2 CINEMATICA

Un corpo si dice in moto relativamente ad un altro corpo quando la sua posizione, misurata rispetto all'altro corpo cambia nel tempo. Si dice *cinematica* lo studio del moto dei corpo indipendentemente dalla cause che lo hanno generato.

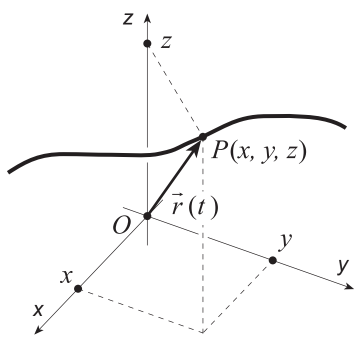
Per una completa determinazione del movimento di un corpo occorre conoscere il moto di ciascuna particella che lo compone. Tuttavia, in questa prima parte prescindiamo dalle sue dimensioni, dalla forma, della composizione chimica, ecc., considerandolo unicamente come un punto, che denomineremo *punto materiale*. Questa rappresentazione dei corpi risulta efficace in tutte le circostanze in cui le loro reali dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze coperte lungo il percorso che ne caratterizza il moto. Così, ad esempio, l'identificazione della Terra con un punto materiale consente un'accurata descrizione del suo moto orbitale intorno al Sole, oppure la pressione esercitata da un gas sulle pareti di un contenitore può essere valutata considerando le molecole del gas come punti materiali.

2.1 Equazioni del moto

Come anticipato, lo studio del moto di un corpo richiede la preventiva specificazione di un sistema spaziale di riferimento e inoltre è necessario stabilire un'origine per gli intervalli di tempo. Si nota che le caratteristiche del moto del punto materiale sono legate in maniera essenziale al sistema di riferimento scelto. Usualmente si fissa un sistema di coordinate cartesiane solidali con il corpo rispetto al quale si riferisce il moto, inoltre si fissa un'ascissa temporale determinata stabilendo un istante iniziale a partire dal quale misurare gli intervalli di tempo. Il moto di un punto materiale P è quindi determinato una volta che è nota la legge di variazione nel tempo delle sue coordinate (*equazioni orarie*):

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Analogamente il moto è stabilito se si conosce la legge di variazione nel tempo del vettore posizione $\overrightarrow{OP}(t)$ tracciato a partire dall'origine O del sistema di riferimento verso la particella:



$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec{r}(t) = \hat{x}\,x(t) + \hat{y}\,y(t) + \hat{z}\,z(t). \tag{2.2}$$

Il luogo delle posizioni occupate dal punto P durante il suo moto è una linea detta *traiettoria*; questa può essere retta o curva che, a sua volta può essere piana o sghemba. Nel primo caso il moto si dice *rettilineo*, nel secondo caso *curvilineo*.

Le relazioni (2.1) costituiscono le equazioni parametriche della traiettoria per cui, l'eliminazione fra una coppia di esse del parametro t

fornisce le equazioni di due superfici nello spazio la cui intersezione, nell'intervallo specificato attraverso la variazione temporale, determina la traiettoria.

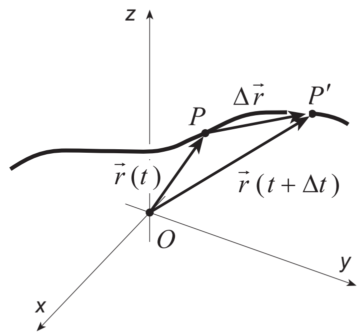
Esempio: Consideriamo il moto di un punto materiale su di un piano; riferito il movimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, le equazioni del moto siano:

$$\begin{cases} x(t) = (1\,m/s)\,t - 1\,m \\ y(t) = (2\,m/s^2)\,t^2 \end{cases},$$

dove sia x che y sono espresse in metri; eliminando il parametro t fra le due equazioni, si trova:

$$y(x) = (2\,m^{-1})\,x^2 + 4x + 2\,m$$

cioè la traiettoria descritta è una parabola



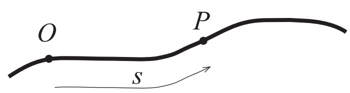
Indicando con P e P' le posizioni assunte dal punto materiale in corrispondenza degli istanti di tempo t e $t+\Delta t$, si chiama *spostamento* nell'intervallo Δt il vettore:

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r} = \hat{x}\,\Delta x + \hat{y}\,\Delta y + \hat{z}\,\Delta z$$

dove $\vec{r}(t)$ è il vettore posizione associato al moto di *P*. In particolare, se $dr(t)/dt \neq 0$, è possibile considerare lo spostamento corrispondente ad un intervallo di tempo infinitesimo dt:

$$d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\,, \tag{2.3}$$

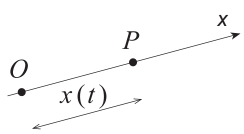
dove le componenti di $d\vec{r}$ lungo gli assi coordinati sono i differenziali delle equazioni (2.1).



Nota la traiettoria è possibile definire un sistema di coordinate alternativo la cui origine *O* è posta nella posizione occupata dal punto *P* all'istante iniziale e la posizione generica di *P* è misurata lungo la traiettoria, a partire dall'origine *O*. La coordinata $s \equiv \overset{\frown}{OP}$ è detta *ascissa curvilinea* di *P*. In relazione ad un intervallo di tempo infinitesimo, lo spostamento $d\vec{r}$ risulta tangente alla traiettoria nel punto considerato ed in modulo uguale allo spostamento ds lungo l'ascissa curvilinea, per cui, indicando con $\hat{t}$ il versore tangente alla curva nel punto considerato, risulta:

$$d\vec{r} = \hat{t}\,ds\,. \tag{2.4}$$

2.2 Moto rettilineo



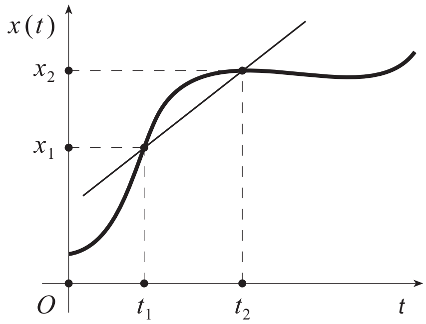
Nel moto rettilineo il punto materiale si sposta lungo una linea retta; fissata un origine ed una direzione, questo tipo di moto è descrivibile adoperando una sola coordinata $x = x(t)$. Sia $x_1 \equiv x(t_1)$ e $x_2 \equiv x(t_2)$ la posizione del punto *P* rispettivamente, ai tempi t_1 e t_2, definiamo *velocità media* nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ il rapporto:

$$v_m \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \tag{2.5}$$

in cui:

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1,$$
$$\Delta t \equiv t_2 - t_1.$$

La velocità media fornisce un'indicazione concernente il moto del punto *P* nell'intervallo di tempo Δt durante il quale il punto si sposta lungo il segmento di lunghezza Δx. Se rappresentiamo su un diagramma cartesiano la legge oraria del moto $x = x(t)$, in tale grafico risulta che la velocità media calcolata tra i tempi t_1 e t_2 può essere interpretata come la pendenza della retta passante per i punti $(t_1, x(t_1))$ e $(t_2, x(t_2))$. La velocità ha le dimensioni di una lunghezza diviso un tempo, per cui nel Sistema Internazionale (*SI*) risulta:



$$[v_m] = \frac{m}{s},$$

non essendoci una specifica unità di misura per questa grandezza.

Come già anticipato, la velocità media non consente di caratterizzare completamente il moto tra due istanti di tempo, non permettendo di stabilire il valore che assume la velocità in corrispondenza di un particolare istante di tempo compreso nell'intervallo considerato. Tuttavia si può pensare di applicare il procedimento di calcolo della velocità media ad intervalli Δt di ampiezza via via decrescenti, al cui interno è contenuto l'istante in cui si vuole stabilire il valore della velocità.

Esempio: Consideriamo una particella che si muove lungo l'asse *x* in maniera tale che la sua posizione varia nel tempo con la legge:

$$x(t) = k\,t^2 + x_0,$$

dove *x* è espresso in metri e *t* in secondi e, inoltre:

$$x_0 \equiv 2\ m,$$
$$k \equiv 2\ m/s^2.$$

Stabiliamo il valore che assume la velocità media negli intervalli tra $5s$ e $6s$, $5s$ e $5.1s$, $5s$ e $5.01s$, $5s$ e $5.001s$, $5s$ e $5.0001s$. Risulta allora:

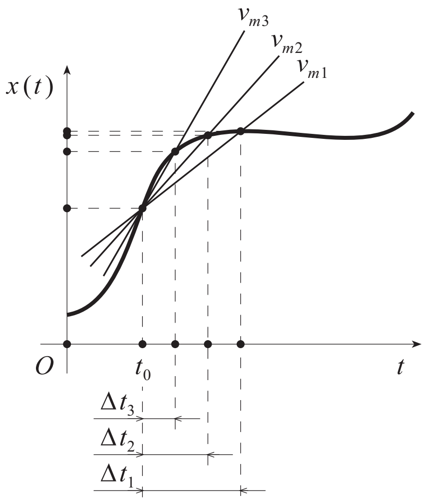
$$t_0 \equiv 5\ s,\ \Delta t = 1\ s \qquad v_{m1} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{22\ m}{1\ s} = 22\ m/s;$$

$$t_0 \equiv 5\ s,\ \Delta t = 0.1\ s \qquad v_{m2} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{2.02\ m}{0.1\ s} = 20.2\ m/s;$$

$$t_0 \equiv 5\ s,\ \Delta t = 0.01\ s \qquad v_{m3} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{0.2002\ m}{0.01\ s} = 20.02\ m/s;$$

$$t_0 \equiv 5\ s,\ \Delta t = 0.001\ s \qquad v_{m4} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{0.020002\ m}{0.001\ s} = 20.002\ m/s;$$

$$t_0 \equiv 5\ s,\ \Delta t = 0.0001\ s \qquad v_{m5} = \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{0.00200002\ m}{0.0001\ s} = 20.0002\ m/s;$$



L'esempio precedente mostra che al diminuire dell'intervallo di tempo Δt, fissato il tempo t_0, la velocità tende ad un valore limite. Si definisce *velocità istantanea* al tempo t_0 il limite:

$$v(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t \equiv t_0} ; \tag{2.6}$$

cioè la derivata della funzione $x = x(t)$ calcolata al tempo t_0 fornisce il valore della velocità in corrispondenza dell'istante specificato. Dalle proprietà della derivata segue che la velocità istantanea al tempo t_0 rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva $x = x(t)$ calcolata al tempo t_0. Nell'Appendice sono riportate le derivate di alcune funzioni notevoli.

Esempio: Facendo riferimento all'esempio precedente, poiché si ha $x(t) = k\,t^2 + x_0$, allora:

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{kt^2 + 2kt\Delta t + k\Delta t^2 + x_0 - kt^2 - x_0}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t \,,$$

pertanto:

$$v(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2kt_0 + k\Delta t) = 2kt_0 \,,$$

così:

$$v(1\,s) \equiv 20\ m/s \,.$$

D'altra parte:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t \equiv t_0} = \left.2kt\right|_{t \equiv t_0} = 2kt_0 \,,$$

che conferma quanto precedentemente trovato.

Il problema inverso di stabilire lo spostamento $\mathcal{S}$ di un punto materiale in moto con velocità v in un tempo T, è banale se v è costante. In questo caso infatti:

$$\mathcal{S} = vT \,.$$

Tuttavia qualora v è funzione del tempo, tale espressione non conduce ad un risultato corretto. D'altra parte si può pensare di dividere l'intervallo T in tanti intervalli Δt_k e calcolare lo spostamento come somma:

$$\mathcal{S} \approx \sum_k v_k \, \Delta t_k \,,$$

dove v_k è ritenuta costante nell'intervallo Δt_k e pari, ad esempio, al valore assunto al centro dell'intervallo $k-$esimo:

$$v_k \equiv v\left(t_k - \frac{\Delta t_k}{2}\right).$$

Esempio: Una particella, partendo dal punto $x=0$, si muove lungo l'asse *x* con la velocità data dall'espressione:

$$v(t) = h\,t^2,$$

dove *t* è espresso in secondi e

$$h \equiv 3\ m/s^3 .$$

Stabiliamo a che distanza dall'origine si è portata la particella dopo un tempo

$$T \equiv 10\ s .$$

Supponiamo di dividere inizialmente l'intervallo $(0,T)$ in

$$n \equiv 2$$

intervallini, allora:

$$\mathcal{S} \approx v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 ,$$

dove

$$\Delta t_1 \equiv \Delta t_2 \equiv \Delta t \equiv \frac{T}{n} = 5\ s,$$
$$v_1 \equiv v\left(\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) = v(2.5\ s) = 18.75\ m/s,$$
$$v_2 \equiv v\left(2\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) = v(7.5\ s) = 168.75\ m/s,$$

allora:

$$\mathcal{S} \approx (18.75\ m/s)\times(5\ s) + (168.75\ m/s)\times(5\ s) \approx 937.5\ m \cdot$$

Se:

$$n \equiv 3$$

si avrà:

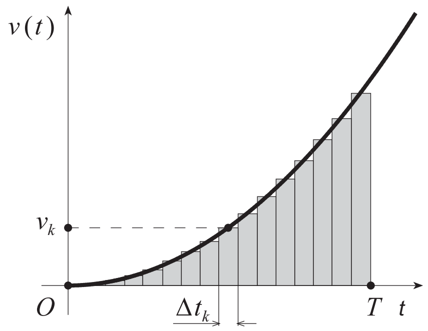
$$\Delta t_1 \equiv \Delta t_2 \equiv \Delta t_3 \equiv \Delta t \equiv \frac{T}{n} = 3.3\ s,$$
$$v_1 \equiv v\left(\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) = v(1.67\ s) = 8.33\ m/s,$$
$$v_2 \equiv v\left(2\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) = v(5\ s) = 75\ m/s,$$
$$v_3 \equiv v\left(3\Delta t - \frac{\Delta t}{2}\right) = v(8.3\ s) = 208.33\ m/s,$$

n	$\Delta t_k\ (s)$	$\mathcal{S}\ (m)$
10	1.00	997.5
20	0.50	999.4
30	0.33	999.7
40	0.25	999.8
50	0.20	999.9

così:

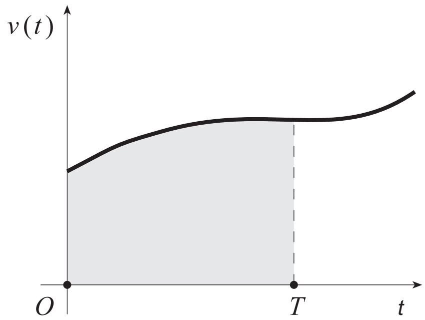
$$\mathcal{S} \approx (8.33\ m/s)\times(3.3\ s)+(75\ m/s)\times(3.3\ s)+(208.33\ m/s)\times(3.3\ s)\approx 972.2\ m\,.$$

Aumentando il numero n di intervalli, cioè diminuendo la durata di ciascun intervallo, si ottengono i risultati indicati nella precedente tabella. Con le scelte fatte, dal punto di vista geometrico, il prodotto $v_k\,\Delta t_k$ rappresenta l'area del rettangolo di base Δt_k e di altezza pari al valore assunto dalla velocità $v(t)$ al centro dell'intervallo Δt_k stesso. Pertanto le somme $\sum_k v_k\,\Delta t_k$ costituiscono un'approssimazione dell'area sottesa dalla funzione $v(t)$ nell'intervallo $(0,T)$.



Analogamente a quanto visto nel caso della velocità istantanea, al diminuire della durata degli intervalli Δt_k in cui è diviso l'intervallo di tempo $(0,T)$, lo spostamento $\mathcal{S}$ tende ad un valore limite. Allora:

$$\mathcal{S} = \lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_k v_k\,\Delta t_k = \int_0^T v(t)\,dt\,,$$



cioè l'integrale della funzione $v=v(t)$ calcolato dall'istante di tempo iniziale $t=0$ a quello finale $t=T$, fornisce l'entità dello spostamento che subisce il punto materiale nell'intervallo $(0,T)$. Dalle proprietà dell'integrale segue che lo spostamento subito tra due istanti di tempo è pari all'area sottesa dalla curva $v=v(t)$ tra gli istanti specificati. Nell'Appendice sono riportati gli integrali di alcune funzioni notevoli.

Esempio: Con riferimento all'esempio precedente, se $v(t)=h\,t^2$, posto

$$\Delta t_k \equiv \frac{T}{n}\,,$$

per ogni k, si ha:

$$\begin{aligned} v_k\,\Delta t_k &= v\left(k\Delta t_k-\frac{1}{2}\Delta t_k\right)\frac{T}{n} = v\left(k\frac{T}{n}-\frac{T}{2n}\right)\frac{T}{n} = h\times\left(k\frac{T}{n}-\frac{T}{2n}\right)^2\frac{T}{n} = h\times\left(\frac{k^2T^2}{n^2}+\frac{T^2}{4n^2}-\frac{kT^2}{n^2}\right)\frac{T}{n} = \\ &= \frac{hT^3}{n^3}\left(k^2+\frac{1}{4}-k\right); \end{aligned}.$$

così, sommando per k che varia tra 1 e n, si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\approx \sum_k v_k\,\Delta t_k = \frac{hT^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+\frac{1}{4}-k\right) = \frac{hT^3}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}-\sum_{k=1}^{n}k\right) = \\ &= \frac{hT^3}{n^3}\left[\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)+\frac{n}{4}-\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)\right] = \frac{hT^3}{n^3}\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n}{12}\right) = \frac{1}{3}hT^3\left(1-\frac{1}{4n^2}\right), \end{aligned}$$

e quindi:

$$\mathcal{S} = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_k v_k \, \Delta t_k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} h T^3 \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{3} h T^3,$$

così:

$$\mathcal{S} = 1\,km.$$

D'altra parte:

$$\int_0^T v(t)\,dt = \int_0^T h t^2 \, dt = \frac{1}{3} h t^3 \Big|_0^T = \frac{1}{3} h T^3,$$

che conferma quanto precedentemente trovato.

La relazione tra velocità e spostamento può essere ricavata in maniera più formale a partire dalla definizione (2.6) della velocità istantanea $v = dx/dt$, dalla quale si deduce:

$$dx = v\,dt;$$

se ora si integrano ambo i membri, si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x} d\xi = \int_{t_0}^{t} v\,d\zeta\,, \tag{2.7}$$

essendo $x_0 \equiv x(t_0)$ la posizione del punto materiale al tempo t_0. D'altra parte applicando la definizione di integrale al primo membro dell'espressione precedente, si ha:

$$\int_{x_0}^{x} d\xi = \lim_{\Delta\xi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\xi_k\,,$$

ed esprimendo $\Delta\xi_k$ come fatto nell'esempio precedente, come

$$\Delta\xi_k = \frac{x - x_0}{n}\,,$$

segue:

$$\int_{x_0}^{x} d\xi = \lim_{\Delta\xi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\xi_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x - x_0}{n} = \lim_{n \to \infty} \left[n \left(\frac{x - x_0}{n} \right) \right] = x - x_0.$$

Sostituendo quindi nella (2.7) si ottiene:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,d\zeta\,. \tag{2.8}$$

Si osservi, infine, che dalla definizione di velocità media (2.5) risulta $x - x_0 = v_m(t - t_0)$, così da quest'ultima relazione segue:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v \, d\zeta$$

che coincide con l'espressione della media della funzione $v = v(t)$ nell'intervallo $t_2 - t_1$.

Il legame analitico tra la derivata e l'integrale è stabilito dal *Teorema fondamentale del calcolo* la cui dimostrazione è riportata nell'Appendice.

Esempio: (*moto rettilineo uniforme*) Se la velocità del punto materiale è indipendente dal tempo e pari a v_0, dalla (2.7) segue:

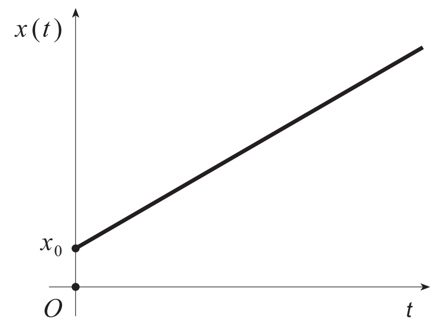
$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_0 \, d\zeta = v_0 \int_{t_0}^{t} d\zeta = v_0 (t - t_0),$$

ovvero:

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0),$$

e, in particolare, se $t_0 \equiv 0$, allora:

$$x = x_0 + v_0 t.$$



Quando la velocità è indipendente dal tempo, il moto è detto *uniforme*; tuttavia, in generale, la velocità dipende dal tempo, così, per completare la caratterizzazione del moto è necessario conoscere come essa varia istante per istante. A tale scopo, posto $v_1 \equiv v(t_1)$ e $v_2 \equiv v(t_2)$ le velocità assunte dal punto materiale, rispettivamente ai tempi t_1 e t_2, si definisce *accelerazione media* nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, il rapporto:

$$a_m \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

in cui:

$$\Delta v \equiv v_2 - v_1,$$
$$\Delta t \equiv t_2 - t_1.$$

L'accelerazione ha le dimensioni di una lunghezza diviso il quadrato di un tempo, per cui nel Sistema Internazionale risulta:

$$[a_m] = \frac{m}{s^2},$$

non essendoci una specifica unità di misura per questa grandezza.

Analogamente a quanto osservato per la definizione di velocità media, l'accelerazione media fornisce un'indicazione complessiva circa il moto che si esplica tra due istanti di tempo, non consentendo, tuttavia, una determinazione del valore assunto dall'accelerazione in corrispondenza di uno specifico istante. Per tale motivo definiamo *accelerazione istantanea* al tempo t_0 il limite:

$$a(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t \equiv t_0};$$

cioè la derivata della funzione $v = v(t)$ calcolata al tempo t_0 fornisce il valore dell'accelerazione in corrispondenza dell'istante specificato. Se la velocità aumenta nel tempo, $a = dv/dt > 0$, e il moto si dice, genericamente, *accelerato*; se la velocità diminuisce nel tempo, $a = dv/dt < 0$, e il moto si dice *decelerato*.

Dalla relazione precedente si trova:

$$dv = a\,dt;$$

così, integrando ambo i membri, si ha:

$$\int_{v_0}^{v} d\eta = \int_{t_0}^{t} a\,d\zeta,$$

dove $v_0 \equiv v(t_0)$. Siccome $\int_{v_0}^{v} d\eta = v - v_0$, sostituendo nell'espressione precedente, si ha:

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,d\zeta,$$

ovvero:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,d\zeta. \tag{2.9}$$

Il fatto che la velocità è la derivata rispetto al tempo della posizione e che l'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità, determina un legame tra l'accelerazione e la posizione del corpo:

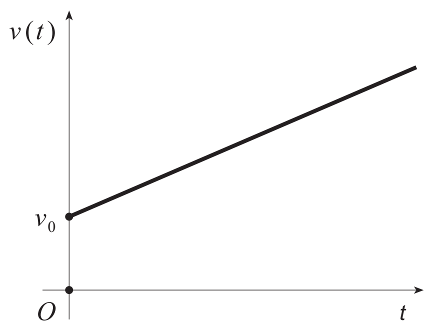
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

cioè l'accelerazione è la derivata seconda della posizione.

Esempio: (*moto uniformemente accelerato*) Se l'accelerazione del punto materiale è indipendente dal tempo e pari a a_0, dalla (2.9) segue:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_0\,d\zeta = v_0 + a_0(t - t_0);$$

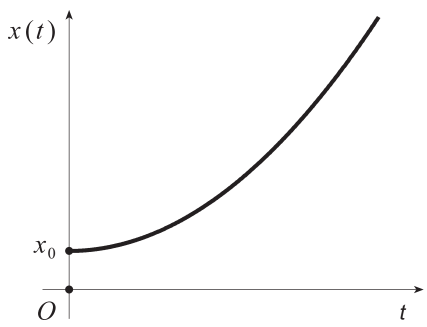
sostituendo questa espressione della velocità nella (2.8), si ha:



$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,d\zeta = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a_0 \left(\zeta - t_0 \right) \right] d\zeta =$$
$$= x_0 + v_0 \left(t - t_0 \right) + \frac{1}{2} a_0 \left(t - t_0 \right)^2 .$$

In particolare, se $t_0 \equiv 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_0 t, \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 . \end{aligned} \qquad (2.10)$$



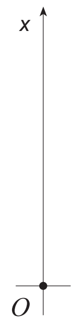
In figura sono mostrati gli andamenti di $v(t)$ e $x(t)$ per questo tipo di moto. Attraverso l'eliminazione del parametro *t* dalle equazioni precedenti è possibile esprimere la velocità *v* in funzione della posizione; cioè, essendo $t = (v - v_0)/a_0$, si ha:

$$x - x_0 = v_0 \frac{v - v_0}{a_0} + \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0} \right)^2 = \frac{1}{2a_0} \left(v^2 - v_0{}^2 \right),$$

da cui segue la relazione:

$$v^2 - v_0{}^2 = 2a_0 \left(x - x_0 \right), \qquad (2.11)$$

che consente di stabilire il valore assunto dalla velocità in corrispondenza di una specificata posizione.



Esempio: (*moto verticale di un corpo*) Trascurando la resistenza offerta dall'aria e la spinta idrostatica, un corpo lasciato cadere in prossimità della superficie terrestre si muove verso il basso, per effetto della gravità, con accelerazione costante *g* pari a circa $9.8\,m/s^2$; pertanto il moto è uniformemente accelerato. Se consideriamo un sistema di riferimento con origine sulla superficie terrestre e orientato verso l'alto, l'accelerazione a cui sarà soggetto il corpo sarà[1]:

$$a_0 = -g .$$

Nel caso in cui il corpo è lasciato cadere con velocità iniziale nulla da un'altezza *h*, dalle relazioni (2.10), la velocità e la posizione del corpo varranno:

$$\begin{aligned} v &= -gt, \\ x &= h - \frac{1}{2} g t^2 , \end{aligned}$$

così il corpo raggiungerà il suolo ($x = 0$) al tempo t_c tale che:

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_c{}^2 ,$$

ovvero:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

[1] Il segno negativo deriva dalla scelta fatta circa il sistema di riferimento; infatti dalla (2.11) segue che se si lascia cadere il corpo da una certa altezza con velocità iniziale v_0 nulla, affinché risulti $v^2 = 2a_0 \left(x - x_0 \right) > 0$, siccome risulta sempre $x < x_0$, deve necessariamente aversi $a_0 < 0$.

con la velocità:

$$v_c = g t_c = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

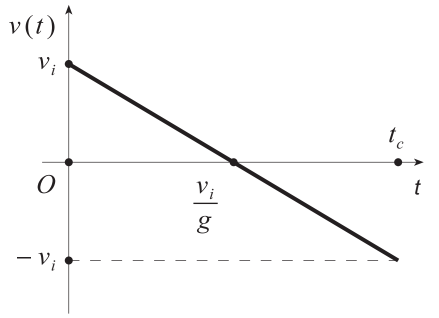
Qualora la velocità iniziale v_0 sia rivolta verso il basso e pari a $-v_i$, dalle relazioni (2.10) risulta:

$$v = -v_i - gt,$$
$$x = h - v_i t - \frac{1}{2} g t^2,$$

così:

$$t_c = \sqrt{\left(\frac{v_i}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} - \frac{v_i}{g},$$
$$v_c = \sqrt{v_i^2 + 2gh}.$$

Consideriamo infine la circostanza in cui il corpo parte dalla superficie terrestre ($x = 0$) con velocità iniziale v_i diretta verso l'alto, allora dalle relazioni (2.10) segue:

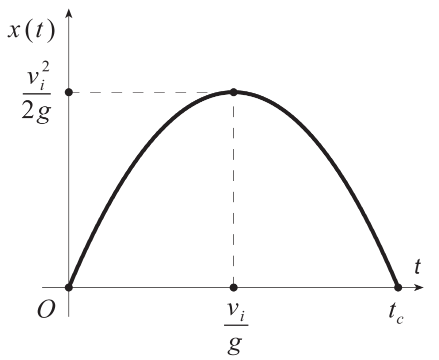


$$v = v_i - gt,$$
$$x = v_i t - \frac{1}{2} g t^2,$$

quindi la velocità del corpo è inizialmente diretta verso l'alto e, al tempo:

$$t_M = \frac{v_i}{g}$$

si annulla per poi successivamente invertirsi. Il corpo si muove verso l'alto raggiungendo la massima quota x_M al tempo t_M:



$$x_M = v_i t_M - \frac{1}{2} g t_M{}^2 = v_i \frac{v_i}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i}{g}\right)^2 = \frac{v_i^2}{2g},$$

dopo di che, con l'invertirsi del segno della velocità, il moto si esplica verso il basso. Al tempo t_c tale che:

$$0 = v_i t_c - \frac{1}{2} g t_c{}^2,$$

il corpo raggiunge il suolo, dove:

$$t_c = \frac{2v_i}{g}.$$

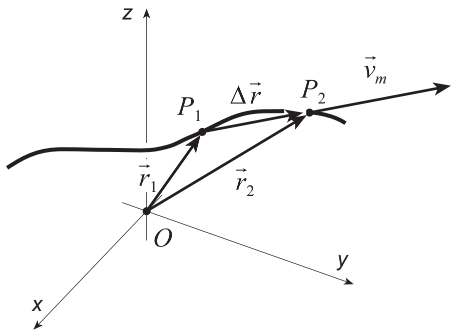
In particolare, al suolo, la velocità raggiunta vale;

$$v_c = v_i - g t_c = v_i - g\frac{2v_i}{g} = -v_i,$$

cioè la velocità con la quale il corpo arriva a terra è uguale in modulo a quella iniziale.

2.3 Moto curvilineo

Sia $\vec{r}_1 \equiv \overrightarrow{OP_1}$ il vettore posizione del punto materiale al tempo t_1 e $\vec{r}_2 \equiv \overrightarrow{OP_2}$ il vettore posizione al tempo t_2. Si definisce velocità (vettoriale) media il rapporto:



$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1},$$

dove si è posto:

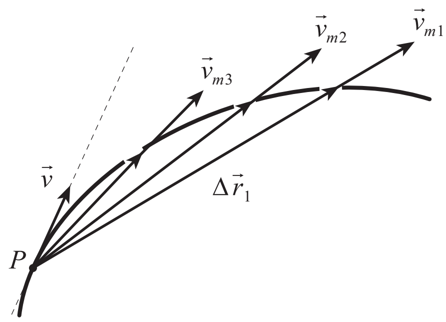
$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$
$$\Delta t \equiv t_2 - t_1;$$

si osservi che il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ e il vettore velocità media $\vec{v}_m$ risultano tra loro paralleli.

Analogamente a quanto osservato nel caso del moto rettilineo, la velocità media non fornisce un'indicazione completa circa il moto. Per tale motivo si introduce la velocità istantanea quale limite del rapporto tra spostamento e intervallo in cui si esplica tale spostamento, quando tale intervallo è fatto tendere a zero. Così la velocità istantanea (vettoriale) al tempo t_0 vale:

$$\vec{v}(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t \equiv t_0}. \tag{2.12}$$

Al tendere dell'intervallo di tempo Δt a zero, il vettore spostamento $\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ varia con continuità in modulo e direzione sino a far coincidere, al limite, la sua direzione con quella della retta tangente alla traiettoria nel punto P occupato dal corpo al tempo t_0. Pertanto il vettore velocità è tangente alla traiettoria. Utilizzando la relazione (2.3), la velocità (2.12) può esprimersi come:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x}\frac{dx}{dt} + \hat{y}\frac{dy}{dt} + \hat{z}\frac{dz}{dt} = \hat{x}\,v_x + \hat{y}\,v_y + \hat{z}\,v_z, \tag{2.13}$$

dove

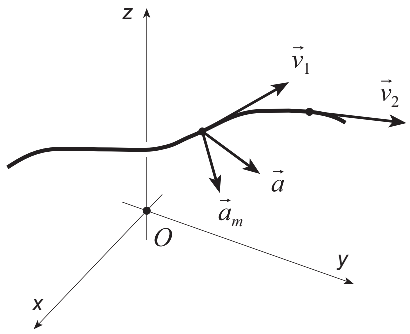
$$\begin{cases} v_x \equiv \dfrac{dx}{dt}, \\ v_y \equiv \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z \equiv \dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

sono le componenti del vettore $\vec{v}$. Pertanto il modulo della velocità vale:

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}\ .$$

Attraverso l'uso dell'ascissa curvilinea è possibile esplicitare la direzione del vettore velocità, infatti dalla definizione (2.12) e dalla relazione (2.4) segue:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{t}\,\frac{ds}{dt}; \tag{2.14}$$



calcolando il modulo di ambo i membri di tale espressione si ha:

$$v = \left|\hat{t}\,\frac{ds}{dt}\right| = \left|\hat{t}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right| = \frac{ds}{dt},$$

così la relazione (2.14) diventa:

$$\vec{v} = \hat{t}\,v\,,$$

cioè la velocità $\vec{v}$ calcolata in un punto della traiettoria è un vettore tangente alla traiettoria nel punto considerato.

Analogamente al caso del moto rettilineo, se $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}(t_1)$ e $\vec{v}_2 \equiv \vec{v}(t_2)$ rappresentano le velocità assunte dal punto materiale rispettivamente ai tempi t_1 e t_2, si definisce accelerazione (vettoriale) media nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$, il rapporto:

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}\,,$$

in cui:

$$\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$
$$\Delta t \equiv t_2 - t_1.$$

Inoltre si definisce accelerazione (vettoriale) istantanea al tempo t_0, il limite:

$$\vec{a}(t_0) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{t \equiv t_0}; \tag{2.15}$$

esprimendo il differenziale $d\vec{v}$ della velocità come:

$$d\vec{v} = \hat{x}\,dv_x + \hat{y}\,dv_y + \hat{z}\,dv_z\,,$$

l'accelerazione può essere scritta come:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{x}\frac{dv_x}{dt} + \hat{y}\frac{dv_y}{dt} + \hat{z}\frac{dv_z}{dt} = \hat{x}\,a_x + \hat{y}\,a_y + \hat{z}\,a_z\,,$$

dove:

$$\begin{cases} a_x \equiv \dfrac{dv_x}{dt}, \\ a_y \equiv \dfrac{dv_y}{dt}, \\ a_z \equiv \dfrac{dv_z}{dt}, \end{cases}$$

sono le componenti del vettore $\vec{a}$. Utilizzando la definizione di velocità (2.12) è possibile esprimere l'accelerazione attraverso il vettore posizione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt},$$

per cui si ha:

$$\begin{cases} a_x \equiv \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y \equiv \dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z \equiv \dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Le espressioni della velocità e dell'accelerazione possono essere invertite per determinare, rispettivamente, la posizione e la velocità del corpo. Pertanto, dalla (2.12) risulta:

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt\,;$$

dalle relazioni (2.3) e (2.13) questa identità vettoriale può esprimersi come:

$$\hat{x}\, dx + \hat{y}\, dy + \hat{z}\, dz = \hat{x}\, v_x\, dt + \hat{y}\, v_y\, dt + \hat{z}\, v_z\, dt\,;$$

che corrisponde alle identità scalari:

$$dx = v_x\, dt,$$
$$dy = v_y\, dt,$$
$$dz = v_z\, dt.$$

Tali espressioni possono essere integrate separatamente, ottenendo così:

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} d\xi = \int_{t_0}^{t} v_x \, d\zeta, \\ \int_{y_0}^{y} d\xi = \int_{t_0}^{t} v_y \, d\zeta, \\ \int_{z_0}^{z} d\xi = \int_{t_0}^{t} v_z \, d\zeta, \end{cases}$$

in cui:

$$\vec{r}_0 \equiv \hat{x}\, x_0 + \hat{y}\, y_0 + \hat{z}\, z_0 \,, \tag{2.16}$$

rappresenta il vettore posizione all'istante t_0. Sviluppando le espressioni precedenti si ottiene, quindi:

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x \, d\zeta, \\ y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y \, d\zeta, \\ z = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z \, d\zeta; \end{cases}$$

è possibile ricondurre queste tre relazioni scalari ad una relazione di tipo vettoriale, moltiplicando ciascuna relazione, rispettivamente, per i versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ e sommando, successivamente, membro a membro:

$$\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z = \hat{x}\, x_0 + \hat{y}\, y_0 + \hat{z}\, z_0 + \hat{x} \int_{t_0}^{t} v_x \, d\zeta + \hat{y} \int_{t_0}^{t} v_y \, d\zeta + \hat{z} \int_{t_0}^{t} v_z \, d\zeta \,;$$

d'altra parte, siccome i versori sono indipendenti dal tempo, possono essere portati sotto il segno di integrale e, applicando l'additività di tale operatore, dalle relazioni (2.2), (2.13) e (2.16) segue infine:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(\hat{x}\, v_x + \hat{y}\, v_y + \hat{z}\, v_z \right) d\zeta = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} \, d\zeta \,. \tag{2.17}$$

Si osservi che tale risultato corrisponde, formalmente, alla relazione (2.8) ricavata nel caso unidimensionale.

Esempio: (*moto uniforme*) Se la velocità del punto materiale è indipendente dal tempo e pari a $\vec{v}_0$, dalla (2.17) segue:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 \, d\zeta = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} d\zeta = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \left(t - t_0 \right)$$

e, in particolare, se $t_0 \equiv 0$, segue:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t.$$

Esempio: (*moto uniformemente accelerato*) Se l'accelerazione del punto materiale è indipendente dal tempo e pari a $\vec{a}_0$, integrando la relazione $d\vec{v} = \vec{a}_0\, dt$ dedotta dalla (2.15), segue:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0\, d\zeta = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \left(t - t_0\right),$$

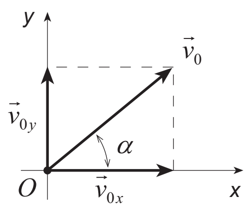
sostituendo questa espressione nella (2.17), si ha:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}\, d\zeta = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\vec{v}_0 + \vec{a}_0 \left(\zeta - t_0\right)\right] d\zeta = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\vec{a}_0 \left(t - t_0\right)^2 .$$

In particolare, se $t_0 \equiv 0$ si ha:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t, \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 . \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Esempio: (*moto di un proiettile*) Consideriamo il moto di un corpo lanciato dalla superficie terrestre con velocità $\vec{v}_0$. Supponiamo che siano trascurabili la resistenza dell'aria e la curvatura della Terra e inoltre assumiamo che l'accelerazione sia uniforme durante il moto e pari a $-\hat{y}\, g$, avendo scelto il sistema di riferimento *xy* coincidente col piano definito dai vettori $\vec{v}_0$ e $\hat{y}$, l'asse *y* diretto verso l'alto e l'origine coincidente col punto di partenza del proiettile; allora:



$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \vec{g} = -\hat{y}\, g, \\ \vec{v}_0 &= \hat{x}\, v_{0x} + \hat{y}\, v_{0y}, \\ \vec{r}_0 &= \vec{0}, \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{cases} v_{0x} \equiv v_0 \cos\alpha, \\ v_{0y} \equiv v_0 \sin\alpha. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Dalle relazioni (2.18), la velocità $\vec{v}$ del proiettile risulterà espressa dalla legge:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = \vec{v}_0 - \hat{y}\, g\, t,$$

che può essere esplicitata come:

$$\hat{x}\, v_x + \hat{y}\, v_y + \hat{z}\, v_z = \hat{x}\, v_{0x} + \hat{y}\, v_{0y} - \hat{y}\, g\, t,$$

da cui seguono le identità scalari:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x}, \\ v_y = v_{0y} - g\, t, \\ v_z = 0; \end{cases}$$

dalle relazioni (2.18), il vettore posizione $\vec{r}$ del proiettile sarà espresso dalla legge:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\hat{y}\, g\, t^2$$

che può essere esplicitata come:

$$\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z = \hat{x}\, v_{0x}\, t + \hat{y}\, v_{0y}\, t - \frac{1}{2}\hat{y}\, g\, t^2$$

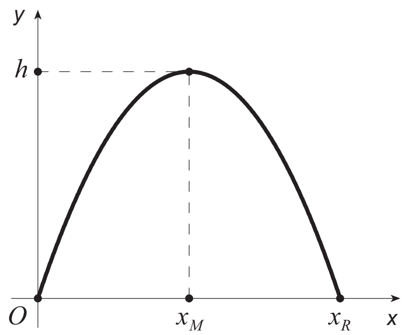
da cui seguono le identità scalari:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\, t, \\ y = v_{0y}\, t - \dfrac{1}{2} g\, t^2, \\ z = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Siccome $v_z = 0$, il moto si esplica nel piano *xy*. È possibile ricavare l'equazione che descrive la traiettoria eliminando il parametro *t* dalle relazioni precedenti; sostituendo $t = x/v_{0x}$ nella seconda relazione, segue:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2 v_{0x}^{\ 2}} x^2;$$

La traiettoria, quindi, è parabolica, con la concavità rivolta verso il basso. Il tempo t_M in corrispondenza del quale il proiettile raggiunge la massima quota si trova osservando che per $t \equiv t_M$ la velocità verticale v_y è nulla, cioè:



$$0 = v_{0y} - g\, t_M\,,$$

da cui, facendo uso delle relazioni (2.19) segue:

$$t_M = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

così, sostituendo tale tempo nella legge oraria (2.20) per la coordinata *y*, si trova la quota massima *h* raggiunta dal proiettile:

$$h = v_{0y}\, t_M - \frac{1}{2} g\, t_M^{\ 2} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^{\ 2}}{2g} = \frac{v_0^{\ 2}(\sin\alpha)^2}{2g}.$$

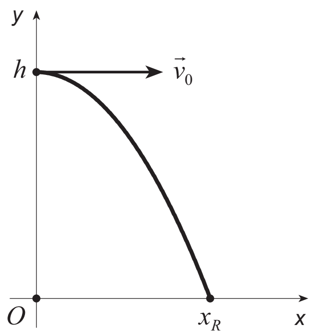
Dalla simmetria della parabola segue che il tempo di volo t_R necessario affinché il proiettile torni al livello del suolo è il doppio di t_M, così:

$$t_R = 2t_M = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Infine la *gittata* x_R, ovvero la distanza coperta in direzione orizzontale è data dal valore assunto dalla coordinata *x* al tempo t_R; così dalle relazioni (2.20) segue:

$$x_R = v_{0x}\, t_R = v_{0x}\frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^{\ 2}(\sin\alpha)(\cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^{\ 2}\sin(2\alpha)}{g},$$

da cui si evince che la gittata è massima quando l'angolo α vale $45°$.



Esempio: Nelle stesse condizioni dell'esempio precedente consideriamo la caduta di un corpo da un'altezza h al quale viene fornita una velocità orizzontale $\vec{v}_0$. L'accelerazione cui è soggetto il corpo (nel sistema di riferimento di figura) è:

$$\vec{a}_0 = -\hat{y}\, g\,,$$

e inoltre la velocità iniziale e la posizione iniziale valgono, rispettivamente:

$$\vec{v}_0 = \hat{x}\, v_0\,,$$
$$\vec{r}_0 = \hat{y}\, h\,.$$

Pertanto il moto è uniformemente accelerato e dalle relazioni (2.18) segue:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\, t = \hat{x}\, v_0 - \hat{y}\, g\, t\,,$$

cioè:

$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ v_y = -g\, t, \\ v_z = 0; \end{cases}$$

dalle relazioni (2.18) il vettore posizione $\vec{r}$ del corpo è dato dall'espressione:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 = \hat{y}\, h + \hat{x}\, v_0 t - \frac{1}{2}\hat{y}\, g\, t^2,$$

cioè:

$$\begin{cases} x = v_0\, t, \\ y = h - \dfrac{1}{2} g\, t^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso il moto è piano. Sostituendo $t = x/v_0$ nella seconda delle relazioni precedenti, si trova l'equazione della traiettoria:

$$y = h - \frac{g}{2{v_{0x}}^2} x^2,$$

quindi il moto è di tipo parabolico. Ponendo $y = 0$ nella legge oraria per la coordinata y si trova il tempo t_c che impiega il corpo a raggiungere il suolo:

$$0 = h - \frac{1}{2} g\, {t_c}^2,$$

da cui segue:

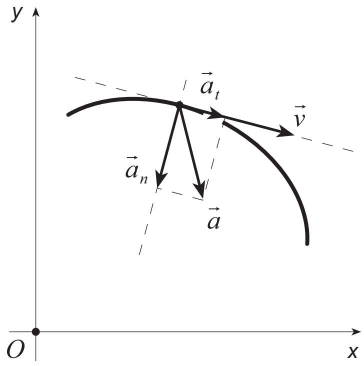
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

ossia il corpo raggiunge il suolo allo stesso tempo di un corpo lasciato cadere dalla stessa altezza con velocità iniziale nulla. La massima coordinata x raggiunta è:

$$x_R = v_0\, t_R = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

2.4 Componenti dell'accelerazione

Consideriamo il moto di un punto materiale lungo una traiettoria curva che, per semplicità, assumiamo piana. Il vettore accelerazione ha la stessa direzione della variazione istantanea della velocità così, poiché la velocità cambia nella direzione in cui la traiettoria si incurva, l'accelerazione è sempre diretta verso la concavità della curva. Scomponiamo quindi il vettore accelerazione lungo la direzione tangente alla traiettoria, indicata dal versore $\hat{t}$ e la direzione normale alla traiettoria, indicata dal versore $\hat{n}$:

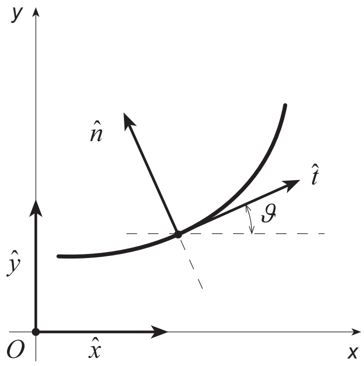


$$\vec{a} = \hat{t}\, a_t + \hat{n}\, a_n\,; \tag{2.21}$$

chiameremo la componente a_t *accelerazione tangenziale* e a_n *accelerazione normale* o *centripeta*. Per ricavare delle espressioni per tali quantità, ricordando che il vettore velocità $\vec{v}$ è diretto lungo la tangente alla curva, scriviamo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{t}\, v\right) = \hat{t}\,\frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{t}}{dt}v. \tag{2.22}$$

La derivata di $\hat{t}$ può essere ricavata esprimendo tale versore attraverso i versori degli assi, risulta infatti:



$$\hat{t} = \hat{x}\cos\vartheta + \hat{y}\sin\vartheta\,,$$

così derivando tale espressione, si ha:

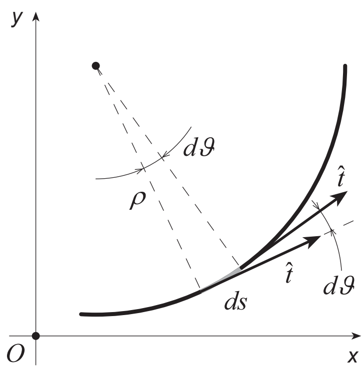
$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\hat{x}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \hat{y}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \left(-\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt}\,;$$

d'altra parte, siccome il versore $\hat{n}$ forma con l'asse *x* l'angolo $\vartheta + \pi/2$, risulta

$$\hat{n} = \hat{x}\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{y}\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta\,,$$

così:

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \hat{n}\frac{d\vartheta}{dt}\,. \tag{2.23}$$



Inoltre, se ρ rappresenta il raggio di curvatura[2] della traiettoria nel punto considerato, risulta:

$$ds = \rho\, d\vartheta\,,$$

[2] Il *raggio di curvatura* in un dato punto di una curva è il raggio del cerchio (*cerchio osculatore*) che meglio approssima la curva nel punto assegnato.

così:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}.$$

Sostituendo quindi questa relazione nella (2.23) e poi nell'espressione dell'accelerazione (2.22), si ha:

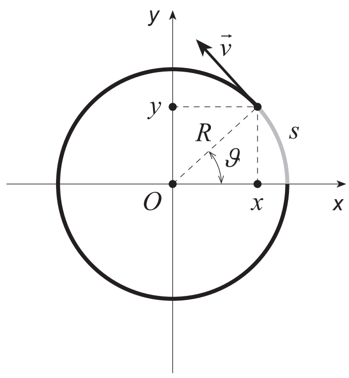
$$\vec{a} = \hat{t}\frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{t}}{dt}v = \hat{t}\frac{dv}{dt} + \hat{n}v\frac{d\vartheta}{dt} = \hat{t}\frac{dv}{dt} + \hat{n}\frac{v^2}{\rho}, \tag{2.24}$$

pertanto le componenti dell'accelerazione valgono:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt}, \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Se il modulo della velocità è costante, da tali relazioni segue che la componente tangenziale a_t dell'accelerazione è nulla, inoltre se la traiettoria è rettilinea e, di conseguenza $\rho \to \infty$, allora è nulla la componente normale a_n dell'accelerazione.

Esempio: (*moto circolare*) Si dice circolare il moto la cui traiettoria è una circonferenza., Siccome il vettore velocità cambia sempre di direzione, dalla relazione (2.24) segue che l'accelerazione centripeta risulterà sempre diversa da zero; l'accelerazione tangenziale invece sarà nulla nel caso di *moto circolare uniforme*, quando il modulo della velocità si mantiene costante nel tempo. La descrizione del moto circolare può essere effettuata attraverso l'impiego delle coordinate cartesiane oppure tramite l'ascissa curvilinea o, ancora, con le coordinate polari; tutte queste descrizioni sono legate tra loro essendo:



$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta, \\ y = R\sin\vartheta, \end{cases}$$

ovvero

$$s = R\vartheta,$$

dove x e y rappresentano le coordinate cartesiane del punto, R il raggio della circonferenza, ϑ l'angolo polare e s l'ascissa curvilinea. Dalla relazione (2.14) il modulo della velocità in questo moto vale:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\vartheta}{dt} = R\omega, \tag{2.26}$$

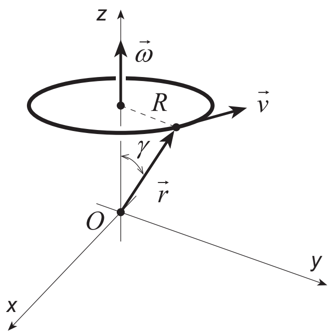
dove

$$\omega \equiv \frac{d\vartheta}{dt} \tag{2.27}$$

è detta *velocità angolare* o *pulsazione* e, dimensionalmente si esprime come:

$$[\omega] = \frac{rad}{s}.$$

È possibile dare un'interpretazione vettoriale della velocità angolare disponendo un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale in modo che la traiettoria giaccia nel piano xy ed il suo centro sia situato nell'origine O del sistema di riferimento. Poniamo:



$$\vec{\omega} \equiv \hat{z}\,\omega,$$

e consideriamo il vettore:

$$\vec{u} \equiv \vec{\omega} \times \vec{r}\,,$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione del corpo durante il moto circolare. Allora dalla (2.26) il modulo di $\vec{u}$ vale:

$$u = \omega r \sin\gamma = R\omega = v\,,$$

essendo $r\sin\gamma = R$; d'altra parte $\vec{u}$ è diretto istante per istante nella direzione di $\vec{v}$, cioè:

$$\frac{\vec{u}}{u} = \frac{\vec{v}}{v},$$

pertanto valendo anche l'identità tra i moduli dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vuol dire che questi due vettori sono tra loro uguali, e quindi risulta:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \tag{2.28}$$

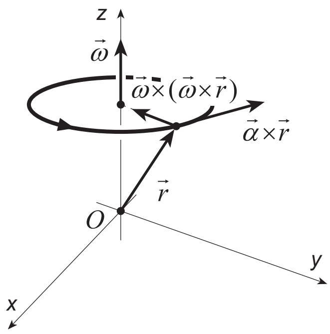
dove $\vec{\omega}$, limitatamente al moto circolare, è un vettore perpendicolare al piano della traiettoria e diretto nel senso di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel senso del moto. Dalla relazione (2.28), l'accelerazione nel moto circolare può esprimersi come:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right), \tag{2.29}$$

dove si è posto:

$$\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \tag{2.30}$$

che è denominata *accelerazione angolare*. Siccome la variazione $d\vec{\omega}$ del vettore $\vec{\omega}$ è sempre diretta nella direzione del vettore $\vec{\omega}$ stesso, il vettore $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è disposto tangenzialmente alla traiettoria ed il verso dipende dal segno della derivata $d\omega/dt$; il vettore $\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)$ è diretto normalmente alla traiettoria. Questi vettori costituiscono quindi le componenti tangenziali e normali alla traiettoria del vettore accelerazione:



$$\begin{cases} a_t = \left|\vec{\alpha} \times \vec{r}\right|, \\ a_n = \left|\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right|; \end{cases}$$

in particolare, il loro modulo vale, rispettivamente:

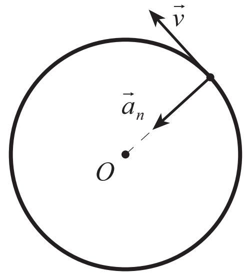
$$a_t = \left|\vec{\alpha} \times \vec{r}\right| = \alpha r \sin\gamma = R\alpha\,,$$

e

$$a_n = \left|\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right| = \omega\left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \omega^2 r \sin\gamma = R\omega^2 \cdot$$

Ciò in accordo con le relazioni (2.25), essendo l'accelerazione tangenziale $dv/dt = d\left(R\omega\right)/dt = R\,d\omega/dt = R\alpha$ e l'accelerazione normale $v^2/R = \left(R\,\omega\right)^2/R = R\,\omega^2$; pertanto risulta:

$$\vec{a} = \hat{t}\,a_t + \hat{n}\,a_n = \hat{t}\,R\alpha + \hat{n}\,R\omega^2 \tag{2.31}$$



Come già anticipato, nel moto circolare uniforme, siccome $dv/dt = 0$, è nulla la componente tangenziale dell'accelerazione; poiché tale componente vale anche $R\alpha = R\,d\omega/dt$, la velocità angolare si mantiene costante nel tempo. Indicando con ω_0 il modulo della velocità angolare, dalla relazione (2.27) segue $d\vartheta = \omega_0\,dt$ che, integrata, fornisce la legge di variazione temporale dell'angolo polare ϑ:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0\left(t - t_0\right),$$

in cui ϑ_0 è l'angolo corrispondente all'istante t_0. In corrispondenza di un giro completo del punto materiale lungo la traiettoria circolare si ha $\vartheta - \vartheta_0 = 2\pi$, così, indicando con $T \equiv t - t_0$ il tempo necessario a percorrere tale giro, risulta:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{2.32}$$

dove T è detto *periodo* del moto circolare. Si definisce *frequenza* del moto la quantità:

$$f \equiv \frac{1}{T} \tag{2.33}$$

e, dimensionalmente, siccome $\left[T\right] = s$, allora:

$$\left[f\right] = \left[\frac{1}{T}\right] = \frac{1}{s} \equiv Hz,$$

cioè s^{-1} è detto *hertz*. Con l'introduzione della frequenza, dalla (2.32) la velocità angolare si scrive:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,\cdot \tag{2.34}$$

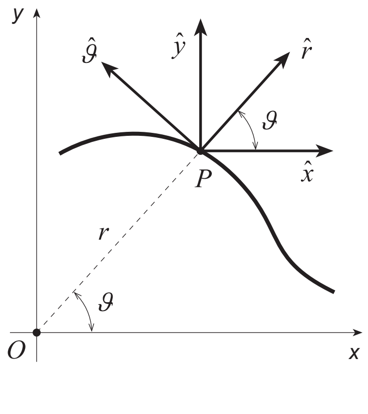
Qualora l'accelerazione angolare si mantiene costante nel tempo, indicando con α_0 il suo modulo, dalla (2.30) segue $d\omega = \alpha_0\,dt$ che integrata fornisce la legge di variazione temporale della velocità angolare:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0\left(t - t_0\right),$$

in cui ω_0 è la velocità angolare al tempo t_0. Infine, dalla (2.27) segue:

$$\begin{aligned}\vartheta &= \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega\,d\zeta = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t}\left[\omega_0 + \alpha_0\left(\zeta - t_0\right)\right]d\zeta = \\ &= \vartheta_0 + \omega_0\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\alpha_0\left(t - t_0\right)^2,\end{aligned}$$

che fornisce la legge di variazione temporale dell'angolo polare ϑ.



Esempio: (*cinematica del moto piano in coordinate polari*) Siano $\hat{r}$ e $\hat{\vartheta}$ rispettivamente il versore associato alla direzione del vettore posizione di un punto P ed il versore ortogonale a tale direzione orientato come mostrato in figura. Con riferimento alla figura, questi versori possono esprimersi relativamente ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale come:

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\vartheta + \hat{y}\sin\vartheta,$$
$$\hat{\vartheta} = \hat{x}\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{y}\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta;$$

derivando tali versori rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\hat{x}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + \hat{y}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \left(-\hat{x}\sin\vartheta + \hat{y}\cos\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt} = \hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt},$$
$$\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = -\hat{x}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} - \hat{y}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -\left(\hat{x}\cos\vartheta + \hat{y}\sin\vartheta\right)\frac{d\vartheta}{dt} = -\hat{r}\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Utilizzando tali identità è possibile stabilire le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto su un piano, nelle coordinate polari r e ϑ. La velocità di un punto di vettore posizione $\vec{r}$ vale:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(r\hat{r}\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}, \qquad (2.35)$$

e la corrispondente accelerazione è data da:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\vartheta} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{\vartheta} + r\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = \\
&= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{r} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\vartheta} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{\vartheta} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{\vartheta} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\hat{r} = \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right]\hat{\vartheta} = \\
&= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right)\right]\hat{\vartheta}.
\end{aligned} \qquad (2.36)$$