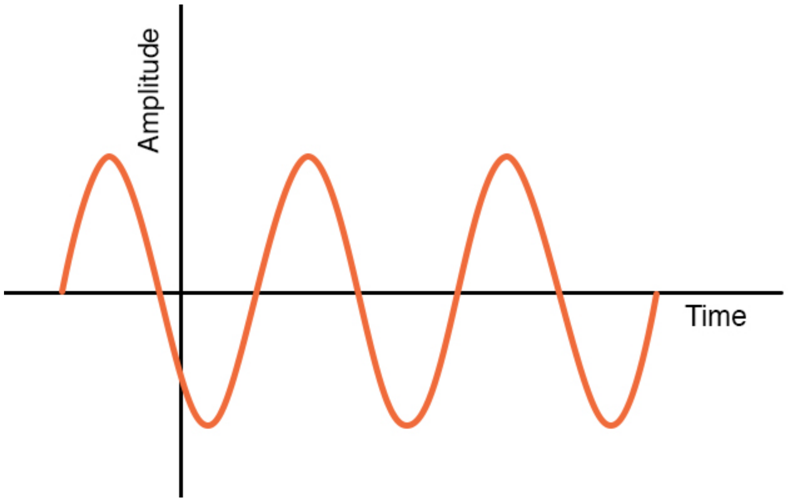
ECCITAZIONI SINUSOIDALI

Marco Panareo



Metodo simbolico

- In generale, la relazione tra corrente e tensione per un condensatore o per una bobina dipendono dall'espressione matematica delle grandezze applicate.

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt};$$

$$v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,d\xi$$

- Una classe importante di eccitazioni di una rete elettrica è costituita dagli stimoli sinusoidali, ossia tali che le grandezze, tensioni e correnti, dipendono dal tempo con legge sinusoidale.

Metodo simbolico

- Il metodo simbolico permette di estendere i principi di Kirchhoff (e più in generale i metodi di studio dei circuiti), alle reti sollecitate sinusoidalmente
- la sua applicazione prevede che alla grandezza che rappresenta l'eccitazione, sia sostituita formalmente una grandezza esponenziale:

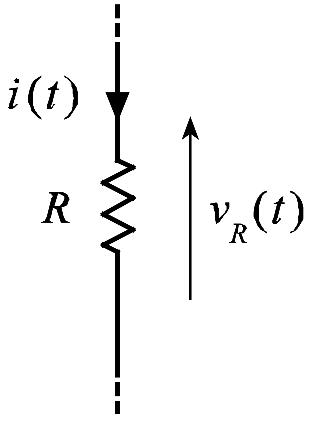
$$e^{j\omega t} \rightarrow \cos\omega t$$

- Quindi viene risolta la rete facendo uso dei metodi di studio dei circuiti e, delle risposte complesse, viene determinata la parte reale.
- Nel seguito esaminiamo il comportamento di resistenze, induttanze e capacità a stimoli sinusoidali.

Resistenza

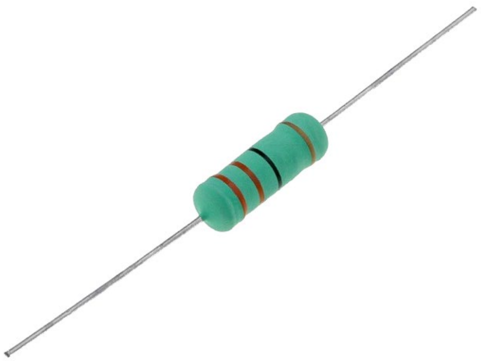
- Consideriamo un resistore di resistenza R percorso dalla corrente:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{ext. complessa}} \overline{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$



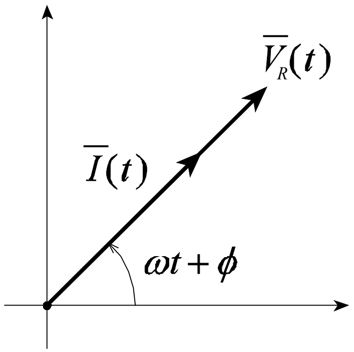
- L'estensione complessa della d.d.p. ai capi della bobina vale:

$$\overline{V}_R = R\overline{I} = RI_0 e^{j(\omega t + \phi)} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$



- con $V_0 = RI_0$.

Resistenza



- I termini

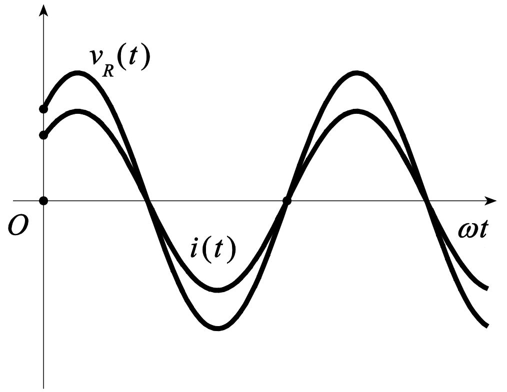
$$\overline{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$\overline{V}_R = V_0 e^{j(\omega t+\phi)}$$

- possono essere considerati rappresentativi di due *fasori* $\overline{V}_R$ e $\overline{I}$ che spiccano dal medesimo punto e ruotano nella stessa direzione, convenzionalmente antioraria, con velocità angolare pari a ω, mantenendosi in fase tra loro.

- La tensione reale ai capi della resistenza è

$$v_R(t) = \mathcal{R}e\left\{\overline{V}_R\right\} = \mathcal{R}e\left\{V_0 e^{j(\omega t+\phi)}\right\} = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

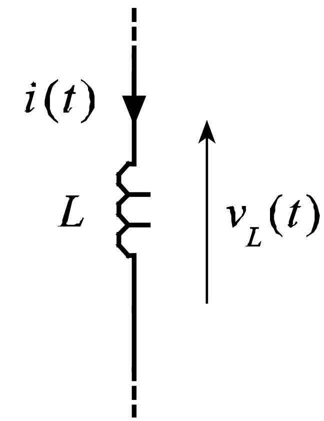


- quindi, la differenza di potenziale sinusoidale ai capi della resistenza ha ampiezza pari a V_0 ed è in fase con la corrente $i(t)$

Induttanza

- Consideriamo una bobina di induttanza L percorsa dalla corrente:

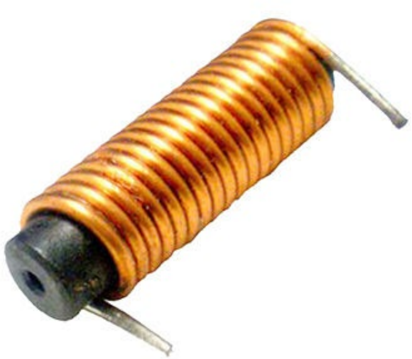
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{ext. complessa}} \bar{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$



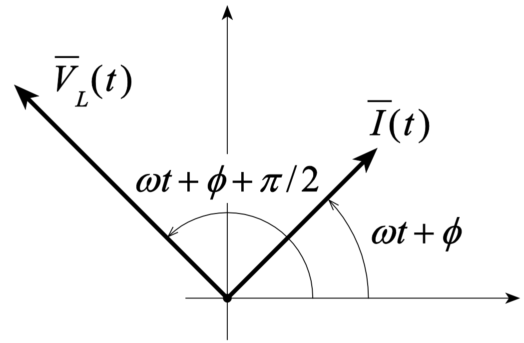
- L'estensione complessa della d.d.p. ai capi della bobina vale:

$$\bar{V}_L = L\frac{d\bar{I}}{dt} = j\omega L I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega L\bar{I} = V_0 e^{j\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

- con $V_0 = \omega L I_0$.



Induttanza



- I termini

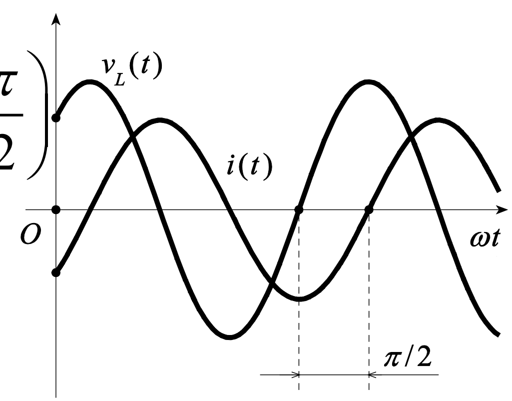
$$\overline{I}(t)=I_0 e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$\overline{V}_L=V_0 e^{j\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

- Sono rappresentativi di due fasori, con $\overline{V}_L$ sfasato in anticipo di 90° rispetto a $\overline{I}$.

- La tensione reale ai capi della bobina è

$$v_L(t)=\mathcal{R}e\left\{\overline{V}_L\right\}=\mathcal{R}e\left\{V_0 e^{j\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}=V_0\cos\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$



- quindi, la differenza di potenziale sinusoidale ai capi della bobina ha ampiezza pari a V_0 ed è sfasata in anticipo di 90° rispetto alla corrente $i(t)$

Induttanza

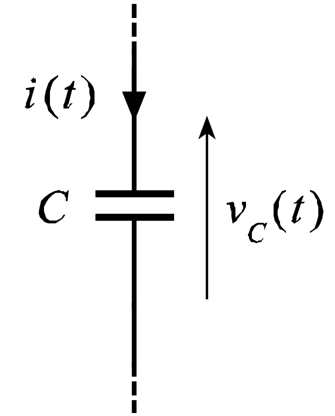
- Dall'espressione di $V_0 = \omega L I_0$ segue inoltre che:

$$\lim_{\omega \to 0} V_0 = \lim_{\omega \to 0} \omega L I_0 = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} I_0 = \lim_{\omega \to \infty} \frac{V_0}{\omega L} = 0$$

- tali relazioni possono essere interpretate affermando che:
  - nel limite di uno stimolo continuo $(\omega \to 0)$ la bobina agisce come un cortocircuito
  - nel limite delle alte frequenze $(\omega \to \infty)$ la bobina si comporta come un circuito aperto.

Capacità

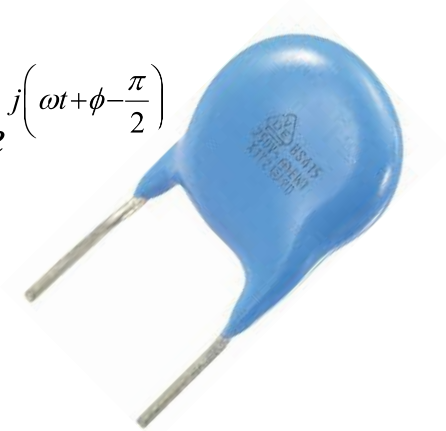


- Consideriamo un condensatore di capacità C i cui terminali sono percorsi dalla corrente:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{ext. complessa}} \overline{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

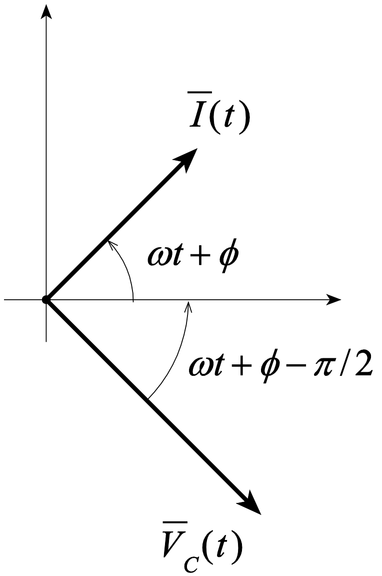
- L'estensione complessa della d.d.p. ai capi del condensatore vale:

$$\overline{V_C} = \frac{1}{C}\int^{t} I_0 e^{j(\omega \xi + \phi)}\, d\xi = \frac{1}{j\omega C} I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = V_0 e^{j\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$



- con $V_0 = I_0 / \omega C$.

Capacità



- I termini

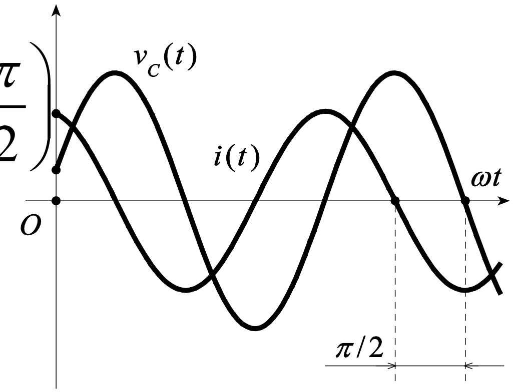
$$\overline{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\overline{V}_C = V_0 e^{j\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Sono rappresentativi di due fasori, con $\overline{V}_C$ sfasato in ritardo di 90° rispetto a $\overline{I}$.

- Così, la tensione reale ai capi del condensatore è

$$v_C(t) = \mathcal{R}e\left\{\overline{V}_C\right\} = \mathcal{R}e\left\{V_0 e^{j\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)}\right\} = V_0 \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$



- quindi, la differenza di potenziale sinusoidale ai capi del condensatore ha ampiezza pari a V_0 ed è sfasata in ritardo di 90° rispetto alla corrente $i(t)$

Capacità

- Dall'espressione di $V_0 = I_0/\omega C$ segue inoltre che:

$$\lim_{\omega\to 0} I_0 = \lim_{\omega\to 0} \omega C V_0 = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} V_0 = \lim_{\omega\to\infty} \frac{I_0}{\omega C} = 0$$

- tali relazioni possono essere interpretate affermando che:
  - nel limite di uno stimolo continuo $(\omega \to 0)$ il condensatore agisce come un circuito aperto
  - nel limite delle alte frequenze $(\omega \to \infty)$ il condensatore si comporta come un cortocircuito.

ECCITAZIONI SINUSOIDALI