

CIRCUITO *RLC* SERIE

Marco Panareo

Generalità

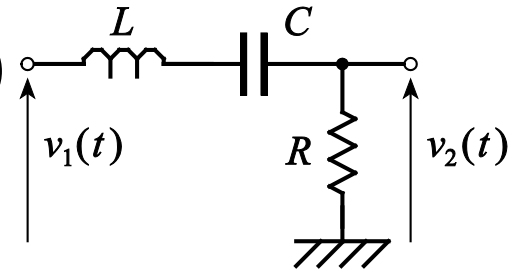
- Il circuito RLC serie è una rete contenente componenti induttivi e capacitivi e caratterizzata da presentare un minimo del modulo dell'impedenza al variare della frequenza della sollecitazione sinusoidale applicata.
- Tale proprietà è detta *risonanza*.
- La risonanza è di grande importanza in elettrotecnica e, in particolare, nel campo delle radiocomunicazioni, poiché mediante circuiti risonanti possono essere selezionati segnali di specifica frequenza.

Materiale adoperato

- Generatore di funzioni (TENMA 72-3555)
- Oscilloscopio (TEK TBS2000)
- Sonde per oscilloscopio (TEK 6112 – 10×)
- Un condensatore da $100nF$
- Una bobina da $15mH$
- Una resistenza da 560Ω ed una da 10Ω
- Breadboard
- Cavi di collegamento

Teoria

- Si consideri il circuito di figura; siano $\bar{V}_1(\omega)$ e $\bar{V}_2(\omega)$ rispettivamente l'estensione complessa della tensione $v_1(t)$ e della tensione $v_2(t)$; risulta:



$$\bar{V}_2(\omega) = \bar{V}_1(\omega) \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_1(\omega) \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

- Ricordando che la *pulsazione di risonanza* ω_0 e il *fattore di merito* del circuito valgono, rispettivamente:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

- sostituendo nella relazione precedente, si ha

$$\bar{V}_2(\omega) = \bar{V}_1(\omega) \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Teoria

- Pertanto, la funzione di trasferimento $\bar{G}(\omega) \equiv \bar{V}_2(\omega)/\bar{V}_1(\omega)$ di tale circuito è:

$$\bar{G}(\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- e, le corrispondenti espressioni di modulo e fase sono, rispettivamente:

$$|\bar{G}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

Teoria

- Supponiamo che

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t)$$

- allora, la relativa estensione complessa vale:

$$\bar{V}_1(\omega) = V_1 e^{j\omega t}$$

- per cui l'estensione complessa della tensione $v_2(t)$ varrà:

$$\begin{aligned}\bar{V}_2(\omega) &= \bar{V}_1(\omega) \bar{G}(\omega) = V_1 e^{j\omega t} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = V_1 e^{j\omega t} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} e^{j\varphi(\omega)} = \\ &= V_1 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}\end{aligned}$$

- e la corrispondente tensione $v_2(t)$:

$$v_2(t) = V_1 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \cos[\omega t + \varphi(\omega)] = V_2(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Teoria

- Pertanto, la tensione $v_2(t)$ ha un'ampiezza $V_2(\omega)$ dipendente dalla frequenza e pari al prodotto tra l'ampiezza V_1 della tensione $v_1(t)$ ed il modulo $|\bar{G}(\omega)|$ della funzione di trasferimento del circuito e una fase relativa a quella della tensione $v_1(t)$ dipendente dalla frequenza, e pari alla fase $\varphi(\omega)$ della funzione di trasferimento del circuito.
- L'ampiezza $V_2(\omega)$ è massima in corrispondenza della pulsazione di risonanza ω_0 e risulta:

$$V_2(\omega_0) = V_1$$

- inoltre, alla risonanza, la fase $\varphi(\omega)$ vale:

$$\varphi(\omega_0) = 0$$

- quindi, per tale frequenza, la tensione $v_2(t)$ risulta in fase con $v_1(t)$.

Teoria

- Si definiscono *frequenze di taglio* f_1 e f_2 ($f_1 < f_2$), del circuito considerato, quelle in corrispondenza delle quali il modulo della funzione di trasferimento vale $1/\sqrt{2}$ e la fase vale $\pm\pi/4$.
- Si definisce *banda passante* del circuito risonante, l'intervallo:

$$\Delta f \equiv f_2 - f_1$$

- Dalla definizione di frequenze di taglio, segue la relazione:

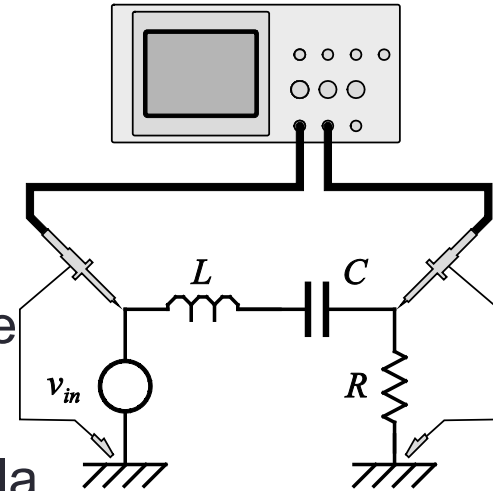
$$\Delta f \equiv \frac{f_0}{Q}$$

in cui f_0 è la frequenza di risonanza del circuito:

$$f_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Procedura sperimentale

1. Si considerino una resistenza da $560\ \Omega$, un condensatore da $100\ nF$ ed una bobina da $15\ mH$; se ne stimi la frequenza di risonanza del corrispondente circuito RLC serie ed il fattore di merito.
2. Si accenda il generatore e lo si imposti in modo che eroghi una forza elettromotrice variabile secondo un'onda sinusoidale di ampiezza pari a $1\ V$ circa ("HIGH-Z"). Si accenda l'oscilloscopio e si verifichi la compensazione delle sonde ($input \times 10$).
3. Si realizzi il circuito RLC in maniera che possa essere alimentato dal generatore di funzioni e si colleghino le sonde dell'oscilloscopio come indicato in figura: un capo della bobina a CH1, un capo della resistenza a CH2. Si rammenti che il generatore eroga una forza elettromotrice variabile rispetto massa e che l'oscilloscopio misura le differenze di potenziale rispetto massa, pertanto occorre assicurarsi che la massa del generatore, quella del circuito e quella dell'oscilloscopio siano collegate tra loro.



Procedura sperimentale

4. Partendo dalla frequenza di 10 Hz si misurino le ampiezze delle tensioni di ingresso V_1 e di uscita V_2 del circuito (ci si assicuri che V_1 si mantenga costante) e la fase* della tensione di uscita V_2 rispetto alla tensione di ingresso V_1 per cinque decadi ($10\text{ Hz} \div 100\text{ Hz}$, $100\text{ Hz} \div 1\text{ kHz}$, $1\text{ kHz} \div 10\text{ kHz}$, $10\text{ kHz} \div 100\text{ kHz}$, $100\text{ kHz} \div 1\text{ MHz}$) eseguendo almeno 5 misure per decade. Se ne rappresentino graficamente i risultati.
5. Si rilevi f_0 individuando la frequenza per cui la tensione $v_2(t)$ risulta in fase con la tensione $v_1(t)$ o l'ampiezza della tensione $v_1(t)$ sia massima. Si valuti l'opportunità di effettuare ulteriori misure di ampiezza e fase intorno alla frequenza di risonanza.
6. Si rilevi la banda passante identificando le frequenze f_1 e f_2 in corrispondenza delle quali il rapporto delle ampiezze V_2/V_1 è pari a $1/\sqrt{2}$ (V_1 pari a 1 V , V_2 pari a circa 707 mV). Si deduca il fattore di merito attraverso la relazione $Q = f_0/\Delta f$.
7. (*Opzionale*) Una volta individuata la frequenza di risonanza f_0 si faccia in modo che il generatore eroghi una tensione variabile secondo un'onda quadra di frequenza pari a $f_0/3$ con le stesse caratteristiche di ampiezza della tensione sinusoidale. Si osservi in queste condizioni la forma d'onda della tensione di uscita V_2 ; si ponga in parallelo alla resistenza R una resistenza di 10Ω e si confronti in questa nuova condizione la tensione di uscita V_2 con quella corrispondente alla precedente configurazione e se ne misuri la frequenza. Si dia una giustificazione di quanto osservato.

* Per la misura della fase si veda la slide successiva.

Misura dello sfasamento

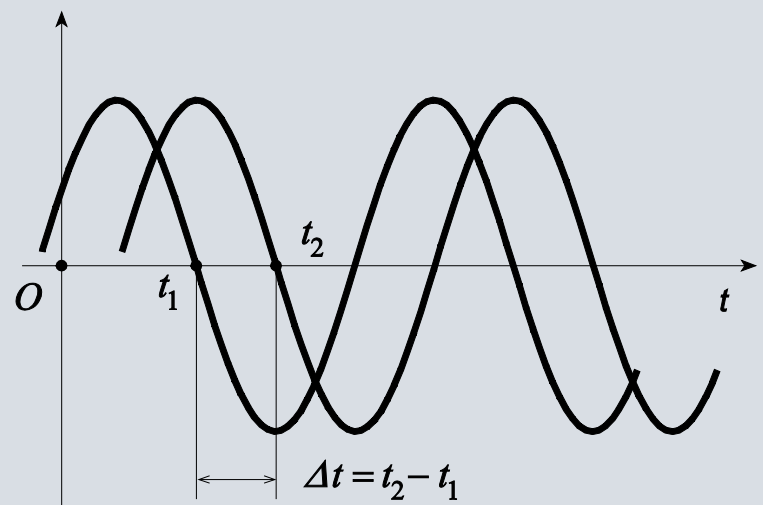
- Per la misura della fase, si rammenti che per due tensioni variabili sinusoidalmente con uguale frequenza, ad esempio $\sin(\omega t + \phi_1)$ e $\sin(\omega t + \phi_2)$, è possibile riscrivere tale dipendenza come $\sin[\omega(t + \phi_1/\omega)]$ e $\sin[\omega(t + \phi_2/\omega)]$; in queste espressioni ϕ_1/ω e ϕ_2/ω sono i tempi di ritardo t_1 e t_2 delle due tensioni rispetto all'origine dell'asse dei tempi.
- Pertanto, il tempo di ritardo tra le due tensioni, $t_2 - t_1$ si può esprimere attraverso la differenza di fase $\phi_2 - \phi_1$ come $(\phi_2 - \phi_1)/\omega$.
- Da questa espressione è possibile dedurre la differenza di fase tra le due tensioni attraverso la misura del ritardo relativo.

$$\sin(\omega t + \phi_1) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi_1}{\omega}\right)\right] = \sin[\omega(t + t_1)]$$

$$\sin(\omega t + \phi_2) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi_2}{\omega}\right)\right] = \sin[\omega(t + t_2)]$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\phi_2}{\omega} - \frac{\phi_1}{\omega} = \frac{1}{\omega}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\Delta\phi = \omega\Delta t$$



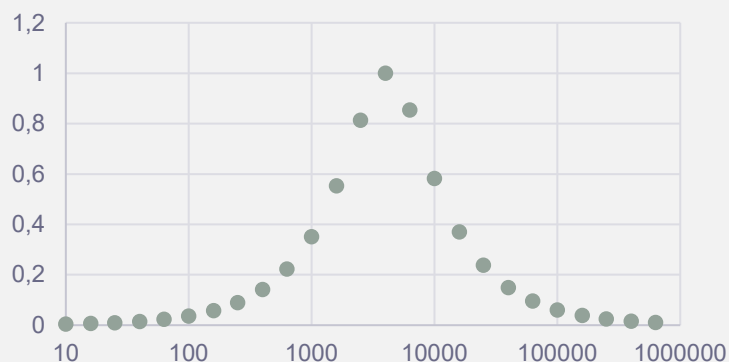
Presa dati

f (Hz)	Δf (Hz)	ω (rad/s)	$\Delta\omega$ (rad/s)	V_1 (V)	ΔV_1 (V)	V_2 (V)	ΔV_2 (V)	G	ΔG	Δt (s)	$\Delta\Delta t$ (s)	ϕ	$\Delta\phi$
10	0,001	62,83185	0,006283	1	0,1	0,003519	0,000352	0,003519	0,000704	0,024944	0,002494	1,567265	0,156727
16	0,0016	100,531	0,010053	1	0,1	0,00563	0,000563	0,00563	0,001126	0,015569	0,001557	1,565135	0,156513
25	0,0025	157,0796	0,015708	1	0,1	0,008796	0,00088	0,008796	0,001759	0,009944	0,000994	1,561922	0,156192
40	0,004	251,3274	0,025133	1	0,1	0,014074	0,001407	0,014074	0,002815	0,006193	0,000619	1,556521	0,155652
63	0,0063	395,8407	0,039584	1	0,1	0,022167	0,002217	0,022167	0,004433	0,003911	0,000391	1,548125	0,154813
100	0,01	628,3185	0,062832	1	0,1	0,035185	0,003518	0,035185	0,007037	0,002442	0,000244	1,534321	0,153432
160	0,016	1005,31	0,100531	1	0,1	0,056293	0,005629	0,056293	0,011259	0,001503	0,00015	1,511115	0,151112
250	0,025	1570,796	0,15708	1	0,1	0,087949	0,008795	0,087949	0,01759	0,000939	9,39E-05	1,474256	0,147426
400	0,04	2513,274	0,251327	1	0,1	0,140677	0,014068	0,140677	0,028135	0,00056	5,6E-05	1,406663	0,140666
630	0,063	3958,407	0,395841	1	0,1	0,221374	0,022137	0,221374	0,044275	0,000325	3,25E-05	1,285156	0,128516
1000	0,1	6283,185	0,628319	1	0,1	0,350307	0,035031	0,350307	0,070061	0,000164	1,64E-05	1,032247	0,103225
1600	0,16	10053,1	1,00531	1	0,1	0,552912	0,055291	0,552912	0,110582	4,67E-05	4,67E-06	0,469235	0,046923
2500	0,25	15707,96	1,570796	1	0,1	0,813046	0,081305	0,813046	0,162609	-1,76E-05	-1,76E-06	-0,276647	-0,027665
4000	0,4	25132,74	2,513274	1	0,1	0,999305	0,09993	0,999305	0,199861	-3,05E-05	-3,05E-06	-0,766388	-0,076639
6300	0,63	39584,07	3,958407	1	0,1	0,854019	0,085402	0,854019	0,170804	-2,56E-05	-2,56E-06	-1,014762	-0,101476
10000	1	62831,85	6,283185	1	0,1	0,581571	0,058157	0,581571	0,116314	-1,87E-05	-1,87E-06	-1,175826	-0,117583
16000	1,6	100531	10,0531	1	0,1	0,369458	0,036946	0,369458	0,073892	-1,29E-05	-1,29E-06	-1,293637	-0,129364
25000	2,5	157079,6	15,70796	1	0,1	0,237294	0,023729	0,237294	0,047459	-8,77E-06	-8,77E-07	-1,376945	-0,137694
40000	4	251327,4	25,13274	1	0,1	0,148465	0,014847	0,148465	0,029693	-5,73E-06	-5,73E-07	-1,440998	-0,1441
63000	6,3	395840,7	39,58407	1	0,1	0,094295	0,00943	0,094295	0,018859	-3,75E-06	-3,75E-07	-1,484489	-0,148449
100000	10	628318,5	62,83185	1	0,1	0,059413	0,005941	0,059413	0,011883	-2,41E-06	-2,41E-07	-1,51468	-0,151468
160000	16	1005310	100,531	1	0,1	0,037135	0,003714	0,037135	0,007427	-1,53E-06	-1,53E-07	-1,534982	-0,153498
250000	25	1570796	157,0796	1	0,1	0,023767	0,002377	0,023767	0,004753	-9,85E-07	-9,85E-08	-1,547579	-0,154758
400000	40	2513274	251,3274	1	0,1	0,014854	0,001485	0,014854	0,002971	-6,19E-07	-6,19E-08	-1,556159	-0,155616
630000	63	3958407	395,8407	1	0,1	0,009431	0,000943	0,009431	0,001886	-3,94E-07	-3,94E-08	-1,561453	-0,156145

Presa dati

f (Hz)	Δf (Hz)	ω (rad/s)	$\Delta\omega$ (rad/s)	V_1 (V)	ΔV_1 (V)	V_2 (V)	ΔV_2 (V)	G	ΔG	Δt (s)	$\Delta\Delta t$ (s)	ϕ	$\Delta\phi$
10	0,001	62,83185	0,006283	1	0,1	0,003519	0,000352	0,003519	0,000704	0,024944	0,002494	1,567265	0,156727
16	0,0016	100,531	0,010053	1	0,1	0,00563	0,000563	0,00563	0,001126	0,015569	0,001557	1,565135	0,156513
25	0,0025	157,0796	0,015708	1	0,1	0,008796	0,00088	0,008796	0,001759	0,009944	0,000994	1,561922	0,156192
32	0,0032	201,0619	0,020106	1	0,1	0,014074	0,001407	0,014074	0,002815	0,006193	0,000619	1,556521	0,155652
40	0,004	251,3274	0,025133	1	0,1	0,022167	0,002217	0,022167	0,004433	0,003911	0,000391	1,548125	0,154813
50	0,005	314,1593	0,031416	1	0,1	0,035185	0,003518	0,035185	0,007037	0,002442	0,000244	1,534321	0,153432
63	0,0063	398,769	0,039877	1	0,1	0,056293	0,005629	0,056293	0,011259	0,001503	0,00015	1,511115	0,151112
80	0,008	502,6548	0,050265	1	0,1	0,087949	0,008795	0,087949	0,01759	0,000939	9,39E-05	1,474256	0,147426
100	0,01	628,3185	0,062832	1	0,1	0,140677	0,014068	0,140677	0,028135	0,00056	5,6E-05	1,406663	0,140666
125	0,0125	785,3982	0,07854	1	0,1	0,221374	0,022137	0,221374	0,044275	0,000325	3,25E-05	1,285156	0,128516
160	0,016	1005,3096	0,100531	1	0,1	0,350307	0,035031	0,350307	0,070061	0,000164	1,64E-05	1,032247	0,103225
200	0,02	1256,6371	0,125664	1	0,1	0,552912	0,055291	0,552912	0,110582	4,67E-05	4,67E-06	0,469235	0,046923
250	0,025	1570,7963	0,15708	1	0,1	0,813046	0,081305	0,813046	0,162609	-1,76E-05	-1,76E-06	-0,276647	-0,027665
315	0,0315	1979,277	0,197928	1	0,1	0,999305	0,09993	0,999305	0,199861	-3,05E-05	-3,05E-06	-0,766388	-0,076639
400	0,04	2513,2741	0,251327	1	0,1	0,854019	0,085402	0,854019	0,170804	-2,56E-05	-2,56E-06	-1,014762	-0,101476
500	0,05	3141,5927	0,314159	1	0,1	0,581571	0,058157	0,581571	0,116314	-1,87E-05	-1,87E-06	-1,175826	-0,117583
630	0,063	3987,6905	0,398769	1	0,1	0,369458	0,036946	0,369458	0,073892	-1,29E-05	-1,29E-06	-1,293637	-0,129364
800	0,08	5026,5482	0,502655	1	0,1	0,237294	0,023729	0,237294	0,047459	-8,77E-06	-8,77E-07	-1,376945	-0,137694
1000	0,1	6283,1853	0,628319	1	0,1	0,148465	0,014847	0,148465	0,029693	-5,73E-06	-5,73E-07	-1,440998	-0,1441
1250	0,125	7853,9816	0,785398	1	0,1	0,094295	0,00943	0,094295	0,018859	-3,75E-06	-3,75E-07	-1,484489	-0,148449
1600	0,16	10053,0965	0,100531	1	0,1	0,059413	0,005941	0,059413	0,011883	-2,41E-06	-2,41E-07	-1,51468	-0,151468
2000	0,2	12566,3706	0,125664	1	0,1	0,037135	0,003714	0,037135	0,007427	-1,53E-06	-1,53E-07	-1,534982	-0,153498
2500	0,25	15707,9633	0,15708	1	0,1	0,023767	0,002377	0,023767	0,004753	-9,85E-07	-9,85E-08	-1,547579	-0,154758
3150	0,315	19792,7701	0,197928	1	0,1	0,014854	0,001485	0,014854	0,002971	-6,19E-07	-6,19E-08	-1,556159	-0,155616
4000	0,4	25132,7412	0,251327	1	0,1	0,009431	0,000943	0,009431	0,001886	-3,94E-07	-3,94E-08	-1,561453	-0,156145

Guadagno



Fase

