.6: Struttura di un G-fibrato principale definito in un intorno aperto dell'intera varietà di base M.

Teorema 1.6.2. *La forma esplicita della rappresentazione locale di ω può essere scritta come*

$$(h^*\omega)_{(m,g)}(v, \gamma) = Ad_{g^{-1}*}(\omega^u(v)) + \Xi_g(\gamma)$$

con $v \in T_m\mathcal{U}$, $\gamma \in T_gG$, e Ξ è la forma di Maurer-Cartan definita da

$$\Xi_g : \ T_gG \to T_eG$$
$$L_g^A \mapsto A$$

che si vede essere una 1-forma valutata sull'algebra di Lie del gruppo G.

Esempio 1.8. Consideriamo il fibrato dei riferimenti LM su una varietà liscia M. Questo fibrato viene costruito considerando in ogni punto $x \in M$ l'insieme

$$L_xM := \{(e_1, \dots, e_{dimM}) \,|\, e_1, \dots, e_{dimM} \text{ è una base per } T_xM\} \cong GL(dimM, \mathbb{R}).$$

ed è definito da

$$LM := \dot{\bigcup_{x \in M}} L_xM$$

dove il punto sul simbolo di unione sta a indicare l'unione disgiunta degli elementi. Tale unione ci permette di dire formalmente che $\forall (e_1, \dots, e_{dimM}) \in LM\ \exists!\ x \in M\ t.c.\ (e_1, \dots, e_{dimM}) \in L_xM$. Definiamo la proiezione su questo fibrato come la mappa $\pi \colon LM \to M$ che associa $(e_1, \dots, e_{dimM}) \mapsto x$. Quindi il fibrato dei riferimenti è $LM \xrightarrow{\pi} M$.

Il suddetto fibrato può essere considerato come un $GL(d, \mathbb{R})$-fibrato principale se definiamo l'azione destra libera

$$(e_1, \dots, e_d) \triangleleft g := ({g^m}_1\, e_m, \dots, {g^m}_d\, e_m)$$

dove $GL(d, \mathbb{R}) := \{{g^n}_m \in \mathbb{R} \,|\, m, n = 1, \dots, d \quad det(\dot{g}) \neq 0\}$, con g gli endomorfismi da $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}^d$. Avendo definito questi oggetti possiamo dire che $LM \xrightarrow{\pi} M$ è un $GL(d)$-fibrato principale.

Ogni scelta di una carta $(\mathcal{U}, x)$ sulla varietà di base M induce una sezione

$$\sigma(m) := \left(\left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)_m, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^d} \right)_m \right), \qquad \forall m \in \mathcal{U},\ d \equiv dim\, M.$$

Il campo di Yang-Mills $\omega^{\mathcal{U}} := \sigma^* \omega$ è una 1-forma su $\mathcal{U}$ ed è valutata sull'algebra di Lie con componenti

$$(\omega^{\mathcal{U}})^i{}_{j\,\mu} = \Gamma^i{}_{j\,\mu}$$

dove gli indici $i, j = 1, \dots, dim\, M$ sono indici matriciali che identificano gli elementi dell'algebra di Lie, mentre $\mu = 1, \dots, dim\, M$ è l'indice della 1-forma ed è legato alla varietà di base. Questa connessione non è un tensore in quanto gli indici hanno scopi logici differenti.

Costruiamo ora la forma di Maurer-Cartan per questo fibrato. Per il gruppo $G = GL(d, \mathbb{R})$ scegliamo le coordinate su in un aperto di GL^+ in modo che sia contenuta l'identità id_G. Sappiamo che un gruppo del genere può essere rappresentato mediante matrici $GL(d, \mathbb{R}) \xrightarrow{x^i_j} \mathbb{R}$. Agendo sul gruppo g si ha

$$x^i_j(g) =: g^i_j\,, \tag{1.1}$$

che definisce le metriche e questo processo prende il nome di *coordinatization*. Consideriamo il campo vettoriale invariante a sinistra L^A, generato da un gruppo di Lie con A elemento dell'algebra. Tale campo può essere applicato a qualunque funzione, in particolare alle coordinate e valutato nel punto g

$$\left(L^A x^i_j\right)_g = \left(x^i_j\left(g \cdot \exp(tA)\right)\right)'(0)\,, \tag{1.2}$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto a t. Quindi l'azione di L^A consiste nel far agire la funzione, le coordinate nel nostro caso, sulla curva a cui il campo vettoriale è tangente. L'espressione $g \cdot \exp(tA)$ rappresenta una curva $\gamma(t)$ parametrizzata da t e si ha che $\gamma(t) \in G$ e $\gamma(0) = g$.

Mediante la (1.1) ed esplicitando la derivazione rispetto a t valutata nel punto 0 otteniamo

$$\begin{aligned} \left(L^A x^i_j\right)_g &= \left(g^i_k \left(\mathrm{e}^{tA}\right)^k_j\right)'(0) \\ &= g^i_k A^k_j\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Da questo possiamo concludere che il campo vettoriale invariante a sinistra può essere scritto nella forma

$$L^A_g = g^i_k A^k_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i_j} \right)_g\,, \tag{1.4}$$

dove la derivata rappresenta una base dello spazio tangente al gruppo di Lie, valutata nel punto $g \in GL(d, \mathbb{R})$.

La forma di Maurer-Cartan è

$$(\Xi_g)^i{}_j = (g^{-1})^i{}_k (dx^k{}_j)$$

e si verifica facilmente che

$$
\begin{aligned}
(\Xi_g)^i{}_j(L_g^A) &= (g^{-1})^i{}_k (dx^k{}_j)\left(g_r^p A_q^r \left(\frac{\partial}{\partial x_q^p}\right)_g\right) \\
&= (g^{-1})^i{}_k\, g_r^p\, A_q^r\, \delta_p^k\, \delta_j^q \; = A^i{}_j
\end{aligned}
$$

che è cio che ci aspettavamo. In conclusione per calcolare la forma di Maurer-Cartan per questo fibrato bisogna vedere come i campi vettoriali inviarianti a sinistra agiscono sulle funzioni delle coordinate del gruppo.

Supponiamo ora di avere due sottoinsiemi sovrapposti $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ dello spazio di base M, ossia $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_2 \neq 0$. Queste due sottovarietà indurranno due sezioni σ_1 e σ_2 nel fibrato principale alle quali corrisponderanno due campi di Yang-Mills differenti sullo spazio di base. Ci chiediamo come sono collegati questi ultimi. La situazione si può schematizzare nel seguente modo

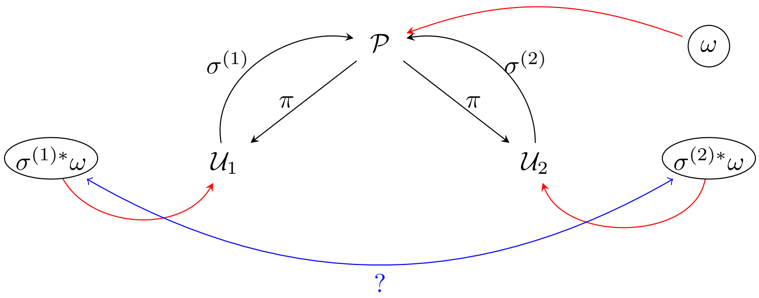


Figura 1.7

Introduciamo la mappa di gauge Ω

$$
\Omega : \; \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \to G \tag{1.5}
$$

definita come l'unico $\Omega(m)$, $\forall m \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subseteq M$ per cui $\sigma^{(2)}(m) = \sigma^{(1)}(m) \triangleleft \Omega(m)$. Questo è sempre possibile in quanto l'azione destra del gruppo è libera. Quindi possiamo dare il seguente

Teorema 1.6.3. *Il campo di Yang-Mills ω^{u_2} sarà dato da*

$$
\omega^{u_2} = Ad_{\Omega^{-1}(m)*}\, \omega^{u_1} + \Omega^* \, \Xi_m
$$

Considerando una carta di coordinate sulla varietà possiamo scrivere le componenti di quest'ultimo oggetto come

$$
\omega_\mu^{u_2} = Ad_{\Omega^{-1}(m)*}\, \omega_\mu^{u_1} + (\Omega^* \, \Xi_m)_\mu
$$

Esempio 1.9. Calcoliamo $\Omega^*\Xi$ per il fibrato dei riferimenti $LM \xrightarrow{\pi} M$ con $G = GL(d, \mathbb{R})$. In questo caso sappiamo che

$$
\begin{aligned}
&\Omega\colon \mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)} \to G \\
&\Xi\colon T_g G \to T_e G
\end{aligned}
\qquad \Rightarrow \qquad \Omega^*\Xi\colon T\mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)} \to T_e G
$$

Quindi consideriamo $p \in \mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)}$ e calcoliamo

$$
\begin{aligned}
(\Omega^*\Xi)^i_{p\ j}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p &= \Xi^i_{\Omega(p)\ j}\left(\left(\Omega_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right)_{\Omega(p)}\right) && \text{(per la definizione del pull-back)} \\
&= (\Omega^{-1}(p))^i{}_k (dx^k{}_j)\left(\left(\Omega_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right)_{\Omega(p)}\right) \\
&= (\Omega^{-1}(p))^i{}_k \left(\Omega_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right)_{\Omega(p)} (x^k{}_j) && \text{(per la definizione della derivata esterna d)} \\
&= (\Omega^{-1}(p))^i{}_k \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p (x^k{}_j \circ \Omega)_p && \text{(per la definizione del push-forward)} \\
&= (\Omega^{-1}(p))^i{}_k \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \Omega(p)^k{}_j
\end{aligned}
$$

quindi in conclusione

$$(\Omega^*\Xi)^i_{p\ j} = (\Omega^{-1}(p))^i{}_k \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \Omega(p)^k{}_j dx^\mu =: (\boldsymbol{\Omega}^{-1} \cdot d\boldsymbol{\Omega})^i{}_j$$

dove il punto rappresenta il prodotto tra matrici e $\boldsymbol{\Omega}$ è una matrice.

Calcoliamo ora la parte $Ad_{\Omega^{-1}(p)*}\omega^{u^{(1)}}$ per questo caso particolare. Ricordando la definizione della mappa aggiunta si vede che

$$Ad_{\Omega^{-1}(p)*}\omega^{u^{(1)}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}^{u^{(1)}}\boldsymbol{\Omega}$$

per cui sul fibrato principale dei riferimenti la regola di transizione tra due campi di Yang-Mills, definiti sullo stesso dominio $\mathcal{U}^{(1)} \cap \mathcal{U}^{(2)}$, è espressa nella forma

$$(\omega^{u^{(2)}})^i{}_{j\mu} = (\omega^{-1})^i{}_k(\omega^{u^{(1)}})^k{}_{l\mu}\Omega^l{}_j + (\Omega^{-1})^i{}_k\partial_\mu\Omega^k{}_j$$

Esempio 1.10. Diamo ora un'applicazione degli elementi trattati in questa sezione e consideriamo un caso molto particolare che ha che fare con la Relatività Generale.

Consideriamo il fibrato dei riferimenti con $G = GL(d, \mathbb{R})$ e prendiamo il caso particolare di due sezioni sul fibrato LM, $\sigma^{(1)}$ e $\sigma^{(2)}$, indotte dalla scelta di due carte sulla varietà di base M, $(\mathcal{U}^{(1)}, x)$ e $(\mathcal{U}^{(2)}, y)$ rispettivamente. La mappa Ω altro non è se non la matice jacobiana relativa al cambiamento di coordinate, ossia

$$\Omega^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}, \qquad (\Omega^{-1})^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

per cui il campo di Yang-Mills ω si trasformerà nel seguente modo

$$(\omega^{u^{(2)}})^i{}_{j\mu'} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^{\mu'}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}(\omega^{u^{(1)}})^k{}_{l\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^\mu \partial x^l}\right)$$

e si può osservare che questa è la formula per la trasformazione del simbolo di Christoffel $\Gamma^i_{j\mu}$ in Relatività Generale.

Osservazione 1.6.2. In questo caso particolare si vede che a differenza dei casi precedenti gli indici ora sono tutti collegati. Questo perchè gli indici relativi alla connessione ora sono legati alle particolari sezioni che sono funzione della scelta di particolari carte e quindi coordinate sulla varietà di base del fibrato. L'indice μ che è relativo alla trasformazione delle coordinate sulla varietà di base ha lo stesso valore degli indici i, j relativi alla trasformazione dei campi di Yang-Mills. Tuttavia è da sottolineare il fatto che Γ, anche in questo caso particolare, non si trasforma come un tensore di rango tre.

1.7 Il trasporto parallelo

Consideriamo un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ con dim $G = 1$ e dim $M = 2$, e assumiamo di avere una connessione 1-forma ω definita sul fibrato. In riferimento alla Fig(1.8), possiamo dire che la connesione ω induce in ogni punto p della fibra un sottospazio orizzontale H_pP. Presa una curva γ sulla varietà di base possiamo pensare di "sollevare" la curva sul fibrato principale utilizzando la mappa proiezione π. Questa operazione deve soddisfare ovviamente delle condizioni di compatibilità e lo spostamento della curva lungo il fibrato può essere fatto in maniera arbitraria.

Definizione 1.34. Sia γ una curva definita sulla varietà di base M come $\gamma\colon [0, 1] \to M$ con le condizioni $\gamma(0) = a \in M$ e $\gamma(1) = b \in M$. L'unica curva

$$\gamma^\uparrow\colon [0, 1] \to P$$

che passa per il punto $\gamma^\uparrow(0) =: p \in \pi^{-1}(a)$ e che soddisfa

i) $\pi \circ \gamma^\uparrow = \gamma$

ii) $ver(X_{\gamma^\uparrow,\gamma^\uparrow(\lambda)}) = 0 \quad \forall\lambda \in [0, 1]$

iii) $\pi_*(X_{\gamma^\uparrow,\gamma^\uparrow(\lambda)}) = X_{\gamma,\gamma(\lambda)} \quad \forall\lambda \in [0, 1]$

è chiamata *sollevamento orizzontale* di γ tramite p.

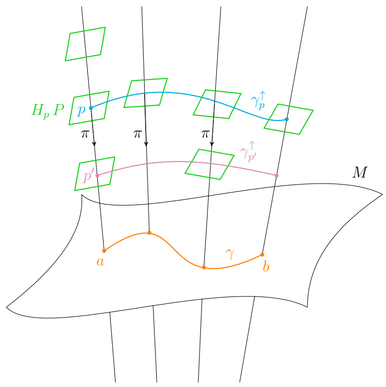


Figura 1.8

Osservazione 1.7.1. In riferimento alla Fig.(1.8) e dalla precedente definizione, si osserva che il sollevamento orizzontale di una curva γ, definita sulla varietà di base, tramite un punto della fibra è unico, ma possiamo considerare diversi punti della fibra come ad esempio il punto p', e ottenere un altro sollvamento orizzontale della curva γ sul fibrato.

Per scrivere in forma esplicita il sollevamento orizzontale di una curva si può procedere nel seguente modo

- si "genera" il sollevamento orizzontale partendo da qualsiasi curva arbitraria $\delta\colon [0,1] \to P$, che sotto l'azione della proiezione π dà luogo alla curva originaria $\gamma = \pi \circ \delta$, e si agisce con una curva opportuna $g\colon [0,1] \to G$ definita nel gruppo G in modo da ottenere $\gamma^\uparrow(\lambda) = \delta(\lambda) \triangleleft g(\lambda)$. La curva g sarà la soluzione di una ODE con condizioni iniziali $g(0) = g_0$ dove g_0 è l'unico elemento per cui $\delta(0) \triangleleft g_0 = p \in P$ con p punto da cui passa il sollevamento orizzontale della curva.

- si procede poi alla risoluzione esplicita, ma locale, della ODE tramite il path integral sul campo locale di Yang-Mills.

Teorema 1.7.1. *La ODE del primo ordine per la curva $g\colon [0,1] \to G$ è*

$$Ad_{g(\lambda)^{-1}*}\big(\omega_{\delta(\lambda)}(X_{\delta,\delta(\lambda)})\big) + \Xi_{g(\lambda)}(X_{g,g(\lambda)}) = 0$$

con la condizione al contorno $g(0) = g_0$.

Corollario 1.7.2. *Se G è un gruppo di matrici allora la ODE suddetta assume la forma*

$$g(\lambda)^{-1} \cdot \omega_{\delta(\lambda)}(X_{\delta,\delta(\lambda)}) \cdot g(\lambda) + g(\lambda)^{-1} \cdot \dot{g}(\lambda) = 0$$

con $\cdot$ il prodotto tra matrici. In una forma più semplice la precedente equazione si può scrivere come

$$\dot{g}(\lambda) = -\omega_{\delta(\lambda)}(X_{\delta,\delta(\lambda)})g(\lambda)$$

da cui si vede che è una equazione differenziale ordinaria del primo ordine.

Al fine di semplificare la ODE cosideriamo una carta locale (U,x) della varietà di base e scegliamo una sezione $\sigma\colon U \to P$ con $\pi \circ \sigma = id_M$. Queste assunzioni inducono sul fibrato due elementi:

- un campo di Yang-Mills $\Gamma^{U\sigma} := \sigma^*\omega$

- una curva $\delta = \sigma \circ \gamma$ come in Fig.(1.9). Preso il vettore tangente a δ in ogni punto, possiamo dire che

$$\sigma_*(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}) = X_{\delta,\delta(\lambda)}$$

Ricordiamo che nella ODE abbiamo l'espressione di $\omega_{\delta(\lambda)}(X_{\delta,\delta(\lambda)})$ che possiamo esprimere ora come

$$\begin{aligned}\omega_{\delta(\lambda)}(X_{\delta,\delta(\lambda)}) &= \omega_{(\sigma\circ\gamma)(\lambda)}(\sigma_*(X_{\gamma,\gamma(\lambda)})) \\ &= (\sigma^*\omega)_{\gamma(\lambda)}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}) \qquad \text{(per la definizione del pullback)} \\ &= \Gamma^{U,\sigma}_{(\gamma(\lambda))}(X_{\gamma,\gamma(\lambda)}) = (\Gamma^{U,\sigma}_{\gamma(\lambda)})_\mu(X_{\gamma,\gamma(\lambda)})^\mu\end{aligned}$$

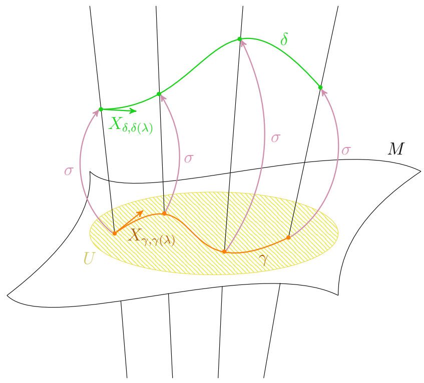


Figura 1.9

Consideriamo ora la ODE nel caso particolare del gruppo di matrici. La ODE diventa localmente

$$\dot{g}(\lambda) = -\Gamma_\mu(\gamma(\lambda))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda)\,g(\lambda)$$

con la condizione iniziale $g(0) = g_0$ e avendo sottinteso gli indici U, σ di Γ. Per risolvere questa ODE basta integrare per ottenere

$$g(t) = g_0 - \int_0^t d\lambda \Gamma_\mu(\gamma(\lambda))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda)\,g(\lambda)$$

e ora si può inserire il valore di g in maniera ricorsiva per ottenere la soluzione

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0 - \int_0^t d\lambda\,\Gamma_\mu(\gamma(\lambda))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda)\left[g_0 - \int_0^\lambda d\lambda' \Gamma_\mu(\gamma(\lambda'))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda')\right] \\ &= g_0\left(\mathbb{1}_{T_eG} - \int_0^t d\lambda_1 \Gamma_\mu(\gamma(\lambda_1))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda_1)\, + \int_0^t d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \Gamma_\mu(\gamma(\lambda_1))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda_1)\,\Gamma_\mu(\gamma(\lambda_2))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda_2) + \dots\right) \end{aligned}$$

e usando le relazioni

$$\begin{aligned} \int_0^t d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 &= \frac{1}{2}\int_0^t d\lambda_1\, d\lambda_2 \\ \int_0^t d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \int_0^{\lambda_2} d\lambda_3 &= \frac{1}{3!}\int_0^t d\lambda_1\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \\ &\vdots \\ \int_0^t d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \dots \int_0^{\lambda_n - 1} d\lambda_n &= \frac{1}{n!}\int_0^t d\lambda_1 \dots d\lambda_n \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0\left(\mathbb{1}_{T_eG} - \int_0^t d\lambda_1 \Gamma_\mu(\gamma(\lambda_1))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda_1)\, + \frac{1}{2!}\int_0^t d\lambda_1\, d\lambda_2 \Gamma_\mu(\gamma(\lambda_1))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda_1)\,\Gamma_\mu(\gamma(\lambda_2))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda_2) + \dots\right) \\ &=: g_0\left[\mathrm{P}\exp\left\{-\int_0^t d\lambda\,\Gamma_\mu(\gamma(\lambda))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda)\right\}\right] \end{aligned}$$

dove la lettera P indica il *path ordered*.

In conclusione, il sollevamento orzzontale di una curva $\gamma\colon [0,1] \to U \xrightarrow{\sigma} P$ localmente è dato in forma esplicita da

$$\gamma^\uparrow(\lambda) = (\sigma \circ \gamma)(\lambda) \triangleleft \left(\left[\mathrm{P}\exp\left\{-\int_0^t d\lambda\,\Gamma_\mu(\gamma(\lambda))\,\dot{\gamma}^\mu(\lambda)\right\}\right] g_0\right)$$

Graficamente la situazione si può schematizzare come in Fig.(1.10).

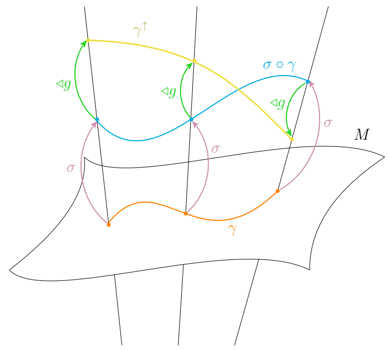


Figura 1.10

Definizione 1.35. Sia $\gamma\colon [0,1] \to M$ una curva nella varietà di base e sia $\gamma_p^{\uparrow}\colon [0,1] \to P$ il sollevamento orizzontale della curva γ passante per il punto $p \in \pi^{-1}\gamma(0)$. Definiamo la mappa del sollevamento orizzontale

$$T_\gamma\colon \pi^{-1}(\{\gamma(0)\}) \to \pi^{-1}(\{\gamma(1)\})$$

con $\pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$ la fibra iniziale e $\pi^{-1}(\{\gamma(1)\})$ la fibra finale. La mappa T quindi associa $p \mapsto \gamma_p^{\uparrow}(1)$ come mostrato in Fig.(1.11)

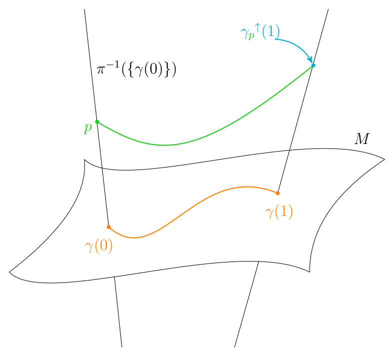


Figura 1.11

Osservazione 1.7.2. La mappa T_γ è una mappa biunivoca e ciò è dovuto al fatto che

$$(\triangleleft g)_* H_p = H_{p \triangleleft g}$$

e dalla definizione del sollevamente orizzontale.

Consideriamo ora il caso dei loop, ossia curve $\gamma\colon [0,1] \to M$ con $\gamma(0) = \gamma(1)$ come in Fig.(1.12)

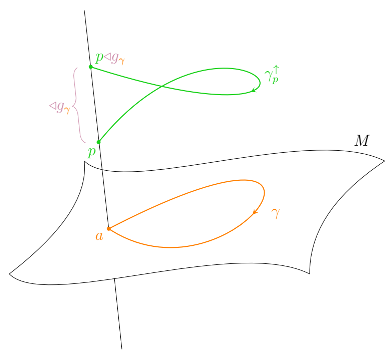


Figura 1.12

Definizione 1.36. Sia $a \in M$ e γ un loop con punto di base $\gamma(0) = \gamma(1) = a$ allora definiamo il sottogruppo

$$\mathrm{Hol}_a(\omega) := \{g_\gamma \mid \gamma_p^\uparrow(1) = p \triangleleft g_\gamma \text{ per qualche loop } \gamma\} \subseteq G$$

con $T_\gamma \colon p \mapsto \gamma_p^\uparrow(1) = p \triangleleft g_\gamma$ in quanto si ha un loop. $\mathrm{Hol}_a(\omega)$ è chiamato *gruppo di olonomia* di ω. Questo sottogruppo così definito ci dà informazioni topologiche sulla varietà di base.

Definizione 1.37. Sia $P \xrightarrow{\pi} M$ un G-fibrato principale e ω una connessione 1-foma definita su P. Sia $P_F \xrightarrow{\pi_F} M$ il fibrato di fibre associato, con F fibra caratteristica, e il gruppo di Lie G agisce con l'azione destra $\triangleright$ sul fibrato. Sia $\gamma \colon [0,1] \to M$ una curva sulla varietà di base e $\gamma_p^\uparrow \colon [0,1] \to P$ il sollevamento orizzontale di γ passante per il punto $p \in \pi^{-1}(\{\gamma(0)\})$. Definiamo il sollevamento orizzontale di γ nel fibrato associato passante per il punto $[p,f] \in P_F$ come la curva

$$\gamma_{[p,f]}^{\uparrow P_F} \colon [0,1] \to P_F$$

definita da

$$\gamma^{\uparrow P_F}(\lambda) := [\gamma^\uparrow(\lambda), f]$$

Definizione 1.38. Definiamo la *mappa trasporto parallelo* $T_\gamma^{P_F}$ come

$$\begin{aligned} T_\gamma^{P_F} : \pi_F^{-1}(\{\gamma(0)\}) &\to \pi_F^{-1}(\{\gamma(1)\}) \\ [p,f] &\mapsto \gamma_{[p,f]}^{\uparrow P_F}(1) \end{aligned}$$

che è una mappa biunivoca tra le fibre anche in questo caso.

Definizione 1.39. Sia $(F, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e sia $\triangleright \colon G \times F \to F$ l'azione sinistra del gruppo di Lie G su F e supponiamo che sia lineare, allora il fibrato $P_F \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato vettoriale, con M spazio di base.

Consideriamo ora la situazione in Fig.(1.13) in cui abbiamo un fibrato vettoriale P_F. Consideriamo una sezione locale liscia $\phi \colon U \to P_F$ del fibrato vettoriale. Prendiamo $X \in T_a M$ e consideriamo una curva γ nello spazio di base che ha come vettore tangente nel punto a il vettore X. Successivamente prendiamo il sollevamento orizzontale della curva γ su tale fibrato e, dal momento che la fibra F è uno spazio vettoriale, possiamo considerare la differenza tra i punti $\phi(\gamma(1))$ e $\gamma^{\uparrow P_F}$. Dividendo questa differenza per il parametro della curva γ si ottiene la definizione di derivata e questa è l'idea per costruire la derivata covariante di un vettore lungo una curva.

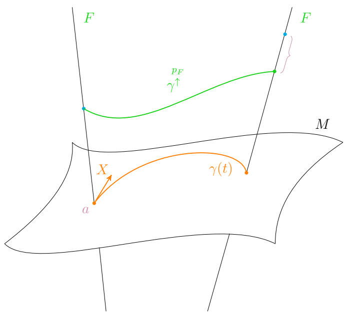


Figura 1.13

1.8 La curvatura

Definizione 1.40. Sia $P \xrightarrow{\triangleleft G} P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale con una connessione ω e ϕ una k-forma a valori in uno spazio $\mathcal{J}$, allora

$$\begin{aligned} D\phi \colon \Gamma\left(T_0^k P\right) &\to \mathcal{J} \\ D\phi\left(X_1, \ldots, X_k\right) : &= d\phi(hor(X_1), \ldots, hor(X_{k+1})) \end{aligned} \tag{1.6}$$

è chiamata *derivata esterna covariante* della k-forma ϕ.

Definizione 1.41. Sia $P \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato principale dotato di una connessione ω. Definiamo la *curvatura* della connessione (1-forma) come una 2-forma valutata nell'algebra di Lie definita su P come

$$\Omega \colon \Gamma(T^2_0 P) \to T_e G$$

$$\Omega := D\omega$$

dove $T^2_0 P$ rappresenta lo spazio delle due-forme definite sul fibrato principale.

Nota 1.8.1. Scriviamo esplicitamente la forma della connessione come

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

dove il prodotto esterno $\wedge$ in questo caso non è da intendere come prodotto esterno tra due 1-forme. Se considerassimo la definizione naive del prodotto esterno tra due 1-forme ovviamente il secondo termine sarebbe nullo, ma in questo caso la forma ω non è definita in uno spazio vettoriale, bensì nell'algebra di Lie. Definiamo quindi il prodotto esterno tra due forme definite nell'algebra come

$$\omega \wedge \omega(X, Y) := [\![\omega(X), \omega(Y)]\!] \quad \forall\, X, Y \in \Gamma(TP)$$

Per dimostrare questo assunto possiamo procedere nel seguente modo:

$\Omega \in \mathcal{C}^\infty(P)$ ed è bilineare in quanto un 2-forma, quindi

(a) presi $X, Y \in \Gamma(TP)$ verticali

$$\exists\, A, B \in T_e G \,:\, X = X^A,\ Y = X^B$$

ciò vuol dire che X e Y sono i campi vettoriali indotti dagli elementi A e B dell'agebra. Ora bisogna provare che

$$\Omega(X^A, X^B) = d\omega(X^A, X^B) + (\omega \wedge \omega)(X^A, X^B)$$

Prendiamo il membro di sinistra della precedente espressione ed esplicitando

$$\Omega(X^A, X^B) = D\omega(X^A, X^B) = d\omega(hor(X^A), hor(X^B)) = 0$$

in quanto sono vettori che vivono nel sottospazio verticale. A destra invece si ha

$$d\omega(X^A, X^B) + (\omega \wedge \omega)(X^A, X^B)$$

e dalla definizione di derivata esterna

$$d\omega(X^A, X^B) := X^A(\omega(X^B)) - X^B(\omega(X^A)) - \omega([X^A, X^B])$$

si ottiene

$$\begin{aligned} d\omega(X^A, X^B) + (\omega \wedge \omega)(X^A, X^B) &= X^A(\omega(X^B)) - X^B(\omega(X^A)) - \omega([X^A, X^B]) \\ &\quad + [\![\omega(X^A), \omega(X^B)]\!] \\ &= X^A(B) - X^B(A) - \omega(X^{[\![X^A, X^B]\!]}) + [\![A, B]\!] = 0 \end{aligned}$$

(b) assumiamo ora $X, Y \in \Gamma(TP)$ orizzontali. Quindi abbiamo a sinistra

$$\Omega(X, Y) = D\omega(X, Y) = d\omega(hor(X), hor(Y)) = d\omega(X, Y)$$

mentre a destra

$$d\omega(X, Y) + (\omega \wedge \omega)(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\![\omega(X), \omega(Y)]\!] = d\omega(X, Y)$$

in quanto $\omega(hor(X)) = 0$.

(c) consideriamo infine il caso in cui X è orizzontale e $Y = X^A$ è verticale. Quindi si avrà a sinistra

$$\Omega(X, X^A) = D\omega(X, X^A) = d\omega(hor(X), hor(X^A)) = 0$$

mentre a destra

$$\begin{aligned} d\omega(X, X^A) + (\omega \wedge \omega)(X, X^A) &= X(\omega(X^A)) - X^A(\omega(X)) - \omega([X, X^A]) + [\![\omega(X), \omega(X^A)]\!] \\ &= X(A) - X^A(0) - \omega([X, X^A]) + [\![0, A]\!] \\ &= -\omega([X, X^A]) = 0 \end{aligned}$$

in quanto $[X, X^A]$ è un vettore orizzontale e agendo con ω si ottiene una quantità nulla. Abbiamo così provato la forma della curvatura.

Osservazione 1.8.1. Se G è un gruppo matriciale possiamo scrivere la curvatura come

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j$$

in quanto le parentesi di Lie sono date in termini di parentesi di commutazione.

Ci chiediamo ora come legare questi oggetti, che sono definiti sul fibrato, allo spazio di base. Consideriamo il fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} U \subseteq M$ dotato di una conensione e una curvatura definita sul fibrato. Assumiamo di avere una sezione locale $\sigma\colon U \to P$ che induce un campo di Yang-Mills $\sigma^*\omega \in \Omega^1(M) \otimes T_eG$ sullo spazio di base (con $\Omega^1(M)$ indichiamo le 1-forme definite sulla varietà M). La sezione locale induce ora un'altro oggetto chiamato *field strength* di Yang-Mills definita da $\sigma^*\Omega \in \Omega^2(M) \otimes T_eG$.

In Relatività generale per esempio il campo di Yang-Mills è rappresentato da Γ, il simbolo di Christoffel, mentre la field strength è il tensore di Riemann. In teoria dei campi, considerando le teorie di gauge, si ha il campo di Yang-Mills che è rappresentato dal potenziale A, mentre la field strength è il tensore elettromagnetico F. Da notare che questi oggetti sono definiti sull'algebra del gruppo, perciò se il gruppo di Lie di riferimento ha certe proprietà, come per esempio il fatto di essere Abeliano o non Abeliano, queste si riflettono sul campo di Yang-Mills e sulla field strength.

Teorema 1.8.1. *Dato un fibrato principale dotato di una connessione e una curvatura allora è soddisfatta l'identità di Bianchi*

$$D\,\Omega = 0.$$

Osservazione 1.8.2. Guardando l'indentità di Bianchi ed esplicitando la curvatura si ottiene

$$D\,\Omega = D^2\omega = 0$$

e si potrebbe subito pensare che $D^2 = 0$. Questo assunto è sbagliato in quanto in generale $D^2 \neq 0$.

1.9 La derivata covariante sui fibrati associati

Teorema 1.9.1. *Se $P \xrightarrow{\pi} M$ è un G-fibrato principale e $P_F \xrightarrow{\pi_F} M$ è il fibrato associato, allora c'è una corrispondenza biunivoca tra una sezione $\sigma\colon M \to P_F$ del fibrato associato, con $\pi_F \circ \sigma = id_M$, e una funzione G-equivariante $\phi\colon P \to F$, con $\phi(p \triangleleft g) = g^{-1} \triangleright \phi(p)$.*

Dimostrazione.

(a) Data una funzione G-equivariante ϕ, possiamo costruire una sezione

$$\begin{aligned} \sigma_\phi &\colon M \to P_F \\ \sigma_{\phi(x)} &:= [p, \phi(p)] \end{aligned}$$

dove $p \in \pi^{-1}(\{x\})$, $x \in M$. Questa sezione è ben definita in quanto $\forall p' \in \pi^{-1}(\{x\})$ sappiamo che $\exists! g \in G \,:\, p' = p \triangleleft g$. Sappiamo inoltre che

$$[p', \phi(p')] = [p \triangleleft g, \phi(p \triangleleft g)] = [p \triangleleft g, g^{-1} \triangleright \phi(p)] = [p, \phi(p)]$$

per la G-equivarianza di ϕ e per le proprietà delle classi di equivalenza. Poichè $\pi_F \circ \sigma = id_M$ allora σ_ϕ è una sezione di P_F.

(b) Data una sezione σ del fibrato associato, costruiamo

$$\begin{aligned}\phi_\sigma &\colon P \to F\\ \phi_{\sigma(p)} &:= i_p^{-1}(\sigma(\pi(p)))\end{aligned}$$

dove $i\colon F \to \pi_F^{-1}(\pi(p)) \subset P_F$ è una mappa biettiva (omeomorfismo e diffeomorfismo) definita come

$$i_p(f) := [p, f] = [p \triangleleft g, g^{-1} \triangleright f] = i_{p\triangleleft g}(g^{-1} \triangleright f)$$

Dimostriamo ora che ϕ_σ è G-equivariante

$$\begin{aligned}\phi_\sigma(p \triangleleft g) &= i_{p\triangleleft g}^{-1}(\sigma(\pi(p \triangleleft g)))\\ &= i_{p\triangleleft g}^{-1}\, i_p(\phi_\sigma(p)) = i_{p\triangleleft g}^{-1}\, i_{p\triangleleft g}(g^{-1} \triangleright \phi_\sigma(p)) = g^{-1} \triangleright \phi_\sigma(p)\end{aligned}$$

(c) Dobbiamo controllare ora che non ci sia perdita di informazione nel passaggio dal fibrato principale a quello associato e viceversa. Bisogna verificare che

$$\sigma_{\phi_\sigma} = \sigma, \qquad \phi_{\sigma_\phi} = \phi.$$

Si ha quindi

$$\sigma_{\phi_\sigma}(x) := [p, \phi_\sigma(p)] = [p, i_p^{-1}(\sigma(\pi(p)))] = i_p(i_p^{-1}(\sigma(\pi(p)))) = \sigma(x), \quad \forall x \in M, p \in \pi^{-1}(x)$$

e viceversa

$$\phi_{\sigma_\phi}(p) := i_p^{-1}(\sigma_\phi(\pi(p))) = i_p^{-1}([p, \phi(p)]) = i_p^{-1}(i_p(\phi(p))) = \phi(p), \quad \forall p \in P$$

□

Sia $\phi\colon P \to F$ una funzione G-equivariante definita da

$$\phi(p \triangleleft g) = g^{-1} \triangleright \phi(p),$$

possiamo prendere la rappresentazione dell'elemento $g \in G$ vicino all'identità per ottenere

$$\phi(p \triangleleft \exp(tA)) = \exp(-tA) \triangleright \phi(p)$$

con $A \in T_eG$. Considerando l'azione destra del gruppo G su uno spazio vettoriale di dimensione finita F e supponendo che questa azione sia lineare

$$G \triangleright\colon F \to F$$

allora possiamo considerare

$$\frac{d}{dt}\big[\phi(p \triangleleft \exp(tA))\big]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\big[\exp(-tA) \triangleright \phi(p)\big]\Big|_{t=0}$$

da cui si ottiene

$$d\phi(p)\, X_p^A = -A \triangleright \phi(p) = -\omega(X^A) \triangleright \phi(p)$$

con X_p^A il campo vettoriale sul fibrato principale indotto dall'elemento A nell'algebra, e ω è la connessione 1-forma.

Corollario 1.9.2. *Per un'azione destra lineare del gruppo $G \triangleright$ si ha*

$$0 = d\phi(X^A) + \omega(X^A) \triangleright \phi(p)$$

Definizione 1.42. Definiamo la *derivata covariante* come l'oggetto $\nabla_T\sigma\colon T_pM \to \Gamma(P_F)$ che soddisfa le proprietà

i) $\nabla_{fT+S}\,\sigma = f\nabla_T\,\sigma + \nabla_S\,\sigma$

ii) $\nabla_T(\sigma+\tau) = \nabla_T\sigma + \nabla_T\tau \qquad \forall f \in M, \mathcal{C}^\infty(M),\ T, S \in T_xM$

iii) $\nabla_T(f\sigma) = (Tf)\sigma + f\nabla_T\sigma$

Consideriamo un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ e il fibrato associato $P_F \xrightarrow{\pi_F} M$ sul quale è definita una sezione $\sigma\colon M \to P_F$ che induce una sezione sul fibrato principale ϕ_σ. Consideriamlo la derivata covariante esterna agente su una 0-forma ϕ

$$D\phi := d\phi \circ hor$$

che agendo su un campo vettoriale $X \in T_pP$ dà luogo a

$$D\phi(X) = d\phi(X) + \omega(X) \triangleright \phi, \quad \text{con } X \in T_pP$$

e si vede che nel caso di una 0-forma l'azione di ω su ϕ è semplicemente l'azione destra, anche se in generale dovrebbe essere $\wedge$. Per provare questa espressione consideriamo

a) X verticale : $X = X^A$ per cui

$$D\phi(X) = d\phi(hor(X)) = 0$$

e

$$d\phi(X^A) + \omega(X^A) \triangleright \phi = 0$$

per il corollario 1.9.2

b) consideriamo X orizzontale per cui

$$D\phi(X) = d\phi(hor(X)) = d\phi(X)$$

mentre

$$d\phi(X) + \omega(X) \triangleright \phi = d\phi(X)$$

Possiamo scivere $D_X\phi := D\phi(X)$ con $X \in T_pP$ e questa ha le proprietà della derivata covariante ma questo oggetto vive in T_pP e non nello spazio tangente dello spazio di base. Localizziamo quindi questo oggetto nello spazio di base introducendo una sezione $\varphi\colon U \subseteq M \to P$, con $\varphi \circ \pi = id_M$, nel fibrato principale. Possiamo considerare il pull-back di $\phi\colon P \to F$ come

$$\varphi^*\phi := \phi \circ \varphi$$

e quindi tutti gli oggetti definiti sul fibrato principale possono essere proiettati sullo spazio di base. Uno tra questi è la connessione $\omega \in \Omega^1(P) \otimes T_eG$ che diventa

$$\varphi^*\omega =: \omega^{U,\varphi} \in \Omega^1(M) \otimes T_eG$$

oppure possiamo considerare la derivata covariante esterna $D\phi \in \Omega^1(P) \otimes F$ per ottenere

$$\varphi^*(D\phi) \in \Omega^1(M) \otimes F.$$

Esplicitamente si ottiene per un qualsiasi $T \in T_xM$

$$\begin{aligned}(\varphi^*D\phi)(T) &= \varphi^*(d\phi + \omega \triangleright \phi)(T)\\ &= \varphi^*(d\phi)(T) + \varphi^*(\omega \triangleright \phi)(T)\\ &= d(\varphi^*\phi) + (\varphi^*\omega)(T)\phi^*\phi =: ds(T) + \omega^{U,\varphi}(T) \triangleright s\end{aligned}$$

dove $s = \varphi^*\phi$, $s\colon U \to F$ è una funzione locale definita in F, e con $\omega^{U,\varphi}$ il campo di Yang-Mills. Quindi in conclusione possiamo dire che

$$\boxed{\nabla_T s = ds(T) + \omega^{U,\varphi}(T) \triangleright s}$$

e questo oggetto soddisfa tutte le proprietà della derivata covariante. Questa derivata covariante agisce solo localmente in quanto si è considerata una sezione locale. Se avessimo una sezione globale allora l'azione della derivata covariante sarebbe su tutto lo spazio di base, ma l'esistenza di tale sezione indurrebbe un fibrato principale triviale.

Osservazione 1.9.1. Da notare che nella definizione della derivata covariante in forma locale ci sono delle arbitrarietà nella scelta della connessione e dell'azione sinistra del gruppo. In merito alla prima abbiamo già discusso precedentemente la possibilità di costruire una qualsiasi connessione 1-forma che soddisfi determinate proprietà. Per la scelta dell'azione sinistra del gruppo l'unica richiesta è che sia lineare. In conclusione possiamo scegliere in maniera piuttosto indiendente la connessione 1-forma e l'azione sinistra del gruppo di Lie sullo spazio di base.

1.10 La comologia di de Rham

Introduciamo un metodo per caratterizzare la topologia di una varietà in termini delle proprietà di forme differenziali. Richiamiamo che l'algebra di Grassman $Gr(M)$ è lo spazio di tutte le n-forme su M con dimensione al più uguale alla dimensione della varietà. In questo contesto ogni p-forma è mappa ta in qualche $(p+1)$-forma tramite la derivata esterna, che soddisfa $d^2 = 0$. Si ha quindi la sequenza di mappe

$$\dots \xrightarrow{d_p-2} \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d_p-1} \Omega^p(M) \xrightarrow{d_p} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d_p+1} \dots$$

dove d_p è l'operatore d sulle p-forme, visto come un omomorfismo di gruppo tra gli spazi vettoriali $\Omega^p(M)$ e $\Omega^{p+1}(M)$.

Definizione 1.43. Presa una p-forma $\omega_p \in \Omega^p(M)$ si ha che

i) se $d\omega_p = 0$ allora ω_p è chiamata *forma chiusa*;

ii) se $\omega_p = d\omega_{p-1}$ allora ω_p è chiamata *forma esatta*.

Definizione 1.44. Definiamo i gruppi

$$Z^p(M) := \{\omega_p \in \Omega^p(M) \,|\, d\omega_p = 0\}$$

$$B^p(M) := \{\omega_p \in \Omega^p(M) \,|\, \omega_p = d\omega_{p-1}\}$$

che sono rispettivamente il gruppo delle forme chiuse e delle forme esatte definite sulla varietà M.

Osservazione 1.10.1. Tutte le forme esatte sono anche forme chiuse, in quanto $d^2 = 0$ e possiamo dire che

$$B^p(M) \subset Z^p(M) \subset \Omega^p(M)$$

Definizione 1.45. Il gruppo p-esimo di *comologia di de Rham* $H^p(M)$ della varietà M, è definito come il gruppo quoziente del gruppo delle forme chiuse e il gruppo delle forme esatte

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$$

Dalla precedente definizione si vede che gli elementi di $H^p(M)$ sono le classi di equivalenza di forme chiuse che differiscono per una forma esatta. Chiaramente $H^p(M) = 0 \quad p > dim(M)$ in quanto non ci sono forme di dimensione più grande della dimensione della varietà su cui sono definite. Da ciò segue che c'è un numero finito di gruppi di comologia di de Rham per ogni varietà, uno per ogni intero p tra 0 e $dim(M)$. Le classi caratteristiche sono delle particolari classi di comologia legate alle proprietà dei polinomi invarianti costruiti sulla varietà.

1.11 Le forme di Chern-Simons

Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale complesso la cui fibra è $\mathbb{C}^k$. La struttura di gruppo G è un sottogruppo di $GL(k, \mathbb{C})$, e il campo di Yang Mills A e la field strength F sono definiti a valori nell'algebra di Lie associata $\mathfrak{g}$.

Definizione 1.46. Definiamo la *classe totale di Chern* con

$$c(F) := \det\left(I + \frac{iF}{2\pi}\right).$$

Poichè F è una 2-forma allora $c(F)$ è una somma diretta di forme di gradi pari

$$\begin{aligned} \det\left(I + \frac{iF}{2\pi}\right) &= \left[I + \frac{i\,\mathrm{Tr}(F)}{2\pi} + \frac{\mathrm{Tr}(F^2) - \mathrm{Tr}(F)^2}{8\pi^2} + i\frac{-2\,\mathrm{Tr}(F^3) + 3\,\mathrm{Tr}(F^2)\,\mathrm{Tr}(F) - \mathrm{Tr}(F)^3}{48\pi^3} + \dots\right] \\ c(F) &= 1 + c_1(F) + c_2(F) + c_3(F) + \dots \end{aligned}$$

con $c_j(F) \in \Omega^{2j}(\mathcal{M})$ chiamata *classe di Chern j-esima*. In una varietà m-dimensionale la classe $c_j(F)$ con $2j > m$ si annulla banalmente. La serie termina in $c_k(F) = \det(iF/2\pi)$ e $c_j(F) = 0$ per $j > k$.

Per fibrati generici è piuttosto complesso il calcolo delle classi di Chern tramite lo sviluppo del determinante e un modo più semplice è quello di diagonalizzare la forma curvatura. La matrice forma F è diagonalizzabile tramite una matrice appropriata $g \in GL(k, \mathbb{C})$ tramite una trasformazione di similitudine

$$g^{-1}\left(\frac{iF}{2\pi}\right)g = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_k) \tag{1.7}$$

con x_i delle 2-forme. Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned}\det(I+B) &= \det(\mathrm{diag}(1+x_1, \dots, 1+x_k)) \\ &= \prod_{j=1}^{k}(1+x_j) = 1 + \mathrm{Tr}\, B + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(B)^2 - Tr(B^2)) + \dots + \det B.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Ogni termine è una funzione simmetrica di $\{x_j\}$,

$$S_0(x_j) = 1, \quad S_1(x_j) = \sum_{j=1}^{k} x_j, \quad S_2(x_j) = \sum_{i<j} x_i x_j, \ \dots \ , S_k(x_j) = x_1 x_2 \dots x_k. \tag{1.9}$$

Poichè $\det(I+B)$ è un polinomio invariante abbiamo $P(F) = P(gFg^{-1}) = P(2\pi B/i)$, quindi per F generico si ha che le classi di Chern sono

$$\begin{aligned}c_0(F) &= 1 \\ c_1(F) &= \mathrm{Tr}\, B = \mathrm{Tr}\left(g^{-1}\frac{iF}{2\pi}g\right) = \frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\, F \\ c_2(F) &= \frac{1}{2}[(\mathrm{Tr}\, B)^2 - \mathrm{Tr}(B^2)] = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 [\mathrm{Tr}\, F \wedge \mathrm{Tr}\, F - \mathrm{Tr}(F \wedge F)] \\ &\ \vdots \\ c_k(F) &= \det B = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \det F\end{aligned} \tag{1.10}$$

Il carattere totale di Chern è definito come

$$ch(F) \equiv \mathrm{Tr}\left[\exp\left(\frac{iF}{2\pi}\right)\right] = \sum_{j=0} \frac{1}{j!}\mathrm{Tr}\left(\frac{iF}{2\pi}\right)^j \tag{1.11}$$

Se $2j > m = dim\mathcal{M}$, $ch_j(F)$ si annula, quindi $ch(F)$ è un polinomio di ordine finito. Diagonalizzando F come prima si vede che

$$\mathrm{Tr}[\exp(B)] = \sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) \tag{1.12}$$

e in termini di funzioni simmetriche elementari $S_r(x_j)$ il carattere totale di Chern diventa

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) &= \sum_{j=1}^{k}(1 + x_j + \frac{1}{2}x_j^2 + \dots) \\ &= k + S_1(x_j) + \frac{1}{2}[S_1(x_j)^2 - 2S_2(x_j)] + \dots\end{aligned} \tag{1.13}$$

per cui ogni carattere di Chern è espresso in termini delle classi di Chern nel seguente modo

$$ch_0(F) = k, \ ch_1(F) = c_1(F), \ ch_2(F) = \frac{1}{2}[c_1(F)^2 - 2c_2(F)], \ \dots \tag{1.14}$$

con k la dimensione della fibra del fibrato.

Esempio 1.11. Consideriamo come esempio il caso di un fibrato $U(1)$ su S^2 relativo al monopolo magnetico. In questo caso la field strength è $F = dA$ e abbiamo

$$ch(F) = 1 + \frac{iF}{2\pi} \tag{1.15}$$

dove $c_n(F) = 0$ con $(n \geq 2)$ su S^2. La carica del monopolo magnetico sarà data in termini del carattere di Chern come

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F = \int_{S^2} ch_1(F) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{U_+} F_+ + \int_{U_-} F_- \right] \tag{1.16}$$

2

Alcune applicazioni in Fisica

2.1 La teoria di Maxwell

Come visto nel capitolo precedente, un potenziale di gauge può essere considerato come un'espressione locale sullo spazio di base di una connessione in un fibrato principale. La field strength è poi identificata con la forma locale sullo spazio di base della curvatura associata alla connessione.

La teoria di Maxwell è un'applicazione molto particolare della teoria dei fibrati. Consideriamo uno spazio quadridimensionale di Minkowski M che utilizzeremo come spazio di base per costruire il fibrato relativo a questa teoria. Prendiamo poi il gruppo abeliano unidimensionale $U(1)$ e costruiamo il fibrato principale U(1), $P \xrightarrow{\pi} M$. Dal momento che lo spazio di base è contraibile in un punto allora questo fibrato principale è triviale, per cui possiamo scrivere che $P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$. Su questo fibrato possiamo definire una 1-forma connessione ω. Considerando una carta locale di coordinate $(\mathbb{R}^4, x)$, questa induce una sezione locale sul fibrato principale. Tramite l'operazione di pull-back della connessione, per mezzo della sezione locale, otteniamo il campo di Yang Mills in forma

$$(\sigma^*\omega)_\mu = \mathcal{A}_\mu$$

e si vede che in questo caso non compaiono indici relativi all'algebra di Lie in quanto ha dimensione unitaria. La curvatura, come sappiamo, viene ottenuta come

$$\Omega = D\omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

dove il simbolo $\wedge$ indica il prodotto esterno di due 1-forme definite sull'algebra. Questa quantità può essere trasferita sullo spazio di base tramite la sezione locale, ottenendo la field strength

$$(\sigma^*\Omega)_{\mu\nu} \equiv \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$$

La curvatura soddisfa l'identità di Bianchi

$$D\Omega = D^2\omega = 0$$

e questa informazione viene automaticamente trasferita sullo spazio di base in termini del campo di Yang Mills e della field strength come

$$\sigma^* D\Omega = D(\sigma^*\Omega) = D\mathcal{F} = d\mathcal{F} = 0$$
$$\sigma^* D^2\omega = D^2(\sigma^*\omega) = D^2\mathcal{A} = 0$$

In termini di componenti sullo spazio di base

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} = 0 \tag{2.1}$$

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{F}$ differiscono dall'usuale potenziale A e field strength F rispettivamente per

$$\mathcal{A}_\mu \equiv iA_\mu, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv iF_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

Identificando le componenti del campo elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ come

$$E_i = F_{0i}, \qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} \tag{2.3}$$

dall'identità di Bianchi si ottengono le equazioni "geometriche" del campo elettromagnetico

$$\begin{cases}\partial_0\mathcal{F}_{\mu\nu}+\partial_\mu\mathcal{F}_{\nu 0}+\partial_\nu\mathcal{F}_{0\mu}=0\\ \partial_i\mathcal{F}_{\mu\nu}+\partial_\mu\mathcal{F}_{\nu i}+\partial_\nu\mathcal{F}_{i\mu}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial_0\mathcal{F}_{0\nu}+\partial_0\mathcal{F}_{\nu 0}+\partial_\nu\mathcal{F}_{00}=0\\ \partial_0\mathcal{F}_{i\nu}+\partial_i\mathcal{F}_{\nu 0}+\partial_\nu\mathcal{F}_{0i}=0\\ \partial_i\mathcal{F}_{0\nu}+\partial_0\mathcal{F}_{\nu i}+\partial_\nu\mathcal{F}_{i0}=0\\ \partial_i\mathcal{F}_{j\nu}+\partial_j\mathcal{F}_{\nu i}+\partial_\nu\mathcal{F}_{ij}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial_0\mathcal{F}_{ik}+\partial_i\mathcal{F}_{k0}+\partial_k\mathcal{F}_{0i}=0\\ \partial_i\mathcal{F}_{jk}+\partial_j\mathcal{F}_{ki}+\partial_k\mathcal{F}_{ij}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\epsilon_{jik}\partial_0 B_j-\partial_i E_k+\partial_k E_i=0\\ \epsilon_{ijk}\partial_i\mathcal{F}_{jk}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\partial_0 B_j+\frac{1}{2}\epsilon_{jik}(-\partial_i E_k+\partial_k E_i)=\partial_0 B_j+\epsilon_{jik}\partial_k E_i=0\\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk}\partial_i B_m=\delta_{mi}\partial_i B_m=\partial_i B_i=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{2.4}$$

che sono le equazioni di Maxwell omogenee. La seconda di queste equazioni ci dà informazioni sull'inesistenza di singole cariche magnetiche. Se esistesse infatti un monopolo di carica magnetica l'equazione soddisfatta dal campo sarebbe $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=\rho_B$. La differenza tra le due equazioni può essere vista in Fig.(2.1).

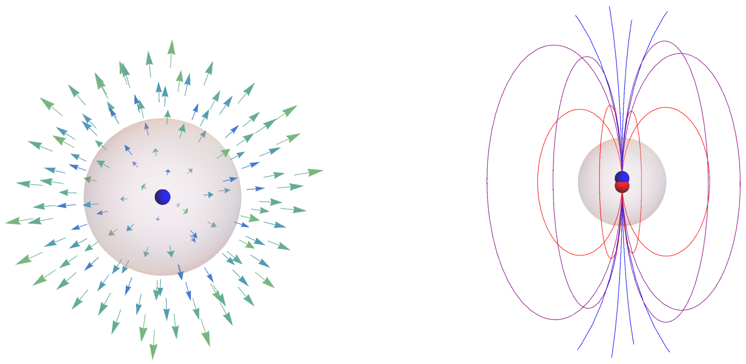


Figura 2.1: Nella prima immagine si vede il flusso del campo uscente, da una superficie sferica, di una sorgente puntiforme di carica. Nella seconda figura si vede invece il flusso del campo uscente di un dipolo magnetico. Nel primo caso il flusso è diverso da zero, mentre nel secondo è nullo.

Per trovare le equazioni dinamiche dobbiamo specificare l'azione di Maxwell, intesa come funzionale del campo di Yang Mills $\mathcal{A}$ come

$$S_M[\mathcal{A}]=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\,\mathcal{F}^{\mu\nu}d^4x=-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4}F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}d^4x. \tag{2.5}$$

Consideriamo il duale della *field strength* ottenuta per mezzo dell'*operatore di Hodge* $*$ definito come una mappa lineare

$$*:\Omega^r(\mathcal{M})\to\Omega^{m-r}(M) \tag{2.6}$$

la cui azione su un vettore di base di $\Omega^r(M)$ è definito da

$$*\,(dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_r})=\frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!}\epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}{}_{\nu_{r+1}\cdots\nu_m}dx^{\nu_{r+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_m} \tag{2.7}$$

dove g indica il determinante della metrica definita sullo spazio di base M e $m=dim\,\mathcal{M}$. Nel caso della *field strenght*, che è una 2-forma, si vede che il suo duale sarà una 2-forma del tipo

$$*\,\mathcal{F}=*\,(\mathcal{F})_{\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu=\frac{1}{2}\mathcal{F}^{\lambda\kappa}\,\epsilon_{\lambda\kappa\mu\nu}\,dx^\mu\wedge dx^\nu \tag{2.8}$$

per cui l'azione di Maxwell può essere riscritta come

$$S_M[\mathcal{A}]=-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{F}\wedge*\mathcal{F} \tag{2.9}$$

Variando l'azione di Maxwell rispetto a $\mathcal{A}$ otteniamo le equazione dinamiche di Maxwell

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \partial_i \mathcal{F}^{i0} = 0 \\ \partial_0 \mathcal{F}^{ij} + \partial_i \mathcal{F}^{ij} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

che sono le altre due equazioni di Maxwell nel vuoto.

2.2 Monopolo di Dirac

Abbiamo descritto la teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo su $\mathbb{R}^4$. La contraibilità dello spazio di base rende il fibrato $U(1)$ triviale. In questo contesto abbiamo visto che l'identità di Bianchi non permette l'esistenza di cariche magnetiche. É interessante estendere l'analisi del fibrato principale $U(1)$ su uno spazio di base non triviale in modo da permettere l'esistenza di monopoli. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ privato dell'origine. Questo spazio $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ non è contraibile in un punto ma ha una relazione particolare con S^2.

Lemma 2.2.1. *Gli spazi topologici $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e S^2 sono omotopicamente equivalenti.*

Dimostrazione. Consideriamo l'inclusione $j\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$, definita come $j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, e sia $p\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$ la proiezione $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Allora

$$p \circ j \sim Id_{\mathbb{R}^3}$$

e $j \circ p$ è omotopo alla mappa identità Id_{S^2} infatti esiste l'omotopia

$$F(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x} + \frac{(1-t)\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{2.11}$$

con $F(\mathbf{x}, 0) = (j \circ p)(\mathbf{x})$ e $F(\mathbf{x}, 1) = \mathbf{x}$. □

Avendo dimostrato questa equivalenza tra spazi topologici possiamo dire che il U(1)-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} S^2$, indicato anche con $P(S^2, U(1))$, ha le stesse proprietà topologiche del fibrato principale $P(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, U(1))$. Possiamo quindi portare avanti il caso studio considerando il fibrato principale $P(S^2, U(1))$. Indichiamo le coordinate di S^2 con (θ, ϕ), con $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ mentre le coordinate della fibra $U(1) = S^1$ con $e^{i\psi}$. Consideriamo su S^2 due carte locali

$$U_+ \equiv \left\{(\theta, \phi) | 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi + \epsilon\right\}, \qquad U_- \equiv \left\{(\theta, \phi) | \frac{1}{2}\pi - \epsilon \leq \theta \leq \pi\right\} \tag{2.12}$$

per le quali si ha $U_+ \cap U_- \neq 0$ e la loro intersezione è una fascia equatoriale parametrizzata dal solo angolo ϕ. Localmente il fibrato appare diviso in due pezzi

$$\begin{aligned} &U_+ \times U(1), \quad \text{con coordinate } (\theta, \phi; e^{i\psi_+}) \\ &U_- \times U(1), \quad \text{con coordinate } (\theta, \phi; e^{i\psi_-}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

in quanto localmente si può sempre considerare un fibrato principale come fibrato triviale. Le funzioni di transizione devono essere funzioni di ϕ lungo la striscia $U_+ \cap U_- \neq 0$ e devono essere elementi di $U(1)$ per dare un fibrato principale. Scegliamo quindi di legare le coordinate delle fibre di U_+ e U_- nel modo seguente

$$e^{i\psi_-} = e^{in\phi} e^{i\psi_+} \tag{2.14}$$

richiedendo che n sia intero. Questa condizione è necessaria affinchè la risultante struttura sia una varietà; le fibre infatti devono combaciare quando si completa un giro di rivoluzione attorno all'equatore, e questo percorso dipende da ϕ.

Per $n = 0$, abbiamo un fibrato triviale $P(n = 0) = S^2 \times S^1$. Il caso $n = 1$ è la fibrazione della tre-sfera $P(n = 1) = S^3$ e descrive un monopolo di Dirac a singola carica. Per n generico si ha una struttura più complicata del fibrato corrispondente a un monopolo di carica n.

Consideriamo il caso $n = 0$ per il quale, come abbiamo detto, il fibrato principale associato è $P = S^2 \times U(1)$. Assegniamo una connessione ω ai due pezzi del fibrato

$$\omega = \begin{cases} A_+ + d\psi_+ & \text{su } U_+ \\ A_- + d\psi_- & \text{su } U_- \end{cases} \tag{2.15}$$

dove i secondi termini sono le 1-forme di Maurer Cartan $g^{-1}dg$ ottenute dall'elemento $g = e^{i\psi}$ del gruppo $U(1)$. La scelta della funzione di transizione (2.14) implica la trasformazione di gauge

$$A_+ = A_- + n\, d\phi. \tag{2.16}$$

Ci chiediamo quale forma dovranno avere i potenziali di gauge per essere ben definiti nella regione di sovrapposizione. Consideriamo $U_\pm$ in $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ definiti come $z > -\epsilon$ e $z < \epsilon$, per cui la regione di sovrapposizione è uguale al piano $x - y$ in $z = 0$ meno l'origine. I potenziali di gauge che sono ben definiti nelle rispettive regioni sono

$$A_\pm = \frac{n}{2r}\frac{1}{z \pm r}(x\, dy - y\, dx) = \frac{n}{2}(\pm 1 - \cos\theta)d\phi \tag{2.17}$$

con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e avendo utilizzato le coordinate polari. Questi due potenziali di gauge sono legati dalla trasformazione (2.16). La curvatura è data da

$$F = dA_\pm = \frac{n}{2}\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = \frac{n}{2r^3}(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy) \tag{2.18}$$

É facile vedere che anche se gli $A_\pm$ sono regolari in $U_\pm$, essi hanno una stringa singolare in $U_\mp$. Possiamo utilizzare $A_\pm$ solo nei suo intorni regolari. É chiaro che F è chiusa ma non è esatta, poichè $dA_\pm$ è solo definita localmente in $U_\pm$.

Dalla forma della curvatura si vede che

$$\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{B} = \frac{n}{2}\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{2.19}$$

e questa soluzione è interpretata con il *monopolo magnetico*, in analogia al campo elettrico di una carica puntiforme. Il flusso magnetico totale uscente da una sfera è

$$\Phi = \int_{S^2} F = \int_{U_+} dA_+ + \int_{U_-} dA_- = \int_{S^1}(A_+ - A_-) = n\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi n \tag{2.20}$$

e il segno meno deriva dalla diversa orientazione dell'equatore nelle due regioni $U_\pm$. Secondo l'argomentazione di Dirac il potenziale A si accoppia con i campi-particella di carica elettrica q tramite la derivata covariante

$$D\Psi = d\Psi - iqA\Psi \tag{2.21}$$

con Ψ funzione d'onda, e $\Psi_+ = \exp(iqn\,\phi)\Psi_-$, cosicché

$$D\Psi_+ = (d - iqA_+)\Psi_+ = (d - iqA_- - iqn\, d\phi)\, e^{iqn\,\phi}\Psi_- = e^{iqn\,\phi}D\Psi_-. \tag{2.22}$$

Richiedendo che $\exp(iqn\,\phi)$ sia ben definito su S^1 (intersezione di $U_\pm$) in modo che le trasformazioni di gauge abbiano senso, otteniamo la condizione di quantizzazione di Dirac

$$qn = 2\pi N, \qquad N \in \mathbb{Z} \tag{2.23}$$

dove n e q sono rispettivamente le cariche magnetiche ed elettriche delle particelle. Dal momento che tutte le cariche elettriche sono multipli interi della carica dell'elettrone e, allora le cariche magnetiche n devono soddisfare $ne = 2\pi N$, e la carica magnetica minima è $n = 2\pi/e$. Se esistesse un solo monopolo magnetico nell'universo avremmo capito la quantizzazione della carica elettrica.

Il monopolo di Dirac non è un solitone a causa della sua singolarità in $r = 0$. La sua densità di energia decade come $1/r^4$, e quindi la massa del monopolo diverge linearmente. Questa divergenza può essere regolarizzata, e porta a una grande massa finita.

2.3 La teoria di Yang Mills

Consideriamo una teoria di gauge $SU(2)$ definita su $\mathbb{R}^4$. Il fibrato che descrive questa teoria è $P(\mathbb{R}^4, SU(2))$. Anche in questo caso, dal momento che lo spazio di base è contraibile, il fibrato principale è triviale. La differenza con l'esempio della teoria di Maxwell sta nel fatto che la fibra SU(2) è un gruppo non-abeliano di dimensione 3.

Presa una sezione locale $\sigma\colon \mathbb{R}^4 \to P$ possiamo consierare la field strength $\mathcal{F}$ associata alla curvatura Ω

$$\mathcal{F} = \sigma^*\Omega.$$

Dalla definizione della curvatura e mappando, tramite il pullback, sullo spazio di base otteniamo

$$\mathcal{F} = D\mathcal{A} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}.$$

L'azione di $\mathcal{F}$ sui vettori appartenenti allo spazio tangente $T\mathbb{R}^4$ della varietà di base è data nella forma

$$\mathcal{F}(X,Y) = d\mathcal{A}(X,Y) + (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})(X,Y) = d\mathcal{A}(X,Y) + [\![\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]\!]$$

Introduciamo una carta locale (U, x) sullo spazio di base che induce una sezione locale sul fibrato principale. Sapendo che $\mathcal{A}$ è una 1-forma e $\mathcal{F}$ è una 2-forma, entrambe a valori nell'algebra di Lie, allora possiamo scrivere

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu \qquad \mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

con

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\![\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\!]$$

Sviluppando $\mathcal{A}_\mu$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ in termini della base dell'algebra $\{T_a\}$ come

$$\mathcal{A}_\mu = A^a_\mu T_a, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T_a.$$

e usando le parentesi di Lie dell'algebra si ottiene

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$$

In particolare i generatori di $SU(2)$ sono $T_a = \sigma_a/2$ per cui le precedenti relazioni diventano

$$\mathcal{A}_\mu = A^a_\mu \left(\frac{\sigma_a}{2}\right), \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} \left(\frac{\sigma_a}{2}\right)$$

con σ_a le matrici di Pauli.

2.3.1 Le trasformazioni di gauge

Consideriamo il G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ con $G = SU(2)$ alla base della teoria di Yang-Mills. Sia ω la connessione 1-forma definita su questo fibrato che induce la curvatura Ω. Si ottiene una rappresentazione locale in forma esplicita della connessione che è espressa in forma

$$A = g^{-1}\omega g + g^{-1} dg \tag{2.24}$$

e conseguentemente anche della curvatura

$$\begin{aligned}
F &= dA + A \wedge A \\
&= d(g^{-1}\omega g + g^{-1}dg) + (g^{-1}\omega g + g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}\omega g + g^{-1}dg) \\
&= dg^{-1} \wedge \omega g + g^{-1} d\omega g - \cancel{g^{-1}\omega \wedge dg} + dg^{-1} \wedge dg + g^{-1}\omega \wedge \omega g \\
&\qquad + g^{-1}dg \wedge g^{-1}\omega g + g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg + \cancel{g^{-1}\omega \wedge dg} \\
&= g^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)g + dg^{-1} \wedge \omega g + dg^{-1} \wedge dg + g^{-2}dg \wedge \omega g + g^{-2}dg \wedge dg \\
&= g^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)g + \cancel{dg^{-1} \wedge \omega g} + \cancel{dg^{-1} \wedge dg} - \cancel{dg^{-1} \wedge \omega g} - \cancel{dg^{-1} \wedge dg} \\
&= g^{-1}(d\omega + \omega \wedge \omega)g = g^{-1}\Omega g
\end{aligned} \tag{2.25}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà delle forme.

Consideriamo ora due intorni sovrsapposti dello spazio di base U e U', con $U \cap U' \neq 0$ sui quali sono definite due sezioni sul fibrato principale. La funzione di transizione che lega due coordinate locali di fibre g e g' in U e U' è γ, che agisce come

$$g' = \gamma g. \tag{2.26}$$

Affinchè la connessione 1-forma ω sia ben definita nella regione di sovrapposizione, il campo A si deve trasformare come

$$A' = \gamma A \gamma^{-1} + \gamma d\gamma^{-1} \tag{2.27}$$

e queste definiscono le trasformazioni di gauge. Da questa si vede che

$$\omega = g^{-1}Ag + g^{-1}dg = g'A'g'^{-1} + g'dg'^{-1} \tag{2.28}$$

Allo stesso modo si vede che la trasformazione di gauge di F è

$$F' = \gamma F \gamma^{-1} \tag{2.29}$$

e anche in questo caso si vede che la 2-forma curvatura è definita consistentemente sulla varietà, infatti

$$\Omega = g^{-1}Fg = g'F'g'^{-1} \tag{2.30}$$

2.3.2 La derivata covariante nelle teorie di Yang-Mills

Consideriamo ora un campo scalare complesso Φ accoppiato al campo di gauge A. Per definire la derivata covariante possiamo considerare due casi.

i) *Campo scalare nella rappresentazione fondamentale del gruppo* $SU(2)$.
Costruiamo il fibrato associato $P_{\mathbb{C}^2} = P \times_\rho \mathbb{C}^2$, con $\rho : SU(2) \to \mathbb{C}^2$ rappresentazione fondamentale del gruppo nello spazio vettoriale dei complessi. Siano e^0_α $(\alpha = 1, 2)$ i vettori di base di $\mathbb{C}^2$. Presa una funzione SU(2)-equivariante $\sigma_i \colon P \to \mathbb{C}^2$ definita nel fibrato principale, questa induce due sezioni sul fibrato associato relative ai vettori di base

$$e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e^0_\alpha)] \tag{2.31}$$

Sia $\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi^\alpha(p)e^0_\alpha)]$ una sezione di $P_{\mathbb{C}^2}$, definita come la mappa $\phi \colon P_{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{R}^4$, con $\Phi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$. Data una curva γ nella varietà di base, possiamo consideare il sollevamento orizzontale $\gamma^\uparrow$ passante per il punto $\sigma(\gamma(0))$ sul fibrato principale, con $\gamma(0) = p$, come

$$\gamma^\uparrow(t) = \sigma(p) \triangleleft g(t),$$

con $g(t)$ curva nel gruppo di Lie. Questo sollevamento orizzontale induce sul fibrato associato l'oggetto

$$\phi(t) = [(\gamma^\uparrow(t), g(t)^{-1}\Phi^\alpha(t)e^0_\alpha)]. \tag{2.32}$$

La derivata covariante di ϕ lungo $X = d/dt$ è

$$\begin{aligned} D_X\phi &= \left[\left(\gamma^\uparrow(0), g(0)^{-1}\frac{d\Phi^\alpha(0)}{dt}e^0_\alpha\right)\right] + [(\gamma^\uparrow(0), g(0)^{-1}\mathcal{A}_i(X)^\alpha{}_\beta\Phi^\beta(0)e^0_\alpha] \\ &= X^\mu\left(\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta\Phi^\beta\right)e_\alpha \end{aligned} \tag{2.33}$$

in quanto

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathcal{A}_i(X)g_i(t), \qquad D_Xe_\alpha = \frac{dx^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta, \qquad \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta dx^\mu \equiv \mathcal{A}_{i\mu}{}^\gamma(T_\gamma)^\alpha{}_\beta dx^\mu \tag{2.34}$$

con $g_i(t) \in SU(2)$.

ii) *Campo scalare nella rappresentazione aggiunta del gruppo* $SU(2)$.
Consideriamo ora un campo scalare Φ nella rappresentazione aggiunta del gruppo $SU(2)$. Costruiamo il fibrato associato $P_{\mathfrak{su}(2)} = P \times_{Ad} \mathfrak{su}(2)$ dove l'azione del gruppo $SU(2)$ sull'algebra $\mathfrak{su}(2)$ è l'azione aggiunta $Ad_g\mathfrak{h} = g^{-1}\,\mathfrak{h}\,g$, con $\mathfrak{h} \in \mathfrak{su}(2)$ e $g \in SU(2)$. Presa una sezione locale $\sigma \colon U \subseteq \mathbb{R}^4 \to P$, tale da poter esprimere il solelvamento di una curva nella varietà di base come $\gamma^\uparrow(t) = \sigma_i(t)\,g(t)$, induce una sezione $s(p) = [(\sigma_i(p), \phi(p)]$ su $P_{\mathfrak{su}(2)}$, dove $\phi(p) = \phi^\alpha(p)\,T_\alpha$, essendo $\{T_\alpha\}$ una base dell'algebra. Dalla definizione di derivata covariante si ha

$$D_Xs := \left[\left(\tilde\gamma(0), \frac{d}{dt}\left(Ad_{g^{-1}(t)}\phi(t)\right)\Big|_{t=0}\right)\right]. \tag{2.35}$$

Esplicitando il conto si vede che

$$\begin{aligned} D_Xs &= \left[\left(\tilde\gamma(0), \frac{d}{dt}\left(g(t)\,\phi(t)\,g^{-1}(t)\right)\Big|_{t=0}\right)\right] \\ &= \left[\left(\tilde\gamma(0), \dot{g(t)}\,\phi(t)\,g^{-1}(t) + g(t)\,\dot\phi(t)\,g^{-1}(t) - g(t)\,\phi(t)\,g^{-1}(t)\dot g(t)\,g^{-1}(t)\Big|_{t=0}\right)\right] \\ &= \left[\left(\tilde\gamma(0), \mathcal{A}\,g(t)\,\phi(t)\,g^{-1}(t) + g(t)\,\dot\phi(t)\,g^{-1}(t) - g(t)\,\phi(t)\,g^{-1}(t)\mathcal{A}\Big|_{t=0}\right)\right] \\ &= \left[\left(\sigma_i(0), \frac{d\phi(t)}{dt} + [\mathcal{A}_i, \phi(t)]\Big|_{t=0}\right)\right] \\ &= X^\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} - \epsilon_{ab}{}^cA_{i\mu}{}^a\phi^b\right)[(\sigma_i(0), T_c)] \end{aligned} \tag{2.36}$$

A questo punto possiamo dire che

$$(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a - \epsilon^{abc}A^b_\mu\phi^c. \tag{2.37}$$

2.3.3 Le equazioni di Yang Mills

Definiamo il tensore di campo duale

$$(*F)_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{2.38}$$

L'azione di Yang-Mills è data in termini della field strength in modo da essere invariante per trasformazioni di gauge. Questa infatti assume la forma

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F \wedge *F)\, d^4x = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})d^4x \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu\, b}\ \mathrm{Tr}(T_aT_b)d^4x = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu\, a}d^4x \end{aligned} \tag{2.39}$$

Per ricavare le equazioni del moto riscriviamo l'azione in una forma non locale

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} F^a(A) \wedge *F_a(A)\, d^4x \tag{2.40}$$

con $F^a = dA^a + 1/2 f_{bc}{}^a A^b \wedge A^c$. Per una variazione del campo di gauge A l'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2}\int \delta F^a(A) \wedge *F_a(A) + F^a(A) \wedge *\delta F_a(A) \\ &= \int \delta F^a(A) \wedge *F_a(A) \\ &= \int \delta\left(dA^a + \frac{1}{2}f_{bc}{}^a A^b \wedge A^c)\right) \wedge *F_a(A) \\ &= \int \left(\delta dA^a + \frac{1}{2}f_{bc}{}^a \delta A^b \wedge A^c + \frac{1}{2}f_{bc}{}^a A^b \wedge \delta A^c)\right) \wedge *F_a(A) \\ &= \int \left(\delta dA^a + f_{bc}{}^a \delta A^b \wedge A^c)\right) \wedge *F_a(A) \end{aligned}$$

e per il teorema della divergenza e dalle condizioni al contorno sul bordo dello spazio d'integrazione

$$0 = \int_{\partial M} \delta A \wedge *F = \int_M d(\delta A \wedge *F) = \int_M (d\delta A \wedge *F + \delta A \wedge d * F) \tag{2.41}$$

si ottiene

$$\delta S = \int \delta A^a \wedge \left(d * F_a + f_{ab}{}^c A^b \wedge *F_c\right) \tag{2.42}$$

Dal principio variazionale questa variazione dell'azione deve essere nulla per qualsiasi δA^a, da cui otteniamo le *equazioni di Yang-Mills*

$$d * F_a + f_{ab}{}^c A^b \wedge *F_c = 0 \tag{2.43}$$

o equivalentemente

$$d * F + [A, *F] = 0 = D * F. \tag{2.44}$$

2.4 Soluzioni di Energia Finita

Lo *scaling argument* proposto da Derrick ha un ruolo centrale nella ricerca di configurazioni statiche di energia finita in uno spazio di dimensionalità d superiore a uno. Consideriamo per esempio la forma dell'energia di una configurazione classica di un campo scalare libero ϕ in presenza di un potenziale $V(\phi)$. In uno spazio d-dimensionale si ha

$$E(\phi) = \int d^dx \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right] = T(\phi) + P(\phi) \tag{2.45}$$

con

$$T(\phi) = \int d^dx \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \geq 0, \qquad P(\phi) = \int d^dx, V(\phi) \geq 0. \tag{2.46}$$

Consideriamo ora una trasformazione di scala del campo scalare

$$\phi(x) \to \phi_a(x) = \phi(ax) \tag{2.47}$$

per la quale l'energia si trasforma come

$$T(\phi_a) = \int d^dx \frac{1}{2}(\nabla\phi(ax))^2 = a^{2-d} \int d^d(ax)\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial(ax)}\phi(ax)\right]^2 = a^{2-d}T(\phi) \tag{2.48}$$

e supponiamo per esempio che il potenziale abbia la forma

$$V(\phi(x)) = \frac{1}{4}g^2[\phi(x)^2 - a^2]^2 \tag{2.49}$$

per cui

$$P(\phi_a) = \int d^dx \frac{1}{4}g^2[\phi^*(ax)\phi(ax) - a^2]^2 = a^{-d} \int d^d(ax)\frac{1}{4}g^2[\phi(ax)^2 - a^2]^2 = a^{-d}P(\phi) \tag{2.50}$$

e quindi

$$E(\phi) \to E(\phi_a) = T(\phi_a) + P(\phi_A) = \frac{1}{a^{d-2}}T(\phi) + \frac{1}{a^d}P(\phi). \tag{2.51}$$

Dal momento che $E(\phi_1)$ è un minimo di E, con ϕ_1 soluzione statica ad energia finita, allora affinchè $E(\phi_a)$ sia stazionario bisogna imporre

$$\left.\frac{dE(\phi_a)}{da}\right|_{a=1} = 0 \tag{2.52}$$

che implica

$$(d-2)T(\phi) + dP(\phi) = 0 \tag{2.53}$$

Poichè sia T che P sono semidefinite positive e d è un intero, vediamo che la stazionarietà di E rispetto ad a è possibile solo per $d = 1$. Infatti, poichè

$$\left[\frac{\partial^2 E(\phi_a)}{\partial a^2}\right]_{a=1} = 2(2-d)T(\phi) \tag{2.54}$$

vediamo che $E(\phi)$ può essere minimizzato solo per $d = 1$ in quanto la derivata seconda deve essere positiva. Questo scaling argument esclude l'esistenza di configurazioni statiche ad energia finita della teoria in questione con dimensioni più grandi di uno.

2.4.1 Scaling argument per teorie di gauge

Consideriamo come esempio i seguenti modelli:

- Modello di Nielsen-Olesen (anche noto come *modello di Higgs Abeliano*) con densità lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A_\mu, \phi] &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}|(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 - V(\phi),\\ V(\phi) &= \frac{1}{2}\lambda g^2\left[|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda g^2}\right]^2, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\end{aligned} \tag{2.55}$$

  dove ϕ è un campo scalare complesso e le dimensioni spaziali sono due o tre.

- Modello Georgi-Glashow con campo di gauge non abeliano in tre dimensioni spaziali con una densità lagrangiana

$$\mathcal{L}[A_\mu, \phi] = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)_a^\dagger(D_\mu\phi)_a - V(\phi_a) \tag{2.56}$$

  dove

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - e\,\epsilon_{abc}A_b^\mu A_c^\nu, \qquad (D^\mu\phi)_a = \partial^\mu\phi_a - e\,\epsilon_{abc}A_b^\mu\phi_c \tag{2.57}$$

L'energia per tali modelli può essere scritta come

$$E(\phi, A) = T(A) + T(D\phi) + P(\phi). \tag{2.58}$$

Consideriamo una trasformazione di scala con $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$\phi(x) \to \phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x), \quad A_\mu \to A_{\mu,\lambda}(x) = \lambda A_\mu(\lambda x) \tag{2.59}$$

mentre $D_\mu\phi$, $G_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ si trasformano come un vettore e due tensori rispettivamente

$$D_\mu\phi(x) \to \lambda D_\mu\phi(\lambda x), \qquad G_{\mu\nu}(x) \to \lambda^2 G_{\mu\nu}(\lambda x), \qquad F_{\mu\nu}(x) \to \lambda^2 F_{\mu\nu}(\lambda x) \tag{2.60}$$

Da queste semplici regole di trasformazione si ottiene

$$E(\phi_\lambda, A_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{d-4}} T(A) + \frac{1}{\lambda^{d-2}} T(D\phi) + \frac{1}{\lambda^d} P(\phi). \tag{2.61}$$

Se E ammette soluzioni di energia finita, deve essere stazionaria rispetto ad arbitrarie variazioni del campo e equivalentemente anche a trasformazioni di scala. Così cerchiamo configurazioni per cui

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial E(\phi_\lambda, A_\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = 0 \\ \Rightarrow \quad &(4-d)T(A) + (2-d)T(D\phi) - dP(\phi) = 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Poichè tutti i termini suddettti sono semi-definiti positivi e non sono tutti nulli, allora la dimensione d deve essere tale da annullare la precedente uguaglianza. Così

- $d = 1$: In questo caso $P(\phi)$ deve essere presente, a differenza di $T(A)$ che non sarebbe necessario per soddisfare la condizione di stazionarietà dell'energia. Questo caso è esemplificato dalle teorie dei solitoni e sine-Gordon.
- $d = 2$: Tutti e tre i termini possono comparire. La teoria di Nielsen-Olesen ne è un esempio e questa per le configurazioni di campo in equilibrio statico è equivalente alla teoria di Ginzburg-Landau della superconduttività.
- $d = 3$: Anche in questo caso compaiono tutti i termini e un esempio è dato dal modello Georgi-Glashow che dà luogo a *monopoli non abeliani.*
- $d = 4$: Questo è possibile solo se il segno di V è scambiato. Questo è un esempio della cosiddetta *teoria di gauge pura* con soluzioni di tipo *istantoni.*
- $d \geq 5$: In questo caso non è possibile soddisfare l'equazione di stazionerietà. Ci sono altre possibilità che permettono potenze più alte delle derivate come nei *modelli di Skyrme*, aggiungendo un termine $T^{(4)}(\phi)$ con una potenza di derivazione pari a quattro,

  $$T^{(4)}(\phi_\lambda) = \lambda^{4-d} T(\phi) \tag{2.63}$$

  e tale contributo viene controbilanciato da $T(A)$ o $T(D\phi)$ per $d = 3$.

2.5 Fibrazione di Hopf

Consideriamo un polo magnetico a riposo relativo a un sistema di riferimento inerziale nello spazio-tempo di Minkowski $\mathbb{R}^4$. La varietà $\mathbb{R}^4$ meno la linea di universo del polo è diffeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times S^2$. Il modo più semplice e non triviale di descrivere fibrati con questo tipo di spazi di base fu dimostrato da Hopf nel 1931.

Egli infatti dimostrò che S^3 è un fibrato $U(1)$ su uno spazio di base S^2. Consideriamo la 3-sfera unitaria in $\mathbb{R}^4$ tramite un embedding, espressa come

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1 \tag{2.64}$$

Se introduciamo $z_0 = x_1 + ix_2$ e $z_1 = x_3 + ix_4$, otteniamo

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1. \tag{2.65}$$

Parametrizziamo S^2 tramite

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 = 1. \tag{2.66}$$

La mappa di Hopf $\pi \colon S^3 \to S^2$ è definita da

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2(x_1x_3 + x_2x_4) \\ \xi_2 &= 2(x_2x_3 - x_1x_4) \\ \xi_3 &= (x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 - (x_4)^2 \end{aligned} \tag{2.67}$$

ed è facile verificare che π mappa S^3 in S^2 poichè

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 = [(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2]^2 = 1. \tag{2.68}$$

Siano (X, Y) le coordinate della proiezione stereografiche di un punto nell'emisfero sud di S^2 dal polo nord. Se prendiamo un piano complesso che contiene l'equatore di S^2, $Z = X + iY$ è all'interno del cerchio di raggio unitario. Troviamo che

$$Z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3} = \frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \frac{z_0}{z_1} \tag{2.69}$$

e questa quantità è invariante dotto l'azione del gruppo $U(1)$ infatti

$$(z_0, z_1) \mapsto (\lambda z_0, \lambda z_1). \tag{2.70}$$

Poichè $|\lambda| = 1$, allora il punto $(\lambda z_0, \lambda z_1)$ si trova anch'esso in S^3. Le coordinate stereografiche dell'emisfero nord proiettate dal polo sud invece sono date da

$$W = U + iV = \frac{\xi_1 - i\xi_2}{1 + \xi_3} = \frac{x_3 + ix_4}{x_1 + ix_2} = \frac{z_1}{z_0}. \tag{2.71}$$

Da notare che $Z = 1/W$ sull'equatore ossia nell'intersezione dei due emisferi.

Definiamo quindi delle banalizzazioni locali, $\phi_S^{-1} \colon \pi^{-1}(U_S) \to U_S \times U(1)$ come

$$(z_0, z_1) \mapsto (z_0/z_1, z_1/|z_1|) \tag{2.72}$$

e $\phi_N^{-1} \colon \pi^{-1}(U_N) \to U_N \times U(1)$ come

$$(z_0, z_1) \mapsto (z_1/z_0, z_0/|z_0|). \tag{2.73}$$

Queste banalizzazioni sono ben definite su ogni carta. Per $z_0 \neq 0$ su U_N abbiamo che sia $z_1/z_0 = U + iV$ che $z_0/|z_0|$ sono non singolari. Sull'equatore, $\xi_3 = 0$, abbiamo che $|z_0| = |z_1| = 1/\sqrt{2}$. Le banalizzazioni locali sull'equatore sono

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1} &\colon (z_0, z_1) \mapsto (z_0/z_1, \sqrt{2}z_1) \\ \phi_N^{-1} &\colon (z_0, z_1) \mapsto (z_1/z_0, \sqrt{2}z_0) \end{aligned} \tag{2.74}$$

La funzione di transizioni sull'equatore sarà

$$t_{NS}(\xi) = \frac{\sqrt{2}z_0}{\sqrt{2}z_1} = \xi_1 + i\xi_2 \in U(1) \tag{2.75}$$

Facendo un giro attorno all'equatore, $t_{NS}(\xi)$ percorre il cerchio unitario nel piano complesso una volta, quindi il fibrato $U(1)$, $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ è caratterizzato dalla classe di omotoopia $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$.

La mappa di Hopf può essere intesa anche da un altro punto di vista. Consideriamo S^3 come 1-sfera complessa

$$S^1_{\mathbb{C}} = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \tag{2.76}$$

Definiamo una mappa $\pi \colon S^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^1$ con

$$(z_0, z_1) \mapsto [(z_0, z_1)] = \{\lambda(z_0, z_1) | \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \tag{2.77}$$

Sotto l'azione di questa mappa, i punti di S^3 della forma $\lambda(z_0, z_1)$, con $|\lambda| = 1$, sono mappati in un singolo punto dello spazio proiettivo $\mathbb{C}P^1 = S^2$. Questa è per l'appunto la mappa di Hopf $\pi \colon S^3 \to S^2$ ottenuta precedentemente.

Questo discorso è facilmente generalizzabile al caso dei quaternioni $\mathbb{H}$. L'algebra dei quaternioni è definita da

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \end{aligned} \tag{2.78}$$

Un arbitrario elemento di $\mathbb{H}$ è scritto come

$$q = t + \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z \tag{2.79}$$

Il quaternione unitario $|q| = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ rappresenta $S^3 \cong SU(2)$. La 1-sfera quaternionica è data da

$$S^1_{\mathbb{H}} = \{(q_0, q_1) \in \mathbb{H}^2 |\ |q_0|^2 + |q_1|^2 = 1\} \tag{2.80}$$

che rappresenta S^7. La mappa di Hopf in questo caso, prende la forma

$$\pi\colon S^1_{\mathbb{H}} \to \mathbb{H}P^1 \tag{2.81}$$

dove $\mathbb{H}P^1$ è lo spazio proiettivo dei quaternioni i cui elementi sono

$$[(q_0, q_1)] = \{\eta(q_0, q_1) \in \mathbb{H}^2 | \eta \in \mathbb{H} \setminus \{0\}\}. \tag{2.82}$$

I punti di S^7 con $|\eta| = 1$ sono mappati sotto l'azione della mappa di Hopf in un singolo punto di $\mathbb{H}P^1 = S^4$ e si ha quindi la mappa

$$\pi\colon S^7 \to S^4. \tag{2.83}$$

La fibra è il quaternione unitario $S^3 = SU(2)$. La funzione di transizione definita dalla mappa di Hopf appartiene alla classe di omotopia $\pi_3(SU(2)) \cong \mathbb{Z}$. Un istantone è descritto in termini di questa mappa di Hopf.

2.6 Monopoli non Abeliani

Consideriamo il gruppo di gauge $SU(2)$ e la densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \Phi^a D^\mu \Phi^a - V(\Phi) \tag{2.84}$$

con

$$V(\Phi) = \frac{1}{4} c(|\Phi|^2 - v^2)^2, \qquad \text{dove} \;\; |\Phi|^2 = \Phi^a \Phi^a, \;\; v \in \mathbb{R}^+ \tag{2.85}$$

e c costante. Si vede che questa densità lagrangiana è invariante per trasformazioni di gauge del gruppo $SU(2)$. In questo caso l'azione è finita se sono soddisfatte le condizioni al contorno

$$|\Phi| \to v, \quad D_\mu \Phi \to 0, \quad F_{\mu\nu} \to 0, \quad \text{per } r \to \infty. \tag{2.86}$$

L'equazioni di campo, espresse in componenti relative alla base dell'algebra $\mathfrak{su}(2)$, possono essere derivate utilizzando il principio variazionale per cui

$$(D_\nu F^{\mu\nu})^a = -\epsilon^{abc} \Phi^b (D^\mu \Phi)^c, \qquad (D_\mu D^\mu \Phi)^a = -c(|\Phi|^2 - v^2)\Phi^a. \tag{2.87}$$

Una soluzione è $A = 0$ e $\Phi = \Phi_0$ =cost, con $|\Phi_0| = v$. Questo stato fondamentale, se $v \neq 0$, non è unico e il gruppo di gauge è spontaneamente rotto in $U(1)$. Studiamo ora le soluzioni statiche di energia finita delle equazioni di campo, i solitoni della teoria. Scegliamo la gauge temporale, per cui $A_0 = 0$ e quindi $D_0(f) = 0$ dove f è un generico campo valutato sull'algebra che non dipende dal tempo. Riscaliamo il campo di gauge $\hat{\Phi} = \Phi/|\Phi|$ di modo che $v = 1$. La condizione che ci assicura la rottura spontanea della simmetria in una nuova simmetria residua di tipo $U(1)$ è che il campo di Higgs all'infinito spaziale sia

$$\Phi \to \Phi_0, \quad |x| \to \infty. \tag{2.88}$$

Questo campo contiene tutte le informazioni topologiche in quanto la condizione al contorno definisce una mappa da S^2_∞ (la 2-sfera all'infinito spaziale) a una 2-sfera unitaria nell'algebra di Lie. Il campo è topologicamente classificato dal suo grado $n = \deg(\hat{\Phi}_0)$ legato al flusso magnetico uscente da una superficie all'infinito.

I monopoli non abeliani sono differenti dal monopolo di Dirac perchè i campi sono lisci ovunque in $\mathbb{R}^3$, ma c'è una qualche connessione tra i due. Come sappiamo, il gruppo di gauge $SU(2)$ con la rottura spontanea della simmetria diventa $U(1)$ all'infinito in $\mathbb{R}^3$ tramite $\hat{\Phi}$. La parte del campo di gauge che non si annulla all'infinito è il campo magnetico $U(1)$

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{ij}^a\hat{\Phi}^a. \tag{2.89}$$

Sappiamo che asintoticamente $D_i\hat{\Phi} = 0$ che dà luogo a

$$A_i^a = -\epsilon^{abc}\partial_i\hat{\Phi}^b\hat{\Phi}^c \tag{2.90}$$

per cui

$$\begin{aligned} F_{ij}^a &= \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a - \epsilon^{abc}A_i^b A_j^c \\ &= 2\epsilon^{abc}\partial_i\hat{\Phi}^b\partial_j\hat{\Phi}^c - (\epsilon^{bcd}\partial_i\hat{\Phi}^b\partial_j\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^d)\hat{\Phi}^a. \end{aligned} \tag{2.91}$$

La carica magnetica quindi sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int_{S^2_\infty} \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}^a\hat{\Phi}^a n^i d^2S \\ &= \int_{S^2_\infty} \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\epsilon^{bcd}\partial_j\hat{\Phi}^b\partial_k\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^d)n^i d^2S = 4\pi n \end{aligned} \tag{2.92}$$

n è chiamato numero di monopolo e si vede che l'unità della carica magnetica è 4π.

Consideriamo ora il limite $c = 0$ e $|\hat{\Phi}|_\infty = 1$ e definiamo il campo magnetico non abeliano

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}. \tag{2.93}$$

L'azione di questa teoria è

$$S = \int_{\mathbb{R}^3}\left[\frac{1}{4}F_{ij}^aF_{ij}^a + \frac{1}{2}(D_k\Phi)^a(D_k\Phi)^a\right]d^3x \tag{2.94}$$

e si vede che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}B_k^aB_k^a &= \frac{1}{8}\epsilon_{kij}\epsilon_{kln}F_{ij}^aF_{ln}^a \\ &= \frac{1}{8}(\delta_{il}\delta jn - \delta_{in}\delta jl)F_{ij}^aF_{ln}^a \\ &= \frac{1}{8}(F_{ij}^aF_{ij}^a - F_{ij}^aF_{ji}^a) = \frac{1}{4}F_{ji}^aF_{ij}^a \end{aligned} \tag{2.95}$$

per cui

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left[B_k^aB_k^a + (D_k\Phi)^a(D_k\Phi)^a\right]d^3x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(B_k - D_k\Phi)^a(B_k + D_k\Phi)^a d^3x + \int_{\mathbb{R}^3}B_k^a(D_k\Phi)^a d^3x. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Analizziamo il secondo termine. Dall'identità di Bianchi $D_{[i}F_{jk]} = 0$ si ottiene $D_kB_k = 0$, per cui

$$\begin{aligned} -2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{Tr}(B_kD_k\Phi)d^3x &= -2\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{Tr}[D_k(B_k\Phi)]d^3x \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\,\mathrm{Tr}(B_k\Phi)d^3x = \int_{S^2_\infty}B_k^a\Phi^a n^k d^2S = 4\pi n. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Otteniamo quindi il limite di *Bogomolny-Prasad-Sommerfeld*

$$S \geq 4\pi n \tag{2.98}$$

e questo limite è saturato per $B_k = D_k\phi$, ossia $*F = D\Phi$.

Il numero di monopolo può essere ricavato dal comportamento asintotico del campo di Higgs. Consideriamo

$$|\Phi| = 1 - \frac{n}{r} + O(r^{-2}), \qquad r \to \infty \tag{2.99}$$

per cui

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} B_k^a (D_k\Phi)^a d^3x &= \int_{\mathbb{R}^3} (D_k\Phi)^a (D_k\Phi)^a d^3x \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta|\Phi|^2 d^3x = \frac{1}{2}\int_{S^2_\infty} \nabla\left[1 - \frac{2n}{r} + O(r^{-2})\right] d^2S = 2\pi n,\end{aligned} \tag{2.100}$$

dove abbiamo usato le equazioni di campo statico $D_k D_k \Phi = 0$.

Diamo ora una forma esplicita delle soluzioni. Facciamo l'ipotesi che i campi abbiamo simmetria sferica

$$\Phi^a = h(r)\frac{x^a}{r}, \quad A_i^a = -\epsilon^{aij}\frac{x^j}{r^2}[1 - k(r)] \tag{2.101}$$

per cui le equazioni di Bogomolny si riducono alle ODE

$$\frac{dh}{dr} = r^{-2}(1 - k^2), \qquad \frac{dk}{dr} = -kh. \tag{2.102}$$

Facendo il cambiamento di variabili $H = h + r^{-1}$ e $K = k/r$ si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dr} + r^{-2} = r^{-2}(1 - (Kr)^2) \\ r\dfrac{dK}{dr} + K = -Kr(H - r^{-1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dH}{dr} = -K^2 \\ \dfrac{dK}{dr} = -KH \end{cases} \tag{2.103}$$

da cui si ottengono le soluzioni di Prasad-Sommerfeld

$$\Phi^a = \frac{x^a}{r}\left[\coth(r) - \frac{1}{r}\right], \qquad A_I^a = -\epsilon^{aij}\frac{x^j}{r^2}\left[1 - \frac{r}{\sinh(r)}\right]. \tag{2.104}$$

Queste soluzioni hanno $n = 1$ in quanto

$$1 - |\Phi|^2 = \frac{1}{r} - 2e^{-r} + O(e^{-3r}). \tag{2.105}$$

Asintoticamente la soluzione tende al monopolo di Dirac, che è la configurazione con più bassa energia, quindi la soluzione è stabile.

2.7 Istantoni di Yang Mills

L'ampiezza vuoto-vuoto in una teoria Euclidea è

$$Z \equiv \langle 0|0\rangle \propto \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi,\partial_\mu\phi]} \tag{2.106}$$

dove S è l'azione Euclidea. Questa equazione mostra che il contributo principale a Z deriva dal valore di $\phi(x)$ che dà i minimi locali di $S[\phi, \partial_\mu\phi]$. In molte teorie esiste un numero di minimi locali oltre al minimo assoluto. Nel caso delle teorie di gauge non-Abeliane questi minimi sono chiamati *istantoni*.

Consideriamo una teoria di gauge $SU(2)$ definita nello spazio Euclideo quadridimensionale $\mathbb{R}^4$. L'azione è

$$S = -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F \wedge *F) \tag{2.107}$$

che dà luogo alle equazioni di campo

$$D * F = 0 \tag{2.108}$$

Nel path integral contribuisconosolo quelle configurazioni di campo con azione finita. Per avere soluzioni con azione finita, dobbiamo avere $F(x) \to 0$ quando $|x| \to 0$, da cui si ottiene il comportamento asintotico di A_μ

$$A_\mu \to g(x)^{-1}\partial_\mu g(x) \quad \text{quando } |x| \to \infty \tag{2.109}$$

e con $g \in SU(2)$, per cui si nota che g è una mappa $g\colon S^3_\infty \to SU(2)$. Quando $|x| \to \infty$

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ &= d(g^{-1}dg) + (g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg) \\ &= -g^{-2}dg \wedge dg + g^{-2}dg \wedge dg = 0 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Richiediamo quindi che, quando siamo su una sfera S^3 di grande raggio, il potenziale di gauge sia dato dalla (2.109)

In generale è molto più semplice risolvere un'equzione differenziale del primo ordine piuttosto che una del secondo. Inoltre sarebbe utile sostituire una equazione differenziale del secondo ordine con una del primo che sia perfettamente equivalente con il problema originale. A tale scopo se consideriamo la disuguaglianza

$$\int d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})^2 \geq 0 \tag{2.111}$$

si vede che il segno uguale si ha quando $F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}$. Se si sceglie il segno positivo si dice che F è self-duale mentre per il segno negativo si parlerà di anti-self-duale. Questa relazione non altera le equazioni di campo, si ha che

$$D * F = \pm DF = 0. \tag{2.112}$$

Dalla (2.111) si vede inoltre che

$$\int d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})^2 = \int d^4x \, \mathrm{Tr}(2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \pm 2F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}) \geq 0 \tag{2.113}$$

e vedremo questa relazione sarà molto importante per definire un limite inferiore per l'azione suddetta.

Concentriamoci ora sulla soluzione self-duale $F = *F$. Cerchiamo quindi una soluzione di tipo istantone della forma

$$A_\mu = if(r)\, g^{-1}(x)\partial_\mu g(x) \tag{2.114}$$

dove $r \equiv |x|$ e

$$f(r) \to 1, \quad \text{per } r \to \infty. \tag{2.115}$$

Dalle condizioni di seflf-dualità della field strength si ottiene una condizione sulla funzione $f(r)$

$$d\frac{df(r)}{dr} = 2f(r)(1 - f(r)) \tag{2.116}$$

la cui soluzione, con le condizioni al contorno suddette, è

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + a^2} \tag{2.117}$$

dove a^2 è un parametro che specifica la dimensione dell'istantone.

Prendiamo quindi come spazio di base lo spazio-tempo Euclideo compattificato, ossia la 4-sfera S^4, e sia la fibra il gruppo $SU(2) = S^3$. Consideriamo delle coordinate su queste due varietà indicate con (θ, ϕ, ψ, r) per S^4, mentre (α, β, γ) per la fibra S^3. Dividiamo S^4 in due emisferi $U_\pm$ i cui bordi sono le 3-sfere S^3. Possiamo parametrizzare l'intersezione di U_+ con U_- lungo questo "equatore" di S^4 con gli angoli di Eulero (θ, ϕ, ψ) di S^3. Usando la costruzione standard, abbiamo una rappresentazione $h(\theta, \phi, \psi)$ di $SU(2)$,

$$h(x) = \frac{t - i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}{r}, \qquad \begin{cases} x + iy = r \cos\dfrac{\theta}{2} \exp\dfrac{i}{2}(\psi + \phi) \\ z + it = r \sin\dfrac{\theta}{2} \exp\dfrac{i}{2}(\psi - \phi) \end{cases} \tag{2.118}$$

dove λ_i sono le matrici di Pauli e $r^2 = t^2 + \mathbf{x}^2$. Le coordinate delle fibre sono date dalle matrici di $SU(2)$, $g(\alpha, \beta, \gamma)$ dipendenti dagli angoli di Eulero. Abbiamo così due pezzi locali del fibrato

$$\begin{aligned} &U_+ \times SU(2), \qquad \text{con coordinate } (\theta, \phi, \psi, r; \alpha_+, \beta_+, \gamma_+) \\ &U_- \times SU(2), \qquad \text{con coordinate } (\theta, \phi, \psi, r; \alpha_-, \beta_-, \gamma_-). \end{aligned} \tag{2.119}$$

Nella regione di sovrapposizione $U_+ \cap U_-$ costruiamo la funzione di transizione dalla fibra di $SU(2)$, $g(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+)$, a quella $g(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-)$ usando la moltiplicazione delle matrici di $SU(2)$

$$g(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-) = h^k(\theta, \phi, \psi) g(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+) \tag{2.120}$$

La potenza k della matrice di transizione deve essere un intero per dare una varietà ben definita. Per $k = 1$ otteniamo il fibrazione di Hopf di S^7 che abbiamo precedentemente descritto, per cui $P(k = 1) = S^7$. Più in generale le soluzioni istantoniche descrivono fibrati con altri valori di k.

Prendiamo una metrica su S^4, per esempio, la metrica de Sitter con raggio $a/2$ per cui

$$ds^2 = \frac{dx_\mu dx^\mu}{(1 + r^2/a^2)^2} = \frac{dr^2 + r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)}{(1 + r^2/a^2)^2} = \sum_{a=0}^{3} (e^a)^2 \tag{2.121}$$

con σ_i le 1-forma invarianti a sinistra sulla varietà del gruppo $SU(2) = S^3$, mentre e^a è la matrice che trasforma la base delle coordinate dx^μ di $T_x^*(M)$ in una base ortonormale di $T_x^*(M)$

$$e^a = e^a{}_\mu \, dx^\mu. \tag{2.122}$$

Questa metrica è ottenuta dalla proiezione dal polo nord e sud su $\mathbb{R}^4$. Come abbiamo visto, dividendo S^4 in due emisferi si ottiene una regione di sovrapposizione $U_+ \cap U_- \simeq S^3$. Calcoliamo la forma di Maurer Cartan in questo caso per cui

$$h^{-1} dh = \frac{t + i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}{r} d\left(\frac{t - i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}{r}\right) = i\lambda_a \sigma_a = i\lambda_a \eta_{a\mu\nu} \frac{x^\mu dx^\nu}{r^2} \tag{2.123}$$

dove $\eta_{a\mu\nu}$ sono e matrici di 't Hooft definite da $\eta_{a\mu\nu} = \eta_{aij} = \epsilon_{aij}$, e $\eta_{ai0} = \delta_{ai}$, $a, i, j = (1, 2, 3)$ e antisimmetriche rispetto agli ultimi due indici. Prendiamo una connessione 1-forma che nei due intorni del fibrato sarà scritta come

$$\omega = \begin{cases} g_+^{-1} A_+ g_+ + g_+^{-1} dg_+, & \text{su } U_+ \\ g_-^{-1} A_- g_- + g_-^{-1} dg_-, & \text{su } U_- \end{cases} \tag{2.124}$$

I due campi di Yang Mills saranno legati dalla trasformata di gauge

$$A_-(x) = h^k(x) A(x)_+ h^{-k}(x) + h^k(x) dh^{-k}(x) \tag{2.125}$$

Nel caso $k = 1$ e F self duale, abbiamo una soluzione a singolo istantone,

$$U_+ : A_+ = \frac{r^2}{r^2 + a^2} h^{-1} dh = \frac{r^2}{r^2 + a^2} i\lambda_b \sigma_b = \frac{\lambda_b}{2i} dx^\mu \left(-2 \frac{\eta_{b\mu\nu} x^\nu}{r^2 + a^2}\right) \tag{2.126}$$

che è singolare al polo sud in $r = \infty$, mentre applicando la trasformata di gauge si ottiene la soluzione

$$U_- : A_- = h \left[\frac{r^2}{r^2 + a^2} h^{-1} dh\right] h^{-1} + h\, dh^{-1} \tag{2.127}$$

Per esplicitare questa quantità consideriamo la 1-forma invariante a destra $h\, dh^{-1}$ che darà luogo a

$$dh\, h^{-1} = d\left(\frac{t + i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}{r}\right) \frac{t - i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}{r} = -i\lambda_a \bar{\sigma}_a = -i\lambda_a \bar{\eta}_{a\mu\nu} \frac{x^\mu dx^\nu}{r^2} \tag{2.128}$$

con $\bar{\eta}_{a\mu\nu} = (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} \eta_{a\mu\nu}$ matrice di 't Hooft. Quindi possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} U_- : A_- &= h \left[\frac{r^2}{r^2 + a^2} h^{-1} dh\right] h^{-1} + h\, dh^{-1} = \frac{r^2}{r^2 + a^2} dh\, h^{-1} + h\, dh^{-1} \\ &= \left[\frac{r^2}{r^2 + a^2} - 1\right] dh\, h^{-1} = \frac{a^2}{r^2 + a^2} i\lambda_a \bar{\sigma}_a = \frac{-\lambda_b}{2i} dx^\mu \left(2 \frac{\bar{\eta}_{b\mu\nu} x^\nu}{r^2 + a^2} \left(\frac{a^2}{r^2}\right)\right) \\ &= \frac{-\lambda_b}{2i} \bar{\eta}_{b\mu\nu} dx^\mu\, \partial^\nu \ln\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \end{aligned} \tag{2.129}$$

che è singolare al polo nord in $r = 0$. La field strength in $U_\pm$ viene calcolata con il solito metodo per cui

$$F_\pm = dA_\pm + A_\pm \wedge A_\pm \tag{2.130}$$

e queste sono legate dalla trasformazione di gauge $F_- = h\, F_+\, h^{-1}$. Esplicitiamo il calcolo per F_+

$$\begin{aligned}
F_+ &= dA_+ + A_+ \wedge A_+ \\
&= d\left(\frac{r^2}{r^2+a^2} i\lambda_a \sigma_a\right) + \left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\right)^2 i\lambda_a\sigma_a \wedge i\lambda_b\sigma_b \\
&= \frac{2r(r^2+a^2)-2r^3}{(r^2+a^2)^2} dr \wedge i\lambda_a\sigma_a + \frac{r^2}{r^2+a^2} i\lambda_a d\sigma_a - \left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\right)^2 \lambda_a\lambda_b\sigma_a\wedge\sigma_b \\
&= \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2} dr \wedge r\sigma_a + \frac{r^2(r^2+a^2)}{(r^2+a^2)^2} i\lambda_a\epsilon_{abc}\sigma_b\wedge\sigma_c - \left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\right)^2 (\delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\lambda_c)\sigma_a\wedge\sigma_b \\
&= \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2} dr \wedge r\sigma_a + \frac{a^2r^2}{(r^2+a^2)^2} i\lambda_a\epsilon_{abc}\sigma_b\wedge\sigma_c \\
&= \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(dr\wedge r\sigma_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\sigma_b\wedge\sigma_c\right)
\end{aligned} \tag{2.131}$$

e allo stesso modo si trova che

$$\begin{aligned}
F_- &= dA_- + A_- \wedge A_- \\
&= d\left(\frac{a^2}{r^2+a^2} i\lambda_a\bar\sigma_a\right) + \left(\frac{r^2}{r^2+a^2}\right)^2 i\lambda_a\bar\sigma_a \wedge i\lambda_b\bar\sigma_b \\
&= \ldots = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(-dr\wedge r\bar\sigma_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\bar\sigma_b\wedge\bar\sigma_c\right)
\end{aligned} \tag{2.132}$$

Nel caso in cui abbiamo $k=-1$ e F anti-sefl-duale abbiamo un anti-istantone con le proprietà

$$A_+ = \frac{r^2}{r^2+a^2} i\lambda_b\bar\sigma_b, \qquad A_- = \frac{a^2}{r^2+a^2} i\lambda_b\sigma_b$$

$$F_+ = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(dr\wedge r\bar\sigma_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\bar\sigma_b\wedge\bar\sigma_c\right), \qquad F_- = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(-dr\wedge r\sigma_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\sigma_b\wedge\sigma_c\right)$$

A questo punto se scriviamo il campo in termini dei generatori dell'algebra si ha $F = F^\alpha\,(\sigma_\alpha/2i)$ e la classe totale di Chern è data da

$$c(F) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}F^\alpha\left(\frac{\sigma_\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\left(F^3\wedge F^3 + F^1\wedge F^1 + F^2\wedge F^2\right) \tag{2.133}$$

e le classi individuali sono

$$c_0(\mathcal{F}) = 1, \quad c_1(F) = 0, \quad c_2(F) = -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{F^\alpha\wedge F^\alpha}{4} \tag{2.134}$$

Il carattere totale di Chern è

$$\begin{aligned}
ch(\mathcal{F}) &= 2 - \mathrm{Tr}\left(\frac{F}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{F}{2\pi}\right)^2 \\
&= 2 + \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F\wedge F)
\end{aligned} \tag{2.135}$$

in quanto $\mathrm{Tr}\, F = 0$. Definiamo i *numeri di Chern* di un fibrato come i numeri derivanti dall'integrazione dei polinomi caratteristici sull'intera varietà. Nel caso degli istantoni si vede che esiste un solo numero di Chern non banale dato da

$$C_2 = \int_{S^4} c_2(F) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{Tr}(F\wedge F). \tag{2.136}$$

Osserivamo che

$$\mathrm{Tr}(F\wedge F) = d\,\mathrm{Tr}\left(F\wedge A - \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{2.137}$$

infatti

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(F\wedge F) &= d\operatorname{Tr}\left(F\wedge A-\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right)=\operatorname{Tr} d\left(F\wedge A-\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right)\\
&=\operatorname{Tr}\left(dF\wedge A+F\wedge dA-dA\wedge A\wedge A\right)\\
&=\operatorname{Tr}\left[(2\,dA\wedge A)\wedge A+F\wedge(F-A\wedge A)-dA\wedge A\wedge A\right]\\
&=\operatorname{Tr}\left[dA\wedge A\wedge A+F\wedge F-(dA+A\wedge A)\wedge A\wedge A)\right]\\
&=\operatorname{Tr}\left[F\wedge F-A\wedge A\wedge A\wedge A)\right]=\operatorname{Tr}(F\wedge F)
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

in quanto $\operatorname{Tr}(A^4)=0$. Nel caso di istantoni self-duali si ha che

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{U_+}\operatorname{Tr}(F_+\wedge F_+)+\int_{U_-}\operatorname{Tr}(F_-\wedge F_-)\right]\\
&=\frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{U_+} d\operatorname{Tr}\left(F_+\wedge A_+-\frac{1}{3}(A_+)^3\right)+\int_{U_-} d\operatorname{Tr}\left(F_-\wedge A_--\frac{1}{3}(A_-)^3\right)\right]\\
&=\frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{\partial U_+}\operatorname{Tr}\left(F_+\wedge A_+-\frac{1}{3}(A_+)^3\right)-\int_{\partial U_+}\operatorname{Tr}\left(hF_+h^{-1}\wedge(hA_+h^{-1}+hdh^{-1})-\frac{1}{3}(hA_+h^{-1}+hdh^{-1})^3\right)\right]\\
&=\frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{S^3}\operatorname{Tr}\left(F_+\wedge A_+-\frac{1}{3}(A_+)^3-hF_+h^{-1}\wedge(hA_+h^{-1}+hdh^{-1})+\frac{1}{3}(hA_+h^{-1}+hdh^{-1})^3\right)\right]\\
&=\frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{S^3}\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{3}(h\,dh^{-1})^3-d(A_+\wedge dh^{-1}\,h)\right)\right]=\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\operatorname{Tr}(h\,dh^{-1})^3
\end{aligned}
\tag{2.139}
$$

ed esplicitando la forma di hdh^{-1} si ottiene

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\operatorname{Tr}(dh\,h^{-1})^3=-\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\operatorname{Tr}(i\lambda_a\bar{\sigma}_a)^3\\
&=-\frac{i}{24\pi^2}\int_{S^3}\operatorname{Tr}\left(\lambda_a\lambda_b\lambda_c\ \bar{\sigma}_a\wedge\bar{\sigma}_b\wedge\bar{\sigma}_c\right)\\
&=-\frac{i}{24\pi^2}\int_{S^3}\frac{1}{r^6}\operatorname{Tr}\left((\delta_{ab}\lambda_c+i\epsilon_{abd}(\delta_{dc}+i\epsilon_{dcf}\lambda_f))\ \bar{\eta}_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{b\rho\sigma}\bar{\eta}_{c\iota\zeta}\ x^\mu dx^\nu\wedge x^\rho dx^\sigma\wedge x^\iota dx^\zeta\right)\\
&=-\frac{i}{24\pi^2}\int_{S^3}\frac{1}{r^6}\operatorname{Tr}\left(\lambda_c\ \bar{\eta}_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{a\rho\sigma}\bar{\eta}_{c\iota\zeta}x^\mu dx^\nu\wedge x^\rho dx^\sigma\wedge x^\iota dx^\zeta+i\epsilon_{abd}(\delta_{dc}+i\epsilon_{dcf}\lambda_f)\ \bar{\eta}_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{b\rho\sigma}\bar{\eta}_{c\iota\zeta}x^\mu dx^\nu\wedge x^\rho dx^\sigma\wedge x^\iota dx^\zeta\right)\\
&=\cdots=-1
\end{aligned}
\tag{2.140}
$$

Analogamente si vede per un istantone anti-self-duale il numero di Chern è $C_2=1$. Quindi si vede che il numero di Chern in entrambi i casi corrisponde al valore di $-k$ scelto. Per un k generico si vede che

$$
C_2=\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4}\operatorname{Tr}(F\wedge F)=-k \tag{2.141}
$$

e per questo motivo k è chiamato *numero istantonico* e inoltre questo numero è il grado della mappa $h(x)\colon S^3\to SU(2)$. Da questi risultati si vede che i fibrati principali G su uno spazio di base S^n sono classificati da elementi del gruppo di omotopia $\pi_{n-1}(G)$.

A questo punto diamo un'interpretazione della relazione (2.113) che ora possiamo riscrivere in un modo interessante

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\operatorname{Tr}[(F+*F)\wedge(F+*F)]+\int_{\mathbb{R}^4}\operatorname{Tr}(F\wedge F)\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\operatorname{Tr}[(F+*F)\wedge(F+*F)]+8\pi^2C_2\geq 8\pi^2C_2
\end{aligned}
\tag{2.142}
$$

da cui si vede che l'azione è limitata dal basso e la disuguaglianza è saturata se la curvatura è self-duale o anti-self-duale. Questo limite si chiama limite di *Bogomolny-Prasad-Sommerfeld* per gli istantoni.

Bibliografia

[1] M. Dunajski. *Solitons, Istantons and Twistors.*

[2] T. Frankel. *The Geometry of Physics.*

[3] S. Mukhi e N. Mukunda. *Lectures on Advanced Mathematical Methods for Physicists.*

[4] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics.*

[5] F. Schuller. *Lectures on Geometrical Anatomy of Theoretical Physics.*

[6] A. J. Hanson T. Eguchi P. B. Gilkey. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry.*