

FILTRO *RC* PASSA BASSO

Marco Panareo

Generalità

- Per filtro, in elettronica, si intende un circuito in grado di elaborare un segnale modificandone le caratteristiche di ampiezza e di fase.
- Tali dispositivi si dividono in filtri *passivi* e filtri *attivi*:
 - i primi sono costituiti da soli componenti passivi, quali resistori, condensatori ed induttori,
 - i secondi contengono anche componenti attivi quali, ad esempio, amplificatori operazionali.
- Il filtro *RC* passa basso, costituito unicamente da un resistore e un condensatore, rappresenta il filtro passivo più semplice.

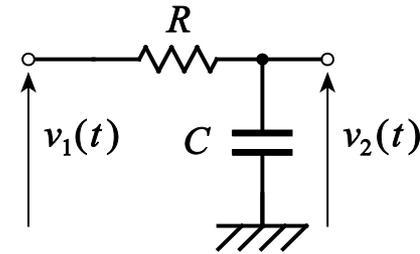
Materiale adoperato

- Generatore di funzioni (TENMA 72-3555)
- Oscilloscopio (TEK TBS2000)
- Sonde per oscilloscopio (TEK 6112 – 10×)
- Una resistenza da 10 $k\Omega$
- Un condensatore da 100 nF
- Breadboard
- Cavi di collegamento

Teoria

- Si consideri il circuito di figura; sia $\bar{V}_1(\omega)$ l'estensione complessa della tensione $v_1(t)$ e $\bar{V}_2(\omega)$ l'estensione complessa della tensione $v_2(t)$; risulta:

$$\bar{V}_2(\omega) = \bar{V}_1(\omega) \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_1(\omega) \frac{1}{1 + j\omega RC} = \bar{V}_1(\omega) \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$



- in cui $\tau = RC$ è la costante di tempo del circuito.
- Pertanto, la funzione di trasferimento di tale circuito è:

$$\bar{G}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- e, le corrispondenti espressioni in modulo e fase sono, rispettivamente:

$$|\bar{G}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Teoria

- Supponiamo che

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t)$$

- allora, la relativa estensione complessa vale:

$$\bar{V}_1(\omega) = V_1 e^{j\omega t}$$

- per cui l'estensione complessa della tensione $v_2(t)$ varrà:

$$\bar{V}_2(\omega) = \bar{V}_1(\omega) \bar{G}(\omega) = V_1 e^{j\omega t} \frac{1}{1 + j\omega\tau} = V_1 e^{j\omega t} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{j\varphi(\omega)} = V_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}$$

- e la corrispondente tensione $v_2(t)$:

$$v_2(t) = V_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos[\omega t + \varphi(\omega)] = V_2(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

- Pertanto, la tensione $v_2(t)$ ha un'ampiezza $V_2(\omega)$ dipendente dalla frequenza e pari al prodotto tra l'ampiezza V_1 della tensione $v_1(t)$ ed il modulo $|G(\omega)|$ della funzione di trasferimento del circuito e una fase relativa a quella della tensione $v_1(t)$, dipendente dalla frequenza, e pari alla fase $\varphi(\omega)$ della funzione di trasferimento del circuito.

Teoria

- Risulta:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\bar{G}(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = 1$$

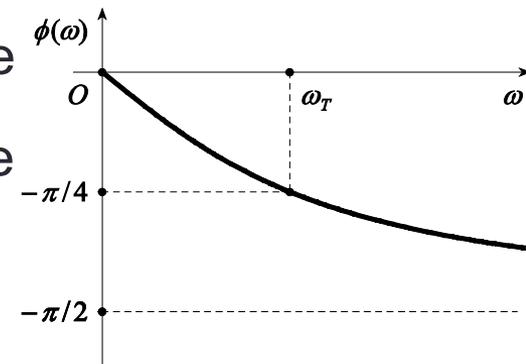
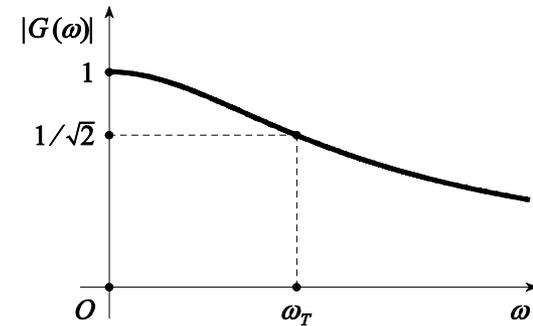
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\bar{G}(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = 0$$

- inoltre, la funzione $|\bar{G}(\omega)|$ è monotona decrescente, pertanto il circuito presenta una piccola attenuazione alle basse frequenze e l'attenuazione massima alle alte frequenze; per questo motivo tale circuito agisce da filtro *passa-basso*. Risulta inoltre:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \arctan(\omega\tau) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan(\omega\tau) = -\frac{\pi}{2}$$

- e la funzione $\varphi(\omega)$ è monotona decrescente, pertanto in questo circuito la fase della tensione $v_2(t)$ rispetto a quella della tensione $v_1(t)$ è piccola alle basse frequenze ed è pari a $-\pi/2$ alle alte frequenze.



Teoria

- Si definisce *frequenza di taglio* f_T del filtro considerato quella in corrispondenza della quale risulta:

$$|\bar{G}(2\pi f_T)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Dall'espressione della funzione di trasferimento segue:

$$f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

- Inoltre, dalla relazione che fornisce il tempo di salita della risposta di un circuito RC ad un gradino di tensione:

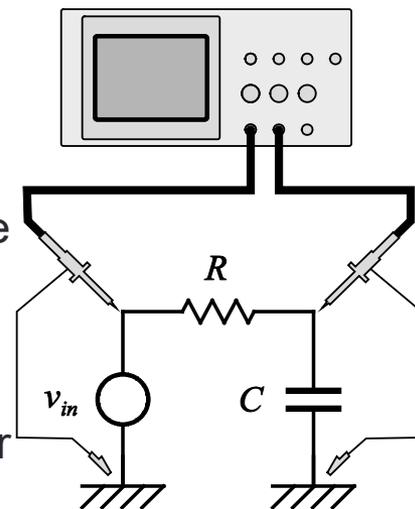
$$t_r = \tau \ln(9) = RC \ln(9) \approx 2.2\tau$$

- Segue la relazione:

$$f_T t_r = \frac{\ln(9)}{2\pi} \approx 0.35$$

Procedura sperimentale

1. Si considerino una resistenza da $10\text{ k}\Omega$ e un condensatore da 100 nF e se ne stimi la frequenza di taglio del corrispondente filtro RC passa basso.
2. Si accenda il generatore e lo si imposti in modo che eroghi una forza elettromotrice variabile secondo un'onda sinusoidale di ampiezza pari a 1 V circa (V_{pp} pari a 1 V e V_{off} pari a 0 V , "HIGH-Z"); lo si colleghi all'oscilloscopio. Si accenda l'oscilloscopio e si colleghi CH1 al generatore. Attraverso la visualizzazione con l'oscilloscopio si faccia in modo che la sinusoide abbia l'ampiezza di 1 V e una frequenza di 10 Hz ; per stabilizzare l'immagine sullo schermo si adoperi la manopola di *trigger*.
3. Si realizzi il circuito RC in maniera che possa essere alimentato dal generatore di funzioni. Si verifichi la compensazione delle sonde e quindi si colleghi l'oscilloscopio come indicato in figura: un capo della resistenza a CH1, l'altro a CH2. Si rammenti che il generatore eroga la forza elettromotrice variabile rispetto massa e che l'oscilloscopio misura le differenze di potenziale rispetto massa, pertanto occorre assicurarsi che la massa del generatore, quella del circuito e quella dell'oscilloscopio siano collegate tra loro.



Procedura sperimentale

4. Partendo dalla frequenza di 10Hz si misurino le ampiezze delle tensioni di ingresso e di uscita V_1 e V_2 del circuito e la fase* della tensione di uscita rispetto alla tensione di ingresso per tre decadi ($10\text{Hz} \div 100\text{Hz}$, $100\text{Hz} \div 1\text{kHz}$, $1\text{kHz} \div 10\text{kHz}$) eseguendo almeno 5 misure per decade. Se ne rappresentino graficamente i risultati.
5. Si rilevi f_T individuando la frequenza per cui il rapporto delle ampiezze V_2/V_1 sia pari a $1/\sqrt{2}$ (V_1 pari a 1V , V_2 pari a circa 707mV); si valuti l'opportunità di effettuare ulteriori misure delle ampiezze e delle fasi intorno alla frequenza di taglio.
6. Si verifichi la relazione tra tempo di salita e frequenza di taglio $t_r f_T \approx \ln(9)/(2\pi) \approx 0.35$.

* Per la misura della fase si veda la slide successiva.

Misura dello sfasamento

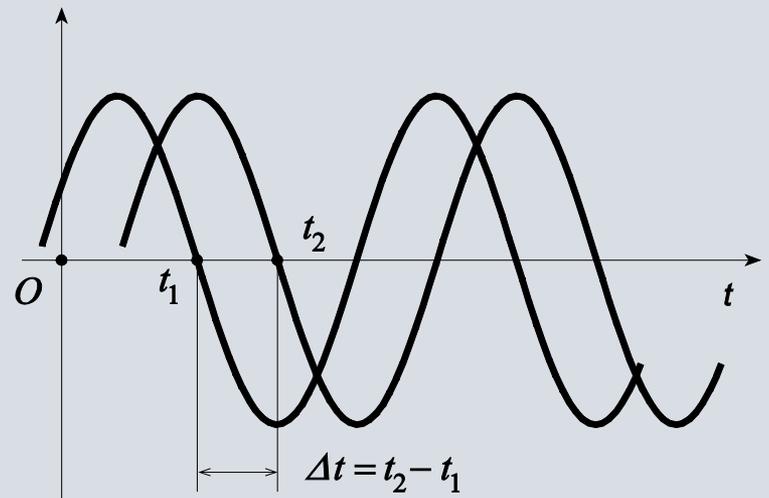
- Per la misura della fase, si rammenti che per due tensioni variabili sinusoidalmente con uguale frequenza, ad esempio $\sin(\omega t + \phi_1)$ e $\sin(\omega t + \phi_2)$, è possibile riscrivere tale dipendenza come $\sin[\omega(t + \phi_1/\omega)]$ e $\sin[\omega(t + \phi_2/\omega)]$; in queste espressioni ϕ_1/ω e ϕ_2/ω sono i tempi di ritardo t_1 e t_2 delle due tensioni rispetto all'origine dell'asse dei tempi.
- Pertanto, il tempo di ritardo tra le due tensioni, $t_2 - t_1$ si può esprimere attraverso la differenza di fase $\phi_2 - \phi_1$ come $(\phi_2 - \phi_1)/\omega$.
- Da questa espressione è possibile dedurre la differenza di fase tra le due tensioni attraverso la misura del ritardo relativo.

$$\sin(\omega t + \phi_1) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi_1}{\omega}\right)\right] = \sin[\omega(t + t_1)]$$

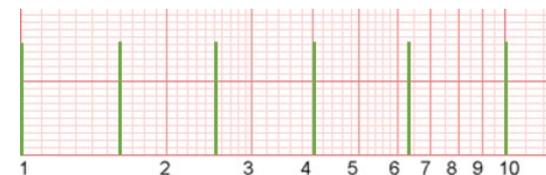
$$\sin(\omega t + \phi_2) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi_2}{\omega}\right)\right] = \sin[\omega(t + t_2)]$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\phi_2}{\omega} - \frac{\phi_1}{\omega} = \frac{1}{\omega}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\Delta\phi}{\omega}$$

$$\Delta\phi = \omega\Delta t$$



Presa dati



f (Hz)	Δf (Hz)	ω (rad/s)	$\Delta\omega$ (rad/s)	V_1 (V)	ΔV_1 (V)	V_2 (V)	ΔV_2 (V)	G	ΔG	Δt (s)	$\Delta\Delta t$ (s)	ϕ	$\Delta\phi$
10	0,001	62,83185	0,006283	1	0,1	0,998032	0,099803	0,998032	0,199606	-0,001	-1E-04	-0,06275	-0,00627
16	0,0016	100,531	0,010053	1	0,1	0,994985	0,099498	0,994985	0,198997	-0,001	-1E-04	-0,10019	-0,01002
25	0,0025	157,0796	0,015708	1	0,1	0,987887	0,098789	0,987887	0,197577	-0,00099	-9,9E-05	-0,15581	-0,01558
40	0,004	251,3274	0,025133	1	0,1	0,969839	0,096984	0,969839	0,193968	-0,00098	-9,8E-05	-0,24623	-0,02462
63	0,0063	395,8407	0,039584	1	0,1	0,929804	0,09298	0,929804	0,185961	-0,00095	-9,5E-05	-0,37692	-0,03769
100	0,01	628,3185	0,062832	1	0,1	0,846733	0,084673	0,846733	0,169347	-0,00089	-8,9E-05	-0,56098	-0,0561
160	0,016	1005,31	0,100531	1	0,1	0,705232	0,070523	0,705232	0,141046	-0,00078	-7,8E-05	-0,78805	-0,0788
250	0,025	1570,796	0,15708	1	0,1	0,537029	0,053703	0,537029	0,107406	-0,00064	-6,4E-05	-1,00388	-0,10039
400	0,04	2513,274	0,251327	1	0,1	0,369698	0,03697	0,369698	0,07394	-0,00047	-4,7E-05	-1,19211	-0,11921
630	0,063	3958,407	0,395841	1	0,1	0,244932	0,024493	0,244932	0,048986	-0,00033	-3,3E-05	-1,32335	-0,13233
1000	0,1	6283,185	0,628319	1	0,1	0,157177	0,015718	0,157177	0,031435	-0,00022	-2,2E-05	-1,41297	-0,1413
1600	0,16	10053,1	1,00531	1	0,1	0,098983	0,009898	0,098983	0,019797	-0,00015	-1,5E-05	-1,47165	-0,14717
2500	0,25	15707,96	1,570796	1	0,1	0,063533	0,006353	0,063533	0,012707	-9,6E-05	-9,6E-06	-1,50722	-0,15072
4000	0,4	25132,74	2,513274	1	0,1	0,039757	0,003976	0,039757	0,007951	-6,1E-05	-6,1E-06	-1,53103	-0,1531
6300	0,63	39584,07	3,958407	1	0,1	0,025255	0,002525	0,025255	0,005051	-3,9E-05	-3,9E-06	-1,54554	-0,15455
10000	1	62831,85	6,283185	1	0,1	0,015913	0,001591	0,015913	0,003183	-2,5E-05	-2,5E-06	-1,55488	-0,15549
16000	1,6	100531	10,0531	1	0,1	0,009947	0,000995	0,009947	0,001989	-1,6E-05	-1,6E-06	-1,56085	-0,15608
25000	2,5	157079,6	15,70796	1	0,1	0,006366	0,000637	0,006366	0,001273	-1E-05	-1E-06	-1,56443	-0,15644
40000	4	251327,4	25,13274	1	0,1	0,003979	0,000398	0,003979	0,000796	-6,2E-06	-6,2E-07	-1,56682	-0,15668
63000	6,3	395840,7	39,58407	1	0,1	0,002526	0,000253	0,002526	0,000505	-4E-06	-4E-07	-1,56827	-0,15683
100000	10	628318,5	62,83185	1	0,1	0,001592	0,000159	0,001592	0,000318	-2,5E-06	-2,5E-07	-1,5692	-0,15692

$$\tau = 1 \text{ ms}$$

WAVEFORM CHARACTERISTICS

Sine	
Frequency range	1μHz~25MHz
Resolution	1μHz
Accuracy	90 days: ±50ppm, 1 year: ±100ppm (18°C-28°C)



- L'accuracy sulla frequenza del segnale erogato dal generatore è espressa in parti per milione:
 - ±100ppm
- Significa che per ottenere l'accuracy su una misura di frequenza occorre moltiplicare la frequenza per il rapporto $100/10^6 = 10^{-4} = 0.0001$