APPENDICE

A.1 Operatori differenziali e relativi teoremi

Si definisce un operatore vettoriale (*nabla*) in coordinate cartesiane nella maniera seguente:

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\,.$$

E' possibile provare che tale operatore possiede caratteristiche analoghe a quelle dei tradizionali vettori e si presta a definire in maniera sintetica altre grandezze utili nell'ambito dell'elettromagnetismo. In generale la sua espressione dipende dal particolare sistema di coordinate adoperate e l'espressione precedente è relativa alle coordinate cartesiane.

Sia $\psi(x, y, z)$ una funzione definita e derivabile in ogni punto (x, y, z) di una certa regione dello spazio (ossia ψ descrive un *campo scalare derivabile*). Si definisce *gradiente* di ψ e si indica con $\vec{\nabla}\psi$ o $\mathrm{grad}\,\psi$ la seguente grandezza:

$$\vec{\nabla}\psi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\hat{z}\,;$$

così $\vec{\nabla}\psi$ descrive un *campo vettoriale*. La componente di $\vec{\nabla}\psi$ nella direzione di un versore $\hat{r}$ è data da $\hat{r}\cdot\vec{\nabla}\psi$ e prende il nome di *derivata direzionale* della funzione ψ nella direzione di $\hat{r}$; in pratica $\hat{r}\cdot\vec{\nabla}\psi$ esprime l'entità della variazione di ψ nella direzione di $\hat{r}$ nel punto (x, y, z).

Sia $\vec{v}(x, y, z) = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ una funzione vettoriale definita e derivabile in ogni punto (x, y, z) di una certa regione dello spazio (ossia $\vec{v}$ descrive un *campo vettoriale derivabile*). Si definisce *divergenza* di $\vec{v}$ e si indica con $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ o $\mathrm{div}\,\vec{v}$ la seguente grandezza:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\cdot\left(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,.$$

Si noti che l'operatore nabla viene formalmente adoperato come un operatore tradizionale; tuttavia tale operatore non soddisfa la proprietà commutativa dei vettori rispetto al prodotto scalare, risultando $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$ differente da $\vec{v}\cdot\vec{\nabla}$, espressione, quest'ultima che è priva di significato.

Sia $\vec{v}(x, y, z) = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ un campo vettoriale derivabile. Si definisce *rotore* di $\vec{v}$ e si indica con $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ o $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ la seguente grandezza:

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\times\left(v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}\right)=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z}.$$

Si osservi come anche in questo caso l'operatore nabla agisca analogamente ad un vettore tradizionale nel prodotto vettoriale.

Di seguito sono mostrate le espressioni del gradiente, divergenza e rotore nelle coordinate cilindriche:

$$\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{\phi}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}\,,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho v_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\,,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\phi}-\frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho}+\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho v_\phi\right)-\frac{\partial v_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{z}\,,$$

e sferiche:

$$\vec{\nabla}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\hat{\vartheta}+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\hat{\phi}\,,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 v_\rho\right)+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, v_\vartheta\right)+\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\,,$$

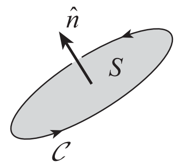
$$\vec{\nabla}\times\vec{v}=\frac{1}{\rho\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, v_\phi\right)-\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\phi}\right]\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_\rho}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho v_\phi\right)\right]\hat{\vartheta}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho v_\vartheta\right)-\frac{\partial v_\rho}{\partial\vartheta}\right]\hat{\phi}\,.$$

Sia V il volume delimitato dalla superficie chiusa S e $\vec{u}$ un campo vettoriale derivabile con derivate continue, il *teorema della divergenza*, formulato da Gauss, afferma che vale l'identità:

$$\int_S \vec{u}\cdot d\vec{s}=\int_S \vec{u}\cdot\hat{n}\,ds=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\,dv\,,$$

dove $\hat{n}$ è il versore *positivo* (ossia orientato verso l'esterno) normale alla superficie S.

Sia S una porzione di superficie aperta a due facce, delimitata da una curva chiusa non intrecciata (*curva chiusa semplice*) $\mathcal{C}$, allora, se $\vec{v}$ è un campo vettoriale derivabile con derivate continue, il *teorema del rotore*, formulato da Ampère nel 1825 e successivamente generalizzato da George Gabriel Stokes, afferma che vale l'identità:



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}\cdot d\vec{r}=\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot\hat{n}\,ds=\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{s}\,,$$

dove $\mathcal{C}$ è percorsa in direzione positiva. La direzione di $\mathcal{C}$ è detta *positiva* se un osservatore che cammina sul contorno di *S* in questa direzione e con il capo orientato nella direzione del versore positivo $\hat{n}$ normale a *S*, ha la superficie *S* alla sua sinistra (si veda la figura).

A.2 Numeri complessi

L'incompletezza dell'insieme dei numeri reali fu riconosciuta già dai matematici greci che per primi si resero conto dell'impossibilità di risolvere equazioni polinomiali del tipo $x^2+1=0$. I numeri complessi vennero introdotti nel 16° secolo da Niccolò Tartaglia, ma soltanto quale espediente per consentire la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, tuttavia solo nel 19°, soprattutto per opera di Gauss l'insieme dei numeri complessi venne considerato a tutti gli effetti un ampliamento di quello dei numeri reali. Introducendo l'*unità immaginaria j* definita come:

$$j \equiv \sqrt{-1}$$

l'equazione $x^2+1=0$ ha soluzioni $\pm j$.

Viene detto *numero complesso* un numero $\overline{z}$ espresso nella forma:

$$\overline{z} = x + jy, \tag{A.1}$$

i numeri reali *x* e *y* sono detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero $\overline{z}$ e si indicano:

$$x = \mathcal{R}e\{\overline{z}\},$$
$$y = \mathcal{I}m\{\overline{z}\};$$

se il numero *a* è nullo, $\overline{z}$ è detto *immaginario puro*. Si definisce *complesso coniugato* del numero complesso *z* (A.1) il numero $\overline{z}^*$ tale che:

$$\overline{z}^* = x - jy.$$

La quantità:

$$|\overline{z}| = \sqrt{\overline{z}\,\overline{z}^*} = \sqrt{(x+jy)(x-jy)} = \sqrt{x^2+y^2}$$

è detta *modulo* di $\overline{z}$.

A.2.1 Operazioni tra numeri complessi

Consideriamo due numeri complessi $\overline{z}_1$ e $\overline{z}_2$:

$$\overline{z}_1 = x_1 + jy_1,$$
$$\overline{z}_2 = x_2 + jy_2,$$

definiamo la somma (sottrazione) $\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$ come:

$$\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2),$$

la moltiplicazione $\overline{z}_1\overline{z}_2$:

$$\overline{z}_1\overline{z}_2 = \left(x_1 + jy_1\right)\left(x_2 + jy_2\right) = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + j\left(x_1y_2 + y_1x_2\right),$$

la divisione $\overline{z}_1/\overline{z}_2$ come:

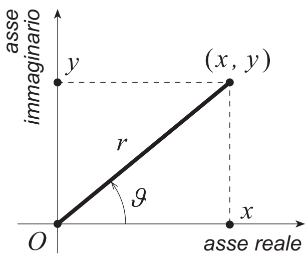
$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\frac{\overline{z}_2^{\,*}}{\overline{z}_2^{\,*}} = \frac{\overline{z}_1\overline{z}_2^{\,*}}{\left|\overline{z}_2\right|^2} = \frac{\left(x_1 + jy_1\right)\left(x_2 - jy_2\right)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + j\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\,.$$

Risulta inoltre:

$$\left|\overline{z}_1\overline{z}_2\right| = \left|\overline{z}_1\right|\left|\overline{z}_2\right|,$$
$$\left|\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\right| = \frac{\left|\overline{z}_1\right|}{\left|\overline{z}_2\right|}, \qquad \left(\left|\overline{z}_2\right| \neq 0\right).$$
$$\left|\overline{z}_1 + \overline{z}_2\right| \leq \left|\overline{z}_1\right| + \left|\overline{z}_2\right|.$$

A.2.2 Rappresentazione geometrica

L'espressione (A.1) suggerisce la possibilità di associare al numero complesso $\overline{z}$ la coppia ordinata di numeri reali $\left(x, y\right)$, pertanto è possibile rappresentare un numero complesso attraverso i punti del piano; questo tipo di rappresentazioni prende anche il nome di *diagramma di Argand*, dal matematico francese Jean-Robert Argand che lo introdusse nel 1806. Con riferimento alla figura risulta:



$$x = r\cos\vartheta\,,$$
$$y = r\sin\vartheta\,,$$

dove:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|\overline{z}\right|,$$
$$\tan\vartheta = \frac{y}{x} = \frac{\mathcal{I}\{\overline{z}\}}{\mathcal{Re}\{\overline{z}\}}\,, \qquad \text{(A.2)}$$

cioè la lunghezza r del segmento che unisce l'origine del piano col punto di coordinate $\left(x, y\right)$ coincide col modulo $\left|\overline{z}\right|$ di $\overline{z}$ e l'angolo ϑ che tale segmento forma con l'asse orizzontale, detto *argomento* del numero complesso, è tale che la sua tangente è pari al rapporto tra la parte immaginaria e quella reale di $\overline{z}$. Pertanto dalla (A.1) e dalle relazioni (A.2) segue che il numero complesso $\overline{z}$ può essere rappresentato come:

$$\overline{z} = x + jy = r\left(\cos\vartheta + j\sin\vartheta\right). \qquad \text{(A.3)}$$

A.2.3 Rappresentazione esponenziale

Consideriamo lo sviluppo in serie delle funzioni $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$ intorno a $\vartheta = 0$:

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{\vartheta^4}{4!} - \dots,$$
$$\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \dots,$$

moltiplicando la seconda espressione per *j* e sommando membro a membro si ottiene:

$$\cos\vartheta + j\sin\vartheta = 1 + j\vartheta + \frac{(j\vartheta)^2}{2!} + \frac{(j\vartheta)^3}{3!} + \dots = e^{j\vartheta},$$

pertanto dalla (A.3) segue:

$$\overline{z} = r(\cos\vartheta + j\sin\vartheta) = re^{j\vartheta}.$$

La rappresentazione di un numero complesso attraverso l'esponenziale si rivela particolarmente utile nella circostanza in cui occorre calcolare delle moltiplicazioni o divisioni tra numeri complessi. Infatti, dati due numeri:

$$\overline{z}_1 = r_1 e^{j\vartheta_1},$$
$$\overline{z}_2 = r_2 e^{j\vartheta_2},$$

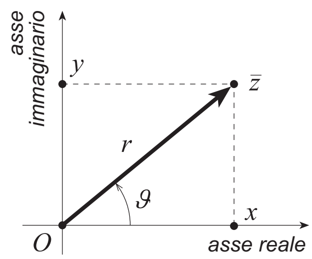
risulta:

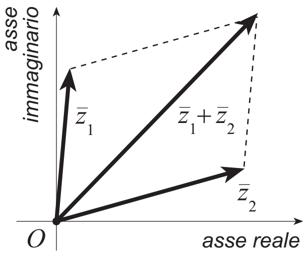
$$\overline{z}_1\overline{z}_2 = r_1 e^{j\vartheta_1} r_2 e^{j\vartheta_2} = r_1 r_2 e^{j(\vartheta_1+\vartheta_2)},$$
$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{r_1 e^{j\vartheta_1}}{r_2 e^{j\vartheta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\vartheta_1-\vartheta_2)},$$

quindi il prodotto di due numeri complessi è pari al numero che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti e il rapporto tra due numeri complessi è pari al numero che ha per modulo il rapporto tra i moduli e per argomento la differenza degli argomenti.

A.2.4 Rappresentazione fasoriale

Dalla corrispondenza tra un numero complesso ed una coppia ordinata di numeri reali segue che è possibile rappresentare un numero complesso $x + jy$ come un segmento orientato del piano *xy* che spicca dall'origine *O* ed ha estremo libero nel punto di coordinate (x, y). La lunghezza del segmento coincide col modulo del numero complesso e l'angolo che tale segmento forma con l'asse *x* coincide con l'argomento del numero. A





questo segmento orientato viene attribuito il nome di *fasore*. Il vantaggio della rappresentazione fasoriale sta nella possibilità di svolgere operazioni tra numeri complessi attraverso un approccio grafico; ad esempio la somma $\overline{z}_1+\overline{z}_2$ tra i numeri complessi $\overline{z}_1$ e $\overline{z}_2$ viene effettuata nella rappresentazione fasoriale applicando la regola del parallelogramma per l'addizione di due vettori, così come mostrato in figura.