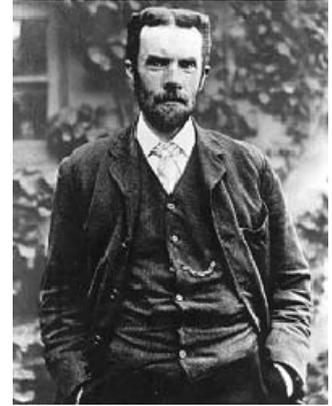


9 LINEE DI TRASMISSIONE

Sebbene la trasmissione di segnali lungo *linee di trasmissione* si sia sviluppata praticamente subito dopo l'esperimento di Ørsted, la prima teoria descrittiva di tali dispositivi si ebbe nel 1880 ad opera di Heaviside, il quale sintetizzò le originarie 20 equazioni di Maxwell nelle quattro ora note e introdusse i metodi matematici di studio usati tuttora.

Una linea di trasmissione è un mezzo per trasferire energia da un generatore ad un utilizzatore. Con riferimento a generatori che erogano forze elettromotrici sinusoidali, per basse frequenze, come in corrispondenza della frequenza della rete di distribuzione domestica dell'energia elettrica, si adoperano normali conduttori ed il loro studio può essere svolto attraverso l'impiego della teoria dei circuiti. Alle alte frequenze, quando la rapidità di variazione delle grandezze elettriche è comparabile coi tempi che impiegano i campi a propagarsi attraverso i conduttori, si adoperano tipicamente cavi coassiali ed il loro studio deve essere fatto adoperando la teoria delle onde elettromagnetiche. Consideriamo un cavo coassiale in cui il conduttore interno sia percorso dalla corrente I e quello esterno sia percorso dalla stessa corrente ma nella direzione opposta; sia \mathcal{C} una circonferenza coassiale al cavo e contenuta nell'intercapedine tra i due conduttori e sia S la superficie circolare che ha come contorno \mathcal{C} ; applichiamo le leggi di Faraday-Henry e di Ampere su tali domini:

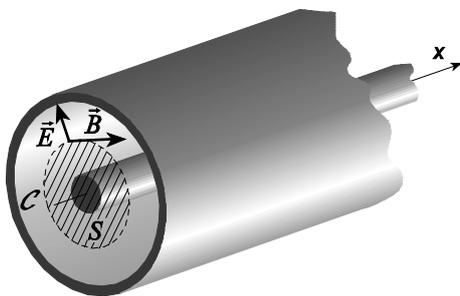


Oliver Heaviside

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \varepsilon \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

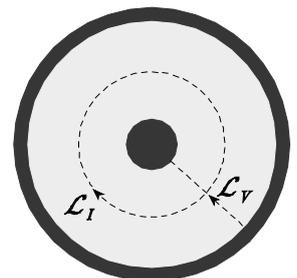
Se i campi \vec{E} e \vec{B} (e quindi \vec{H} , se nel mezzo è valida la relazione $\vec{H} = \vec{B}/\mu$) sono perpendicolari tra loro e perpendicolari all'asse del cavo, risulta:



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I;$$

ovvero, in questo caso il campo elettrico in un qualsiasi piano perpendicolare all'asse del cavo risulta conservativo ed analogo a quello prodotto da una distribuzione elettrostatica di carica; inoltre, il campo magnetico in qualsiasi piano perpendicolare all'asse è analogo al campo magnetostatico prodotto da una corrente stazionaria. Da queste considerazioni segue che è possibile applicare le tradizionali regole per la descrizione dei circuiti elettrici in regime stazionario; così si può definire in maniera univoca la differenza di



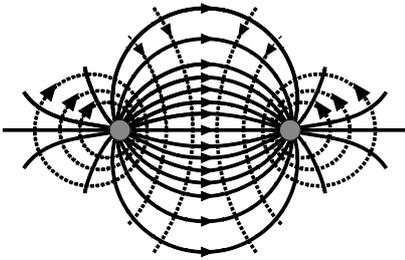
potenziale tra i conduttori per ogni punto x situato lungo il cavo, come l'integrale del campo elettrico lungo un generico percorso \mathcal{L}_v situato nel piano perpendicolare all'asse:

$$v(x, t) = - \int_{\mathcal{L}_v} \vec{E} \cdot d\vec{l} ;$$

analogamente, si può definire la corrente attraverso, ad esempio, il conduttore centrale, come l'integrale del campo \vec{H} lungo un generico percorso chiuso \mathcal{L}_i nel piano perpendicolare all'asse e che racchiude tale conduttore:

$$i(x, t) = \oint_{\mathcal{L}_i} \vec{H} \cdot d\vec{l} .$$

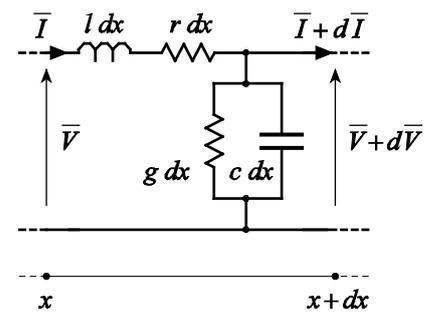
In particolare, qualora il cavo sia sollecitato sinusoidalmente, per la sua descrizione è possibile far ricorso al metodo simbolico.



Esempio: (*Linea bifilare*) La condizione di perpendicolarità tra i campi elettrico e magnetico è soddisfatta anche nel caso in cui i conduttori sono costituiti da due fili metallici di sezione uniforme posti a distanza fissa; una linea fatta in questa maniera è detta *bifilare*. In figura è mostrata la configurazione delle linee di forza del campo elettrico (linea continua) e del campo magnetico (linea tratteggiata) per una sezione di linea bifilare i cui conduttori sono percorsi da correnti di uguale intensità ma di versi opposti. Generalmente i due fili conduttori che costituiscono la linea sono intrecciati tra loro per minimizzare l'area da essi circoscritta, migliorando in questo modo l'immunità della linea ai disturbi. Le linee bifilari intrecciate sono largamente adoperate nelle reti per la trasmissione di dati.

9.1 Equazioni dei telegrafisti

Consideriamo un generico tratto di linea di lunghezza infinitesima dx compreso tra due sezioni trasversali poste, rispettivamente, alle distanze x e $x + dx$ da un punto di riferimento quale, ad esempio, l'inizio dove è connesso un generatore sinusoidale di pulsazione ω . Questo tratto infinitesimo di linea può essere schematizzato, come mostrato in figura, dove l , r , g e c , rappresentano, rispettivamente, l'induttanza per unità di lunghezza, la resistenza per unità di lunghezza, la conduttanza per unità di lunghezza e la capacità per unità di lunghezza. Siano $\vec{V}(x)$ e



$\vec{I}(x)$ rispettivamente le estensioni complesse della differenza di potenziale tra i due conduttori della linea e della corrente nella linea, entrambi calcolati alla distanza x dall'origine scelta; alla distanza $x + dx$, queste grandezze varranno rispettivamente $\vec{V}(x) + d\vec{V}(x)$ e $\vec{I}(x) + d\vec{I}(x)$. La differenza $d\vec{V}(x)$ tra la differenza di potenziale in x e in $x + dx$ è prodotta dalla caduta di tensione sull'impedenza $r dx + j\omega l dx$:

$$\vec{V}(x) - [\vec{V}(x) + d\vec{V}(x)] = (r dx + j\omega l dx) \vec{I}(x) ;$$

la differenza $d\bar{I}(x)$ fra la corrente in x e la corrente in $x + dx$ attraverso i conduttori è dovuta alla corrente che scorre nell'ammortenza $g dx + j\omega c dx$:

$$\bar{I}(x) - [\bar{I}(x) + d\bar{I}(x)] = (g dx + j\omega c dx) \bar{V}(x);$$

d'altra parte, siccome $d\bar{V}(x) = [d\bar{V}(x)/dx] dx$ e $d\bar{I}(x) = [d\bar{I}(x)/dx] dx$, si ha:

$$\frac{d\bar{V}(x)}{dx} = -(r + j\omega l) \bar{I}(x), \quad (9.1)$$

$$\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = -(g + j\omega c) \bar{V}(x). \quad (9.2)$$

Queste relazioni sono dette *Equazioni dei telegrafisti*. Derivando la (9.1) rispetto a x e sostituendo alla derivata di $\bar{I}(x)$ la sua espressione dalla (9.2), si trova:

$$\frac{d^2\bar{V}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \bar{V}(x), \quad (9.3)$$

dove si è indicato con γ la quantità complessa:

$$\gamma \equiv \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)}, \quad (9.4)$$

detta *costante di propagazione*. La soluzione generale dell'equazione differenziale (9.3) è data da:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-\gamma x} + \bar{V}_2 e^{\gamma x}, \quad (9.5)$$

dove \bar{V}_1 e \bar{V}_2 sono costanti complesse, determinate in base alle condizioni al contorno. Derivando rispetto a x questa soluzione e sostituendola nella (9.1), si trova:

$$\begin{aligned} \bar{I}(x) &= -\frac{1}{r + j\omega l} \frac{d\bar{V}(x)}{dx} = -\frac{1}{r + j\omega l} (-\gamma \bar{V}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \frac{\gamma}{r + j\omega l} (\bar{V}_1 e^{-\gamma x} - \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{\sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)}}{r + j\omega l} (\bar{V}_1 e^{-\gamma x} - \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}} (\bar{V}_1 e^{-\gamma x} - \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma x} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma x}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

dove si è posto:



Cavi coassiali per la trasmissione di segnali ad alta frequenza (GEPCO).

$$\bar{Z}_0 \equiv \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}; \quad (9.7)$$

questa quantità ha le dimensioni di un'impedenza e prende il nome di *impedenza caratteristica* della linea. Poiché γ è una quantità complessa, può essere espressa nella forma:

$$\gamma \equiv \alpha + j\beta, \quad (9.8)$$

dove α è detta *costante di attenuazione* e β *costante di fase*; sostituendo questa espressione di γ nelle relazioni (9.5) e (9.6), si ottiene:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \bar{V}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (9.9)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\alpha x} e^{j\beta x}. \quad (9.10)$$

Esempio: (*Linea infinita*) Per verificare che tali equazioni determinano soluzioni di tipo propagativo, consideriamo il caso in cui \bar{V}_2 è nullo, condizione corrispondente alla descrizione di una linea infinita, per la quale deve valere $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}(x) = 0$. Le equazioni (9.9) e (9.10) in questo caso diventano:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}, \quad (9.11)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}; \quad (9.12)$$

assumendo inoltre che il generatore sinusoidale sia posto in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento, ossia:

$$v(0, t) = V_0 \cos(\omega t),$$

la cui estensione complessa è:

$$\bar{V}(0) = V_0 e^{j\omega t}, \quad (9.13)$$

segue che il coefficiente \bar{V}_1 deve valere $V_0 e^{j\omega t}$, così, sostituendo nelle equazioni (9.11) e (9.12), si ottiene:

$$\bar{V}(x) = V_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (9.14)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{V_0}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}. \quad (9.15)$$

Prendendo la parte reale di ciascuna di queste espressioni, si ottengono, rispettivamente, la tensione istantanea $v(x, t)$ e la corrente istantanea $i(x, t)$ alla distanza x dal generatore:

$$v(x, t) = V_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = V_0 e^{-\alpha x} \cos(\beta x - \omega t),$$

$$i(x, t) = \frac{V_0}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \phi) = \frac{V_0}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} \cos(\beta x - \omega t + \phi).$$

dove Z_0 e ϕ sono rispettivamente, il modulo e l'argomento dell'impedenza caratteristica. Le espressioni precedenti descrivono onde di tensione e corrente che si propagano lungo la linea con numero d'onda pari alla costante di fase β , la cui ampiezza, per effetto del termine di attenuazione $e^{-\alpha x}$, diminuisce con la distanza. Poiché la direzione di propagazione dell'onda, x , è perpendicolare sia al vettore \vec{E} che al vettore \vec{H} , il modo di propagazione appena descritto

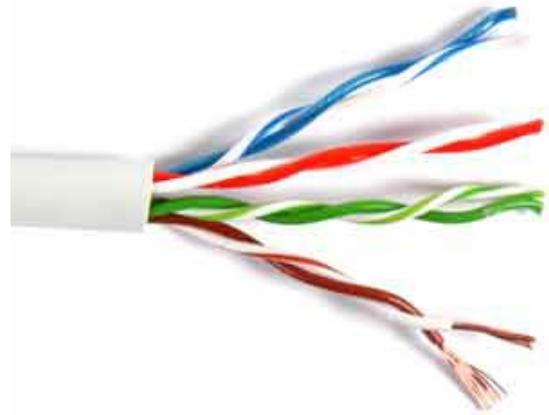
è detto *TEM* (*transverse electromagnetic mode*). Nel caso ideale di una linea senza perdite, per cui r e g sono nulli, la costante di attenuazione è nulla, mentre la costante di fase vale:

$$\beta = \omega \sqrt{lc}, \quad (9.16)$$

d'altra parte, per un cavo coassiale, l'induttanza per unità di lunghezza e la capacità per unità di lunghezza valgono, rispettivamente:

$$l = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right),$$

$$c = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)},$$



Linee bifilari per la trasmissione del segnale sulla rete ethernet.

in cui R_1 e R_2 rappresentano, rispettivamente, i raggi del conduttore interno ed esterno del cavo così, sostituendo nella (9.16) si ha:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}} = \omega \sqrt{\mu\epsilon}, \quad (9.17)$$

Dalla relazione (9.7) segue che se la linea è senza perdite l'impedenza caratteristica vale:

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}, \quad (9.18)$$

quindi è reale e il suo argomento ϕ è nullo¹; in particolare, per il cavo coassiale risulta:

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Poiché ϕ è zero, le espressioni della differenza di potenziale e della corrente lungo la linea, sono:

$$v(x, t) = V_0 \cos(\beta x - \omega t),$$

$$i(x, t) = \frac{V_0}{Z_0} \cos(\beta x - \omega t),$$

per cui in qualunque punto lungo la linea la tensione e la corrente sono in fase tra loro. La velocità di propagazione, dalla (8.8) e dalla (9.17) vale:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad (9.19)$$

che coincide con l'espressione (8.33). Dividendo membro a membro le relazioni (9.11) e (9.12) si ottiene l'espressione dell'impedenza $\bar{Z}(x)$ in corrispondenza di un generico punto lungo la linea, situato a distanza x dal generatore:

¹ Tale condizione si ottiene anche per pulsazioni sufficientemente elevate perché risulti $\omega l \gg r$ e $\omega c \gg g$ nella relazione (9.7).

$$\bar{Z}(x) = \frac{\bar{V}(x)}{\bar{I}(x)} = \frac{\bar{V}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}}{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}} = \bar{Z}_0;$$

pertanto, tale rapporto coincide con l'impedenza caratteristica della linea stessa quando la linea è infinita. In particolare tale proprietà è soddisfatta anche per $x=0$ così, se il generatore sinusoidale di forza elettromotrice $v_g(t)$ applicato all'ingresso della linea non sia ideale e presenti una impedenza interna \bar{Z}_g , poiché il rapporto $\bar{V}(0)/\bar{I}(0)$ vale \bar{Z}_0 , la condizione al contorno già espressa dalla (9.13) diventa in tale caso:

$$\bar{V}(0) = V_g e^{j\omega t} \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_g}.$$

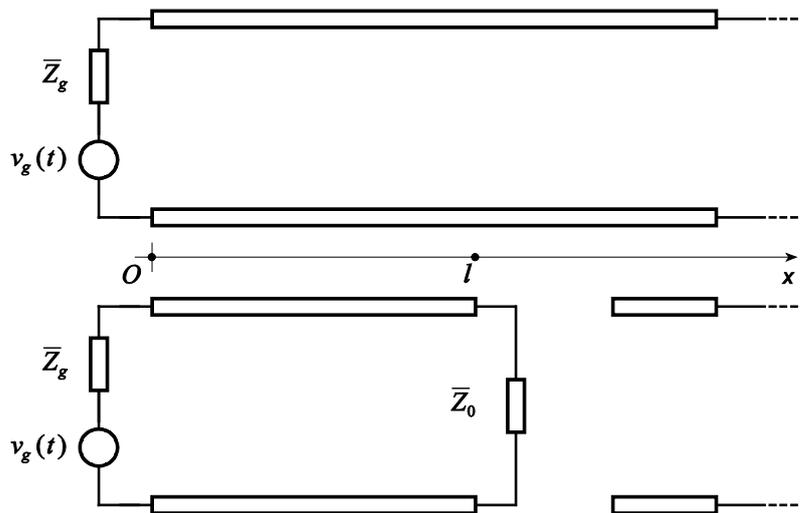
in cui

$$\bar{V}_g = V_g e^{j\omega t}$$

è l'estensione complessa della forza elettromotrice:

$$v_g = V_g \cos(\omega t).$$

Esempio: (*Linea adattata*) Consideriamo una linea infinita e supponiamo di tagliarla in corrispondenza di un generico punto posto a distanza l dal generatore (si veda la figura). La parte di linea a destra della sezione, essendo ancora infinita, per quanto visto presenta un'impedenza in ogni suo punto pari all'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 , compreso al suo ingresso. Ne segue che per quanto riguarda la parte di linea di lunghezza l situata a monte della sezione, la linea di lunghezza infinita posta a valle può essere sostituita con una impedenza concentrata pari a \bar{Z}_0 e gli andamenti della tensione e della corrente lungo il tratto di linea chiusa su tale carico sono gli stessi che si avrebbero qualora la linea fosse di lunghezza infinita. Una linea chiusa su un carico pari alla propria impedenza caratteristica è detta *adattata*. Pertanto, in una linea adattata, analogamente al caso delle linea infinita, l'impedenza in un qualsiasi punto vale \bar{Z}_0 ed, in particolare, se la linea è senza perdite, dalla (9.18) segue che tale impedenza è reale. Inoltre, essendo nulla l'onda riflessa, l'energia associata all'onda fluisce dal generatore al carico dove viene completamente assorbita.



Esempio: (*Espressioni delle costanti di attenuazione e di fase*) Confrontando la definizione (9.8) con la relazione (9.4), si ha:

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)},$$

ed elevando al quadrato ambo i membri segue:

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = rg - \omega^2 lc + j\omega(lg + rc),$$

da questa espressione, eguagliando separatamente fra loro le parti reali e le parti immaginarie, si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = rg - \omega^2 lc, \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}\omega(lg + rc), \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricavano le espressioni delle due costanti α e β :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)} + rg - \omega^2 lc \right]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)} - rg + \omega^2 lc \right]}.$$

In particolare, per linee con basse perdite, attraverso uno sviluppo in serie delle precedenti espressioni, si possono dedurre le relazioni approssimate:

$$\alpha \approx \frac{r}{2Z_0} + \frac{gZ_0}{2},$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{lc} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2\omega l} + \frac{g}{2\omega c} \right) \right].$$

Esempio: (*Fattore di velocità e lunghezza elettrica di una linea*) Si definisce *fattore di velocità* (*Velocity Factor*) VF di una linea di trasmissione il rapporto tra la velocità v di propagazione lungo la linea e la velocità della luce nel vuoto² u . Dalle relazioni (9.19) e (9.16) segue³:

$$VF = \frac{v}{u} = \frac{\omega}{c\beta} = \frac{\omega}{u\omega\sqrt{lc}} = \frac{1}{u\sqrt{lc}}.$$

Poiché la relatività impone che u sia la massima velocità di propagazione possibile, si ha che $0 < VF \leq 1$. Per un cavo coassiale, dalla (9.19) segue che il fattore di velocità vale $1/(u\sqrt{\mu\varepsilon})$ e siccome in un cavo coassiale μ coincide praticamente con μ_0 , il fattore di velocità dipende dalla costante dielettrica ε dell'isolante che separa i due conduttori che costituiscono la linea.

9.2 Coefficiente di riflessione

Consideriamo una linea di trasmissione di lunghezza l chiusa su un carico di impedenza generica \bar{Z}_L ; in tale caso i termini \bar{V}_1 e \bar{V}_2 nelle relazioni (9.5) e (9.6) saranno entrambi diversi da zero e pertanto la linea sarà sede oltre che di un'onda diretta, rappresentata attraverso i termini, rispettivamente di tensione e di corrente $\bar{V}_1 e^{-\gamma x}$ e $(\bar{V}_1/\bar{Z}_0)e^{-\gamma x}$, anche di un'onda riflessa, rappresentata dai termini, rispettivamente di tensione e di corrente $\bar{V}_2 e^{\gamma x}$ e $-(\bar{V}_2/\bar{Z}_0)e^{\gamma x}$. Nella pratica è spesso utile caratterizzare la linea a partire dal carico, pertanto, posto:

$$d \equiv l - x, \tag{9.20}$$

esprimendo le (9.5) e (9.6) in termini di questa nuova variabile, si ottiene:

² Il modulo della velocità della luce nel vuoto viene indicato con u per non confonderlo con la capacità distribuita della linea.

³ In relatività questo rapporto viene indicato comunemente con β , tuttavia in questo ambito si preferisce adoperare il consueto simbolo VF .

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_1 e^{-\gamma(l-d)} + \bar{V}_2 e^{\gamma(l-d)} = \bar{V}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma d} + \bar{V}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma d}, \quad (9.21)$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma(l-d)} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma(l-d)} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma l} e^{\gamma d} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma l} e^{-\gamma d}. \quad (9.22)$$

In particolare, in corrispondenza del carico $d = 0$ e relazioni precedenti diventano:

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_1 e^{-\gamma l} + \bar{V}_2 e^{\gamma l},$$

$$\bar{I}(0) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma l} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma l}.$$

Da tali espressioni si deduce che il termine $\bar{V}_1 e^{-\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della tensione presente sul carico dovuta alla sola onda diretta e il termine $\bar{V}_2 e^{\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della tensione presente sul carico dovuta alla sola onda riflessa; inoltre il termine $(\bar{V}_1/\bar{Z}_0) e^{-\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della corrente attraverso il carico dovuta alla sola onda diretta e il termine $-(\bar{V}_2/\bar{Z}_0) e^{\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della corrente attraverso il carico dovuta alla sola onda riflessa; posto quindi:

$$\bar{V}_{dl} \equiv \bar{V}_1 e^{-\gamma l}, \quad (9.23)$$

$$\bar{V}_{rl} \equiv \bar{V}_2 e^{\gamma l},$$

$$\bar{I}_{dl} \equiv \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma l} = \frac{\bar{V}_{dl}}{\bar{Z}_0} \quad (9.24)$$

$$\bar{I}_{rl} \equiv -\frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma l} = -\frac{\bar{V}_{rl}}{\bar{Z}_0} \quad (9.25)$$

le relazioni (9.21) e (9.22) diventano:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_{dl} e^{\gamma d} + \bar{V}_{rl} e^{-\gamma d}, \quad (9.26)$$

$$\bar{I}(d) = \bar{I}_{dl} e^{\gamma d} + \bar{I}_{rl} e^{-\gamma d}. \quad (9.27)$$

Si definisce *coefficiente di riflessione* di tensione sul carico il rapporto:

$$\bar{\Gamma}_L \equiv \frac{\bar{V}_{rl}}{\bar{V}_{dl}} = -\frac{\bar{I}_{rl}}{\bar{I}_{dl}}, \quad (9.28)$$

dove si è fatto uso delle (9.24) e (9.25). Adoperando tale grandezza, le relazioni (9.26) e (9.27) si esprimono come:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_{dl} \left(e^{\gamma d} + \frac{\bar{V}_{rl}}{\bar{V}_{dl}} e^{-\gamma d} \right) = \bar{V}_{dl} \left(e^{\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} \right), \quad (9.29)$$

$$\bar{I}(d) = \bar{I}_{dl} \left(e^{\gamma d} + \frac{\bar{I}_{rl}}{\bar{I}_{dl}} e^{-\gamma d} \right) = \bar{I}_{dl} \left(e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} \right) = \frac{\bar{V}_{dl}}{\bar{Z}_0} \left(e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} \right). \quad (9.30)$$

Esempio: (Coefficiente di riflessione sul carico) In corrispondenza del carico risulta $d = 0$, pertanto, valutando le espressioni (9.29) e (9.30) per tale ascissa, risulta:

$$\begin{aligned}\bar{V}(0) &= \bar{V}_{dl}(1 + \bar{\Gamma}_L), \\ \bar{I}(0) &= \frac{\bar{V}_{dl}}{\bar{Z}_0}(1 - \bar{\Gamma}_L).\end{aligned}$$

Facendo il rapporto membro a membro di queste espressioni, poiché $\bar{V}(0)/\bar{I}(0)$ è pari all'impedenza del carico \bar{Z}_L , risulta:

$$\frac{\bar{V}(0)}{\bar{I}(0)} = \bar{Z}_L = \frac{\bar{V}_{dl}(1 + \bar{\Gamma}_L)}{\frac{\bar{V}_{dl}}{\bar{Z}_0}(1 - \bar{\Gamma}_L)} = \bar{Z}_0 \frac{1 + \bar{\Gamma}_L}{1 - \bar{\Gamma}_L},$$

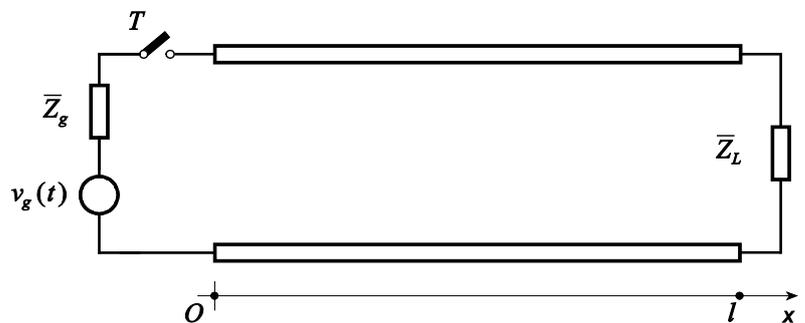
da cui segue:

$$\bar{\Gamma}_L = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0}. \quad (9.31)$$

Se $\bar{Z}_L \rightarrow \infty$, cioè se l'estremità della linea opposta al generatore è aperta, $\bar{\Gamma}_L = 1$ e dalla (9.28) segue che $\bar{V}_{rl} = \bar{V}_{dl}$ e $\bar{I}_{rl} = -\bar{I}_{dl}$, cioè l'onda di tensione riflessa assume lo stesso valore e la stessa polarità di quella incidente e l'onda di corrente riflessa assume lo stesso valore ma verso opposto di quella incidente; se $\bar{Z}_L = k\bar{Z}_0$, con $1 < k < \infty$, allora $0 < \bar{\Gamma}_L < 1$ e l'onda di tensione riflessa ha ampiezza inferiore di quella incidente ma la medesima polarità, l'onda di corrente riflessa ha ampiezza inferiore di quella incidente ma polarità opposta; se $\bar{Z}_L = \bar{Z}_0$, cioè nel caso di linea adattata, $\bar{\Gamma}_L = 0$, e non si hanno onde riflesse, come d'altra parte già visto; quando $\bar{Z}_L = k\bar{Z}_0$, con $0 < k < 1$, allora $-1 < \bar{\Gamma}_L < 0$, e l'onda di tensione riflessa ha ampiezza inferiore di quella incidente ma polarità opposta e l'onda di corrente ha ampiezza inferiore di quella incidente e la medesima polarità; se $\bar{Z}_L = 0$, cioè se i due terminali dell'estremità della linea opposta al generatore sono collegati tra loro, $\bar{\Gamma}_L = -1$ e dalla (9.28) segue $\bar{V}_{rl} = -\bar{V}_{dl}$ e $\bar{I}_{rl} = \bar{I}_{dl}$, cioè l'onda di tensione riflessa assume lo stesso valore ma polarità opposta di quella incidente e l'onda di corrente riflessa assume lo stesso valore e lo stesso verso di quella incidente.

9.3 Soluzione generale delle equazioni dei telegrafisti

Per stabilire le costanti complesse \bar{V}_1 e \bar{V}_2 della (9.5) consideriamo il transitorio che ha luogo nella linea chiusa su un carico generico, all'istante della connessione del generatore all'estremo opposto. Con riferimento alla figura, a partire dalla chiusura del tasto T e fino a che l'ingresso non è raggiunto dall'onda riflessa dal carico, la linea appare al suo ingresso come se fosse di lunghezza infinita essendo sede della sola onda diretta, per cui la sua impedenza di ingresso è pari all'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 .



Pertanto la tensione presente all'ingresso della linea in tale intervallo è pari a $\bar{V}_g \bar{Z}_0 / (\bar{Z}_g + \bar{Z}_0)$.

Questa tensione si propaga lungo la linea ed in particolare, a distanza x dal generatore vale:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma x}.$$

Al tempo l/v tale onda raggiunge il carico all'ascissa $x=l$, dove si produce un'onda riflessa con coefficiente di riflessione dato dalla (9.31), che si propaga dal carico verso il generatore. Alla distanza x dal generatore, cioè alla distanza d dal carico data dalla (9.20), la tensione riflessa vale:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma(l-x)} = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \bar{\Gamma}_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}.$$

Questa onda al tempo $2l/v$ si presenta al generatore in $x=0$ e, se l'impedenza \bar{Z}_g è diversa da \bar{Z}_0 , si produce una riflessione, ovvero una seconda onda diretta che procede dal generatore verso il carico. Alla distanza x dal generatore la tensione dovuta alla seconda onda diretta è:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_G e^{-\gamma x} = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} e^{-\gamma x},$$

dove $\bar{\Gamma}_G$ rappresenta il coefficiente di riflessione sul generatore. Procedendo in questa maniera si ottiene una serie infinita di riflessioni successive che determinano, in corrispondenza dell'ascissa x lungo la linea, la tensione:

$$\begin{aligned} \bar{V}(x) &= \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \left(e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} e^{-\gamma x} + \dots \right) = \\ &= \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \left\{ \left(e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x} \right) \left[1 + \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} + \left(\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} \right)^2 + \dots \right] \right\} = \\ &= \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \left(e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} \right)^k; \end{aligned}$$

la serie che compare in questa espressione è convergente essendo $|\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}| < 1$ e risulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} \right)^k = \frac{1}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}$$

per cui, sostituendo nell'espressione precedente, si trova:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x}}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}.$$

Confrontando tale relazione con la (9.5) si deduce che in generale:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{1}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}, \quad (9.32)$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{\bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l}}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}.$$

Sostituendo tali quantità nelle relazioni (9.5) e (9.6) si ottiene la soluzione generale delle equazioni dei telegrafisti.

Esempio: (*Coefficiente di riflessione sul generatore*) A partire dall'istante $2l/v$ dalla chiusura dell'interruttore T , in corrispondenza dell'ingresso della linea si osservano la tensione iniziale, $\bar{V}_g \bar{Z}_0 / (\bar{Z}_g + \bar{Z}_0)$, la tensione \bar{V}_1 prodotta in corrispondenza del generatore e la tensione \bar{V}_2 riflessa dal carico, dove \bar{V}_1 vale in generale $\bar{V}_2 \bar{\Gamma}_G$:

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_2 (1 + \bar{\Gamma}_G); \quad (9.33)$$

analogamente, per la corrente in corrispondenza dell'ingresso della linea risulta:

$$\bar{I}(0) = \frac{\bar{V}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} = \frac{\bar{V}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} (1 - \bar{\Gamma}_G). \quad (9.34)$$

D'altra parte, all'ingresso della linea si ha:

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_g - \bar{Z}_g \bar{I}(0),$$

per cui, sostituendo $\bar{V}(0)$ e $\bar{I}(0)$ rispettivamente dalle (9.33) e (9.34), si ottiene:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_2 (1 + \bar{\Gamma}_G) = \bar{V}_g - \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_2 \frac{\bar{Z}_g}{\bar{Z}_0} (1 - \bar{\Gamma}_G),$$

da cui segue:

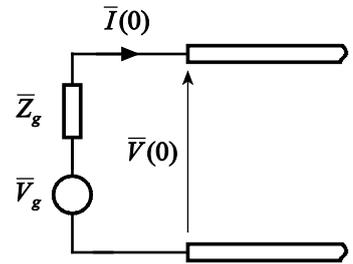
$$\bar{\Gamma}_G = \frac{\bar{Z}_g - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0}.$$

Pertanto la formazione di un'onda riflessa in corrispondenza dell'ingresso della linea è determinata dal valore dell'impedenza interna del generatore \bar{Z}_g e, in particolare, se tale impedenza è uguale all'impedenza caratteristica della linea \bar{Z}_0 , non si originano riflessioni per $x = 0$.

9.4 Onde stazionarie

Mentre in una linea adattata le ampiezze della tensione e della corrente diminuiscono esponenzialmente con l'allontanarsi dal generatore per effetto del termine $e^{-\alpha x}$ o, nel caso di linea con perdite trascurabili, restano praticamente costanti lungo tutta la linea, in presenza di disadattamento il carico riflette una parte dell'energia incidente, determinando un'onda riflessa. In questo caso, per effetto dell'interferenza tra l'onda diretta e quella riflessa, le ampiezze della tensione e della corrente variano con periodicità lungo la linea; tale combinazione è detta *onda stazionaria*.

Esempio: Consideriamo per semplicità il caso in cui la linea sia senza perdite. Facendo uso delle relazioni (9.31) e (9.23) nell'espressione (9.29), si ottiene:



$$\begin{aligned}\bar{V}(d) &= \bar{V}_{dl} (e^{\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}) = \bar{V}_1 e^{-j\beta l} \left(e^{j\beta d} + \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} e^{-j\beta d} \right) = \frac{\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} (\bar{Z}_L e^{j\beta d} + \bar{Z}_0 e^{j\beta d} + \bar{Z}_L e^{-j\beta d} - \bar{Z}_0 e^{-j\beta d}) = \\ &= \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} \left(\bar{Z}_L \frac{e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}}{2} + j\bar{Z}_0 \frac{e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}}{2j} \right) = \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} [\bar{Z}_L \cos(\beta d) + j\bar{Z}_0 \sin(\beta d)].\end{aligned}$$

Assumiamo che la linea sia adattata all'ingresso, cioè $\bar{Z}_g = \bar{Z}_0$; allora $\bar{\Gamma}_G = 0$ e, dalla (9.32) segue:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{1}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}} = \frac{\bar{V}_g}{2} = \frac{V_g}{2} e^{j\omega t}. \quad (9.35)$$

Sostituendo tale identità nell'espressione precedente, nell'ipotesi che sia l'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 che quella di carico \bar{Z}_L siano entrambe resistive, si ottiene:

$$\bar{V}(d) = \frac{V_g e^{j(\omega t - \beta l)}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} [\bar{Z}_L \cos(\beta d) + j\bar{Z}_0 \sin(\beta d)] = \frac{V_g e^{j(\omega t - \beta l + \phi)}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} \sqrt{\bar{Z}_L^2 \cos^2(\beta d) + \bar{Z}_0^2 \sin^2(\beta d)}, \quad (9.36)$$

dove ϕ è la fase del numero complesso $\bar{Z}_L \cos(\beta d) + j\bar{Z}_0 \sin(\beta d)$. Prendendone la parte reale si ha:

$$v(d, t) = \frac{V_g \sqrt{\bar{Z}_L^2 \cos^2(\beta d) + \bar{Z}_0^2 \sin^2(\beta d)}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} \cos(\omega t - \beta l + \phi). \quad (9.37)$$

Procedendo in maniera analoga per la corrente, dalla (9.30) e dalla (9.35) segue:

$$\begin{aligned}\bar{I}(d) &= \frac{\bar{V}_{dl}}{\bar{Z}_0} (e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-j\beta l} \left(e^{j\beta d} - \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} e^{-j\beta d} \right) = \\ &= \frac{\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} (\bar{Z}_L e^{j\beta d} + \bar{Z}_0 e^{j\beta d} - \bar{Z}_L e^{-j\beta d} + \bar{Z}_0 e^{-j\beta d}) = \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} \left(\bar{Z}_0 \frac{e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}}{2} + j\bar{Z}_L \frac{e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}}{2j} \right) = \\ &= \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} [\bar{Z}_0 \cos(\beta d) + j\bar{Z}_L \sin(\beta d)] = \frac{V_g e^{j(\omega t - \beta l + \phi')}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} \sqrt{\bar{Z}_L^2 \sin^2(\beta d) + \bar{Z}_0^2 \cos^2(\beta d)}.\end{aligned}$$

dove ϕ' è la fase del numero complesso $\bar{Z}_L \sin(\beta d) + j\bar{Z}_0 \cos(\beta d)$. Infine, prendendone la parte reale si ha:

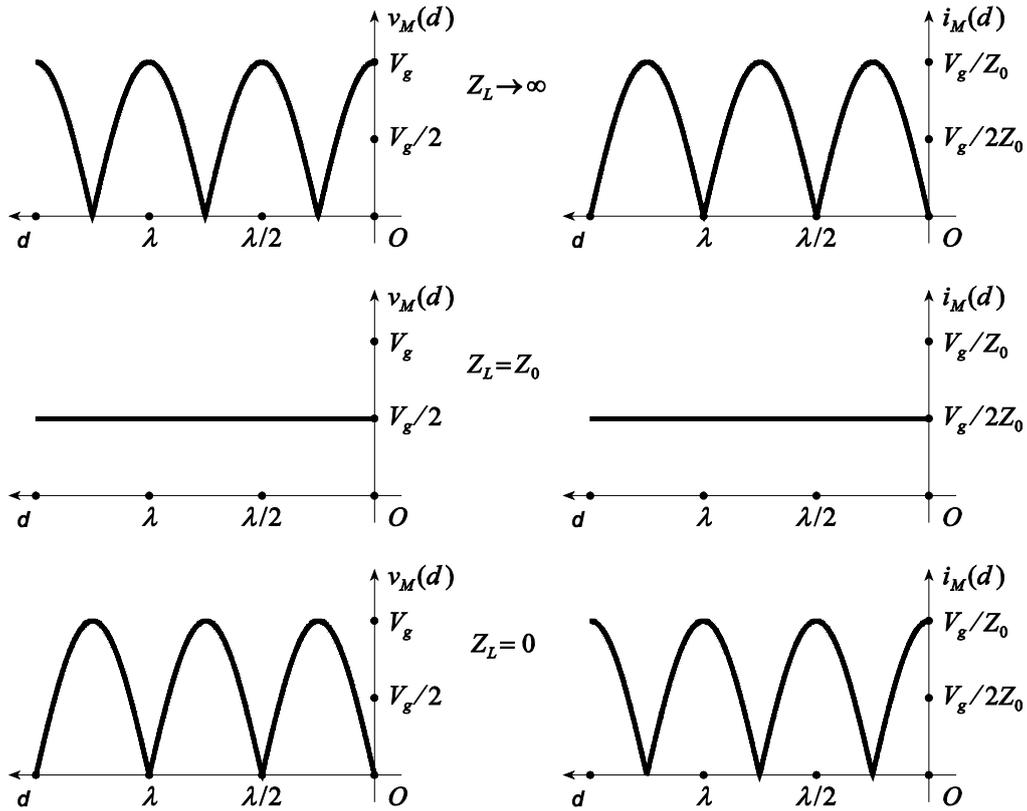
$$i(d, t) = \frac{V_g \sqrt{\bar{Z}_L^2 \sin^2(\beta d) + \bar{Z}_0^2 \cos^2(\beta d)}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} \cos(\omega t - \beta l + \phi'). \quad (9.38)$$

Nella figura seguente sono mostrati gli andamenti delle ampiezze:

$$v_M(d) \equiv \frac{V_g \sqrt{\bar{Z}_L^2 \cos^2(\beta d) + \bar{Z}_0^2 \sin^2(\beta d)}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0}, \quad (9.39)$$

$$i_M(d) \equiv \frac{V_g \sqrt{\bar{Z}_L^2 \sin^2(\beta d) + \bar{Z}_0^2 \cos^2(\beta d)}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)}, \quad (9.40)$$

rispettivamente, di corrente e tensione lungo la linea in corrispondenza di valori notevoli dell'impedenza caratteristica.



Le relazioni (9.37) e (9.38) sono espresse attraverso il prodotto di due funzioni reali, una della sola distanza d e l'altra del solo tempo t e pertanto non sono rappresentative di un fenomeno propagatorio per cui sono dette onde stazionarie. I punti della linea in cui l'ampiezza della tensione è massima si chiamano *ventri* della tensione, quelli in cui è nulla sono detti *nodi*; analogamente per la corrente.

Esempio: (Linea aperta) Consideriamo la circostanza in cui per una linea, nelle stesse condizioni dell'esempio precedente, risulti $Z_L \rightarrow \infty$, ovvero i due terminali dell'estremità opposta al generatore sono aperti. In questo caso, dalle relazioni (9.39) e (9.40) si ha:

$$v_M(d) \equiv V_g \cos(\beta d),$$

$$i_M(d) \equiv \frac{V_g}{Z_0} \sin(\beta d),$$

per cui i nodi della tensione si hanno per $d = n\pi/\beta + \pi/(2\beta)$ cioè, dalla (9.39), quando $d = (\lambda/2)(n+1/2)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$; i nodi della corrente si hanno per $d = n\pi/\beta$, cioè, dalla (9.40), quando $d = n\lambda/2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

Esempio: (Linea cortocircuitata) Consideriamo la circostanza in cui per una linea, nelle stesse condizioni dell'esempio precedente, risulti $Z_L = 0$, ovvero i due terminali dell'estremità opposta al generatore sono collegati tra loro. In questo caso, dalle relazioni (9.39) e (9.40) si ha:

$$v_M(d) \equiv V_g \sin(\beta d),$$

$$i_M(d) \equiv \frac{V_g}{Z_0} \cos(\beta d),$$

per cui i nodi della tensione si hanno per $d = n\pi/\beta$ cioè, dalla (9.39), quando $d = n\lambda/2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$; i nodi della corrente si hanno per $d = n\pi/\beta + \pi/(2\beta)$, cioè, dalla (9.39), quando $d = (\lambda/2)(n+1/2)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$

Nella relazione (9.39) supponiamo che risulti $Z_L < Z_0$; allora si avrà un minimo $|V|_{min}$ dell'ampiezza $v_M(d)$ in corrispondenza del carico, quando $d = 0$, con:

$$|V|_{min} = V_g \frac{Z_L}{Z_L + Z_0}$$

e un massimo $|V|_{max}$ quando βd è pari a $\pi/2$, con:

$$|V|_{max} = V_g \frac{Z_0}{Z_L + Z_0}.$$

Si definisce *rapporto di onde stazionarie di tensione* (*voltage standing wave ratio, VSWR*) il rapporto:

$$VSWR \equiv \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = V_g \frac{Z_0}{Z_L + Z_0} \frac{Z_L + Z_0}{V_g Z_L} = \frac{Z_0}{Z_L}. \quad (9.41)$$

Siccome $Z_L < Z_0$ risulta $VSWR > 1$. Se $Z_L > Z_0$ si ha un minimo $|V|_{min}$ di $v_M(d)$ per βd pari a $\pi/2$ e risulta:

$$|V|_{min} = V_g \frac{Z_0}{Z_L + Z_0}$$

e un massimo per $d = 0$ con:

$$|V|_{max} = V_g \frac{Z_L}{Z_L + Z_0},$$

pertanto in questo caso:

$$VSWR \equiv \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} = V_g \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} \frac{Z_L + Z_0}{V_g Z_0} = \frac{Z_L}{Z_0}. \quad (9.42)$$

Siccome $Z_L > Z_0$ risulta $VSWR > 1$. Se l'impedenza di carico della linea Z_L è reale, la misura del rapporto tra i valori massimi e minimi della tensione lungo la linea, ovvero di $VSWR$, fornisce un metodo rapido per determinarne il valore, quando è nota l'impedenza caratteristica della linea Z_0 .

Supponiamo che Z_L sia reale, se $Z_L < Z_0$ dalle relazioni (9.31) e (9.41) segue:

$$VSWR = \frac{1 - \Gamma_L}{1 + \Gamma_L},$$

se $Z_L > Z_0$ dalle relazioni (9.31) e (9.42) segue:

$$VSWR = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}.$$

Entrambi in casi possono essere descritti dalla relazione

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \quad (9.43)$$

che lega il rapporto di onde stazionarie di tensione al coefficiente di riflessione sul carico e che è possibile provare mantenga la stessa espressione anche nella circostanza in cui Z_L è complessa. Se la linea è adattata Γ_L è nullo e il rapporto di onde stazionarie di tensione è unitario, pertanto, in generale risulta $VSWR \geq 1$. La relazione precedente può essere invertita come segue

$$|\Gamma_L| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1},$$

consentendo la determinazione dell'ampiezza del coefficiente di riflessione sul carico a partire dalla conoscenza del rapporto di onde stazionarie di tensione.

Supponiamo che la linea sia ideale e il carico sia resistivo, allora il coefficiente di riflessione di tensione sul carico (9.28) si può esprimere in termini della potenza riflessa dal carico P_{rL} e della potenza diretta sul carico P_{dL} come:

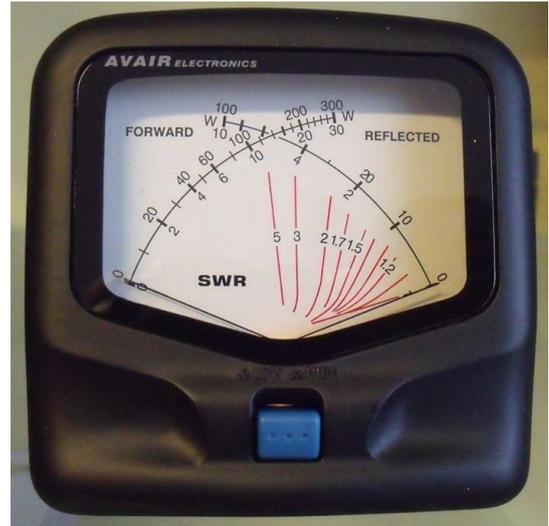
$$\Gamma_L = \frac{V_{rL}}{V_{dL}} = \frac{\sqrt{P_{rL} Z_L}}{\sqrt{P_{dL} Z_L}} = \sqrt{\frac{P_{rL}}{P_{dL}}}$$

così, sostituendo nella (9.43) è possibile dedurre l'espressione del rapporto di onde stazionarie di tensione in termini delle potenze riflesse dal carico e dirette al carico:

$$VSWR = \frac{1 + \sqrt{\frac{P_{rL}}{P_{dL}}}}{1 - \sqrt{\frac{P_{rL}}{P_{dL}}}} = \frac{\sqrt{P_{dL}} + \sqrt{P_{rL}}}{\sqrt{P_{dL}} - \sqrt{P_{rL}}} = \frac{P_{dL} + P_{rL} + 2\sqrt{P_{dL}P_{rL}}}{P_{dL} - P_{rL}}.$$

9.5 Impedenza in un punto generico della linea

L'impedenza in un punto della linea posto a distanza d dal carico si ottiene dividendo membro a membro le relazioni (9.29) e (9.30):



Strumento per la misura del rapporto di onde stazionarie di tensione (*SWR meter*). Lo strumento è dotato di due scale, una per la misura della potenza diretta (a sinistra) e l'altra della potenza riflessa (a destra). L'incrocio tra i due indici, sulla scala in rosso, permette di valutare il rapporto di onde stazionarie di tensione (*AVAIR Electronics*).

$$\bar{Z}(d) = \frac{\bar{V}(d)}{\bar{I}(d)} = \frac{\bar{V}_{dL}(e^{\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d})}{\bar{V}_{dL}(e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d})} = \bar{Z}_0 \frac{e^{\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}}{e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}}; \quad (9.44)$$

sostituendo a $\bar{\Gamma}_L$ l'espressione (9.31) si ha:

$$\begin{aligned} \bar{Z}(d) &= \bar{Z}_0 \frac{e^{-\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}}{e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}} = \bar{Z}_0 \frac{e^{\gamma d} + \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} e^{-\gamma d}}{e^{\gamma d} - \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} e^{-\gamma d}} = \\ &= \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L e^{\gamma d} + \bar{Z}_0 e^{\gamma d} + \bar{Z}_L e^{-\gamma d} - \bar{Z}_0 e^{-\gamma d}}{\bar{Z}_L e^{\gamma d} + \bar{Z}_0 e^{\gamma d} - \bar{Z}_L e^{-\gamma d} + \bar{Z}_0 e^{-\gamma d}} = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L (e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}) + \bar{Z}_0 (e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})}{\bar{Z}_0 (e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}) + \bar{Z}_L (e^{\gamma d} - e^{-\gamma d})} = \\ &= \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L \cosh(\gamma d) + \bar{Z}_0 \sinh(\gamma d)}{\bar{Z}_0 \cosh(\gamma d) + \bar{Z}_L \sinh(\gamma d)} = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0 \tanh(\gamma d)}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_L \tanh(\gamma d)}. \end{aligned} \quad (9.45)$$

Ponendo $d \equiv l$, attraverso tale relazione si può stabilire l'impedenza di ingresso della linea.

$$\bar{Z}_{in} = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0 \tanh(\gamma l)}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_L \tanh(\gamma l)}.$$

Esempio: (*Linea senza perdite*) Se la linea è senza perdite l'espressione (9.44) risulta semplificata, infatti, se γ vale $j\beta$ si ha:

$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{e^{j\beta d} + \bar{\Gamma}_L e^{-j\beta d}}{e^{j\beta d} - \bar{\Gamma}_L e^{-j\beta d}},$$

e l'espressione (9.45) diventa:

$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0 \tanh(j\beta d)}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_L \tanh(j\beta d)} = \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + j\bar{Z}_0 \tan(\beta d)}{\bar{Z}_0 + j\bar{Z}_L \tan(\beta d)}. \quad (9.46)$$

Da tale relazione si deduce che $\bar{Z}(d)$ è una funzione periodica della distanza d e, siccome $\tan(\beta d)$ è una funzione periodica di periodo π , anche $\bar{Z}(d)$ manifesta la medesima periodicità; in particolare, poiché dalla (8.9) β vale $2\pi/\lambda$, se ci si sposta lungo la linea di un multiplo intero di $\lambda/2$ l'impedenza $\bar{Z}(d)$ assume lo stesso valore. Quindi, a distanze dal carico \bar{Z}_L uguali a multipli interi di $\lambda/2$ l'impedenza ha il medesimo valore dell'impedenza di carico.

Il coefficiente di riflessione di tensione in un punto della linea posto a distanza d dal carico si valuta calcolando il rapporto tra la tensione riflessa e la tensione diretta nella (9.26), facendo uso della definizione (9.28):

$$\bar{\Gamma}(d) = \frac{\bar{V}_{rL} e^{-\gamma d}}{\bar{V}_{dL} e^{\gamma d}} = \bar{\Gamma}_L e^{-2\gamma d}; \quad (9.47)$$

per ricavarne l'espressione in termini di impedenze, è possibile sviluppare la relazione (9.44); infatti moltiplicando ambo i membri di tale relazione per $e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}$ si ottiene:

$$\bar{Z}(d)e^{\gamma d} - \bar{Z}(d)\bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} = \bar{Z}_0 e^{\gamma d} + \bar{Z}_0 \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d},$$

quindi moltiplicando ambo i membri per $e^{-\gamma d}$ si ha:

$$\bar{Z}(d) - \bar{Z}(d)\bar{\Gamma}_L e^{-2\gamma d} = \bar{Z}_0 + \bar{Z}_0 \bar{\Gamma}_L e^{-2\gamma d}.$$

Infine, adoperando la relazione (9.47), segue:

$$\bar{\Gamma}(d) = \frac{\bar{Z}(d) - \bar{Z}_0}{\bar{Z}(d) + \bar{Z}_0}.$$

Da tale relazione è possibile esprimere l'impedenza $\bar{Z}(d)$ attraverso il coefficiente di riflessione (9.47) e l'impedenza caratteristica come:

$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{1 + \bar{\Gamma}(d)}{1 - \bar{\Gamma}(d)}. \quad (9.48)$$

Esempio: (Linea di lunghezza $\lambda/2$) Per quanto visto una linea di lunghezza uguale a $\lambda/2$ presenta un'impedenza di ingresso pari all'impedenza di carico \bar{Z}_L . Inoltre, la tensione in corrispondenza del carico per una linea di lunghezza $\lambda/2$ in cui sia l'impedenza caratteristica che quella di carico sono entrambe resistive, dalla relazione (9.36) è:

$$\bar{V}(0) = V_g e^{j(\omega t - \pi)} \frac{Z_L}{Z_L + Z_0}$$

e la tensione di ingresso vale:

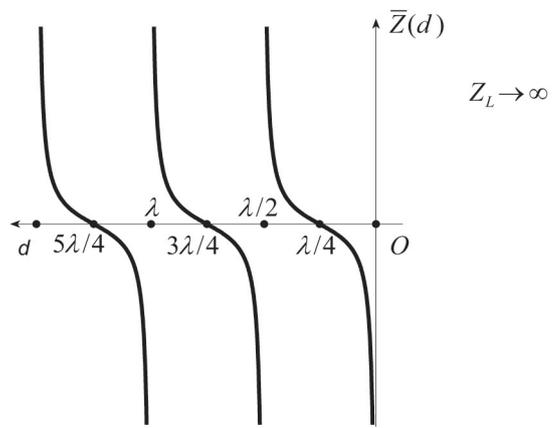
$$\bar{V}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = -V_g e^{j(\omega t - \pi)} \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} = V_g e^{j\omega t} \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} = \bar{V}(0) e^{j\pi}.$$

Cioè per una linea di lunghezza pari a $\lambda/2$ la tensione d'ingresso ha lo stesso modulo della tensione presente sul carico ma è in opposizione di fase rispetto a quest'ultima.

Esempio: (Linea di lunghezza $\lambda/4$) Facendo il limite per $d \rightarrow \lambda/4$ nell'espressione (9.46) si ottiene:

$$\bar{Z}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \lim_{d \rightarrow \frac{\lambda}{4}} \bar{Z}_0 \frac{\bar{Z}_L + j\bar{Z}_0 \tan(\beta d)}{\bar{Z}_0 + j\bar{Z}_L \tan(\beta d)} = \lim_{d \rightarrow \frac{\lambda}{4}} \bar{Z}_0 \frac{\frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_0} + j \tan(\beta d)}{\tan(\beta d) + j \frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_0}} = \frac{Z_0^2}{\bar{Z}_L}.$$

Questa impedenza è resistiva se lo è l'impedenza di carico \bar{Z}_L , è una impedenza capacitiva se \bar{Z}_L è induttiva e viceversa. Pertanto una linea di lunghezza pari a $\lambda/4$ può essere adoperata come trasformatore di impedenza e in tale applicazione viene denominata *trasformatore in quarto d'onda*. Poiché in assenza di perdite l'impedenza d'ingresso non viene modificata aggiungendo tratti di lunghezza multipla di $\lambda/2$, queste caratteristiche continuano a valere per linee di lunghezza pari a multipli dispari di $\lambda/4$.



Esempio: (*Linea aperta*) Se nella relazione (9.46) si pone $Z_L \rightarrow \infty$, si ha:

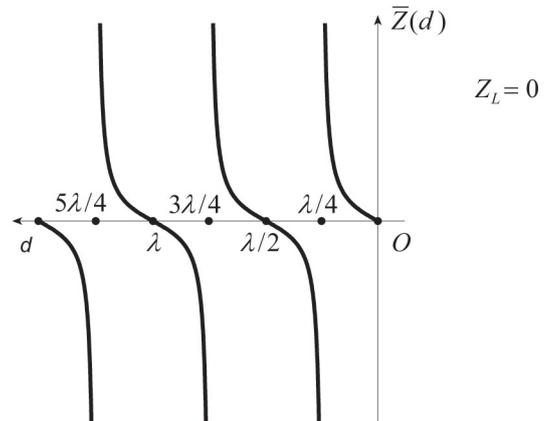
$$\bar{Z}(d) = \bar{Z}_0 \frac{1}{j \tan(\beta d)} = -j\bar{Z}_0 \cot(\beta d).$$

Se l'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 è resistiva, l'impedenza in qualsiasi punto della linea è puramente reattiva e, in particolare, nell'intervallo di valori di d compresi tra 0 per $\lambda/2$ risulta capacitiva per $0 < d < \lambda/4$, si annulla quando d è pari a $\lambda/4$ ed è induttiva per $\lambda/4 < d < \lambda/2$

Esempio: (*Linea cortocircuitata*) Se nella relazione (9.46) si pone $Z_L = 0$, si ha:

$$\bar{Z}(d) = j\bar{Z}_0 \tan(\beta d).$$

Se l'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 è resistiva, l'impedenza in qualsiasi punto della linea è puramente reattiva e, in particolare, nell'intervallo di valori di d compresi tra 0 per $\lambda/2$ risulta induttiva per $0 < d < \lambda/4$, capacitiva per $\lambda/4 < d < \lambda/2$ e si annulla quando d è pari a $\lambda/2$.



9.6 Carta di Smith

Gli esempi precedenti mettono in luce come a frequenza fissata, attraverso la variazione della lunghezza e dell'impedenza di carico, è possibile ottenere un ampio insieme di valori dell'impedenza di ingresso di una linea di trasmissione; da queste considerazioni segue la possibilità di far operare linea di trasmissione come un elemento di circuito. Anche nell'ipotesi di linea senza perdite e con impedenza caratteristica e di carico resistive, l'applicazione diretta della relazione (9.45) comporta in genere difficoltà di calcolo a causa della natura complicata della relazione stessa. Per aggirare questa problematicità è possibile adoperare un metodo grafico proposto dall'ingegnere statunitense Phillip H. Smith nel 1939.

Consideriamo una linea di trasmissione senza perdite di impedenza caratteristica resistiva Z_0 ; in queste circostanze il coefficiente di riflessione di tensione in un punto della linea posto a distanza d dal carico⁴ $\bar{\Gamma}$ si ottiene ponendo γ uguale a $j\beta$ nella relazione (9.47):

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_L e^{-j2\beta d}. \quad (9.49)$$

Esprimendo in forma esponenziale il coefficiente di riflessione sul carico (9.28) come:

$$\bar{\Gamma}_L = \Gamma e^{j\psi_L},$$

dove Γ e ψ_L sono rispettivamente il modulo e la fase di $\bar{\Gamma}_L$, la relazione (9.49) diventa:

$$\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_L e^{-j2\beta d} = \Gamma e^{j\psi_L} e^{-j2\beta d} = \Gamma e^{-j(2\beta d - \psi_L)} = \Gamma e^{j\psi}, \quad (9.50)$$

⁴ Per comodità sono state omesse le dipendenze dalla distanza d dal carico.

dove si è posto

$$\psi \equiv \psi_L - 2\beta d. \quad (9.51)$$

Pertanto, attraverso la relazione (9.50) il coefficiente di riflessione in un punto generico della linea posto a distanza d dal carico viene espresso in termini del modulo Γ di $\bar{\Gamma}_L$ e della fase ψ definita dalla relazione (9.51). Lo spostamento lungo la linea determina la variazione della sola fase ψ mentre il modulo del coefficiente di riflessione $\bar{\Gamma}$ si mantiene costante e pari al valore del modulo del coefficiente di riflessione sul carico $\bar{\Gamma}_L$. Inoltre il coefficiente di riflessione di tensione $\bar{\Gamma}$ può essere espresso nella forma algebrica

$$\bar{\Gamma} = p + jq \quad (9.52)$$

per cui

$$p^2 + q^2 = \Gamma^2. \quad (9.53)$$

Definiamo l'*impedenza normalizzata* \bar{z} il rapporto tra l'impedenza \bar{Z} in un punto della linea posto a distanza d dal carico (9.44) e impedenza caratteristica della linea; pertanto, dalla relazione (9.48) segue:

$$\bar{z} \equiv \frac{\bar{Z}}{Z_0} = \frac{1 + \bar{\Gamma}}{1 - \bar{\Gamma}}. \quad (9.54)$$

Sostituendo l'espressione di $\bar{\Gamma}$ fornita dalla (9.52) nella relazione (9.54) si ha:

$$\bar{z} = \frac{1 + \bar{\Gamma}}{1 - \bar{\Gamma}} = \frac{1 + (p + jq)}{1 - (p + jq)}$$

quindi, esprimendo \bar{z} in forma algebrica, questa relazione diventa:

$$\bar{z} = r + jx = \frac{(1 + p) + jq}{(1 - p) - jq} \quad (9.55)$$

Le parti reale ed immaginaria di \bar{z} soddisfano le identità seguenti:

$$\left(p - \frac{r}{1+r}\right)^2 + q^2 = \frac{1}{(1+r)^2}, \quad (9.56)$$

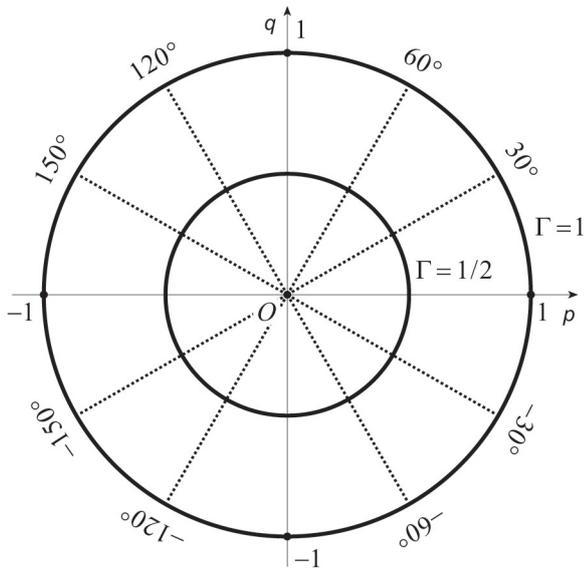
$$(p-1)^2 + \left(q - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \quad (9.57)$$

Fissati Γ , r e x le equazioni (9.53), (9.56) e (9.57), descrivono delle circonferenze nel piano pq .

Il coefficiente di riflessione Γ nel piano pq viene rappresentato da un vettore che spicca dall'origine ed ha estremo libero nel punto di coordinate cartesiane (p, q) indicato dalla relazione



Phillip Hagar Smith



(9.52) o dalle coordinate polari (Γ, ψ) espresse dalla relazione (9.50). Poiché $|\Gamma| \leq 1$, siccome l'ampiezza dell'onda riflessa è minore o uguale a quella dell'onda diretta, le circonferenze descritte dall'equazione (9.53) sono contenute nella regione del piano pq circoscritte dal cerchio di raggio unitario. L'angolo ψ rappresenta la fase del coefficiente di riflessione Γ in un punto d lungo la linea e viene espresso in gradi.

Esempio: (*Linea cortocircuitata*) Per una linea cortocircuitata $Z_L = 0$ e dalla relazione (9.31) segue $\Gamma_L = -1$ ovvero $\Gamma = 1$ e $\psi_L = 180^\circ$; in corrispondenza del carico, per $d = 0$ dalla (9.51) segue $\psi = \psi_L$, pertanto il punto corrispondente nella carta di Smith è quello di coordinate $(-1, 0)$. Attraverso la relazione

(9.51) è possibile stabilire i valori di ψ per $\psi_L = 180^\circ$ nelle altre posizioni lungo la linea.

In un punto distante $d' = d + l$ dal carico, ovvero se ci si sposta verso il generatore di un tratto l a partire dal punto a distanza d dal carico, il coefficiente di riflessione assume il valore:

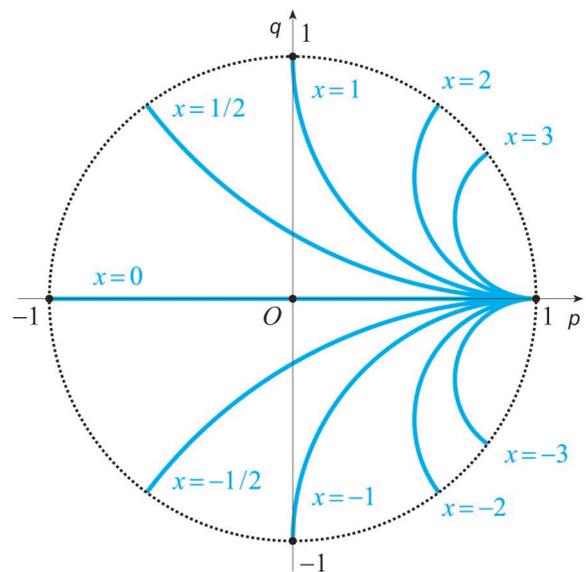
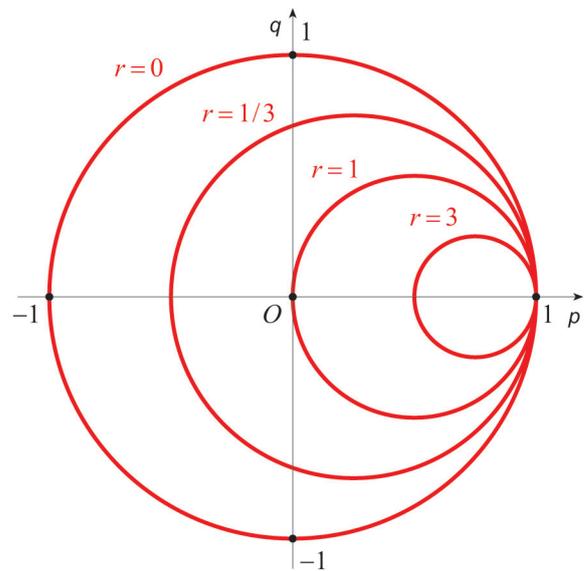
$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}' &= \Gamma e^{-j(2\beta d' - \psi_L)} = \Gamma e^{-j[2\beta(d+l) - \psi_L]} = \\ &= \Gamma e^{-j(2\beta d - \psi_L)} e^{-j2\beta l} = \bar{\Gamma} e^{-j2\beta l} \end{aligned}$$

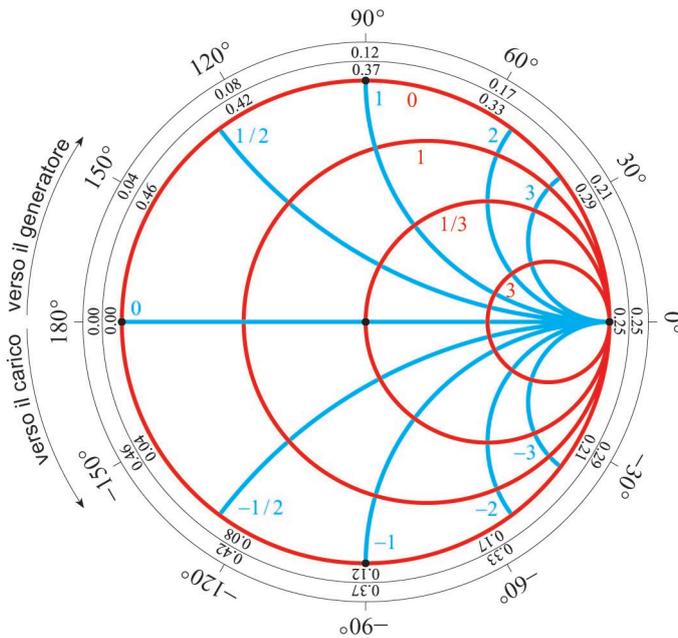
Pertanto il coefficiente di riflessione $\bar{\Gamma}'$ si ottiene a partire dal valore di $\bar{\Gamma}$ con una rotazione in senso orario dell'angolo $2\beta l$, cioè $2 \times 360^\circ l / \lambda$; qualora lo spostamento sia verso il carico, la rotazione è in senso antiorario. Si osservi che $|\bar{\Gamma}'| = |\bar{\Gamma} e^{-j2\beta l}| = |\bar{\Gamma}|$, tale proprietà è valida limitatamente a linee senza perdite.

Dalla relazione (9.56) segue che la parte reale dell'impedenza normalizzata (9.55), detta *resistenza normalizzata* r , nel piano pq viene rappresentata da una circonferenza di centro nel punto $\left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$ e

raggio pari a $\frac{1}{1+r}$. La circonferenza di raggio massimo, pari a 1, corrisponde ad una resistenza normalizzata nulla; il punto $(1, 0)$ corrisponde ad una resistenza normalizzata infinita.

Dalla relazione (9.57) segue che la parte immaginaria dell'impedenza normalizzata (9.55), detta *reattanza normalizzata* x , nel piano pq viene rappresentata da una circonferenza di centro nel





punto $\left(1, \frac{1}{x}\right)$ e raggio pari a $\frac{1}{x}$. Il segmento orizzontale compreso tra i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ corrisponde ad una reattanza normalizzata nulla; a reattanze positive e negative corrispondono archi rispettivamente, al di sopra e al di sotto del segmento considerato; il punto $(1, 0)$ corrisponde ad una reattanza normalizzata infinita.

La carta di Smith (Appendice E) è costituita dalla sovrapposizione di queste due famiglie di curve; la famiglia di circonferenze (9.53) che descrivono valori del coefficiente di riflessione non sono direttamente riportate sulla carta di Smith alla luce della semplicità con cui possono essere eventualmente tracciate. Sul bordo della carta, oltre alla fase ψ del coefficiente di riflessione Γ , sono riportate due scale

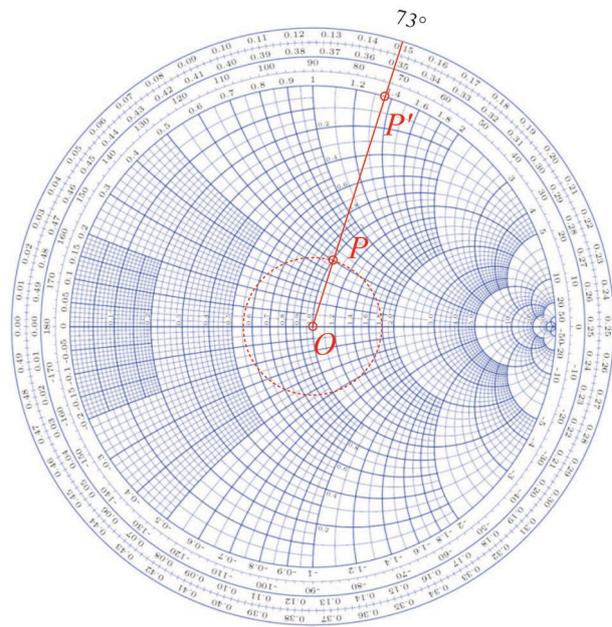
delle distanze d lungo la linea, espresse in termini di lunghezza d'onda come d/λ , una usata per lo spostamento verso il generatore e l'altra per lo spostamento verso il carico. Siccome queste scale sono da adoperare per indicare variazioni di posizioni da un punto ad un altro lungo la linea, l'origine di tali scale viene fissato arbitrariamente in $\psi = 180^\circ$, dove l'impedenza presenta un minimo.

Esempio: (Determinazione del coefficiente di riflessione per una linea senza perdite) Consideriamo una linea senza perdite di impedenza caratteristica Z_0 pari a 300Ω , con impedenza di carico Z_L uguale a $(300 + j180) \Omega$. L'impedenza normalizzata vale:

$$\bar{z}_L \equiv \frac{\bar{Z}_L}{Z_0} = 1.0 + j0.6;$$

tracciamo il segmento che parte dall'origine O e passa per il punto P di coordinate $(r = 1.0, x = 0.6)$ sulla carta di Smith, prolungando tale segmento fino al cerchio massimo corrispondente a $|\Gamma| = 1$, l'intersezione tra tale cerchio e il segmento è indicata dal punto P' . Il modulo del coefficiente di riflessione è dato dal rapporto tra la lunghezza del segmento OP e la lunghezza del segmento OP' :

$$\Gamma = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} \approx 0.287.$$



Sulla scala esterna il segmento OP' indica l'angolo di fase di $\bar{\Gamma}$, pari a 73° . Adoperando la relazione (9.31) si ottengono i valori di 0.287 e 73.3° , rispettivamente per il modulo e la fase di $\bar{\Gamma}$.

Esempio: (*Determinazione dell'impedenza di ingresso di una linea senza perdite*) Consideriamo una linea senza perdite con impedenza caratteristica Z_0 pari a 50Ω , di lunghezza L uguale a 40 cm , operante alla lunghezza d'onda λ di 2 m , con impedenza di carico Z_L uguale a $(100 + j50) \Omega$. L'impedenza normalizzata vale:

$$\bar{z}_L \equiv \frac{\bar{Z}_L}{Z_0} = 2 + j;$$

in corrispondenza del punto P di coordinate ($r=2, x=1$) sulla carta di Smith si legge il valore del rapporto l/λ pari a 0.213 . Quindi ci si sposta di L/λ lungo la linea tratteggiata verso il generatore (circonferenza con Γ costante), raggiungendo il valore

$$\frac{l}{\lambda} + \frac{L}{\lambda} = 0.213 + 0.2 = 0.413$$

e si leggono nel punto Q le coordinate che rappresentano la resistenza e la reattanza di ingresso normalizzate:

$$\bar{z}_{in} \equiv \frac{\bar{Z}_{in}}{Z_0} = 0.49 - j0.49;$$

infine, moltiplicando per l'impedenza caratteristica, si deduce il valore dell'impedenza d'ingresso:

$$\bar{Z}_{in} = Z_0 \bar{z}_{in} = (24.5 - j24.5) \Omega.$$

Si noti che, adoperando la relazione (9.46) si ottiene per \bar{Z}_{in} il valore di $(24.8 - j24.6) \Omega$.

