Geometria dei monopoli di Dirac e degli istantoni di Yang-Mills

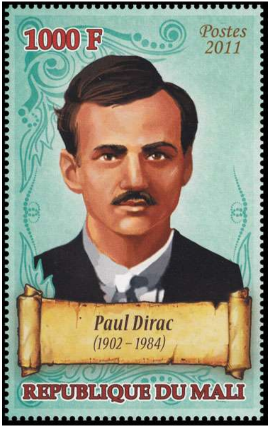
Matteo Maria Maglio
matteomaria.maglio@le.infn.it

Università del Salento

20 giugno 2016

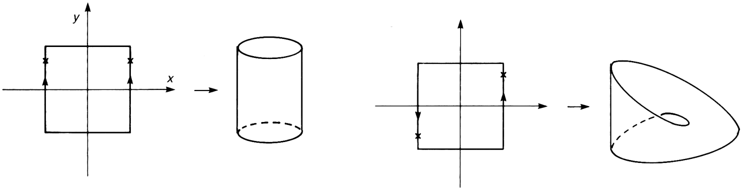
Sommario

- Introduzione
- Teoria di Maxwell
- Scaling Argument
- Teorie di Yang Mills
- Istantoni di Yang Mills



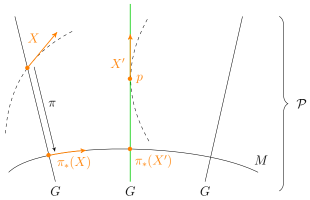
I fibrati

Un fibrato è una terna (E, π, M) dove E ed M sono varietà topologiche, chiamate spazio totale e spazio di base rispettivamente, e $\pi : E \to M$ è una mappa suriettiva continua, chiamata proiezione.



Localmente un fibrato è visto come un prodotto topologico di varietà.

Consideriamo un G-fibrato principale, $P \xrightarrow{\pi} M$, $\triangleleft : P \times G \to P$.



Una connessione su un G-fibrato principale $P \xrightarrow{\pi} M$ è un'assegnazione per ogni punto $p \in P$ di un sottospazio vettoriale $H_pP \subset T_pP$ tale che

i) $H_pP \oplus V_pP = T_pP$

ii) $(\triangleleft g)_*(H_pP) = H_{p \triangleleft g}P$

iii) preso $X_p \in T_pP$,

$$X_p = hor(X_p) + vec(X_p)$$

Connessioni su Fibrati Principali

Formalmente

$$\begin{aligned} \omega_p : T_p\mathcal{P} &\to T_eG \\ X_p &\mapsto \omega_p(X_p) := i_p^{-1}(ver(X_p)) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} i_p : T_eG &\to T_p\mathcal{P} \\ A &\mapsto X_p^A \end{aligned}$$

Presa una sezione locale $\sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{P}, \ \pi \circ \sigma = id_{\mathcal{U}}$

i) un campo di Yang Mills

$$\omega^u : \Gamma(TU) \to T_eG, \qquad \omega^u = \sigma^*\omega$$

ii) una banalizzazione locale del fibrato principale $h : \mathcal{U} \times G \to \mathcal{P}$ $h : (m, g) \mapsto \sigma(m) \triangleleft g$ implica una rappresentazione locale della connessione

$$(h^*\omega)_{(m,g)} : T_{(m,g)}(\mathcal{U} \times G) \to T_eG$$

Schematicamente

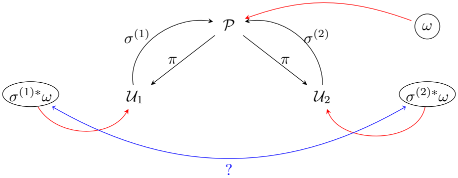
$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \times G \arrow[r, "h"] & \mathcal{P} & \\
h^*\omega \arrow[r, bend left] & \mathcal{U} \times G \arrow[u, "\triangleleft G"] \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathcal{P} \arrow[u, "\triangleleft G"'] \arrow[d, "\pi"] & \omega \arrow[l, bend right] \\
 & \mathcal{U} \arrow[r, "id"] & \mathcal{U} \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & \omega^u \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

e in forma esplicita

$$(h^*\omega)_{(m,g)}(v, \gamma) = Ad_{g^{-1}*}(\omega^u(v)) + \Xi_g(\gamma)$$

con $v \in T_m\mathcal{U}$, $\gamma \in T_g G$, Ξ è la forma di Maurer-Cartan

$$\Xi_g : \; T_g G \to T_e G$$



$$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{M}, \qquad \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_2 \neq 0$$

$$\gamma : \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \to G$$

$$\exists!\ \gamma(m),\ \forall m \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{M}$$

quindi

$$\omega^{u_2} = Ad_{\gamma^{-1}(m)*}\, \omega^{u_1} + \gamma^*\, \Xi_m$$

in componenti

$$\omega^{u_2}_\mu = Ad_{\gamma^{-1}(m)*}\, \omega^{u_1}_\mu + (\gamma^*\, \Xi_m)_\mu$$

La curvatura

La derivata esterna covariante

$$D\phi\colon \Gamma\left(T_0^k P\right) \to \mathcal{J}$$
$$D\phi\,(X_1, \ldots, X_k):\; = d\phi(hor(X_1), \ldots, hor(X_{k+1}))$$

ci permette di definire la curvatura come una 2-forma valutata nell'algebra di Lie definita su P

$$\Omega\colon \Gamma(T_0^2 P) \to T_e G, \qquad \Omega := D\omega$$

Esplicitamente

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

La curvatura soddisfa l'identità di Bianchi

$$D\,\Omega = 0.$$

Teoria di Maxwell

Spazio di base $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$. Fibrato U(1)-principale $P \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$ triviale $\Rightarrow P = \mathbb{R}^4 \times U(1)$. Presa una carta sullo spazio di base

$$
\begin{aligned}
(\sigma^* \omega)_\mu &= \mathcal{A}_\mu \\
(\sigma^* \Omega)_{\mu\nu} &= \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu
\end{aligned}
$$

che soddisfano l'identità di Bianchi

$$
\begin{aligned}
\sigma^* D\Omega = D(\sigma^* \Omega) &= D\mathcal{F} = 0 \\
D\mathcal{F} = d\mathcal{F} + \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} &= 0 \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{F} = 0
\end{aligned}
$$

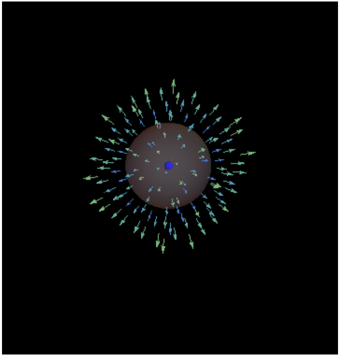
$$
\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0
$$

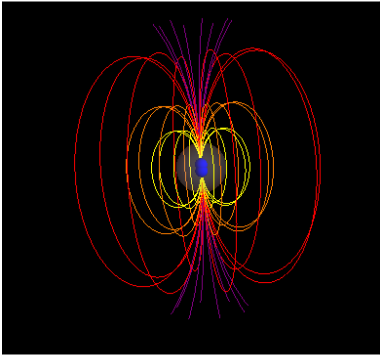
Identificando le componenti del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ e magnetico $\boldsymbol{B}$ come

$$E_i = F_{0i}, \qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \partial_0 B_j + \epsilon_{jik}\partial_k E_i = 0 \\ \partial_i B_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$





Monopolo di Dirac

Il fibrato $U(1)$-principale su $\mathbb{R}^4$ è triviale. Consideriamo quindi $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \cong S^2 \iff \begin{array}{l} \exists\, f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2 \\ \exists\, g\colon S^2 \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \end{array} \quad \text{t.c.} \quad \begin{array}{l} g \circ f \sim id_{S^2} \\ f \circ g \sim id_{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}} \end{array}$$

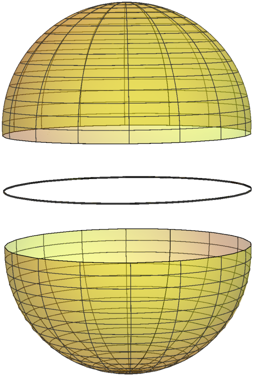
e consideriamo l'inclusione $j\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$, come $j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, e la proiezione $p\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$, come $\mathbf{x} \to p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Si vede che

$$p \circ j \sim Id_{\mathbb{R}^3} \qquad j \circ p \sim Id_{S^2}$$

$$F(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x} + \frac{(1-t)\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Il fibrato rilevante è $P(S^2, U(1))$. Indichiamo le coordinate di S^2 con (θ, ϕ), con $0 \leq \theta < \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi$ mentre le coordinate della fibra $U(1) = S^1$ con $e^{i\psi}$.

Ricopriamo S^2 con due carte



$$U_+ \equiv \left\{ (\theta, \phi) \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi + \epsilon \right\}$$
$$U_- \equiv \left\{ (\theta, \phi) \,\middle|\, \frac{1}{2}\pi - \epsilon \leq \theta \leq \pi \right\}$$

con $U_+ \cap U_- \neq 0$ pari alla fascia equatoriale parametrizzata dall'angolo ϕ.

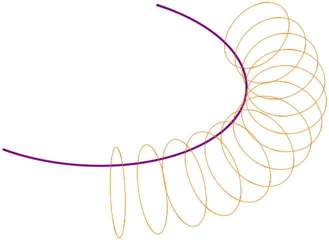
Localmente

$$U_+ \times U(1), \quad \text{con coordinate } (\theta, \phi; e^{i\psi_+})$$
$$U_- \times U(1), \quad \text{con coordinate } (\theta, \phi; e^{i\psi_-})$$

Scegliamo quindi di legare le coordinate delle fibre di U_+ e U_- nel modo seguente

$$e^{i\psi_-} = e^{in\phi} e^{i\psi_+}$$

con $n \in \mathbb{Z}$. Consideriamo il caso $n = 0$ per il quale il fibrato principale è triviale $P = S^2 \times U(1)$.



Connessione ω nei due pezzi del fibrato

$$\omega = \begin{cases} A_+ + d\psi_+ & \text{su } U_+ \\ A_- + d\psi_- & \text{su } U_- \end{cases}$$

$$e^{i\psi_-} = e^{in\phi} e^{i\psi_+} \;\Rightarrow\; A_+ = A_- + n\, d\phi$$

Potenziali di gauge

$$A_\pm = \frac{n}{2}(\pm 1 - \cos\theta) d\phi = \frac{n}{2r} \frac{1}{z \pm r}(x\, dy - y\, dx)$$

Curvatura

$$F = dA_\pm = \frac{n}{2} \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = \frac{n}{2r^3}(x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy)$$

$$\boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{n}{2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Flusso magnetico totale uscente da una sfera

$$\Phi = \int_{S^2} F = \int_{U_+} dA_+ + \int_{U_-} dA_- = \int_{S^1} (A_+ - A_-) = n \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi n$$

Quantised Singularities in the Electromagnetic Field

P.A.M. Dirac

Received May 29, 1931

§ *1. Introduction*

The steady progress of physics requires for its theoretical formulation a mathematics that gets continually more advanced. This is only natural and to be expected. What, however, was not expected by the scientific workers of the last century was the particular form that the line of advancement of

Secondo Dirac

$$D\Psi = d\Psi - iqA\Psi$$

con $\Psi_+ = \exp(iqn\,\phi)\Psi_-$

$$D\Psi_+ = (d - iqA_+)\Psi_+ = (d - iqA_- - iqn\,d\phi)\,e^{iqn\,\phi}\Psi_- = e^{iqn\,\phi}D\Psi_-$$

da cui la condizione di quantizzazione di Dirac

$$qn = 2\pi N, \qquad N \in \mathbb{Z}$$

con n carica magnetica e q quella elettrica.

$\implies ne = 2\pi N$, e la carica magnetica minima è $n = 2\pi/e$.

Teoria di Yang Mills

Consideriamo una teoria di gauge $SU(2)$ definita su $\mathbb{R}^4$, quindi $\mathcal{P}(\mathbb{R}^4, SU(2))$. Data una sezione locale σ definiamo la forma locale $\mathcal{F}$ della curvatura Ω

$$\mathcal{F} = \sigma^* \Omega.$$

In termini del potenziale di gauge

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$$

con d derivata esterna sullo spazio di base $\mathbb{R}^4$. L'azione di $\mathcal{F}$ sui vettori dello spazio tangente $T\mathbb{R}^4$ della varietà di base è dato da

$$\mathcal{F}(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})(X, Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\![\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)]\!]$$

Presa una carta $(\mathcal{U}, x)$ su $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

da cui

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\![\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\!]$$

In termini della base dell'algebra $\{T_a\}$

$$\mathcal{A}_\mu = A^a_\mu T_a, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T_a.$$

Usando le parentesi di commutazione dell'algebra

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$$

Consideriamo ora il tensore di campo duale

$$(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

L'azione di Yang-Mills è invariante per trasformazioni di gauge. Questa infatti

$$S = -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F\wedge *F)\, d^4x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} F^a(A)\wedge *F_a(A)\, d^4x = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu\, a} d^4x$$

Per una variazione del campo di gauge A

$$\delta S = \int \delta A^a \wedge \left(d * F_a + f_{ab}{}^c A^b \wedge *F_c\right)$$

Dal principio di minima azione otteniamo le *equazioni di Yang-Mills*

$$d * F_a + f_{ab}{}^c A^b \wedge *F_c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d * F + [A, *F] = 0 = D * F.$$

Scaling Argument

Scaling argument di Derrick: ricerca di configurazioni statiche di energia finita in d-dim.

Per esempio prendiamo un campo scalare libero ϕ in presenza di un potenziale $V(\phi)$

$$E(\phi) = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right] = T(\phi) + P(\phi)$$

Trasformazione di scala del campo scalare

$$\phi(x) \to \phi_a(x) = \phi(ax)$$

l'energia si trasforma come

$$E(\phi) \to E(\phi_a) = T(\phi_a) + P(\phi_A) = \frac{1}{a^{d-2}} T(\phi) + \frac{1}{a^d} P(\phi).$$

ϕ_1 soluzione statica ad energia finita, allora affinché $E(\phi_a)$ sia stazionario bisogna imporre

$$\left.\frac{dE(\phi_a)}{da}\right|_{a=1} = 0$$

che implica

$$(d-2)T(\phi) + dP(\phi) = 0$$

T, P semidefinite positive, d intero,quindi la stazionarietà di E è possibile per $d = 1$. Infatti

$$\left[\frac{\partial^2 E(\phi_a)}{\partial a^2}\right]_{a=1} = 2(2-d)T(\phi)$$

$E(\phi)$ può essere minimizzato solo per $d = 1$

Scaling Argument in Teorie di Gauge

- Modello di Nielsen-Olesen (*modello di Higgs Abeliano*)

$$\mathcal{L}[A_\mu, \phi] = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}|(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 - V(\phi),$$
$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda g^2 \left[|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{2\lambda g^2}\right]^2, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

- Modello Georgi-Glashow con campo di gauge non abeliano in $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}[A_\mu, \phi] = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)_a^\dagger(D_\mu\phi)_a - V(\phi_a)$$
$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - e\,\epsilon_{abc}A_b^\mu A_c^\nu,$$
$$(D^\mu\phi)_a = \partial^\mu\phi_a - e\,\epsilon_{abc}A_b^\mu\phi_c$$

Energia per tali modelli

$$E(\phi, A) = T(A) + T(D\phi) + P(\phi).$$

Trasformazione di scala

$$\phi(x) \to \phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x), \quad A_\mu \to A_{\mu,\lambda}(x) = \lambda A_\mu(\lambda x)$$

$$D_\mu\phi(x) \to \lambda D_\mu\phi(\lambda x), \quad G_{\mu\nu}(x) \to \lambda^2 G_{\mu\nu}(\lambda x), \quad F_{\mu\nu}(x) \to \lambda^2 F_{\mu\nu}(\lambda x)$$

e si ottiene

$$E(\phi_\lambda, A_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{d-4}} T(A) + \frac{1}{\lambda^{d-2}} T(D\phi) + \frac{1}{\lambda^d} P(\phi).$$

Trovare soluzioni statiche di energia finita

$$\left.\frac{\partial E(\phi_\lambda, A_\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (4-d)T(A) + (2-d)T(D\phi) - dP(\phi) = 0$$

$$(4-d)T(A)+(2-d)T(D\phi)-dP(\phi)=0$$

- $d=1$: solitoni e sine-Gordon;
- $d=2$: teoria di Nielsen-Olesen;
- $d=3$: modello Georgi-Glashow legato ai *monopoli non abeliani*;
- $d=4$: *teoria di gauge pura* con soluzioni di tipo *istantoni*;
- $d\geq 5$: $\nexists$ soluzione quindi *modello di Skyrme*, si aggiunge un termine $T^{(4)}(\phi)$,

$$T^{(4)}(\phi_\lambda)=\lambda^{4-d}T(\phi)$$

e tale contributo viene controbilanciato da $T(A)$ o $T(D\phi)$.

Monopoli non Abeliani

$SU(2)$-fibrato su $\mathbb{R}^4$ e

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} D_\mu \Phi^a D^\mu \Phi^a - V(\Phi),$$

con

$$V(\Phi) = \frac{1}{4} c(|\Phi|^2 - v^2)^2, \qquad \text{dove } \ |\Phi|^2 = \Phi^a \Phi^a, \ \ v \in \mathbb{R}^+ \ \ c \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{L}$ invariante sotto $SU(2)$. L'azione è finita se

$$|\Phi| \to v, \ \ D_\mu \Phi \to 0, \ \ F_{\mu\nu} \to 0, \ \ \text{per } |x| \to \infty.$$

L'equazioni di campo

$$(D_\nu F^{\mu\nu})^a = -\epsilon^{abc} \Phi^b (D^\mu \Phi)^c, \qquad (D_\mu D^\mu \Phi)^a = -c(|\Phi|^2 - v^2)\Phi^a.$$

Una soluzione $A = 0$ e $\Phi = \Phi_0 =$cost, $|\Phi_0| = v$.
Se $v \neq 0 \implies$ rottura in$U(1)$

Studiamo i solitoni della teoria. Scegliamo $A_0 = 0$, quindi $D_0(f) = 0$ con f statico e valutato sull'algebra. La condizione che porta alla rottura spontanea della simmetria in $U(1)$ è

$$\Phi \to \Phi_0, \quad |x| \to \infty$$

Informazioni topologiche contenute nel campo che definisce la mappa $S^2_\infty \to S^2_{T_e G}$. Il campo è topologicamente classificato dal suo grado $n = \deg(\hat{\Phi}_0)$ legato al flusso magnetico uscente da una superficie all'infinito.
Riscaliamo

$$\hat{\Phi} = \Phi/|\Phi| \;\Rightarrow\; v = 1$$

Campo di gauge non nullo all'infinito

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{ij}^a \hat{\Phi}^a.$$

campo magnetico $U(1)$.

Asintoticamente $D_i\hat{\Phi} = 0$ implica

$$A_i^a = -\epsilon^{abc}\partial_i\hat{\Phi}^b\hat{\Phi}^c$$

per cui

$$\begin{aligned} F_{ij}^a &= \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a - \epsilon^{abc}A_i^b A_j^c \\ &= 2\epsilon^{abc}\partial_i\hat{\Phi}^b\partial_j\hat{\Phi}^c - (\epsilon^{bcd}\partial_i\hat{\Phi}^b\partial_j\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^d)\hat{\Phi}^a. \end{aligned}$$

La carica magnetica quindi sarà

$$\mathcal{Q} = \int_{S^2_\infty} \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{ij}^a\hat{\Phi}^a n^i d^2S = \int_{S^2_\infty} \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\epsilon^{bcd}\partial_j\hat{\Phi}^b\partial_k\hat{\Phi}^c\hat{\Phi}^d)n^i d^2S = 4\pi n$$

n è chiamato numero di monopolo con carica magnetica unitaria 4π.

Istantoni di Yang-Mills

L'ampiezza vuoto-vuoto in una teoria Euclidea è

$$Z \equiv \langle 0|0\rangle \propto \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S[\phi,\partial_\mu \phi]}$$

Contributo principale a Z dal minimo locale $S[\phi, \partial_\mu \phi]$. Nelle teorie di gauge non-Abeliane questi minimi sono istantoni.
Teoria di gauge $SU(2)$ nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^4$. L'azione

$$S = -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F \wedge *F)$$

dà luogo alle equazioni di campo

$$D * F = 0$$

Neccessità di una azione finita, quindi $F(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, per cui

$$A_\mu \to g(x)^{-1} \partial_\mu g(x) \quad \text{quando } |x| \to \infty,$$

$g \in SU(2)$. Quindi $g \colon S^3_\infty \to SU(2)$. Per $|x| \to \infty$

$$\begin{aligned} F = dA + A \wedge A &= d(g^{-1} dg) + (g^{-1} dg) \wedge (g^{-1} dg) \\ &= -g^{-2} dg \wedge dg + g^{-2} dg \wedge dg = 0 \end{aligned}$$

Presa la relazione

$$\int d^4x \, \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu})^2 \geq 0$$

è saturata per $F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}$. Con segno positivo F è self-duale mentre con segno negativo F è anti-self-duale.

Questa relazione non altera le equazioni di campo

$$D * F = \pm DF = 0.$$

Consideriamo la soluzione self-duale $F = *F$. Cerchiamo quindi una soluzione di tipo istantone della forma

$$A_\mu = f(r)\, g^{-1}(x)\partial_\mu g(x)$$

$$f(r) \to 1, \quad \text{per } r \to \infty.$$

Dalle condizioni di self-dualità della field strength si ottiene una condizione sulla funzione $f(r)$

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2 + a^2}$$

dove a è un parametro che specifica la dimensione dell'istantone.

$M_{base} = S^4$, e sia la fibra il gruppo $SU(2) = S^3$.

$$\begin{aligned} \text{coordinate di } S^4 : &\quad (\theta, \phi, \psi, r) \\ \text{coordinate di } SU(2) \cong S^3 : &\quad (\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

Dividiamo S^4 in due emisferi $U_\pm$ per cui $U_+ \cap U_- \simeq S^3$ parametrizzata da (θ, ϕ, ψ) di S^3. Rappresentazione $h(\theta, \phi, \psi)$ di $SU(2)$,

$$h(x) = \frac{t - i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{x}}{r}, \qquad \begin{cases} x + iy = r \cos \frac{\theta}{2} \exp \frac{i}{2}(\psi + \phi) \\ z + it = r \sin \frac{\theta}{2} \exp \frac{i}{2}(\psi - \phi) \end{cases}$$

λ_i matrici di Pauli, $r^2 = t^2 + \mathbf{x}^2$.

Le coordinate delle fibre sono $g(\alpha, \beta, \gamma)$. Abbiamo due pezzi locali del fibrato

$$\begin{aligned} &U_+ \times SU(2), \qquad \text{con coordinate} \;\; (\theta, \phi, \psi, r; \alpha_+, \beta_+, \gamma_+) \\ &U_- \times SU(2), \qquad \text{con coordinate} \;\; (\theta, \phi, \psi, r; \alpha_-, \beta_-, \gamma_-). \end{aligned}$$

In $U_+ \cap U_-$ costruiamo la funzione di transizione tra le fibre $g(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+)$ e $g(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-)$

$$g(\alpha_-, \beta_-, \gamma_-) = h^k(\theta, \phi, \psi) g(\alpha_+, \beta_+, \gamma_+)$$

con k intero. Per $k = 1$ otteniamo il fibrazione di Hopf di S^7, $P(k = 1) = S^7$. Più in generale le soluzioni istantoniche descrivono fibrati con generico k.

Metrica de Sitter con raggio $a/2$ su S^4

$$ds^2 = \frac{dx_\mu dx^\mu}{(1+r^2/a^2)^2} = \frac{dr^2 + r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)}{(1+r^2/a^2)^2} = \sum_{a=0}^{3} (e^a)^2$$

σ_i 1-forme invarianti a sinistra sul gruppo $SU(2) \cong S^3$.
e^a trasforma la base $T_x^*(M)$ in una base ortonormale di $T_x^*(M)$

$$e^a = e^a{}_\mu \, dx^\mu$$

La metrica è la proiezione su $\mathbb{R}^4$ dal polo nord e sud. La forma di Maurer Cartan

$$h^{-1}dh = \frac{t + i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x}}{r} d\left(\frac{t - i\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x}}{r}\right) = i\lambda_a\sigma_a = i\lambda_a\eta_{a\mu\nu}\frac{x^\mu dx^\nu}{r^2}$$

$\eta_{a\mu\nu}$ matrici di 't Hooft : $\eta_{a\mu\nu} = \eta_{aij} = \epsilon_{aij}, \, \eta_{ai0} = \delta_{ai}, \; a, i, j = (1, 2, 3)$,
$\eta_{a\mu\nu} = -\eta_{a\nu\mu}$.

La connessione 1-forma

$$\omega = \begin{cases} g_+^{-1} A_+ g_+ + g_+^{-1} dg_+, & \text{su } U_+ \\ g_-^{-1} A_- g_- + g_-^{-1} dg_-, & \text{su } U_- \end{cases}$$

con le trasformazioni di gauge

$$A_-(x) = h^k(x) A(x)_+ h^{-k}(x) + h^k(x) dh^{-k}(x)$$
$$F_-(x) = h^k(x) F_+(x) h^{-k}(x)$$

Nel caso $k = 1$ e F self duale, abbiamo una soluzione a singolo istantone,

$$A_+ = \frac{r^2}{r^2+a^2} i\lambda_b \sigma_b, \quad F_+ = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(dr \wedge r\sigma_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\sigma_b \wedge \sigma_c\right)$$

$$A_- = \frac{a^2}{r^2+a^2} i\lambda_b \bar{\sigma}_b, \quad F_- = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(-dr \wedge r\bar{\sigma}_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\bar{\sigma}_b \wedge \bar{\sigma}_c\right)$$

Nel caso in cui abbiamo $k = -1$ e F anti-sefl-duale abbiamo un anti-istantone con le proprietà

$$A_+ = \frac{r^2}{r^2+a^2} i\lambda_b \bar{\sigma}_b, \quad F_+ = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(dr \wedge r\bar{\sigma}_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\bar{\sigma}_b \wedge \bar{\sigma}_c\right)$$

$$A_- = \frac{a^2}{r^2+a^2} i\lambda_b \sigma_b, \quad F_- = \frac{2ia^2\lambda_a}{(r^2+a^2)^2}\left(-dr \wedge r\sigma_a + \frac{1}{2}r^2\epsilon_{abc}\sigma_b \wedge \sigma_c\right)$$

Se $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha \left(\sigma_\alpha / 2i\right)$ abbiamo la classe totale di Chern

$$
\begin{aligned}
c(\mathcal{F}) &= \det\left(\mathbb{1} + \frac{i}{2\pi}\mathcal{F}^\alpha\left(\frac{\sigma_\alpha}{2i}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2\pi}\frac{\mathcal{F}^3}{2i} & \frac{i}{2\pi}\frac{(\mathcal{F}^1 - i\mathcal{F}^2)}{2i} \\ \frac{i}{2\pi}\frac{(\mathcal{F}^1 + i\mathcal{F}^2)}{2i} & 1 - \frac{i}{2\pi}\frac{\mathcal{F}^3}{2i} \end{pmatrix} \\
&= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \left(\mathcal{F}^3 \wedge \mathcal{F}^3 + \mathcal{F}^1 \wedge \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 \wedge \mathcal{F}^2\right)
\end{aligned}
$$

e le classi individuali sono

$$
c_0(\mathcal{F}) = 1, \quad c_1(\mathcal{F}) = 0, \quad c_2(\mathcal{F}) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\mathcal{F}^\alpha \wedge \mathcal{F}^\alpha}{4}
$$

Il carattere totale di Chern è

$$
\begin{aligned}
ch(\mathcal{F}) &= 2 + \operatorname{Tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\frac{i\mathcal{F}}{2\pi}\right)^2 \\
&= 2 - \frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F})
\end{aligned}
$$

in quanto $\operatorname{Tr}\mathcal{F} = 0$.

Numeri di Chern ottenuti dall'integrazione dei polinomi caratteristici sull'intera varietà. Per gli istantoni

$$C_2 = \int_{S^4} c_2(\mathcal{F}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4} \mathrm{Tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4} \mathrm{Tr}(F\wedge F).$$

Per istantoni self-duali

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2}\left[\int_{U_+} \mathrm{Tr}(F_+\wedge F_+) + \int_{U_-} \mathrm{Tr}(F_-\wedge F_-)\right] = \cdots = -1$$

Per un istantone anti-self-duale : $C_2 = 1$. Per k generico si ha

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4} \mathrm{Tr}(F\wedge F) = -k$$

k numero istantonico ed è il grado della mappa $h(x)\colon S^3 \to SU(2)$

I fibrati principali $G\ P \xrightarrow{\pi} S^n$ classificati dal gruppo di omotopia $\pi_{n-1}(G)$.

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\, \mathrm{Tr}[(F+*F)\wedge(F+*F)] + \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F\wedge F) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^4} d^4x\, \mathrm{Tr}[(F+*F)\wedge(F+*F)] + 8\pi^2 C_2 \geq 8\pi^2 C_2 \end{aligned}$$

limite di Bogomolny-Prasad-Sommerfeld per gli istantoni. Istantoni di Alexander Belavin, Alexander Polyakov, Albert Schwarz e Yu. S. Tyupkin, (BPST)

Evidenze sperimentali e altre applicazioni

- *Spin Ice* in Fisica della Materia Condensata
- Monopoli Magnetici nei CR con l'esperimento MACRO (Gran Sasso). Limite superiore $5.6 \times 10^{-15}\ cm^{-2} sr^{-1} s^{-1}$

- Applicazioni degli istantoni all'effetto tunnel quantistico nell'ampiezza vuoto vuoto in QCD. (1975 Belavin, Polyakov, Schwartz and Tyupkin)
- Condensati di gluoni in QCD
- Istantoni in QCD:
  - violazione del numero barionico
  - problema di CP forte

Conclusioni

- La costruzione delle teorie fisiche mediante i principi di geometria differenziale
- La non trivialità dei fibrati principali implica importanti conseguenze topologiche sulle teorie
- Scaling argument per la determinazione di soluzioni stazionarie ad energia finita
- Le applicazioni in fisica dei metodi di geometria differenziale

Riferimenti

(i) P. A. M. Dirac, "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field"

(ii) M. Dunajski, "Solitons, Istantons and Twistors"

(iii) T. Eguchi et al., "Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry"

(iv) `http://www.dmf.unisalento.it/~m0085404`

(v) `http://www.dmf.unisalento.it/~giordano`

Grazie per l'attenzione