

Marco Panareo

Introduzione allo studio delle reti elettriche

Indice

1. Reti elettriche lineari	1
1.1 Legge di Kirchhoff per le correnti	1
1.1 Legge di Kirchhoff per le tensioni	1
1.1 Soluzione di una rete elettrica	1
1.2 Elementi delle reti lineari	2
1.5 Leggi fondamentali delle reti elettriche	4
Principio di sovrapposizione	4
Teoremi di Thevenin e di Norton	4
Teorema di Miller	4
1.6 Quadrupoli	5
Caratteristiche dei quadrupoli	5
2. Eccitazioni sinusoidali	7
2.1 Dominio della frequenza	8
2.2 Funzione del sistema e funzione di trasferimento	9
2.3 Risposta di una rete nel dominio del tempo	10
3. Trasformata di Laplace	15
3.1 Integrale di Laplace	15
3.2 Esempi di trasformate	16
3.3 Funzione impulsiva unitaria o delta di Dirac	17
3.4 Teoremi sulle trasformate di Laplace	18
3.5 Convoluzione	21
3.6 Antitrasformata di Laplace	21
3.7 Antitrasformazione di funzioni razionali fratte	22
4. Applicazione della trasformata di Laplace alla determinazione della risposta dei circuiti	27
4.1 Dominio della frequenza complessa	29
4.2 Teoremi del valore finale e iniziale	32
4.3 Significato fisico delle funzioni di trasferimento	34
4.4 Stabilità dei sistemi	35
4.5 Risposta di regime sinusoidale	36
5. Rappresentazione di Bode	39

1. Reti elettriche lineari

Per rete elettrica si intende un insieme di elementi elettrici interconnessi, ciascuno dei quali è descritto attraverso la relazione tra la corrente che lo attraversa e la tensione (*d.d.p.*) ai suoi capi. Il punto di confluenza di almeno tre elementi è detto *nodo*; l'insieme di elementi compresi tra due nodi contigui è detto *ramo*. Più rami formanti un percorso chiuso costituiscono una *maglia*. In fig.1.1, *A*, *B*, *C* e *D* sono nodi; i rami *a*, *b*, *c*, e *d* formano una maglia.

Le reti elettriche sono studiate attraverso le *leggi di Kirchhoff*.

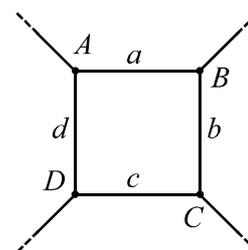


fig.1.1

1.1 Legge di Kirchhoff per le correnti.

Questa legge stabilisce che la somma (algebrica) delle correnti che confluiscono in un nodo (fig.1.2) è uguale a zero:

$$\sum_{k=1}^N i_k = 0,$$

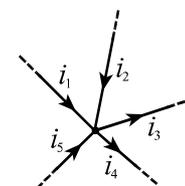


fig.1.2

dove *N* è il numero di rami che confluiscono nel nodo considerato.

1.2 Legge di Kirchhoff per le tensioni.

Questa legge stabilisce che la somma (algebrica) delle tensioni lungo una maglia (fig.1.3) è uguale a zero:

$$\sum_{k=1}^M v_k = 0,$$

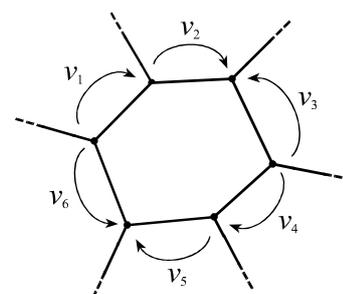


fig.1.3

dove *M* è il numero di nodi che comprende la maglia considerata.

1.3 Soluzione di una rete elettrica.

Si definisce *risposta* o *soluzione* di una rete elettrica l'insieme delle tensioni e delle correnti che costituiscono le soluzioni del sistema di equazioni scritto facendo uso delle leggi di Kirchhoff. In una rete la soluzione di tali equazioni è unica; ciò è provato dal fatto che una rete reale può essere passibile di misura delle sue caratteristiche, tensioni e correnti, ed il risultato di tali misure è unico. Se tuttavia non è unica la soluzione delle equazioni descrittive della rete, allora la descrizione fatta è inadeguata

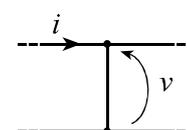


fig.1.4

rispetto alla situazione fisica.

Per studiare una rete occorre stabilire dei versi (convenzionali) per le tensioni e per le correnti. L'arbitrarietà della scelta comporta che una soluzione negativa corrisponde ad un verso reale opposto a quello scelto convenzionalmente.

Il verso convenzionale di una corrente viene indicato con una freccia. Se si vuole indicare una *d.d.p.* tra due punti, si adopera una linea con una freccia; il punto indicato dalla freccia è quello (convenzionalmente) a potenziale maggiore (fig.1.4).

1.4 Elementi delle reti lineari.

Gli elementi che costituiscono una rete elettrica sono caratterizzati da un parametro; qualora tale parametro risulta indipendente sia dalla tensione ai capi dell'elemento che dalla corrente che lo attraversa, l'elemento viene detto *lineare*. Un elemento lineare può essere descritto attraverso un'equazione integro-differenziale a coefficienti costanti.

Una rete costituita da soli elementi lineari è detta lineare. Gli elementi delle reti elettriche lineari sono: resistenze, induttanze, capacità, generatori.

Resistenza. La relazione fra la tensione v e la corrente i in una resistenza R è espressa dall'equazione:

$$v = Ri$$

in tale relazione R è costante e si misura in *ohm* (Ω); nel piano i, v , tale equazione rappresenta una retta passante per l'origine.

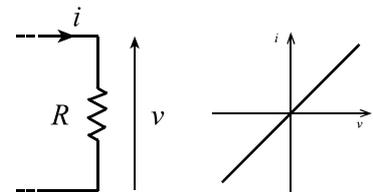


fig.1.5

Induttanza. La relazione fra la tensione v e la corrente i in una induttanza L è espressa dall'equazione:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

in tale relazione L è costante e si misura in *henry* (H).

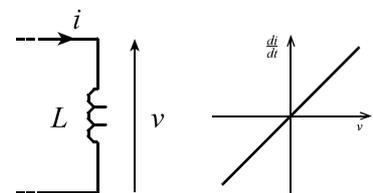


fig.1.6

Capacità. La relazione fra la tensione v e la corrente i in una capacità C è espressa dall'equazione:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

in tale relazione C è costante e si misura in *farad* (F)

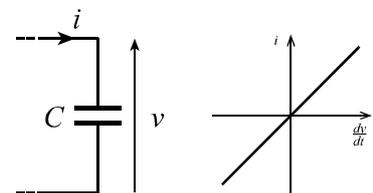


fig.1.7

Generatore di tensione ideale. Si intende un elemento che presenta ai suoi capi una *d.d.p.* v indipendente dalla corrente che lo attraversa e quindi dal carico applicato, ossia:

$$v = V_g$$

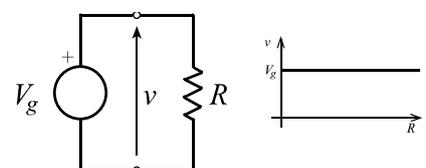


fig.1.8

il grafico che rappresenta la dipendenza della tensione v dalla resistenza R (*curva di carico*) è mostrato in fig.1.8.

Generatore di tensione reale. L'elemento precedente non rappresenta un modello adeguato del corrispondente elemento fisico (in un generatore di tensione ideale se $R = 0$ la corrente erogata sarebbe infinita). È possibile rappresentare un generatore di tensione reale adoperando più componenti ideali (fig.1.9), ad esempio facendo uso della propria resistenza interna (in generale un'impedenza). La *d.d.p.* presente sul carico applicato a questo generatore vale:

$$v = V_g \frac{R}{R + R_g},$$

dove R_g è la resistenza interna del generatore. Dalla rappresentazione grafica della curva di carico si evince che tale generatore si comporta come ideale quando $R \gg R_g$.

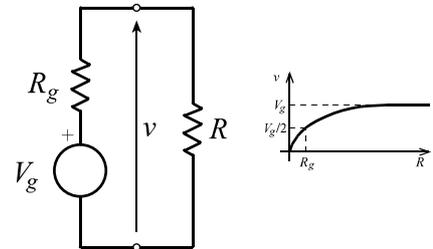


fig.1.9

Generatore di corrente ideale. Si intende un elemento la cui corrente erogata i non dipende dalla tensione ai suoi capi e, quindi, dal carico, ossia:

$$i = I_g,$$

la curva di carico è mostrata in fig.1.10.

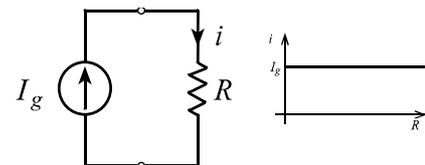


fig.1.10

Generatore di corrente reale. Analogamente al caso del generatore di tensione, il generatore di corrente reale si rappresenta facendo uso di più componenti ideali (fig.1.11). La corrente erogata da questo generatore vale:

$$i = I_g \frac{R_g}{R_g + R}$$

dove R_g è la resistenza interna del generatore. Dal grafico della curva di carico si evince che tale generatore si comporta come ideale quando $R \ll R_g$.

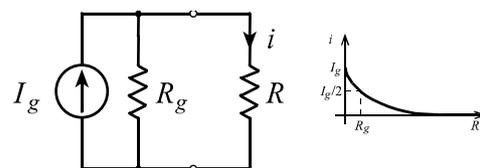


fig.1.11

Generatori dipendenti. Si intende un generatore di tensione o corrente, la cui grandezza erogata dipende dalla tensione o dalla corrente in un'altra parte del circuito; in fig.1.12 sono rappresentate le quattro possibilità, si noti che i parametri μ e h sono adimensionali, mentre α e g hanno rispettivamente le dimensioni di una resistenza e di una conduttanza.

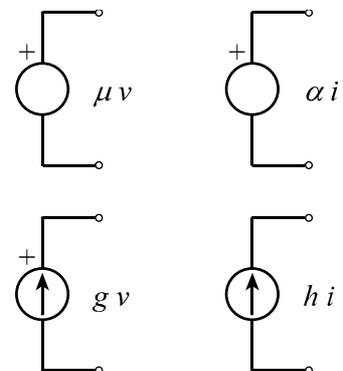


fig.1.12

1.5 Leggi fondamentali delle reti elettriche.

Utilizzando le leggi di Kirchhoff e le equazioni caratteristiche di ciascun elemento si può risolvere qualsiasi rete elettrica. Se la rete è lineare è però possibile utilizzare metodi particolari che permettono di semplificare lo studio.

Principio di sovrapposizione.

Consiste nel determinare gli effetti di ciascun generatore indipendente presente nella rete, annullando tutti gli altri generatori indipendenti. Un generatore indipendente si annulla sostituendolo con la propria resistenza interna, ovvero, se è ideale, sostituendolo con un cortocircuito, se è un generatore di tensione, o sostituendolo con un circuito aperto, se è un generatore di corrente. La risposta, ad esempio la corrente in un ramo, si stabilisce attraverso la somma delle correnti in quel ramo determinate da ciascun generatore preso singolarmente.

Teoremi di Thevenin e di Norton.

Il teorema di Thevenin afferma che una qualsiasi rete lineare compresa tra due morsetti risulta equivalente ad un generatore reale di tensione (fig.1.13); la forza elettromotrice V_e rappresenta la *d.d.p.* che si misura tra i due morsetti della rete, quando questi sono aperti. Il teorema di Norton, duale del precedente, afferma che una qualsiasi rete lineare compresa tra due morsetti risulta equivalente ad un generatore reale di corrente (fig.1.14); I_e è la corrente che attraversa i due morsetti quando questo sono collegati tra loro.

La resistenza R_e si valuta applicando ai due morsetti una *d.d.p.* v e trovando la corrente erogata i dopo aver annullato tutti i generatori indipendenti, risulta $R_e = v/i$

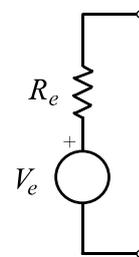


fig.1.13

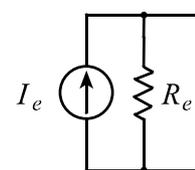


fig.1.14

Teorema di Miller.

Il teorema di Miller afferma che i due circuiti mostrati in fig.1.15 sono equivalenti tra loro, dove le conduttanze G_1 e G_2 valgono rispettivamente:

$$G_1 = G \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right),$$

$$G_2 = G \left(1 - \frac{v_1}{v_2} \right);$$

ovvero che i due circuiti mostrati in fig.1.16 sono equivalenti tra loro, dove le resistenze R_1 e R_2 valgono rispettivamente:

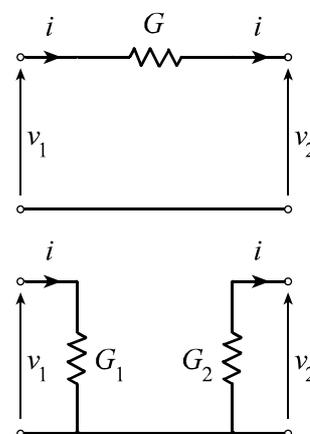


fig.1.15

$$R_1 = R \left(1 + \frac{i_2}{i_1} \right),$$

$$R_2 = R \left(1 + \frac{i_1}{i_2} \right);$$

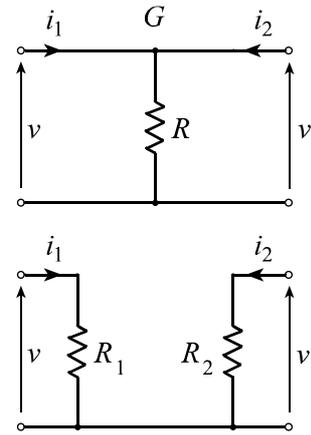


fig.1.16

1.6 Quadrupoli.

Per quadropolo si intende un qualsiasi circuito elettrico dal quale è possibile estrapolare due coppie di morsetti (fig.1.17). Convenzionalmente i versi delle tensioni e delle correnti sono assunti come rappresentato in figura, inoltre, la coppia di morsetti di sinistra è detta di *ingresso* del quadropolo e la coppia di morsetti di destra è detta di *uscita* del quadropolo.

A seconda della scelta di una coppia di variabili *causa* e di una coppia di variabili *effetto*, è possibile descrivere il quadropolo mediante quattro sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} v_1 = z_1(i_1, i_2) \\ v_2 = z_2(i_1, i_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} i_1 = y_1(v_1, v_2) \\ i_2 = y_2(v_1, v_2) \end{cases},$$

$$\begin{cases} v_1 = h_1(i_1, v_2) \\ i_2 = h_2(i_1, v_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} i_1 = g_1(v_1, i_2) \\ v_2 = g_2(v_1, i_2) \end{cases},$$

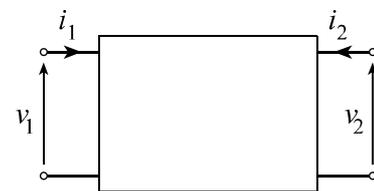


fig.1.17

se la rete è lineare, le funzioni z , y , h e g sono equazioni lineari ed è possibile far uso del metodo simbolico.

In questo contesto prescindere dall'analisi sistematica dei quadropoli attraverso le rappresentazioni indicate dalle precedenti equazioni, tuttavia introdurremo alcune definizioni proprie dei quadropoli, di particolare utilità nello studio dei circuiti elettrici.

Caratteristiche dei quadropoli.

Impedenza di ingresso. Per determinare questa caratteristica si chiudono i morsetti di uscita su un'impedenza di carico Z_C e si applica una *d.d.p.* V_1 all'ingresso, l'impedenza di ingresso del quadropolo è data dalla relazione:



fig.1.18

$$Z_{in} = \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2 = -\frac{V_2}{Z_C}} .$$

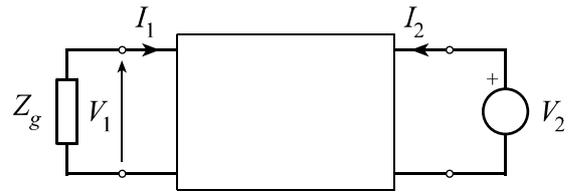


fig.1.19

Impedenza di uscita. Per determinare questa caratteristica si chiudono i morsetti di ingresso sull'impedenza interna Z_g del generatore che

alimenta il quadripolo e si applica ai morsetti di uscita una *d.d.p.* V_2 , l'impedenza di uscita è data dalla relazione:

$$Z_{out} = \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1 = -\frac{V_1}{Z_g}} .$$

Impedenza caratteristica. Rappresenta l'impedenza vista dai morsetti di ingresso quando i morsetti di uscita sono chiusi sulla stessa impedenza caratteristica, risulta:

$$Z_0 = \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2 = -\frac{V_2}{Z_0}} .$$

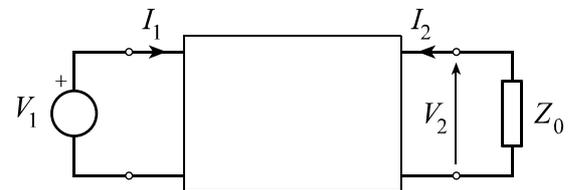


fig.1.20

Amplificazione di corrente. Con riferimento alla fig.1.18 è definita come:

$$A_I = \left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{V_2 = -I_2 Z_C} .$$

Amplificazione di tensione. Con riferimento alla fig.1.18 è definita come:

$$A_V = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{I_2 = -\frac{V_2}{Z_C}} .$$

2. Eccitazioni sinusoidali

Nel capitolo precedente è stato evidenziato che la relazione tra corrente e tensione per un condensatore o per un induttore dipendono dall'espressione matematica delle grandezze applicate.

Una classe importante di eccitazioni di una rete elettrica è costituita dagli stimoli sinusoidali, ossia tali che le grandezze, tensioni e correnti, dipendono dal tempo con legge sinusoidale. In tale contesto, facendo uso del metodo simbolico, è possibile estendere le leggi di Kirchhoff (e più in generale i teoremi esaminati nel capitolo precedente), alle reti stimolate sinusoidalmente; il metodo simbolico prevede che alla grandezza che rappresenta l'eccitazione, sia sostituita formalmente una grandezza esponenziale:

$$e^{j\omega t} \rightarrow \cos \omega t .$$

Quindi viene risolta la rete facendo uso degli strumenti indicati nel capitolo precedente e delle risposte complesse viene determinata la parte reale.

Nel seguito esaminiamo il comportamento di resistenze, induttanze e capacità corrispondente a stimoli sinusoidali.

Resistenza. Con riferimento alle convenzioni relative ai segni di tensione e corrente specificate attraverso la fig.1.5, in corrispondenza di un'eccitazione $i = I_s \cos \omega t$, la cui l'estensione complessa vale $I = I_s e^{j\omega t}$, si ha una risposta complessa V pari a:

$$V = RI_s e^{j\omega t} = RI ,$$

la tensione v vale pertanto:

$$v = \Re\{V\} = \Re\{RI\} = Ri .$$

Induttanza. Con riferimento alle convenzioni sui segni di tensione e corrente indicati nella fig.1.6, in corrispondenza di un'eccitazione $i = I_s \cos \omega t$, posto $I = I_s e^{j\omega t}$, segue:

$$V = L \frac{dI}{dt} = j\omega LI_s e^{j\omega t} = j\omega LI ,$$

e la tensione v vale:

$$v = \Re\{V\} = \Re\{j\omega LI\} = \Re\left\{e^{j\frac{\pi}{2}} \omega LI_s e^{j\omega t}\right\} = \omega LI_s \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

dove si è posto

$$V_L = \omega L I_S .$$

Si noti che, siccome $I_S = V_L / (\omega L)$, allora:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} V_L = 0 ,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_S = 0 ,$$

cioè in corrispondenza di eccitazioni stazionarie ($\omega \rightarrow 0$), l'induttanza si comporta come un cortocircuito, mentre alle alte frequenze ($\omega \rightarrow \infty$) agisce come un circuito aperto.

Capacità. Con riferimento alle convenzioni sui segni di tensione e corrente indicati nella fig.1.7, in corrispondenza di un'eccitazione $v = V_S \cos \omega t$, posto $V = V_S e^{j\omega t}$, segue:

$$I = C \frac{dV}{dt} = j\omega C V_S e^{j\omega t} = j\omega C V ,$$

e la corrente i vale:

$$i = \Re \{ I \} = \Re \{ j\omega C V \} = \Re \left\{ e^{j\frac{\pi}{2}} \omega C V_S e^{j\omega t} \right\} = \omega C V_S \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_C \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) ,$$

dove si è posto

$$I_C = \omega C V_S .$$

Si noti che, siccome $V_S = I_C / (\omega C)$, allora:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_C = 0 ,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_S = 0 ,$$

cioè in corrispondenza di eccitazioni stazionarie ($\omega \rightarrow 0$), il condensatore si comporta come un circuito aperto, mentre alle alte frequenze ($\omega \rightarrow \infty$) agisce come un cortocircuito.

2.1 Dominio della frequenza.

La risoluzione di una rete coi principi di Kirchhoff in forma complessa determina un insieme di equazioni algebriche dipendenti dalla sola frequenza. La risposta (a regime) all'eccitazione sinusoidale è stabilita attraverso la risoluzione di un'equazione algebrica anziché di un'equazione differenziale. Ciò è conseguenza del fatto che si è sostituita alla variabile tempo la variabile frequenza.

Un segnale sinusoidale $x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi)$, rappresentato in funzione del tempo, può essere descritto in maniera altrettanto completa in funzione della frequenza. Allo scopo occorre specificare l'ampiezza e la

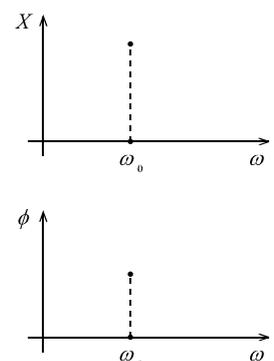


fig.2.1

fase in corrispondenza della pulsazione ω_0 del segnale (fig.2.1).

Si è così trasferita sia l'analisi del segnale che quella della rete, dal *dominio del tempo* al *dominio della frequenza*. Il legame fra la pulsazione ω ed il periodo T è:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Nella pratica la pulsazione è scarsamente utilizzata ed al suo posto si adopera la frequenza f , che è legata a ω dalla relazione $f = \omega/(2\pi)$.

2.2 Funzione del sistema e funzione di trasferimento.

Si consideri un'arbitraria rete elettrica la cui eccitazione sia $x(t)$ e la cui risposta sia $y(t)$. Nelle reti elettriche $x(t)$ può rappresentare un'eccitazione in corrente o in tensione, $y(t)$ una risposta in corrente o in tensione.

In regime sinusoidale il rapporto tra la risposta e l'eccitazione, espresso nel dominio della frequenza vale:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)e^{j\omega t}}{X(\omega)e^{j\omega t}} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)},$$

tale rapporto, detto *funzione del sistema*, dipende da ω tramite gli elementi della rete, ma è indipendente dal tempo. Questa proprietà rende la funzione del sistema particolarmente utile nell'analisi delle reti elettriche; essa permette infatti di prevedere il comportamento della rete una volta nota la frequenza del segnale sinusoidale applicato, ossia fornisce la *risposta in frequenza* della rete.

Se l'eccitazione e la risposta sono definite rispetto alla stessa coppia di terminali, la funzione del sistema viene anche chiamata *funzione del punto di comando*, e può essere un'impedenza $Z(\omega) = V(\omega)/I(\omega)$ oppure un'ammettenza $Y(\omega) = I(\omega)/V(\omega)$ a seconda se l'eccitazione sia una corrente o una tensione.

Se l'eccitazione e la risposta sono definiti rispetto a due coppie distinte di terminali, la funzione del sistema viene anche chiamata *funzione di trasferimento* e può essere il rapporto tra una tensione e una corrente (impedenza) o viceversa (ammettenza), il rapporto tra tensioni, il rapporto tra correnti.

Esempio. Nella rete di fig.2.2 si consideri come eccitazione una corrente e si valuti la funzione del punto di comando.

Considerando direttamente le estensioni complesse, si ha:

$$V(\omega) = I(\omega) \left[j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}} \right],$$

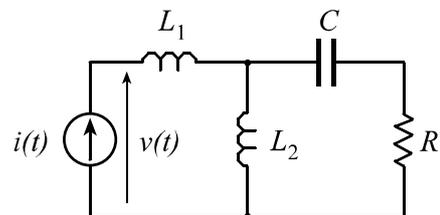


fig.2.2

così la funzione del punto di comando del sistema (in questo caso un'impedenza) vale:

$$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{j\omega L_2 + R + \frac{1}{j\omega C}}.$$

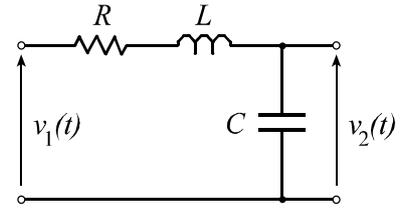


fig.2.3

Esempio. Si determini la funzione di trasferimento $G(\omega) = V_2(\omega)/V_1(\omega)$ della rete di fig.2.3.

Risulta:

$$V_2(\omega) = V_1(\omega) \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = V_1(\omega) \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC},$$

da cui segue:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.$$

Si osservi che per studiare la rete nel dominio del tempo è necessario risolvere l'equazione integro-differenziale:

$$v_1(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi,$$

(considerando la capacità inizialmente scarica, ossia $v_2(0^-) = 0$) e ricavare $i(t)$ da sostituire poi nella relazione

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi.$$

2.3 Risposta di una rete nel dominio del tempo.

Consideriamo una rete di funzione di trasferimento $G(\omega)$; poiché $G(\omega)$ è un numero complesso può essere rappresentato in forma esponenziale:

$$G(\omega) = |G(\omega)| e^{j\phi(\omega)},$$

dove $|G(\omega)|$ e $\phi(\omega)$ sono, rispettivamente, il modulo e la fase di $G(\omega)$. Si noti che $|G(\omega)|$ e $\phi(\omega)$ sono grandezze caratteristiche della rete: $|G(\omega)|$ rappresenta il rapporto tra le ampiezze del segnale all'uscita e di quello all'ingresso, $\phi(\omega)$ lo sfasamento.

Tali grandezze hanno un importante significato fisico perché permettono di dedurre da un'eccitazione sinusoidale in ingresso, la risposta della rete; infatti, se:

$$x(t) = X \cos \omega t,$$

allora:

$$X(\omega) = |X| e^{j\omega t},$$

ne segue che

$$Y(\omega) = G(\omega) X(\omega) = |G(\omega)| e^{j\phi(\omega)} |X| e^{j\omega t} = |G(\omega)| |X| e^{j[\omega t + \phi(\omega)]},$$

così la risposta $y(t)$ della rete è:

$$y(t) = \Re\{Y(\omega)\} = |G(\omega)| X \cos[\omega t + \phi(\omega)].$$

Pertanto $G(\omega)$ e $\phi(\omega)$ permettono di stabilire la risposta della rete a qualsiasi eccitazione sinusoidale.

Raccogliendo ω dalla relazione precedente, segue:

$$y(t) = |G(\omega)| X \cos\left\{\omega\left[t + \frac{\phi(\omega)}{\omega}\right]\right\},$$

dove $\phi(\omega)/\omega$ ha le dimensioni di un tempo. Dalle espressioni nel dominio del tempo dell'eccitazione e della risposta appare pertanto che non solo esse hanno ampiezze diverse, ma traslano rispetto al tempo (fig.2.4).

Il tempo t_d definito attraverso l'espressione precedente come:

$$t_d = \frac{\phi(\omega)}{\omega} = \frac{T}{2\pi} \phi\left(\frac{2\pi}{T}\right),$$

viene chiamato *ritardo di fase*.

Affinché l'ampiezza del segnale in uscita e il ritardo di fase t_d non dipendano dalla pulsazione, occorre che si abbia:

$$\begin{aligned} |G(\omega)| &= cost, \\ t_d &= \frac{\phi(\omega)}{\omega} = cost; \end{aligned}$$

in tal caso le curve caratteristiche sono quelle mostrate in fig.2.5.

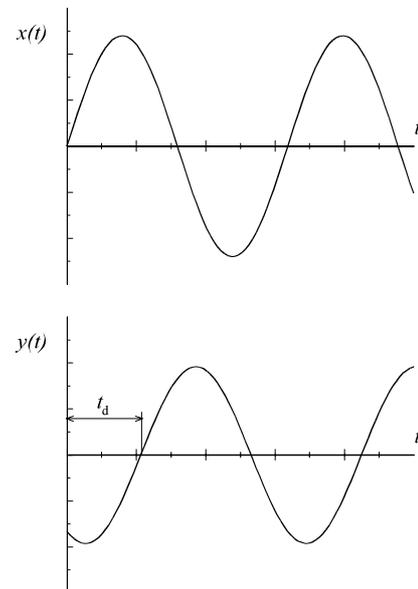


fig.2.4

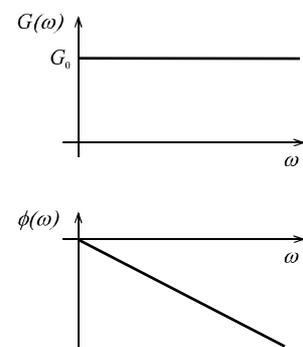


fig.2.5

Esempio. (Circuito RC) Si determini la funzione di trasferimento $G(\omega) = V_2(\omega)/V_1(\omega)$ in modulo e fase della rete di fig.2.6.

Risulta:

$$V_2(\omega) = V_1(\omega) \frac{j\omega C}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V_1(\omega) \frac{1}{1 + j\omega RC} = V_1(\omega) \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

dove si è posto $\tau = RC$; pertanto la funzione di trasferimento vale:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

e le espressioni in modulo e fase sono, rispettivamente:

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}},$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau).$$

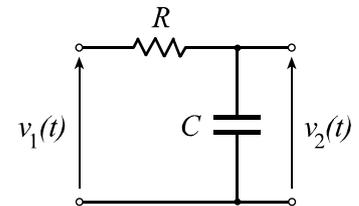


fig.2.6

In fig.2.7 sono rappresentate queste due grandezze in funzione della frequenza f pari a $\omega/(2\pi)$.

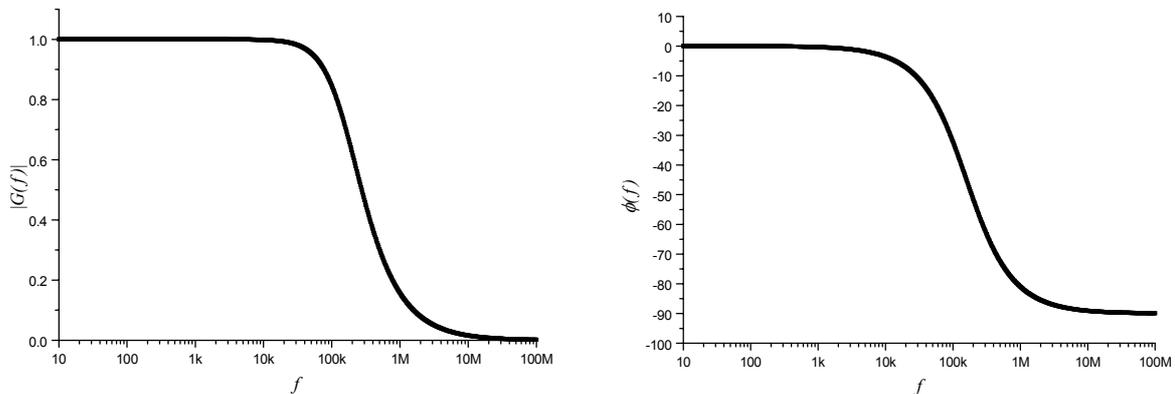


fig.2.7

Esempio. (Circuito CR) Si determini la funzione di trasferimento $G(\omega) = V_2(\omega)/V_1(\omega)$ in modulo e fase della rete di fig.2.8.

Risulta:

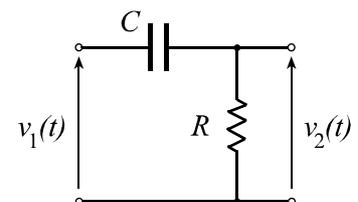


fig.2.8

$$V_2(\omega) = V_1(\omega) \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V_1(\omega) \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = V_1(\omega) \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau},$$

dove si è posto $\tau = RC$; pertanto la funzione di trasferimento vale:

$$G(\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

e le espressioni in modulo e fase sono, rispettivamente:

$$|G(\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}},$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau).$$

In fig.2.9 sono rappresentate queste due grandezze in funzione della frequenza.

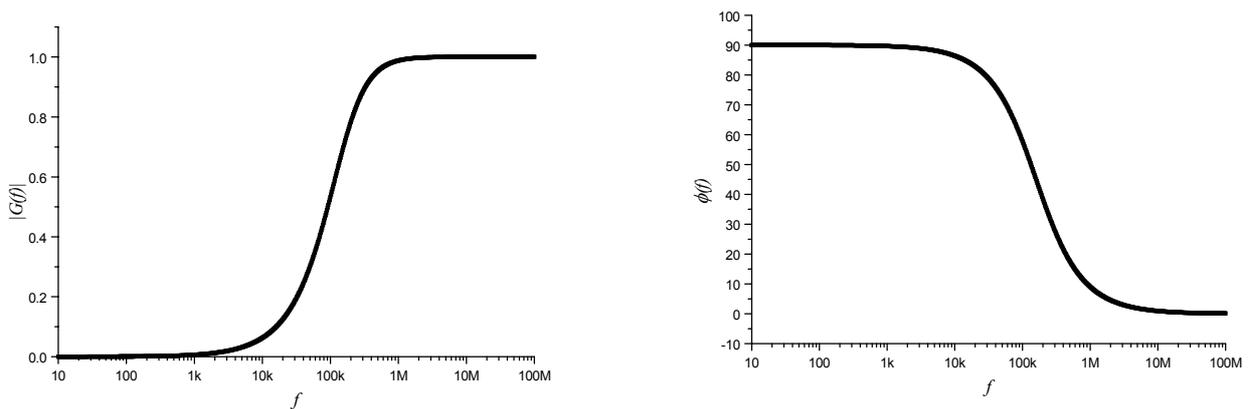


fig.2.9

3. Trasformata di Laplace

Per *metodo trasformatzionale* si intende un algoritmo finalizzato alla semplificazione di un'operazione matematica; si associa, cioè, ad un determinato problema, un problema ad esso equivalente, ma di più semplice soluzione.

Il metodo simbolico, adoperato per stabilire la risposta di una rete ad uno stimolo sinusoidale, può essere interpretato come un metodo trasformatzionale, ed esteso ad un generico segnale, mediante un algoritmo denominato *trasformazione di Fourier*.

3.1 Integrale di Laplace.

La trasformata di Laplace L rappresenta una generalizzazione della analoga trasformata di Fourier, ed è un'operazione che si esegue sulle funzioni di variabile reale per trasformarle in funzioni di variabile complessa, ossia se $f(t)$, con $t \in \mathbb{R}$, è una funzione trasformabile secondo Laplace, allora:

$$L : f(t) \mapsto F(s),$$

dove $s, F(s) \in \mathbb{C}$, e cioè $F(s)$ è una funzione complessa di variabile complessa.

Per introdurre questo metodo faremo riferimento alle sole funzioni del tempo, ossia il tempo sarà la variabile indipendente; sia pertanto:

$$f(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0,$$

allora la trasformata di Laplace $F(s)$ di tale funzione è definita come:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0^+ \\ t_2 \rightarrow \infty}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt,$$

dove $s \in \mathbb{C}$ è:

$$s = \sigma + j\omega$$

con $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, L'integrale che compare nella definizione di trasformata prende il nome di *integrale di Laplace*. Naturalmente la funzione $F(s)$ così definita ha senso per i soli valori di s per i quali l'integrale di Laplace risulta convergente.

3.2 Esempi di trasformate.

$f(t) = \eta(t)$ (gradino unitario). Consideriamo la funzione così definita (fig.3.1):

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases},$$

allora la trasformata di $\eta(t)$ vale:

$$L[\eta(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \eta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

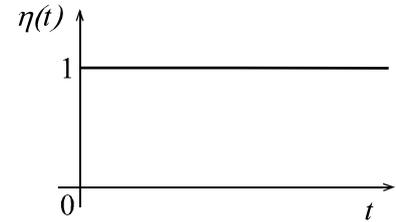


fig.3.1

Si noti che l'integrale converge per $\sigma \geq 0$, poiché se $\sigma < 0$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = \infty.$$

pertanto si dice che $\sigma = 0$ è l'ascissa di convergenza.

$f(t) = e^{-kt}$. Sia $k \in \mathbb{R}$, allora:

$$L[e^{-kt}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-kt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+k)t} dt = -\frac{1}{s+k} e^{-(s+k)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+k}.$$

Si osservi che in questo caso l'ascissa di convergenza è $\sigma = -k$.

$f(t) = \sin \omega t$. Poiché è possibile scrivere:

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

allora

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2j} dt = \frac{1}{2j} \left(\int_0^{\infty} e^{-st} e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-j\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Naturalmente non c'è bisogno di calcolare ogni volta la trasformata di Laplace di una funzione ricorrendo alla formula data, in quanto per le funzioni più comuni le trasformate si trovano già tabulate (tab.3.1); facendo uso di alcuni teoremi che verranno esposti in seguito, dalle trasformate reperibili sulle tabelle, se ne possono dedurre molte altre.

Esempi di trasformate di Laplace

$f(t) = L^{-1}[F(s)]$	$F(s) = L[f(t)]$
$\delta(t)$	1
$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\pm kt}$	$\frac{1}{s \mp k}$
$\frac{t^n e^{-kt}}{n!} \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s+k)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-kt} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+k)^2 + \omega^2}$
$e^{-kt} \cos \omega t$	$\frac{s+k}{(s+k)^2 + \omega^2}$

tab.3.1

3.3 Funzione impulsiva unitaria o delta di Dirac.

Si consideri la funzione così definita (fig.3.2):

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases} \quad \varepsilon > 0,$$

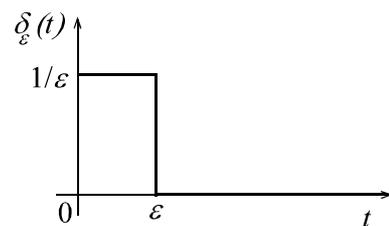


fig.3.2

risulta geometricamente evidente che per $\varepsilon \rightarrow 0$ l'altezza della regione rettangolare cresce indefinitamente mentre la larghezza diminuisce in modo tale che l'area della regione è sempre uguale a 1, cioè:

$$\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Sia $f(t)$ un'arbitraria funzione definita per $t = 0$ e consideriamo l'integrale $\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t) f(t) dt$.

Se ε è sufficientemente piccolo, la variazione di $f(t)$ sull'intervallo effettivo di integrazione $[0, \varepsilon]$ è trascurabile e $f(t)$ resta praticamente uguale a $f(0)$; pertanto:

$$\int_0^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) f(t) dt \approx f(0) \int_0^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt = f(0);$$

naturalmente al diminuire di ε l'approssimazione migliora¹. Pertanto nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ possiamo definire una “funzione” $\delta(t)$ attraverso la relazione:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0);$$

$\delta(t)$ prende il nome di *delta di Dirac*. Tale espressione può essere generalizzata come:

$$\int_0^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Da questa relazione segue l'espressione della trasformata di Laplace della delta di Dirac:

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1,$$

e più in generale:

$$L[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}.$$

3.4 Teoremi sulle trasformate di Laplace.

Si riportano di seguito alcuni teoremi che possono agevolare il calcolo delle trasformate di Laplace.

1. La trasformata di Laplace è un operatore lineare; cioè se $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono due funzioni trasformabili e $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$, se

$$\begin{aligned} L[f_1(t)] &= F_1(s), \\ L[f_2(t)] &= F_2(s), \end{aligned}$$

allora

$$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s).$$

¹ Se $f(t)$ è sviluppabile in serie di Taylor, quanto sopra può essere rivisto considerando lo sviluppo intorno a $t = 0$,

$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ e sostituendolo sotto l'integrale.

2. (proprietà dello spostamento in frequenza e del ritardo). Se

$$L[f(t)] = F(s),$$

allora, se $k \in \mathbb{C}$, si ha:

$$L[e^{kt} f(t)] = F(s - k).$$

Se $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \begin{cases} f(t - t_0) & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases},$$

allora

$$L[g(t)] = e^{-st_0} F(s).$$

3. La trasformata della derivata di una funzione è uguale a s volte la trasformata della funzione stessa, a meno del valore che assume la funzione all'istante $t = 0^+$; cioè se

$$L[f(t)] = F(s),$$

allora

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+);$$

da questo teorema è possibile ricavare, per induzione, l'espressione della trasformata per la derivata n -esima:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} f^{(n-k)}(0^+),$$

così, ad esempio:

$$\begin{aligned} L[f''(t)] &= s^2 F(s) - sf(0^+) - sf'(0^+), \\ L[f'''(t)] &= s^3 F(s) - s^2 f(0^+) - sf'(0^+) - f''(0^+). \end{aligned}$$

Esempio. Noto che:

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

attraverso l'applicazione del teorema precedente, poiché $\cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d \sin \omega t}{dt}$, possiamo determinare l'espressione di $L[\cos \omega t]$:

$$L[\cos \omega t] = L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d \sin \omega t}{dt}\right] = \frac{s}{\omega} L[\sin \omega t] - \frac{s}{\omega} \sin 0 = \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

4. La trasformata dell'integrale di una funzione è uguale alla trasformata della funzione stessa divisa per s , cioè se

$$L[f(t)] = F(s),$$

allora

$$L\left[\int_0^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{1}{s} F(s),$$

da questo teorema si deduce che:

$$L\left[\int_0^t d\xi_2 \int_0^{\xi_2} f(\xi_1) d\xi_1\right] = \frac{1}{s^2} F(s),$$

$$L\left[\int_0^t d\xi_3 \int_0^{\xi_3} d\xi_2 \int_0^{\xi_2} f(\xi_1) d\xi_1\right] = \frac{1}{s^3} F(s),$$

e così via.

Esempio. La funzione $f(t) = t$ può essere riguardata come:

$$t = \int_0^t d\xi = \int_0^t \eta(\xi) d\xi,$$

pertanto, alla luce del precedente teorema, risulta:

$$L[t] = L\left[\int_0^t \eta(\xi) d\xi\right] = \frac{1}{s} L[\eta(t)] = \frac{1}{s^2}.$$

I teoremi 3. e 4. suggeriscono che le operazioni di derivazione e integrazione nel campo reale vengono trasformate in operazioni di moltiplicazione e divisione nel campo complesso. Pertanto attraverso l'algoritmo della trasformata di Laplace è possibile trasformare equazioni integro-differenziali nel campo reale in equazioni algebriche nel campo complesso.

3.5 Convoluzione.

Date due funzioni $f(t)$ e $g(t)$, si definisce *convoluzione* di $f(t)$ e $g(t)$ la funzione $h(t)$ così definita:

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

e si indica anche

$$h(t) = f(t) * g(t).$$

Posto allora:

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= F(s), \\ L[g(t)] &= G(s), \end{aligned}$$

la trasformata della convoluzione $h(t)$ di $f(t)$ e $g(t)$ vale:

$$H(s) = L[h(t)] = L[f(t) * g(t)] = L[f(t)] \cdot L[g(t)] = F(s) \cdot G(s).$$

Cioè la convoluzione tra due funzioni nel campo reale viene trasformata nel prodotto tra le funzioni nel campo complesso.

3.6 Antitrasformata di Laplace.

L'operazione di *antitrasformazione* consiste nel risalire da una funzione di variabile complessa a quella di variabile reale, la cui trasformata coincide con la funzione di partenza.

Posto

$$F(s) = L[f(t)],$$

allora, se $s = \sigma + j\omega$, si prova che

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{st} F(s) ds.$$

Sebbene sussista tale relazione, come nel caso dell'operazione di trasformazione, salvo casi particolari, raramente si ricorre a tale integrale per eseguire l'antitrasformazione, ma si fa riferimento alle tabelle di trasformazione, ovviamente usate al rovescio.

Tipicamente si scompone la funzione da antitrasformare in somme di funzioni la cui antitrasformata è reperibile sulle tabelle, e l'antitrasformazione si ricava quale somma delle antitrasformate trovate, in virtù della linearità dell'operatore L^{-1} .

Esempio. Si valuti

$$L^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right].$$

Il denominatore della frazione da antitrasformare ha radici $s_1 = 3$ e $s_2 = -1$, così la frazione può essere fattorizzata come segue:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1},$$

da cui segue $A = 4$ e $B = -1$, quindi:

$$L^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right] = 4L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 4e^{3t} - e^{-t}.$$

3.7 Antitrasformazione di funzioni razionali fratte.

Il procedimento di antitrasformazione mostrato nell'esempio precedente si presta ad essere generalizzato allo scopo di fornire un metodo di antitrasformazione utile ad una importante classe di funzioni in ambito elettronico. Tali funzioni sono le funzioni razionali fratte del tipo:

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{u=0}^n c_u s^u},$$

in cui $m < n$, ossia quando $F(s)$ è una frazione algebrica propria.

È noto dall'algebra che un polinomio di grado n , del tipo:

$$H(s) = c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0$$

può essere fattorizzato come

$$H(s) = c_n (s - s_1)^{r_1} (s - s_2)^{r_2} \dots (s - s_\alpha)^{r_\alpha},$$

dove $s_1, s_2, \dots, s_\alpha$, rappresentano le radici, rispettivamente di molteplicità $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$ (con $r_1 + r_2 + \dots + r_\alpha = n$) del polinomio $H(s)$. Le s_i prendono il nome di *zeri* di ordine (o molteplicità) r_i della funzione $H(s)$ e *poli* di ordine (o molteplicità) r_i della funzione $F(s)$.

Consideriamo inizialmente il caso più semplice in cui $F(s)$ ammette solo poli semplici, ovvero di molteplicità 1; quindi

$$H(s) = c_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n),$$

allora $F(s)$ può essere posta nella forma:

$$F(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - s_i},$$

dove

$$K_i = [F(s)(s - s_i)]_{s=s_i},$$

per cui l'antitrasformata di $F(s)$ vale:

$$L^{-1}[F(s)] = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \dots + K_n e^{s_n t} = \sum_{i=1}^n K_i e^{s_i t}.$$

Esempio. Si valuti l'antitrasformata della seguente funzione:

$$F(s) = \frac{2s^2 - 4}{s^3 - 4s^2 + s + 6}.$$

Posto

$$H(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6,$$

si ha che $H(s)$ ha radici

$$s_1 = -1,$$

$$s_2 = 2,$$

$$s_3 = 3,$$

così $F(s)$ si può scrivere come:

$$F(s) = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}.$$

I coefficienti dello sviluppo dell'antitrasformata valgono:

$$K_1 = [F(s)(s+1)]_{s=-1} = \frac{-2}{(-3)(-4)} = -\frac{1}{6},$$

$$K_2 = [F(s)(s-2)]_{s=2} = \frac{4}{(3)(-1)} = -\frac{4}{3},$$

$$K_3 = [F(s)(s-3)]_{s=3} = \frac{14}{(4)(1)} = \frac{7}{2},$$

pertanto

$$L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{6} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{2t} + \frac{7}{2} e^{3t}.$$

Esempio. Si valuti l'antitrasformata della seguente funzione:

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^3 - s^2 + s - 1}.$$

Posto

$$H(s) = s^3 - s^2 + s - 1,$$

si ha che $H(s)$ ha radici

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = -j,$$

$$s_3 = +j,$$

così $F(s)$ si può scrivere come:

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s+j)(s-j)} = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}.$$

I coefficienti dello sviluppo dell'antitrasformata valgono:

$$K_1 = [F(s)(s-1)]_{s=1} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$K_2 = [F(s)(s+j)]_{s=-j} = \frac{-3j-1}{(-j-1)(-2j)} = \frac{-3j+1}{-2+2j} = -1 + \frac{1}{2}j,$$

$$K_3 = [F(s)(s-j)]_{s=j} = \frac{3j-1}{(j-1)(2j)} = \frac{3j+1}{-2-2j} = -1 - \frac{1}{2}j,$$

pertanto

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= 2e^t + \left(-1 + \frac{1}{2}j\right)e^{-jt} + \left(-1 - \frac{1}{2}j\right)e^{jt} = 2e^t - 2\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} + \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \\ &= 2e^t - 2\cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Gli esempi precedenti mettono in luce due aspetti dell'antitrasformata di una funzione razionale fratta.

Se $F(s)$ ha un polo complesso, allora ha anche il suo coniugato; la presenza di tale coppia di poli determina nella antitrasformata $L^{-1}[F(s)]$ una soluzione di tipo oscillante; si verifica che se i poli sono:

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k, \quad s_k^* = \sigma_k - j\omega_k$$

allora l'antitrasformata conterrà un termine del tipo

$$e^{\sigma_k t} (\alpha_k \cos \omega_k t + \beta_k \sin \omega_k t),$$

che può esprimersi, introducendo nuove costanti c_k e ϕ_k , come:

$$c_k e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

Inoltre, affinché si abbia che il limite di $L^{-1}[F(s)]$ per $t \rightarrow \infty$ sia finito, occorre che la parte reale σ_k del polo s_k non sia positiva.

Nel caso che $F(s)$ sia caratterizzata da un polo di molteplicità n , ossia risulti:

$$H(s) = c_n (s - s_1)^n,$$

si prova che l'antitrasformata di $F(s)$ vale:

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= e^{s_1 t} \left[M_1 + M_2 t + M_3 \frac{t^2}{2} + M_4 \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \dots + M_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \\ &= e^{s_1 t} \sum_{r=1}^n M_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}, \end{aligned}$$

dove:

$$M_r = \frac{1}{(n-r)!} \left\{ \frac{d^{(n-r)}}{ds^{(n-r)}} [F(s)(s-s_1)^n] \right\}_{s=s_1}.$$

Esempio. Si valuti l'antitrasformata della seguente funzione:

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^5}.$$

L'unico polo di $F(s)$ si ha per $s = -1$ ed ha molteplicità 5; l'argomento della derivata contenuta nel termine M_r vale

$$F(s)(s+1)^5 = s,$$

così i termini M_1 , M_2 e M_3 sono tutti nulli, dipendendo rispettivamente dalle derivate quarta, terza e seconda di s , mentre:

$$\begin{aligned} M_4 &= \frac{1}{(5-4)!} \left(\frac{d}{ds} s \right)_{s=-1} = 1, \\ M_5 &= \frac{1}{(5-5)!} (s)_{s=-1} = -1; \end{aligned}$$

ne segue che l'antitrasformata di questa funzione vale:

$$L^{-1}[F(s)] = e^{-t} \left(\frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} \right) = e^{-t} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} \right) = \frac{e^{-t} t^3}{24} (4 - t).$$

Quanto testé visto si applica nel caso di n poli di molteplicità 1 o nel caso di un singolo polo di molteplicità n . Entrambe le relazioni mostrate costituiscono dei casi particolari di un teorema generale che si applica quando si abbiano α poli $s_1, s_2, \dots, s_\alpha$, con molteplicità, rispettivamente, $r_1, r_2, \dots, r_\alpha$, maggiori o uguali a 1. Si prova quindi che l'antitrasformata di $F(s)$ vale:

$$L^{-1}[F(s)] = g_1(t)e^{s_1 t} + g_2(t)e^{s_2 t} + \dots + g_\alpha(t)e^{s_\alpha t} = \sum_{i=1}^{\alpha} g_i(t)e^{s_i t},$$

dove:

$$g_i(t) = \sum_{k=1}^{r_i} \frac{1}{(r_i - k)! (k - 1)!} \left\{ \frac{d^{(r_i - k)}}{ds^{(r_i - k)}} [F(s)(s - s_i)^{r_i}] \right\}_{s=s_i}.$$

4. Applicazione della trasformata di Laplace alla determinazione della risposta dei circuiti

Introduciamo l'applicazione della trasformata di Laplace facendo uso di un esempio. Consideriamo il circuito di fig.4.1 ed assumiamo, per semplicità, che il condensatore sia scarico al momento della chiusura del tasto T , per $t = 0$. La relazione che lega la corrente $i(t)$ nel circuito alla tensione applicata $v(t)$ a partire dall'istante di chiusura del tasto è

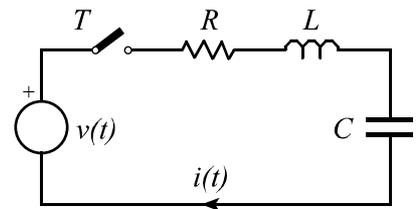


fig.4.1

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi,$$

tale equazione integro-differenziale consente la determinazione dell'espressione di $i(t)$ una volta che sia nota $v(t)$.

Se si eseguono le trasformate di Laplace di ambo i membri di tale equazione, si trova:

$$V(s) = RI(s) + sLI(s) + \frac{1}{sC} I(s),$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} V(s) &= L[v(t)], \\ I(s) &= L[i(t)]. \end{aligned}$$

Ne segue che la corrente $I(s)$ vale:

$$I(s) = \frac{V(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}}.$$

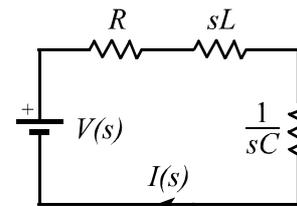


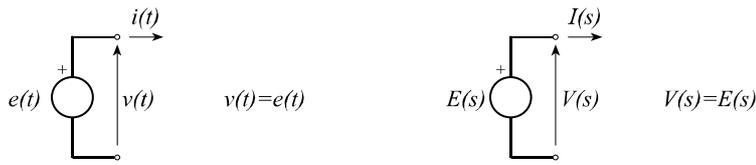
fig.4.2

La relazione che lega $V(s)$ a $I(s)$ può essere scritta direttamente riguardando il circuito di fig.4.1 come un circuito in corrente continua, alimentato da un generatore di forza elettromotrice $V(s)$ e caratterizzato da tre resistenze di valori R , sL , $1/sC$, poste in serie tra loro (fig.4.2).

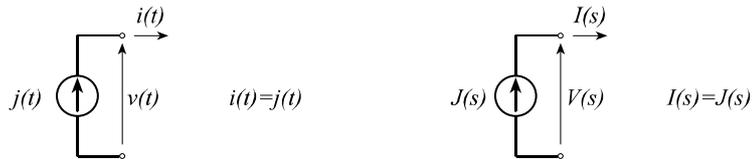
Poiché $v(t)$ è nota, di conseguenza sarà possibile determinare $V(s)$ e quindi $i(t)$ antitrasformando l'espressione di $I(s)$. Inoltre tutte le grandezze di interesse possono essere ricavate dal circuito descritto in termini di trasformate di Laplace; ad esempio la *d.d.p.* ai capi dell'induttanza sarà:

$$V_L(s) = V(s) \frac{sL}{R + sL + \frac{1}{sC}}.$$

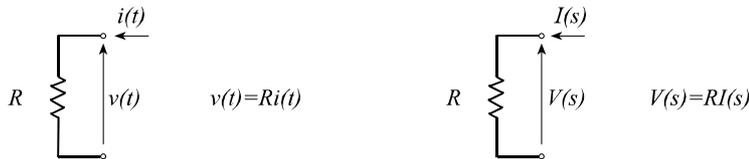
Generatore di tensione



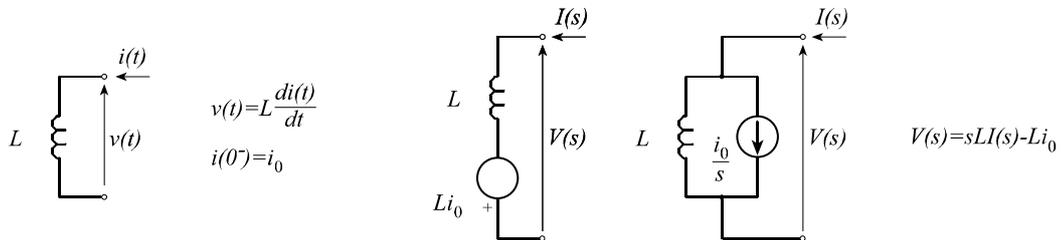
Generatore di corrente



Resistenza



Induttanza



Capacità

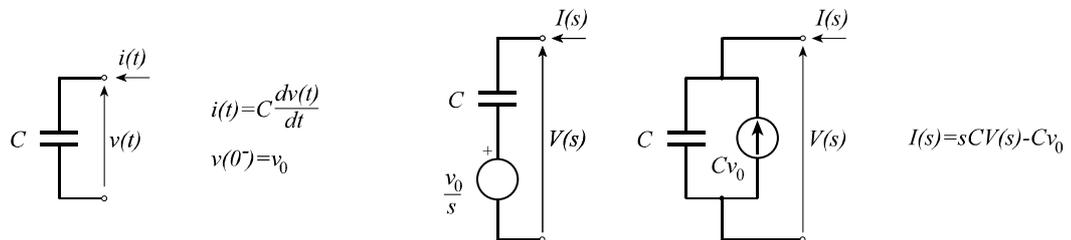


fig.4.3 – Convenzioni di segno e corrispondenza fra i circuiti nel dominio del tempo e i loro equivalenti nel dominio della frequenza complessa

La descrizione del circuito attraverso la trasformata di Laplace subisce una lieve complicazione qualora ci siano correnti iniziali nelle induttanze o cariche iniziali sulle armature dei condensatori. Si prova facilmente che se in un induttanza scorre una corrente iniziale i_0 , occorrerà aggiungere nel circuito equivalente in serie alla “resistenza” sL un generatore che eroga una forza elettromotrice Li_0 , col morsetto positivo nel verso positivo della corrente, e se un condensatore è inizialmente carico ad un tensione v_0 , occorrerà considerare in serie alla “resistenza” $1/sC$, un generatore che eroga una forza elettromotrice v_0/s , col morsetto coincidente con l’armatura negativa del condensatore.

4.1 Dominio della frequenza complessa.

In fig.4.3 è mostrata una classificazione degli elementi di una rete elettrica in funzione della variabile complessa s , alla luce di quanto appena visto.

Si noti che, nell’ipotesi che siano nulle le condizioni iniziali (condensatori inizialmente scarichi e induttanza inizialmente non percorse da corrente), gli elementi possono essere rappresentati in modo formalmente analogo a quello relativo al metodo simbolico, con la posizione $s = j\omega$.

La linearità della trasformata di Laplace implica che in tale ambito le leggi di Kirchhoff si possono scrivere:

$$\sum_k V_k(s) = 0,$$

$$\sum_h I_h(s) = 0.$$

La descrizione di un circuito attraverso la trasformata di Laplace prende il nome di descrizione nel *dominio della frequenza complessa* s ; in tale contesto la risposta di una rete ad un generico segnale, purché trasformabile secondo Laplace, si ricava attraverso la risoluzione di un’equazione algebrica. Non è pertanto necessario risolvere l’equazione integro-differenziale che descrive il circuito nel dominio del tempo.

Esempio. (Circuito RC) Consideriamo il circuito di fig.4.4 in cui il condensatore è inizialmente scarico. La risposta v_0 ad un’eccitazione v_i nel dominio della frequenza complessa è:

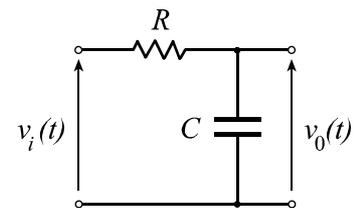


fig.4.4

$$V_0(s) = V_i(s) \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = V_i(s) \frac{1}{1 + sRC} = V_i(s) \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}},$$

dove $\tau = RC$. La funzione di trasferimento $V_0(s)/V_i(s)$ della rete è pertanto:

$$F(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}.$$

Supponiamo che la rete sia eccitata con un gradino di tensione di ampiezza V (fig.4.5):

$$v_i(t) = V\eta(t),$$

allora, poiché:

$$V_i(s) = L[v_i(t)] = V \frac{1}{s},$$

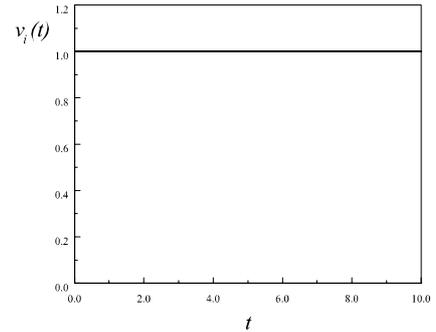


fig.4.5

la risposta della rete nel dominio di s vale:

$$V_0(s) = V \frac{1}{s} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}.$$

Tale funzione presenta due poli semplici, rispettivamente per $s = 0$ e $s = -1/\tau$, così i due coefficienti dello sviluppo dell'antitrasformata sono:

$$K_1 = [V_0(s)s]_{s=0} = V \frac{1}{\tau} \frac{1}{\frac{1}{\tau}} = V,$$

$$K_2 = \left[V_0(s) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = \frac{V}{-\frac{1}{\tau}} \frac{1}{\tau} = -V,$$

così la risposta a tale stimolo è (fig.4.6):

$$v_0(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau} = V(1 - e^{-t/\tau}).$$

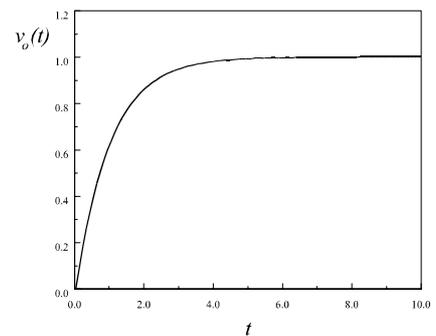


fig.4.6

Il circuito RC è detto *integratore* in quanto per $t \ll \tau$ opera un'integrazione della tensione applicata l'ingresso; infatti sviluppando in serie l'esponenziale contenuto nella risposta al gradino, si ha:

$$v_0(t) = V - Ve^{-t/\tau} = V - V \left[1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^3 + \dots \right] =$$

$$= \frac{V}{\tau} t + V \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^k,$$

il primo addendo della somma è proporzionale all'integrale della funzione $v_i(t)$ assegnata. e l'errore che si commette nell'approssimazione

$$v_0(t) \approx \frac{V}{\tau} t,$$

risulta tanto più piccolo quanto minore è t rispetto a τ , fissata l'ampiezza V .

La determinazione della risposta della rete ad un nuovo stimolo richiede la sola valutazione della trasformata di $v_i(t)$ e dell'antitrasformata di $V_0(s)$. Consideriamo, ad esempio, un'eccitazione a rampa (fig.4.7):

$$v_i(t) = \frac{V}{T}t,$$

dove T è una costante positiva con le dimensioni di un tempo, allora:

$$V_i(s) = L[v_i(t)] = \frac{V}{T} \frac{1}{s^2},$$

e la risposta nel dominio di s vale:

$$V_0(s) = \frac{V}{T} \frac{1}{s^2} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}};$$

in questo caso $V_0(s)$ presenta, oltre al polo semplice per $s = -1/\tau$, anche un polo doppio in $s = 0$; il coefficiente dello sviluppo dell'antitrasformata relativo al polo semplice è:

$$K = \left[V_0(s) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \right]_{s = -\frac{1}{\tau}} = \frac{V}{T} \frac{1}{\left(-\frac{1}{\tau} \right)^2} \frac{1}{\tau} = \frac{V\tau}{T},$$

mentre i due coefficienti, relativi ai poli doppi, sono:

$$M_1 = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{ds} [V_0(s)s^2] \right\}_{s=0} = \frac{V}{T} \frac{1}{\tau} \left[-\frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)^2} \right]_{s=0} = -\frac{V\tau}{T},$$

$$M_0 = \frac{1}{0!} \{V_0(s)s^2\}_{s=0} = \frac{V}{T} \frac{1}{\tau} \left[-\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right]_{s=0} = \frac{V}{T};$$

così la risposta a tale stimolo è (fig.4.8):

$$\begin{aligned} v_0(t) &= Ke^{-t/\tau} - M_1 + M_2t = \\ &= \frac{V\tau}{T} e^{-t/\tau} - \frac{V\tau}{T} + \frac{V}{T}t = \frac{V\tau}{T} (e^{-t/\tau} - 1) + \frac{V}{T}t. \end{aligned}$$

Si noti che, sebbene $v_0(t) \leq v_i(t)$ per ogni valore di t , asintoticamente $v_0(t) \approx v_i(t)$.

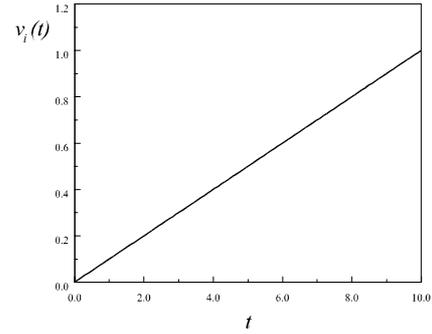


fig.4.7

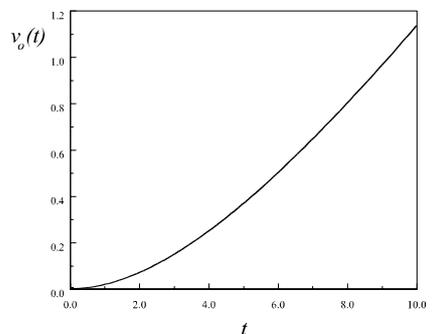


fig.4.8

Esempio. (Circuito CR) Consideriamo il circuito di fig.4.9 in cui il condensatore è inizialmente scarico. La risposta v_0 ad un'eccitazione v_i nel dominio della frequenza complessa è:

$$V_0(s) = V_i(s) \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = V_i(s) \frac{sRC}{1 + sRC} = V_i(s) \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}.$$

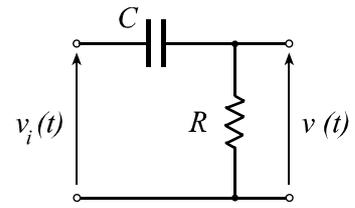


fig.4.9

Supponiamo che la rete sia eccitata con un gradino di tensione di ampiezza V (fig.4.5):

$$v_i(t) = V\eta(t),$$

allora, poiché $V_i(s) = V/s$, la risposta della rete nel dominio di s vale:

$$V_0(s) = V \frac{1}{s} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} = V \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}};$$

$V_0(s)$ ha un singolo polo semplice per $s = -1/\tau$, così l'unico coefficiente dello sviluppo dell'antitrasformata è:

$$K = \left[V_0(s) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \right]_{s = -\frac{1}{\tau}} = V$$

pertanto la risposta della rete è (fig.4.10):

$$v_0(t) = Ke^{-t/\tau} = Ve^{-t/\tau}.$$

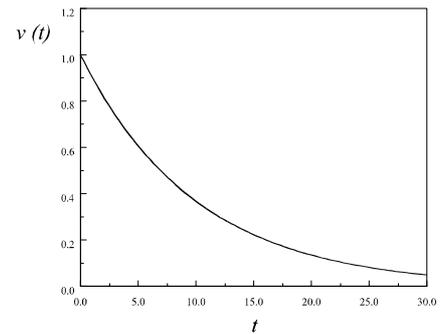


fig.4.10

Il circuito CR è detto *derivatore* in quanto per $t \gg \tau$ opera una derivata della tensione applicata all'ingresso.

4.2 Teoremi del valore finale e iniziale.

Questi teoremi consentono di dedurre delle informazioni sull'andamento temporale di una funzione, qualora se ne conosca la sua trasformata.

La trasformata della derivata prima di una funzione $f(t)$ vale:

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+),$$

esplicitiamo il primo membro e determiniamo il limite per $s \rightarrow 0$ di ambo i membri:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^+)];$$

siccome risulta

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0^+),$$

allora, sostituendo, si ha:

$$f(\infty) - f(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0^+),$$

essendo $\lim_{s \rightarrow 0} f(0^+) = f(0^+)$, così

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(\infty).$$

L'equazione precedente rappresenta l'espressione del *teorema del valore finale* e consente di stabilire il comportamento asintotico di una funzione, nota che sia la sua trasformata. Tale equazione è, tuttavia, applicabile soltanto qualora il limite $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ è finito, ovvero se tutti i poli di $sF(s)$ hanno parte reale negativa.

Esempio. Si voglia stabilire il limite asintotico della risposta di un circuito *RC* ad uno stimolo a gradino. Risulta:

$$V_0(s) = V \frac{1}{s} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}},$$

applicando il teorema del valore finale a questa espressione si ha:

$$v_0(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sV_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(sV \frac{1}{s} \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = V.$$

Se nell'espressione $L[f'(t)] = sF(s) - f(0^+)$ esplicitiamo il primo membro e stabiliamo il limite per $s \rightarrow \infty$ di ambo i membri, si trova:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)],$$

poiché l'espressione sotto l'integrale comprende il fattore e^{-st} che si annulla quando $s \rightarrow \infty$, si ha:

$$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)],$$

siccome $f(0^+)$ è una costante, risulta:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+);$$

tale relazione rappresenta la formulazione del *teorema del valore iniziale*.

Esempio. Si voglia stabilire il valore iniziale della risposta di un circuito *CR* ad una eccitazione a gradino. Risulta:

$$V_0(s) = V \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}},$$

così applicando il teorema del valore iniziale, si ha:

$$v_0(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV_0(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(sV \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) = V.$$

4.3 Significato fisico delle funzioni di trasferimento.

Consideriamo un sistema caratterizzato da una funzione di trasferimento $F(s)$ il cui stimolo sia $x(t)$, allora, se $X(s)$ è la trasformata di $x(t)$, la trasformata $Y(s)$ della risposta $y(t)$ sarà:

$$Y(s) = F(s)X(s).$$

Supponiamo di eccitare il sistema con una delta di Dirac, poiché risulta $L[\delta(t)] = 1$, allora:

$$Y(s) = F(s)L[\delta(t)] = F(s),$$

cioè la risposta coincide con $F(s)$ essendo 1 la trasformata di $\delta(t)$. Ne segue che:

$$y(t) = f(t) = L[F(s)].$$

Pertanto l'antitrasformata $f(t)$ di una funzione di trasferimento $F(s)$ di un sistema rappresenta la risposta del sistema ad una eccitazione impulsiva $\delta(t)$.

4.4 Stabilità dei sistemi.

Un sistema si dice *stabile*, quando, soggetto ad un segnale perturbatore, al cessare di questo, dopo un certo tempo, ritorna nelle condizioni iniziali. È invece *instabile* quando diverge definitivamente dalle condizioni iniziali.

La verifica della stabilità di un sistema può essere eseguita applicandovi, quale segnale perturbatore, un impulso $\delta(t)$ ed esaminando la sua risposta nel tempo. Se il sistema risulta originariamente a riposo, con uscita nulla, se esso è stabile la risposta a tale eccitazione deve tendere a zero, mentre se è instabile diverge. Naturalmente, in pratica, la risposta di un sistema instabile non assume mai valori infinitamente grandi poiché intervengono delle non linearità dei costituenti il sistema che ne limitano l'ampiezza. Può anche verificarsi che la risposta tenda ad un valore finito oppure oscilla entro limiti prestabiliti; anche questi casi sono considerati delle instabilità.

Per quanto appena visto circa il significato fisico della funzione di trasferimento, questa rappresenta la risposta del sistema alla delta di Dirac $\delta(t)$; ne segue che la verifica della stabilità di un sistema può essere svolta attraverso lo studio della funzione di trasferimento.

Un sistema lineare è descrivibile tramite una funzione di trasferimento che è costituita dal rapporto di due polinomi, ossia una funzione razionale fratta:

$$F(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{u=0}^n c_u s^u},$$

dove $m < n$. Tale funzione presenta, in generale, poli reali o complessi coniugati. Nel caso in cui $F(s)$ sia caratterizzata da un polo reale s_k , l'antitrasformata di $F(s)$ conterrà un addendo del tipo:

$$M_k e^{s_k t},$$

e tale termine tende a zero per $t \rightarrow \infty$ se s_k è negativo, mentre tende a ∞ se s_k è positivo; nel caso si abbiano due poli complessi coniugati $\sigma_k \pm j\omega_k$, l'antitrasformata di $F(s)$ conterrà un addendo del tipo:

$$c_k e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k),$$

se σ_k è negativo, tale termine rappresenta un'oscillazione smorzata che, per $t \rightarrow \infty$ tende ad annullarsi; se invece σ_k è positivo le oscillazioni descritte da questo termine sono di ampiezza crescente nel tempo e tendono ad ampiezza infinita per $t \rightarrow \infty$.

Da quanto esposto risulta che il sistema è stabile se i poli della sua funzione di trasferimento sono negativi, se reali, oppure a parte reale negativa se complessi coniugati.

Poiché i poli e gli zeri della funzione di trasferimento corrispondono a punti del piano complesso, $F(s)$ può essere rappresentata graficamente mediante la distribuzione dei suoi poli e zeri in tale piano. Così affinché il sistema sia stabile, occorre che tutti i poli si trovino nel semipiano di sinistra (parte reale negativa). È sufficiente che ci sia un solo polo nel semipiano di destra (parte reale positiva) perché il sistema risulti instabile.

Quindi per analizzare la stabilità di un sistema, non occorre eseguire l'antitrasformata della funzione di trasferimento, ma solo esaminare la posizione dei suoi poli nel piano complesso.

Esempio: Si valuti la stabilità del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2-s-2}.$$

Il denominatore della frazione è fattorizzabile come $(s-2)(s+1)$, per cui ha due radici reali di cui una positiva. In fig.4.11 è mostrata la rappresentazione dei poli (indicati con \times) e dello zero (indicato con O) di $F(s)$ nel piano complesso. Poiché è presente un polo nel semipiano di destra, il sistema è instabile.

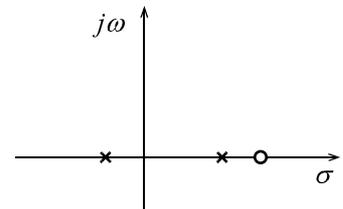


fig.4.11

4.5 Risposta di regime sinusoidale.

In un qualsiasi sistema fisico, in seguito all'applicazione di una eccitazione all'ingresso, ha origine un transitorio che ha una durata dipendente dalle caratteristiche intrinseche del sistema. Quindi, per effetto dello stimolo, il sistema passa dallo stato fisico precedente all'applicazione dell'eccitazione, ad un altro stato fisico, e tale passaggio avviene in un certo tempo, indicato come durata del transitorio.

Esamineremo ora il comportamento di un sistema fisico in regime permanente, ossia una volta che il transitorio si è esaurito. In particolare esamineremo la risposta del sistema a regime, quando è applicata un'eccitazione di tipo sinusoidale.

Consideriamo pertanto un sistema stabile, di funzione di trasferimento $F(s)$ al quale è applicato uno stimolo sinusoidale:

$$x(t) = X \cos \omega t,$$

poiché $X(s) = L[x(t)] = Xs/(s^2 + \omega^2)$, la trasformata di Laplace della risposta sarà:

$$Y(s) = F(s)X(s) = F(s) \frac{Xs}{s^2 + \omega^2}.$$

Quando si calcola l'antitrasformata di questa funzione, ci saranno dei termini dovuti ai poli di $F(s)$ e due termini dovuti ai poli della trasformata del segnale d'ingresso, per $s = \pm j\omega$; dato che il sistema è, per ipotesi, stabile, tutte le funzioni del tempo derivanti dai poli di $F(s)$ si annulleranno al tendere del tempo all'infinito. Così la risposta a regime conterrà i soli termini correlati ai poli di $X(s)$; i due coefficienti dello sviluppo dell'antitrasformata sono:

$$K_1 = [Y(s)(s - j\omega)]_{s=j\omega} = F(j\omega) \frac{j\omega X}{2j\omega} = \frac{1}{2} F(j\omega) X,$$

$$K_2 = [Y(s)(s + j\omega)]_{s=-j\omega} = F(-j\omega) \frac{-j\omega X}{-2j\omega} = \frac{1}{2} F(-j\omega) X,$$

e l'antitrasformata di $Y(s)$ a regime varrà:

$$y(t) = K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t} = \frac{1}{2} F(j\omega) X e^{j\omega t} + \frac{1}{2} F(-j\omega) X e^{-j\omega t}.$$

Il numero complesso $F(j\omega)$ può essere posto in forma esponenziale come:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi},$$

dove ϕ è l'argomento di $F(j\omega)$, inoltre, poiché la funzione di trasferimento di un sistema fisico è una funzione con coefficienti reali, risulta:

$$F(-j\omega) = |F(j\omega)| e^{-j\phi},$$

così, sostituendo nell'espressione di $y(t)$ si ha:

$$y(t) = X |F(j\omega)| \frac{e^{j\phi} e^{j\omega t} + e^{-j\phi} e^{-j\omega t}}{2} = X |F(j\omega)| \cos(\omega t + \phi).$$

Quindi è sufficiente determinare $|F(j\omega)|$ e ϕ per conoscere la risposta a regime quando l'eccitazione è di tipo sinusoidale. $|F(j\omega)|$ rappresenta il rapporto tra le ampiezze, o i valori efficaci, della risposta e dell'eccitazione; ϕ rappresenta la fase della risposta rispetto all'eccitazione. Per la determinazione di $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\phi}$ basta analizzare il sistema sostituendo $j\omega$ a s dovunque questa variabile si trovi; ciò coincide coi metodi correntemente adoperati per lo studio dei circuiti in corrente alternata.

5. Rappresentazione di Bode

Consideriamo la funzione di trasferimento di un sistema lineare, caratterizzata da w zeri reali, z_1, z_2, \dots, z_w , rispettivamente di molteplicità t_1, t_2, \dots, t_w , e d poli reali p_1, p_2, \dots, p_d , rispettivamente di molteplicità r_1, r_2, \dots, r_d , supponiamo inoltre che la funzione di trasferimento abbia un ulteriore polo o zero per $s = 0$ con molteplicità¹ l ; infine, siano $z_{c1}, z_{c2}, \dots, z_{cy}$ e $p_{c1}, p_{c2}, \dots, p_{ce}$ rispettivamente gli zeri ed i poli reali della funzione di trasferimento, risulta:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{s^l \sum_{h=0}^n c_h s^h} = \frac{b_m \prod_{u=1}^w (s - z_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y (s - z_{cv})(s - z_{cv}^*)}{a_n s^l \prod_{f=1}^d (s - p_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e (s - p_{cg})(s - p_{cg}^*)} = \\
 &= \frac{b_m \prod_{u=1}^w (s - z_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y (\omega_v^2 + 2\zeta_v \omega_v s + s^2)}{a_n s^l \prod_{f=1}^d (s - p_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e (\omega_g^2 + 2\zeta_g \omega_g s + s^2)} = \\
 &= \frac{b_m \prod_{u=1}^w (-z_u)^{t_u} \left(1 - s \frac{1}{z_u}\right)^{t_u} \prod_{v=1}^y \omega_v^2 \left(1 + 2\zeta_v \frac{s}{\omega_v} + \frac{s^2}{\omega_v^2}\right)}{a_n s^l \prod_{f=1}^d (-p_f)^{r_f} \left(1 - s \frac{1}{p_f}\right)^{r_f} \prod_{g=1}^e \omega_g^2 \left(1 + 2\zeta_g \frac{s}{\omega_g} + \frac{s^2}{\omega_g^2}\right)} = \\
 &= \frac{b_m \prod_{u=1}^w (-z_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y \omega_v^2 \prod_{u=1}^w \left(1 - s \frac{1}{z_u}\right)^{t_u} \prod_{v=1}^y \left(1 + 2\zeta_v \frac{s}{\omega_v} + \frac{s^2}{\omega_v^2}\right)}{a_n \prod_{f=1}^d (-p_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e \omega_g^2 s^l \prod_{f=1}^d \left(1 - s \frac{1}{p_f}\right)^{r_f} \prod_{g=1}^e \left(1 + 2\zeta_g \frac{s}{\omega_g} + \frac{s^2}{\omega_g^2}\right)},
 \end{aligned}$$

dove, se

$$z_{cv} = \sigma_{cv} + j\omega_{cv},$$

sono gli zeri complessi, allora

$$\begin{cases} \omega_v = \sqrt{\sigma_{cv}^2 + \omega_{cv}^2} \\ \zeta_v = -\frac{\sigma_{cv}}{\sqrt{\sigma_{cv}^2 + \omega_{cv}^2}} \end{cases} \text{ per } v = 1, 2, \dots, y,$$

e se

¹ Si osservi che se $F(s)$ in $s = 0$ ha un polo, allora $l > 0$, mentre se ha uno zero, $l < 0$; altrimenti $l = 0$.

$$p_{cg} = \sigma_{cg} + j\omega_{cg}$$

sono i poli complessi, allora:

$$\begin{cases} \omega_g = \sqrt{\sigma_{cg}^2 + \omega_{cg}^2} \\ \zeta_g = -\frac{\sigma_{cg}}{\sqrt{\sigma_{cg}^2 + \omega_{cg}^2}} \end{cases} \text{ per } g = 1, 2, \dots, e.$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} \tau_u &= \frac{1}{z_u}, & \text{per } u &= 1, 2, \dots, w, \\ T_f &= \frac{1}{p_f}, & \text{per } f &= 1, 2, \dots, d, \end{aligned}$$

tali quantità hanno le dimensioni di un tempo e prendono il nome di *costanti di tempo*, definiamo inoltre:

$$K = \frac{b_m \prod_{u=1}^w (-z_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y \omega_v^2}{a_n \prod_{f=1}^d (-p_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e \omega_g^2}.$$

Si noti che K è reale poiché $b_m/a_n \in \mathbb{R}$. Facendo uso di tali definizioni la funzione di trasferimento si scrive:

$$F(s) = K \frac{\prod_{u=1}^w (1 - s\tau_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y \left(1 + 2\zeta_v \frac{s}{\omega_v} + \frac{s^2}{\omega_v^2}\right)}{s^l \prod_{f=1}^d (1 - sT_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e \left(1 + 2\zeta_g \frac{s}{\omega_g} + \frac{s^2}{\omega_g^2}\right)}$$

Esprimiamo la funzione di trasferimento $F(s)$ nel dominio della pulsazione, ovvero sostituiamo formalmente $j\omega$ a s :

$$F(j\omega) = K \frac{\prod_{u=1}^w (1 - j\omega\tau_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y \left(1 + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} - \frac{\omega^2}{\omega_v^2}\right)}{(j\omega)^l \prod_{f=1}^d (1 - j\omega T_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e \left(1 + 2j\zeta_g \frac{\omega}{\omega_g} - \frac{\omega^2}{\omega_g^2}\right)}.$$

Tale rapporto è in generale un numero complesso e si può rappresentare come:

$$F(j\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)},$$

dove $|F(\omega)|$ è il modulo di $F(j\omega)$ e $\phi(\omega)$ il suo argomento.

Definiamo *diagramma di Bode* la coppia di grafici delle seguenti funzioni, in coordinate logaritmiche:

$$\begin{cases} \alpha(\omega) = 20 \log |F(\omega)| \\ \beta(\omega) = \frac{180^\circ}{\pi} \phi(\omega) \end{cases} ;$$

la funzione $\alpha(\omega)$ si misura in *decibel (dB)* mentre il fattore $180^\circ/\pi$ serve a convertire l'unità di misura di $\phi(\omega)$, radianti, in quella di $\beta(\omega)$, *gradi*. Valutiamo separatamente queste due quantità; sostituendo $|F(\omega)|$ nell'espressione di $\alpha(\omega)$, si trova²:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) = 20 \log |F(\omega)| &= 20 \log \left| K \frac{\prod_{u=1}^w (1 - j\omega\tau_u)^{t_u} \prod_{v=1}^y \left(1 + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right)}{(j\omega)^l \prod_{f=1}^d (1 - j\omega T_f)^{r_f} \prod_{g=1}^e \left(1 + 2j\zeta_g \frac{\omega}{\omega_g} - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right)} \right| = \\ &= 20 \log |K| + 20 \sum_{u=1}^w t_u \log |1 - j\omega\tau_u| + 20 \sum_{v=1}^y \log \left| 1 + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right| + \\ &\quad - 20l \log \omega - 20 \sum_{f=1}^d r_f \log |1 - j\omega T_f| - 20 \sum_{g=1}^e \log \left| 1 + 2j\zeta_g \frac{\omega}{\omega_g} - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right| = \\ &= 20 \log |K| + 10 \sum_{u=1}^w t_u \log (1 + \omega^2 \tau_u^2) + 10 \sum_{v=1}^y \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right)^2 + 4\zeta_v^2 \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right] + \\ &\quad - 20l \log \omega - 10 \sum_{f=1}^d r_f \log (1 + \omega^2 T_f^2) - 10 \sum_{g=1}^e \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right)^2 + 4\zeta_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right]; \end{aligned}$$

sostituendo $\phi(\omega)$ nell'espressione di $\beta(\omega)$, la costante K , se positiva, non introduce alcun termine, altrimenti, siccome $-|K| = |K|e^{-j\pi}$, introduce uno sfasamento in ritardo di π radianti, pertanto:

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \frac{180^\circ}{\pi} \phi(\omega) = \\ &= \frac{180^\circ}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{K}{|K|} - 1 \right) + \sum_{u=1}^w t_u \arg(1 + j\omega\tau_u) + \sum_{v=1}^y \arg \left(1 + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. - l \frac{\pi}{2} - \sum_{f=1}^d r_f \arg(1 + j\omega T_f) - \sum_{g=1}^e \arg \left(1 + 2j\zeta_g \frac{\omega}{\omega_g} - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

I due diagrammi sono ottenuti tracciando i grafici relativi a ciascun termine elementare di $\alpha(\omega)$ e di $\beta(\omega)$, per poi sommare i singoli diagrammi ottenuti. Le due funzioni $\alpha(\omega)$ e $\beta(\omega)$ contengono i dodici termini indicati nella tab.5.1, la cui rappresentazione è mostrata nel seguito.

² Si noti che l'espressione di $\alpha(\omega)$ contiene il termine $\log \omega$ ossia richiede la determinazione del logaritmo di una quantità dotata di dimensione. Siccome convenzionalmente le pulsazioni rappresentate nei diagrammi di Bode sono espresse in *rad/sec*, per $\log \omega$ si intende il calcolo di $\log(\omega\gamma)$ dove γ vale 1sec/rad .

	$\alpha(\omega)$	$\beta(\omega)$
costante reale	$20 \log K $	$90^\circ \left(\frac{K}{ K } - 1 \right)$
poli o zeri nell'origine	$-20l \log \omega$	$-l \cdot 90^\circ$
costante di tempo al numeratore	$10t_u \log(1 + \omega^2 \tau_u^2)$	$\frac{180^\circ}{\pi} t_u \arg(1 + j\omega \tau_u)$
costante di tempo al denominatore	$-10r_f \log(1 + \omega^2 T_f^2)$	$-\frac{180^\circ}{\pi} r_f \arg(1 + j\omega T_f)$
zeri complessi	$10 \sum_{v=1}^y \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right)^2 + 4\zeta_v^2 \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right]$	$\frac{180^\circ}{\pi} \sum_{v=1}^y \arg \left(1 + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right)$
poli complessi	$-10 \sum_{g=1}^e \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right)^2 + 4\zeta_g^2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right]$	$-\frac{180^\circ}{\pi} \sum_{g=1}^e \arg \left(1 + 2j\zeta_g \frac{\omega}{\omega_g} - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right)$

tab.5.1

Costante reale. L'equazione:

$$\alpha(\omega) = 20 \log|K|,$$

rappresenta una retta parallela all'asse ω , (fig.5.1), mentre l'equazione:

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 0 & K > 0 \\ -180^\circ & K < 0 \end{cases}$$

indica che la fase è identicamente nulla se $K > 0$ mentre vale -180° se $K < 0$.

Polì o zeri nell'origine. Consideriamo inizialmente $l > 0$ ed in particolare $l = 1$; l'equazione:

$$\alpha(\omega) = -20 \log \omega$$

è una retta passante per $\omega = 1 \text{ rad/sec}$, con pendenza negativa e pari a -20 , quindi per ogni incremento di $\log \omega$ di 1 unità, $\alpha(\omega)$ diminuisce di 20 unità (fig.5.2). Poiché una variazione di 1 unità di $\log \omega$ corrisponde ad una variazione di ω di un rapporto 10 (ad esempio, passando $\log \omega$ da 1 a 2, ω passa da 10 rad/sec a 100 rad/sec) e siccome una unità di $\alpha(\omega)$ è 1 dB , si dice anche che la retta ha una pendenza di $-20 \text{ dB per decade}$ (-20 dB/dec) o -6 dB/ott . Qualora $l < 0$, la retta rappresentativa dell'equazione precedente avrà una pendenza positiva e, se $l = -1$, di 20 dB/dec .

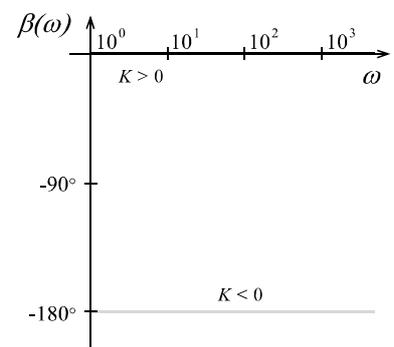
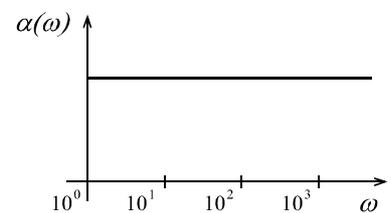


fig.5.1

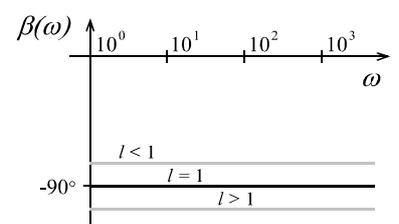
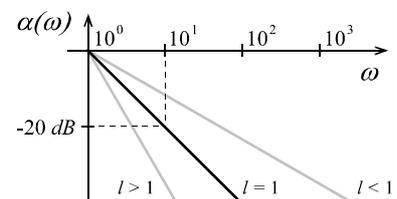
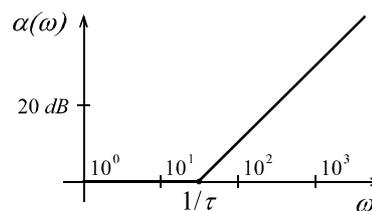


fig.5.2

L'equazione:

$$\beta(\omega) = -1 \cdot 90^\circ,$$

è una retta parallela all'asse ω che interseca l'asse delle ordinate per $-1 \cdot 90^\circ$.



Costante di tempo al numeratore. Assumiamo inizialmente $t_u = 1$, l'equazione:

$$\alpha(\omega) = 10 \log(1 + \omega^2 \tau_u^2)$$

viene rappresentata asintoticamente, distinguendo i casi $\omega \tau_u \ll 1$ e $\omega \tau_u \gg 1$:

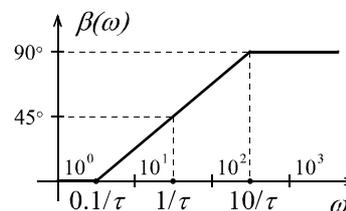


fig.5.3

$$\underline{\omega \tau_u \ll 1}, \quad (\omega \ll 1/\tau_u) \Rightarrow \alpha(\omega) \approx 10 \log 1 = 0;$$

$$\underline{\omega \tau_u \gg 1}, \quad (\omega \gg 1/\tau_u) \Rightarrow \alpha(\omega) \approx 10 \log(\omega^2 \tau_u^2) = 20 \log(\omega \tau_u) = 20 \log \omega + 20 \log \tau_u;$$

cioè, per $\omega \gg 1/\tau_u$ si ha una retta con pendenza di 20 dB/dec che interseca l'asse delle ascisse per $\omega = 1/\tau_u$ (fig.5.3). In fig.5.4 è rappresentato l'errore che si commette nell'approssimare il termine $\alpha(\omega)$ col metodo di Bode; l'errore massimo in tale approssimazione si ha in corrispondenza della *pulsazione di taglio* $1/\tau_u$, dove:

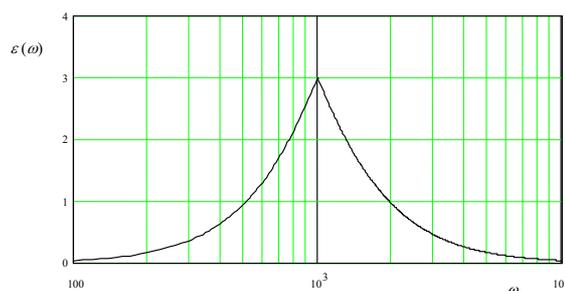


fig.5.4

$$\alpha(1/\tau_u) = 10 \log 2 \approx 3 \text{ dB}.$$

mentre l'approssimazione prevede $\alpha(1/\tau_u) = 0$. Se $t_u \neq 1$, allora la pendenza della retta è $20 t_u \text{ dB/dec}$.

Per la fase, posto inizialmente $t_u = 1$, si ha

$$\beta(\omega) = \frac{180^\circ}{\pi} \arg(1 + j\omega \tau_u)$$

si distinguono analogamente due casi³:

$$\underline{\omega \tau_u \ll 1}, \quad (\omega \ll 1/\tau_u) \Rightarrow \beta(\omega) \approx \frac{180^\circ}{\pi} \arctan(0) = 0^\circ;$$

$$\underline{\omega \tau_u \gg 1}, \quad (\omega \gg 1/\tau_u) \Rightarrow \beta(\omega) \approx \frac{180^\circ}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan(\omega \tau_u) = 90^\circ;$$

³ Si rammenti che l'argomento $\arg(z)$ di un numero complesso $z = \sigma + j\omega$ coincide con $\arctan(\sigma/\omega)$ solo se $\sigma > 0$, mentre, se $\sigma < 0$, $\arg(z) = \pi/2 - \arctan(\sigma/\omega)$ quando $\omega > 0$ e $\arg(z) = -\pi/2 - \arctan(\sigma/\omega)$ quando $\omega < 0$.

si noti che:

$$\beta\left(\frac{1}{\tau_u}\right) \approx \frac{180^\circ}{\pi} \arctan(1) = 45^\circ.$$

Anche in questo caso il diagramma rappresentativo è una spezzata con asintoti 0° e 90° . Inoltre risulta:

$$\beta\left(\frac{1}{10\tau_u}\right) \approx 5^\circ,$$

$$\beta\left(\frac{10}{\tau_u}\right) \approx 85^\circ,$$

così, con un errore di 5° in entrambi i casi, si assume:

$$\beta\left(\frac{1}{10\tau_u}\right) = 0^\circ,$$

$$\beta\left(\frac{10}{\tau_u}\right) = 90^\circ.$$

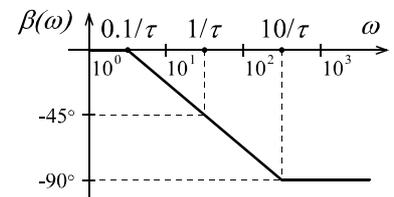
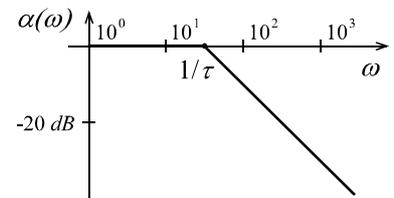


fig.5.5

Si noti che il segmento che unisce i punti $(1/10\tau_u, 0^\circ)$ e $(10/\tau_u, 90^\circ)$ ha pendenza pari a $45^\circ/\text{dec}$. Se $t_u \neq 1$, allora, a differenza del caso per $t_u = 1$, quando $\omega\tau_u \gg 1$ si ha $\beta(\omega) \approx t_u 90^\circ$ e inoltre $\beta(1/\tau_u) \approx t_u 45^\circ$.

Costante di tempo al denominatore. Si opera in maniera analoga a quella descritta nel caso precedente ed in particolare, per $r_f = 1$ i grafici delle funzioni $\alpha(\omega)$ e $\beta(\omega)$ sono mostrati nelle fig.5.5.

Esempio. (Circuito RC) Si consideri la funzione di trasferimento di un circuito RC (pag.12), risulta:

$$F(s) = \frac{1}{1 + s\tau},$$

dove $\tau = RC$ è la costante di tempo. Tale funzione ha un solo polo semplice per $s = -1/\tau$, ed espressa nel dominio della frequenza vale:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

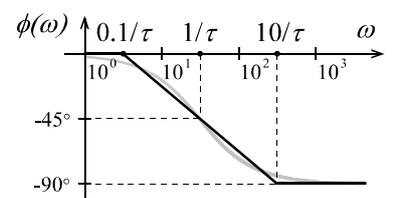
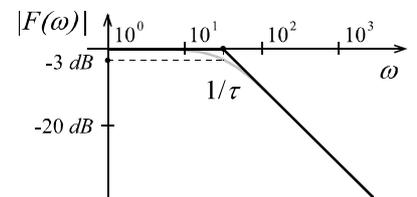


fig.5.6

così i diagrammi di Bode per modulo e fase sono quelli mostrati in fig.5.6. In colore sono mostrati gli andamenti reali delle funzioni $|F(\omega)|$ e $\phi(\omega)$.

Esempio. (Circuito CR) Si consideri la funzione di trasferimento di un circuito CR (pag.12), risulta:

$$F(s) = \frac{s\tau}{1+s\tau},$$

dove $\tau = RC$ è la costante di tempo. Questa funzione presenta un fattore costante τ (solitamente $\tau < 1$), uno zero semplice per $s = 0$ ed un polo semplice per $s = -1/\tau$; espressa nel dominio della frequenza, $F(s)$ vale:

$$F(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau},$$

I termini elencati vengono rappresentati separatamente e quindi sommati graficamente; i singoli termini, insieme ai diagrammi di Bode per modulo e fase di $F(j\omega)$ sono mostrati in fig.5.7.

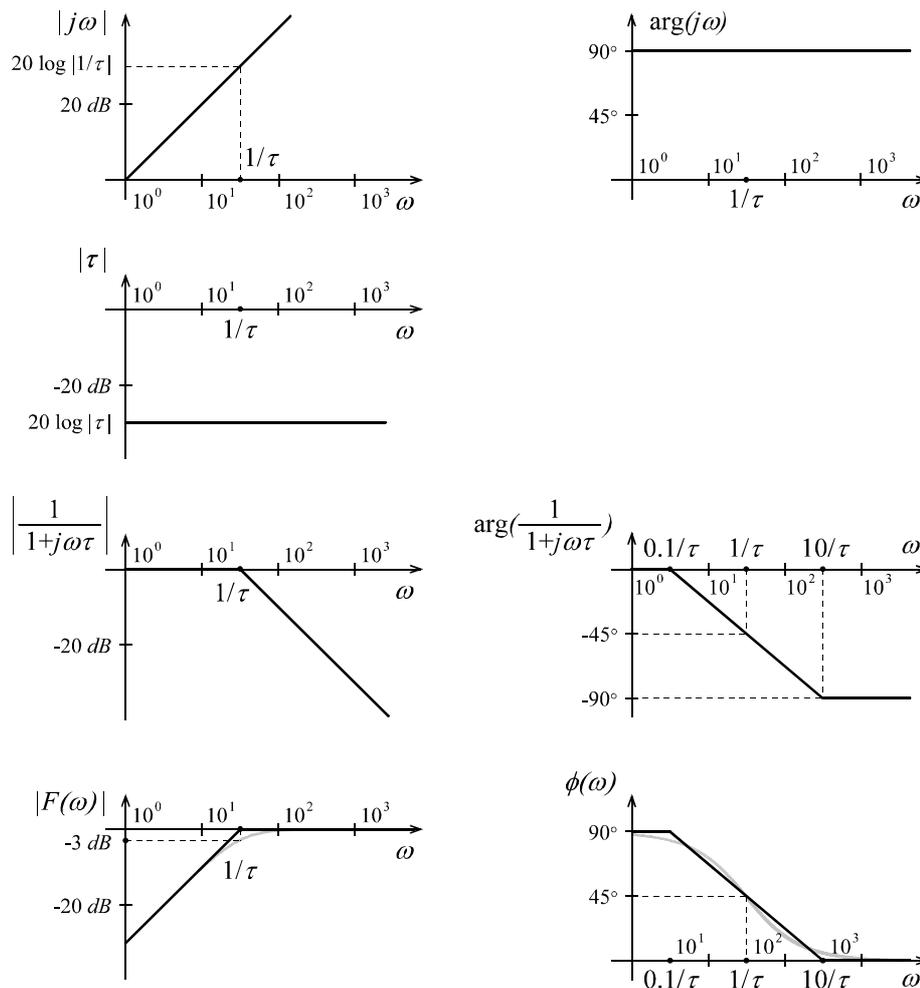


fig.5.7

Esempio. (*Partitore compensato*) Valutiamo la risposta in ampiezza ed in fase del circuito di fig.5.8. Indichiamo con Z_1 e con Z_2 rispettivamente i paralleli delle reattanze di R_1 e C_1 e di R_2 e C_2 , ossia (fig.5.9):

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC_1} = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} = \frac{R_1}{1 + s\tau_1},$$

$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC_2} = \frac{R_2}{1 + sR_2C_2} = \frac{R_2}{1 + s\tau_2},$$

dove si è posto $\tau_1 = R_1C_1$ e $\tau_2 = R_2C_2$. La funzione di trasferimento $V_0(s)/V_i(s)$ è il rapporto di partizione tra $V_i(s)$ e $V_0(s)$:

$$F(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

sostituendo a Z_1 e Z_2 la loro espressione, si ha:

$$F(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R_2}{1 + s\tau_2}}{\frac{R_1}{1 + s\tau_1} + \frac{R_2}{1 + s\tau_2}} = \frac{R_2 \cdot (1 + s\tau_1)}{R_1 \cdot (1 + s\tau_2) + R_2 \cdot (1 + s\tau_1)} =$$

$$= \frac{R_2 \cdot (1 + s\tau_1)}{R_1 + R_2 + s \cdot (\tau_2 R_1 + \tau_1 R_2)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau},$$

dove si è posto:

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$\tau = \frac{\tau_2 R_1 + \tau_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Questa funzione è caratterizzata da un fattore costante K (con $K < 1$), uno zero semplice per $s = -1/\tau_1$ ed un polo semplice per $s = -1/\tau$; espressa nel dominio della frequenza, $F(s)$ vale:

$$F(j\omega) = K \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau},$$

I termini elencati vengono rappresentati separatamente e quindi sommati graficamente; i singoli termini, insieme ai diagrammi di Bode per modulo e fase di $F(j\omega)$ sono mostrati in fig.5.10.

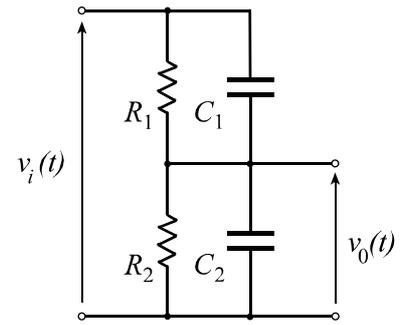


fig.5.8

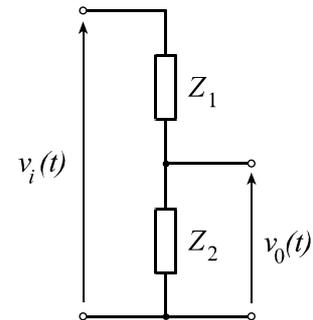


fig.5.9

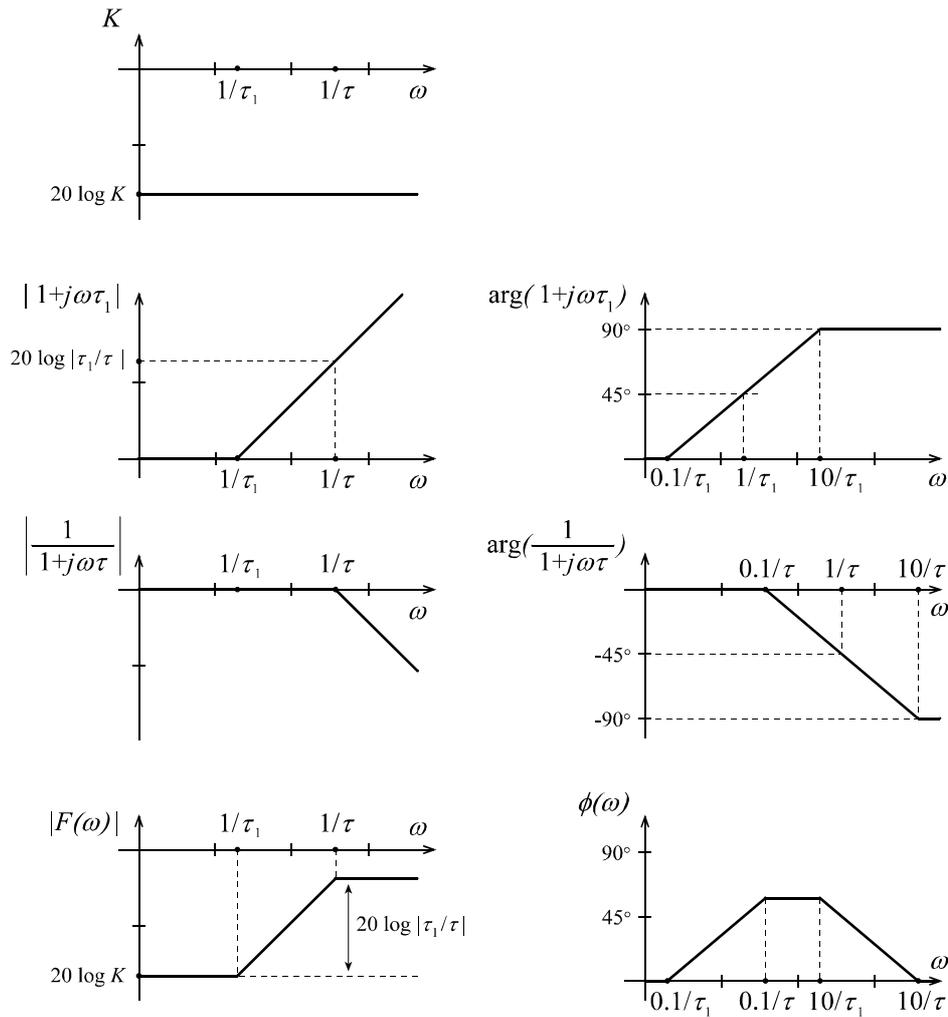


fig.5.10

Si noti che qualora $\tau_1 = \tau$, il circuito in esame si comporta come un partitore resistivo con funzione di trasferimento $V_o(s)/V_i(s)$ pari a:

$$F(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Zeri complessi. Analogamente ai casi precedenti l'equazione:

$$\alpha(\omega) = 10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right)^2 + 4\zeta_v^2 \frac{\omega^2}{\omega_v^2} \right]$$

viene rappresentata asintoticamente, distinguendo i casi $\omega \ll \omega_v$ e $\omega \gg \omega_v$:

$$\omega \ll \omega_v, \quad \Rightarrow \quad \alpha(\omega) \approx 10 \log 1 = 0;$$

$$\omega \gg \omega_v, \quad \Rightarrow \quad \alpha(\omega) \approx 10 \log \frac{\omega^4}{\omega_v^4} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_v;$$

cioè, per $\omega \gg \omega_v$ si ha una retta con pendenza di 40 dB/dec che interseca l'asse delle ascisse per $\omega = \omega_v$; in fig.5.11 sono mostrati, oltre al diagramma di Bode, alcuni andamenti reali corrispondenti a diversi valori del parametro ζ .

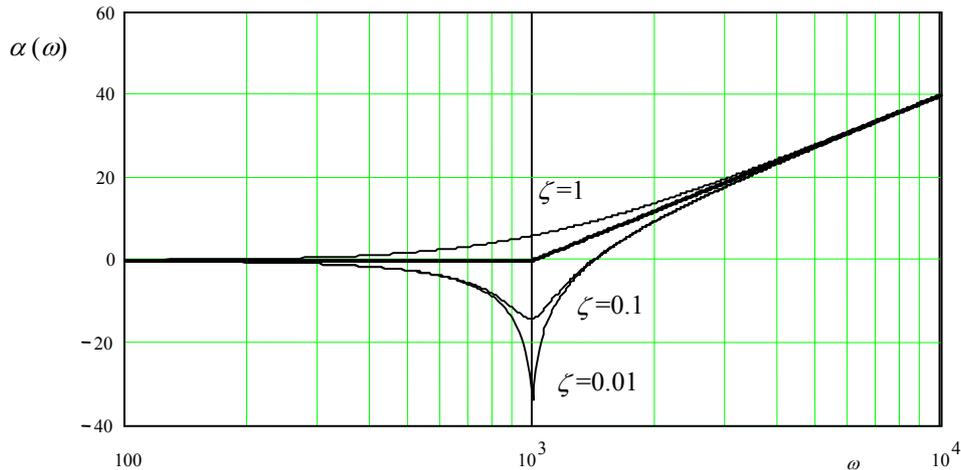


fig.5.11

In fig.5.12 è rappresentato l'errore che si commette nell'approssimare il termine $\alpha(\omega)$ col metodo di Bode; l'errore massimo si ha in corrispondenza della *pulsazione di risonanza* ω_{0v} pari a:

$$\omega_{0v} = \omega_v \sqrt{1 - 2\zeta^2},$$

dove risulta:

$$\alpha(\omega_{0v}) = 10 \log [4\zeta^2 (1 - \zeta^2)].$$

mentre l'approssimazione prevede $\alpha(\omega_{0v}) = 0$.

Per la fase si distinguono analogamente due casi⁴:

$$\omega \ll \omega_v, \quad \Rightarrow \quad \beta(\omega) \approx \frac{180^\circ}{\pi} \arctan 0 = 0^\circ;$$

$$\omega \gg \omega_v, \quad \Rightarrow \quad \beta(\omega) \approx \frac{180^\circ}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} \right) = 180^\circ;$$

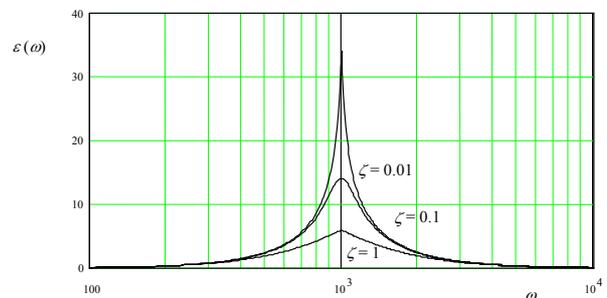


fig.5.12

⁴ Si veda la nota a pag.43 per il calcolo degli argomenti.

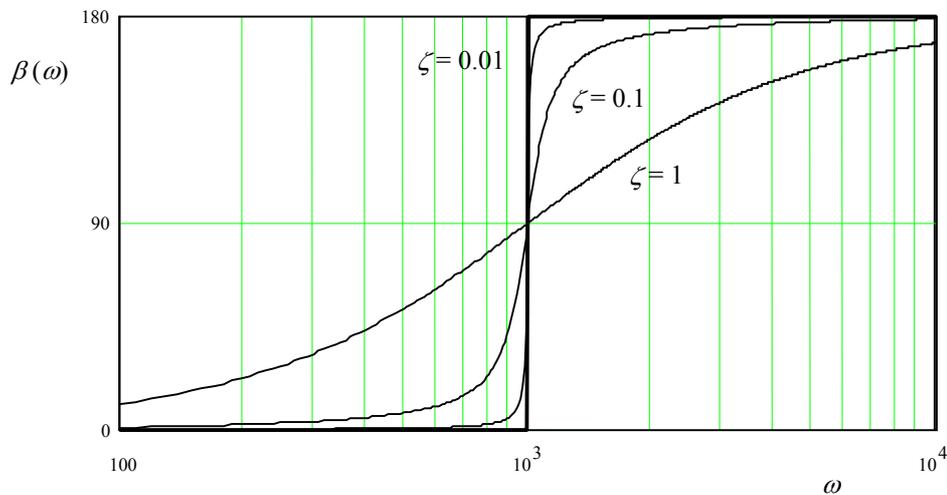


fig.5.13

cioè, per $\omega \ll \omega_v$ la fase è rappresentata con la retta $\beta(\omega) = 0^\circ$ mentre per $\omega \gg \omega_v$ è rappresentata con la retta $\beta(\omega) = 180^\circ$; in corrispondenza della pulsazione ω_v risulta:

$$\beta(\omega_v) = \frac{180^\circ}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \omega_v} \arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_v^2} + 2j\zeta_v \frac{\omega}{\omega_v} \right) = 90^\circ.$$

In fig.5.13 sono mostrati, oltre al diagramma di Bode della fase, alcuni andamenti reali corrispondenti a diversi valori del parametro ζ ; in fig.5.14 è rappresentato l'errore che si commette nell'approssimare il termine $\beta(\omega)$ col metodo di Bode.

I grafici riportati nelle fig.5.12 e 5.14 mettono in luce che l'approssimazione introdotta col metodo di Bode risulta, in questo caso, particolarmente insoddisfacente al crescere del parametro ζ , ovvero all'allontanarsi degli zeri della funzione di trasferimento dall'asse reale.

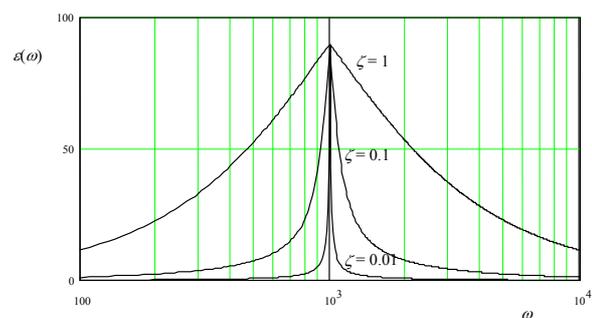


fig.5.14

Poli complessi. Si opera in maniera analoga a quella descritta nel caso precedente; i grafici delle funzioni $\alpha(\omega)$ e $\beta(\omega)$ sono mostrati nelle fig.5.15. 5.16.

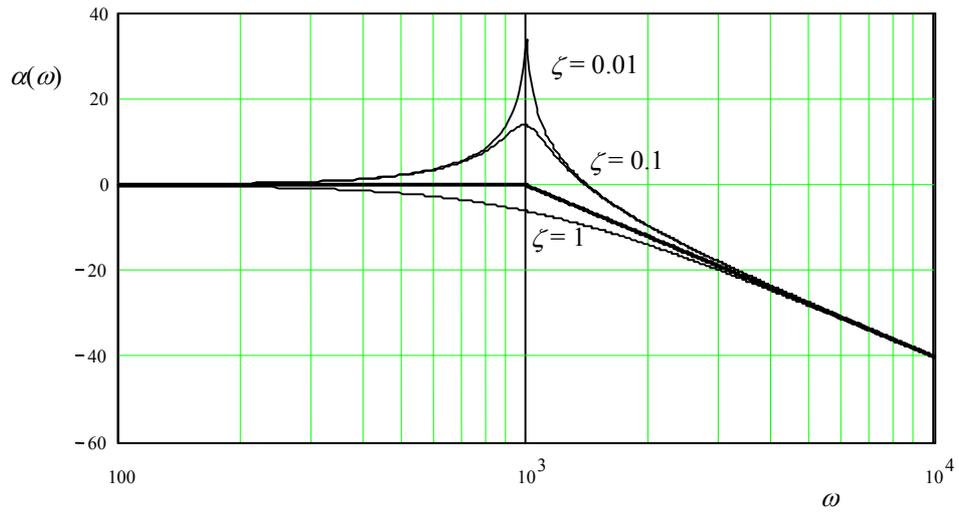


fig.5.15

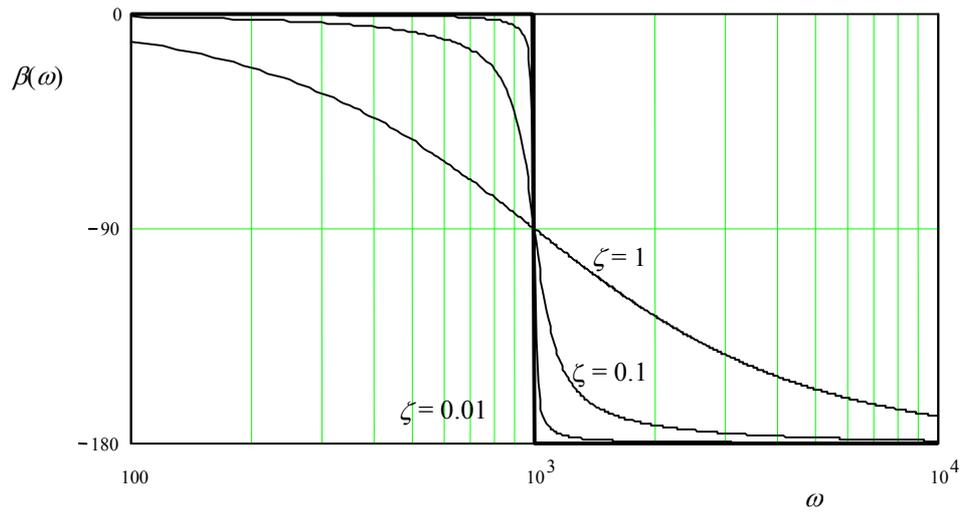


fig.5.16