
METODI STATISTICI E COMPUTAZIONALI

Stefania Spagnolo

Dipartimento di Matematica e Fisica, Univ. del Salento



LEZIONE 15

INTERPOLAZIONE

Interpolazione polinomiale

INTERPOLAZIONE

- E' frequente trovarsi a conoscere una relazione funzionale solo attraverso una tabella di valori; i metodi di **interpolazione** forniscono una stima numerica della funzione in punti del dominio di definizione in cui il valore non è noto a partire dalla tabella di valori noti (in punti intermedi a quelli in cui la funzione è conosciuta)
- Conosciamo una funzione per punti (discreti e finiti)
 - Per esempio, perché i valori numerici rappresentano l'**andamento di una funzione incognita** e sono determinati sperimentalmente
 - NOTA: nei problemi di **regressione** invece l'**andamento analitico è noto ma qualche parametro della funzione è incognito**, deve essere determinato dai dati

INTERPOLAZIONE

- Di una funzione si conosce solo il valore che assume in **$n+1$** punti
 - **$\{x_i, y_i = f(x_i)\}$** con $i=0, \dots, n$;
 - gli **x_i** appartengono ad un intervallo **$[a, b]$** e sono detti ***nodi o punti base*** dell'interpolazione.
- È fissato un insieme di **$n+1$** funzioni **$\phi_i(x)$** con $i=0, \dots, n$ definite in $[a, b]$ e ***linearmente indipendenti***.
- Soluzione del problema consiste nell'identificare **$n+1$** coefficienti **α_i** con $i=0, \dots, n$ tali che la funzione

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \phi_i(x)$$

- Assuma i valori della funzione incognita in ogni nodo, ossia

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad g(x_i) = y_i = f(x_i)$$

- La funzione g rappresenta una approssimazione di f , utilizzata per calcolarne i valori in punti diversi dai nodi

INTERPOLAZIONE

- Il modello di interpolazione dipende dalla scelta delle funzioni $\phi_i(x)$
- **Caratteristiche delle $\phi_i(x)$**
 - facilmente calcolabili
 - buone proprietà di regolarità (continuità, derivabilità, etc.).
- Le classi di funzioni normalmente usate sono le **funzioni razionali** e le **funzioni trigonometriche**
- Tra le funzioni razionali: Polinomi
 - **$\phi_i(x)$ polinomi x^i** ==>>> interpolazione polinomiale

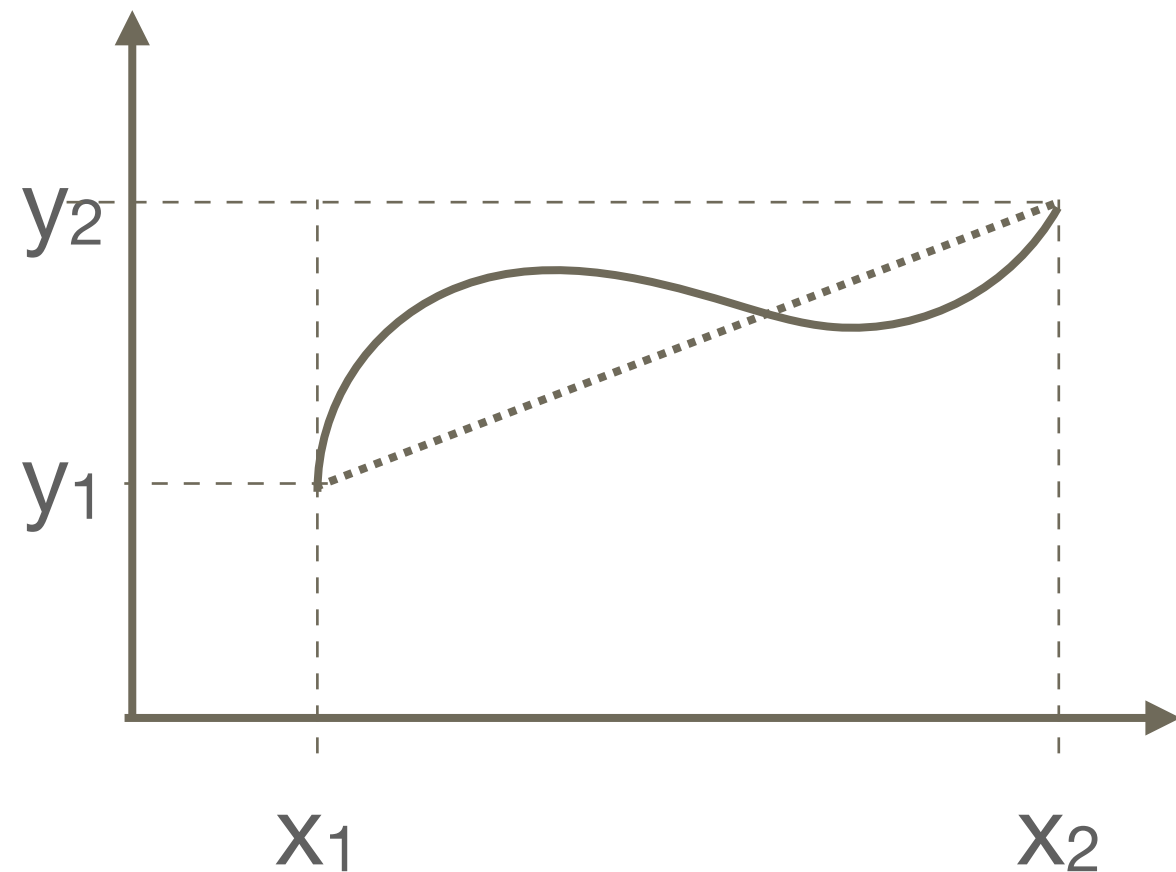
INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Tra le funzioni razionali: Polinomi
 - $\phi_i(x)$ *polinomi* x^i $\implies$ interpolazione polinomiale
- **Teorema di esistenza e unicità**
 - *per $n+1$ punti distinti passa un e un solo polinomio di grado n*
- Ci assicura che esiste ed è unica la soluzione del problema di interpolazione che è stato posto
- Il polinomio di grado n costituito dalla combinazione lineare di $n+1$ funzioni del tipo $\phi_i(x)=x^i$ è proprio la mia funzione approssimante e, per il teorema precedente, deve esistere ed essere unico

$$g(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$$

INTERPOLAZIONE LINEARE

- Caso piu' semplice
 - Interpolazione lineare

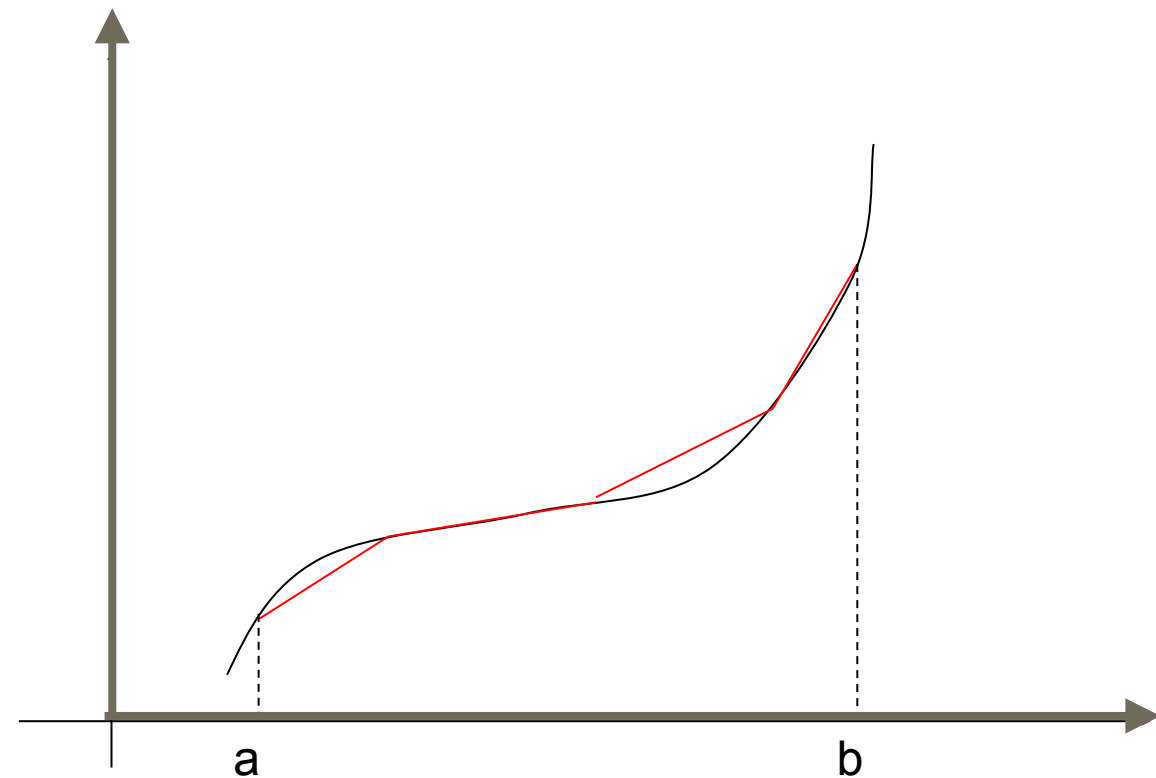


$$\frac{g(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1$$

INTERPOLAZIONE LINEARE

- Caso piu' semplice
 - Interpolazione lineare *a tratti*
- In ogni tratto:



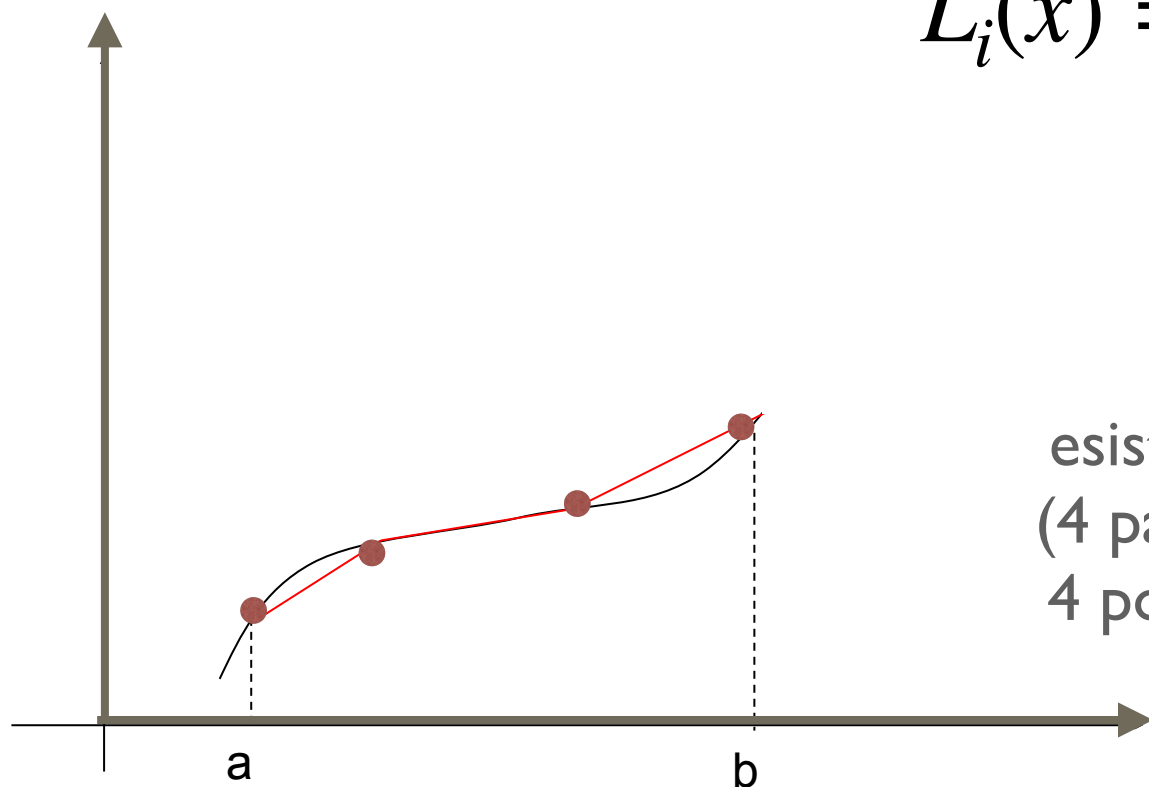
$$\frac{g(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Polinomi di Lagrange
 - per ottenere un polinomio che passa per $n+1$ punti
 - Il teorema di unicità mi garantisce che una volta che ho identificato un polinomio che passa per $n+1$ punti questo è l'unico polinomio possibile.
- Dati $n+1$ valori x_i con $i=0,\dots,n$ si dice **polinomio di Lagrange** un polinomio nella forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$



4 nodi, $n=3$,
esiste un polinomio di III grado
(4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno
di grado 3

Conosco:

$x \rightarrow x_0, x_1, x_2, x_3$

$y \rightarrow y_0, y_1, y_2, y_3$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Polinomi di Lagrange
 - per ottenere un polinomio che passa per $n+1$ punti
 - Il teorema di unicità mi garantisce che una volta che ho identificato un polinomio che passa per $n+1$ punti questo è l'unico polinomio possibile.
- Dati $n+1$ valori x_i con $i=0,\dots,n$ si dice **polinomio di Lagrange** un polinomio nella forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

4 nodi, $n=3$,
esiste un polinomio di III grado
(4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno
di grado 3

Conosco:

$x \rightarrow x_0, x_1, x_2, x_3$

$y \rightarrow y_0, y_1, y_2, y_3$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Polinomi di Lagrange
 - per ottenere un polinomio che passa per $n+1$ punti
 - Il teorema di unicità mi garantisce che una volta che ho identificato un polinomio che passa per $n+1$ punti questo è l'unico polinomio possibile.
- Dati $n+1$ valori x_i con $i=0,\dots,n$ si dice **polinomio di Lagrange** un polinomio nella forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

4 nodi, $n=3$,
esiste un polinomio di III grado
(4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno
di grado 3

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

Quindi
$$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x)$$

$$L_0(x)=1 \text{ se } x=x_0$$

$$L_0(x)=0 \text{ se } x=x_{1,2,3}$$

Infatti

$$g(x_0) = a_0 = y_0$$

in generale

$$g(x_i) = a_i = y_i$$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{x-x_3}{x_1-x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{x-x_3}{x_2-x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

4 nodi, $n=3$,
esiste un polinomio di III grado
(4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno
di grado 3

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$\text{Quindi } g(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Infatti

$$g(x_0) = a_0 = y_0$$

in generale

$$g(x_i) = a_i = y_i$$

Il polinomio così costruito passa per tutti i nodi ed è di grado n

Per il teorema di esistenza ed unicità $g(x)$ è l'unico polinomio che passa per gli $n+1$ nodi

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

La funzione interpolante

$$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) \quad \text{dove}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$a_i = y_i$$

Può essere scritta in modo più conveniente così

$$g(x) = \pi(x) \sum_{i=0}^n \frac{Z_i}{(x - x_i)} \quad \text{dove}$$

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$Z_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$g(x) = \pi(x) \sum_{i=0}^n \frac{z_i}{(x - x_i)}$$

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$z_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

Infatti $g(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \times \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \frac{1}{x - x_0} \right.$

$$+ \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \frac{1}{x - x_1}$$

$$+ \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \frac{1}{x - x_2}$$

$$\left. + \frac{y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \frac{1}{x - x_3} \right)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \frac{x - x_3}{x_0 - x_3}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$g(x) = \pi(x) \sum_{i=0}^n \frac{z_i}{(x - x_i)}$$

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$z_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

Infatti

$$g(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \times \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \frac{1}{x - x_0} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \frac{1}{x - x_1} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \frac{1}{x - x_2} + \frac{y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \frac{1}{x - x_3} \right)$$

Costo computazionale

$n+1$ sottrazioni

$n(n+1)/2$ sottrazioni

$n(n+1)$ moltiplicazioni

n addizioni e $n(n+1)$ moltiplicazioni

In pratica $n^2/2$ addizioni, n^2 moltiplicazioni + termini di ordine inferiore in n

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Nodi equidistanti $x_{i+1} = x_i + h$ quindi $x_i = x_0 + ih$
- Introdotta la variabile reale $0 \leq t \leq n$ per cui $x = x_0 + th$ i polinomi di Lagrange si possono scrivere nel modo seguente

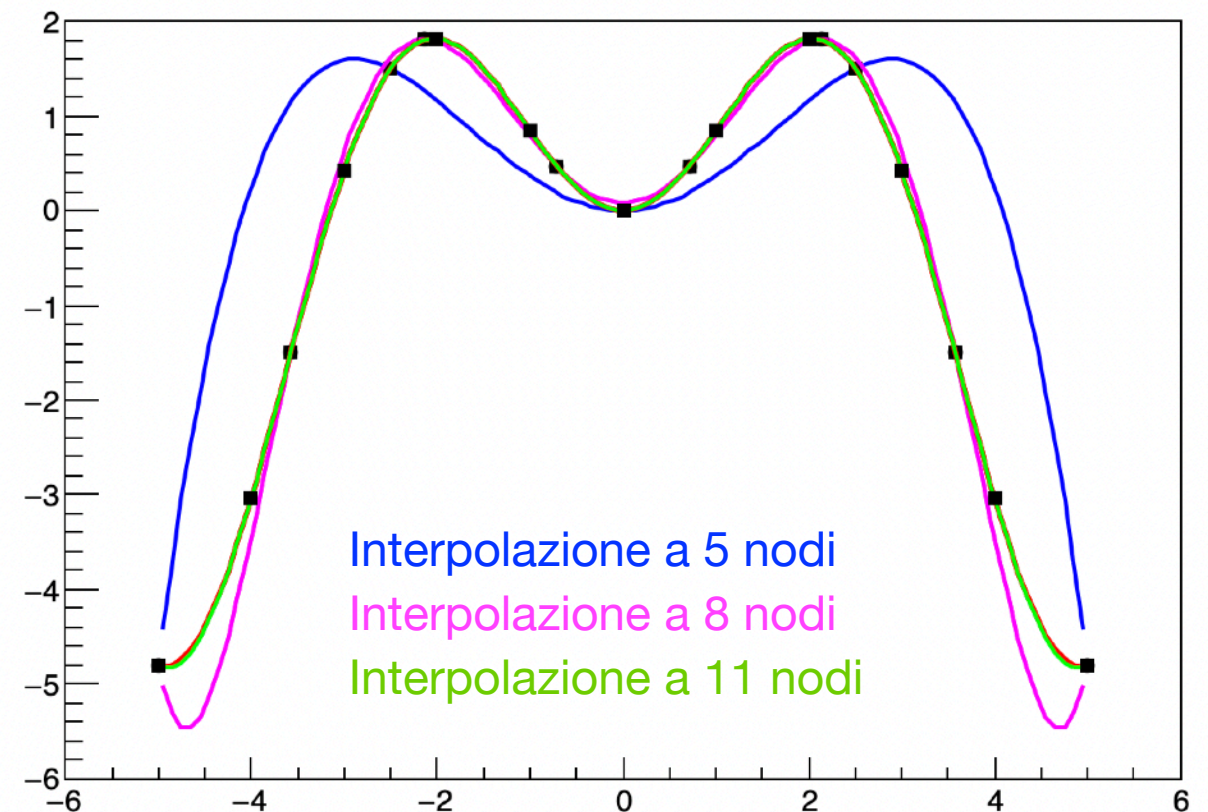
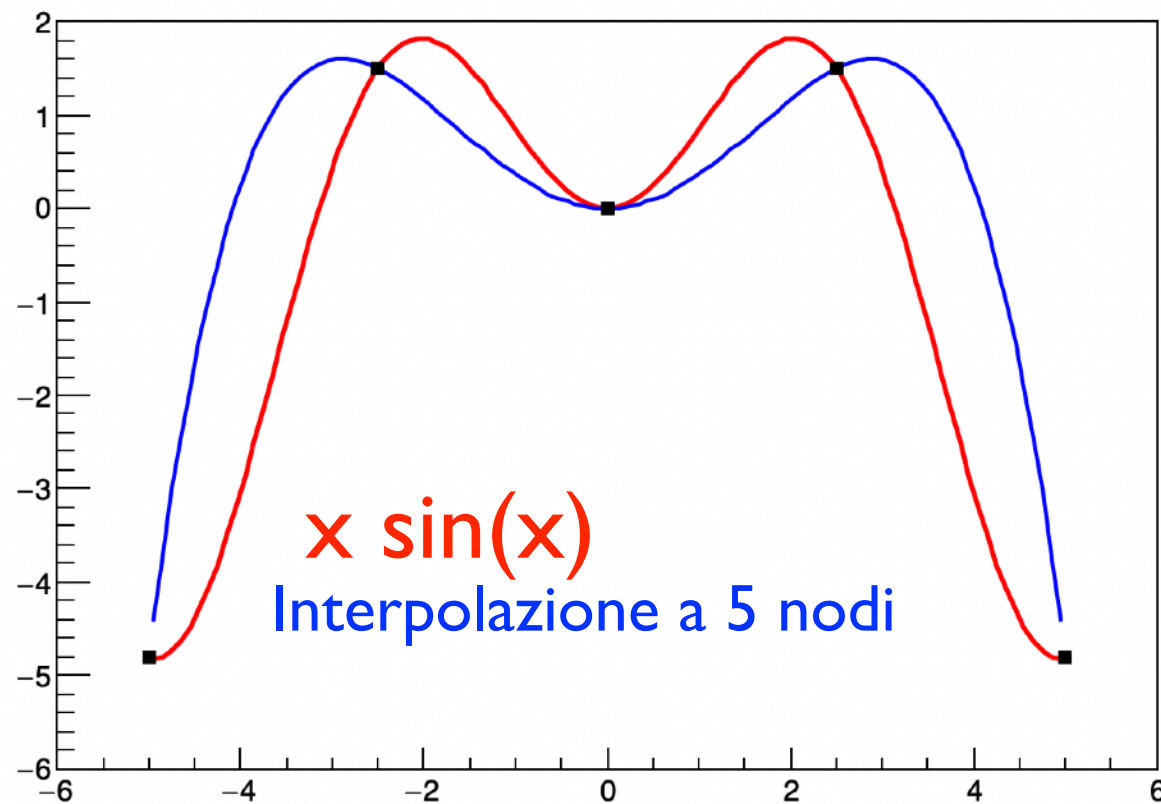
$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x_0 + th - x_0 - jh}{x_0 + ih - x_0 - jh} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - j}{i - j}$$

- *Polinomi definiti in $[0, n]$ dipendenti solo dal numero di punti*
- La funzione $\pi(x)$ si può scrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned} \pi(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \\ &= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h) \dots (x_0 + th - x_0 - nh) = \\ &= h^{n+1} t(t-1)(t-2) \dots (t-n) = \\ &= h^{n+1} \pi_{n+1}(t) \end{aligned}$$

dove i $\pi_{n+1}(t)$ sono polinomi di grado $n+1$ indipendenti dallo specifico valore dei nodi

ESEMPIO



- All'aumentare di n = numero dei nodi migliora l'interpolazione
 - diminuisce l'errore
- Non è sempre così

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- **Quant'è l'errore** che si commette nel valutare la funzione $f(x)$ utilizzando una sua approssimazione ottenuta attraverso un polinomio ?

- Definisco **funzione errore**

$$r(x) = f(x) - g(x)$$

- La funzione errore così definita varrà zero in corrispondenza dei nodi dell'interpolazione, cioè' **$r(x_i) = 0, i=0,...,n.$**
- Si può dimostrare che se la $f(x)$ è derivabile con continuità $n+1$ volte allora la funzione errore sarà pari a

$$r(x) = \pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

dove ζ si trova all'interno dell'intervallo $[x_0, x_n]$

Quindi se $f(x)$ gode di opportune proprietà di regolarità allora

$$|r(x)| \leq |\pi(x)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

dove $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ in $[x_0, x_n]$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- **Quant'è l'errore** quando i nodi sono equidistanti ?

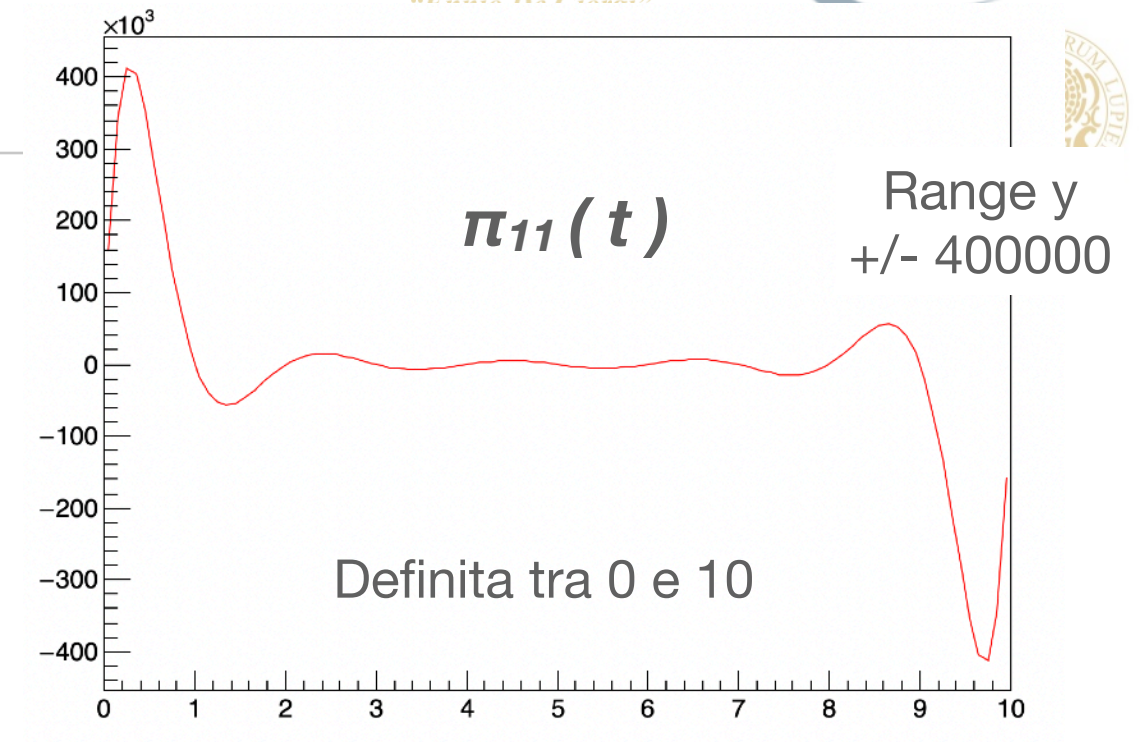
$$r(x) = f(x) - g(x)$$

$$r(x_0 + ht) = \pi_{n+1}(t) h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

- Per cui l'andamento della funzione errore dipende dai polinomi $\pi(t)$ che sono sempre gli stessi per qualsiasi problema a $n+1$ nodi
- Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$
 - Esempio $\pi_{11}(t)$
 - Definita tra 0 e 10
 - $5 = 10/2 = n/2$ e' un punto di simmetria
 - se t non è intero e $t < n/2$ allora
 - $|\pi_{n+1}(t-1)| > |\pi_{n+1}(t)|$.
 - per la proprietà di simmetria combinata con la 3 risulta che per $t > n/2$ non interi $|\pi_{n+1}(t+1)| > |\pi_{n+1}(t)|$

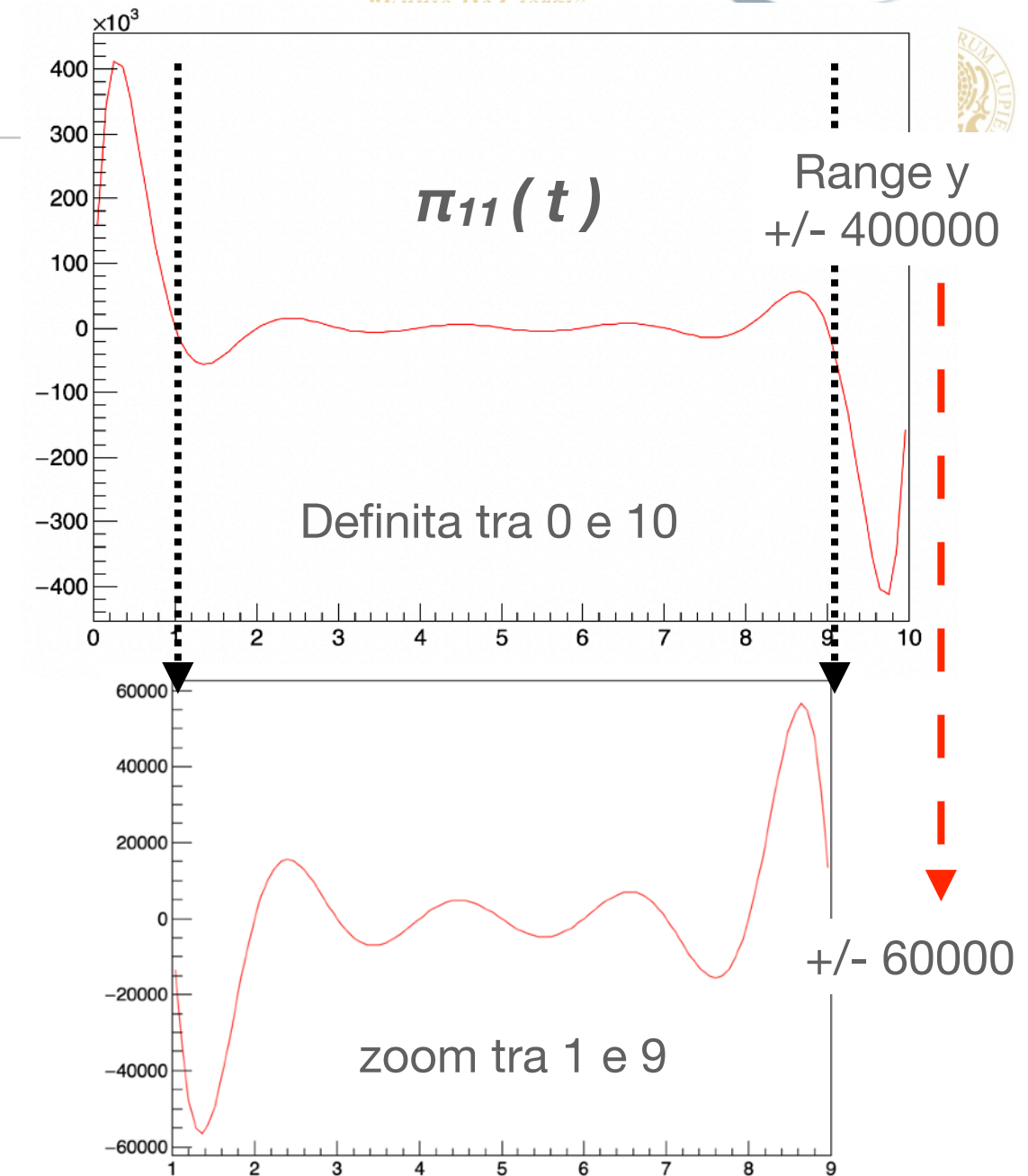


zoom tra 1 e 9

zoom tra 2 e 8

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$
 - Esempio $\pi_{11}(t)$
 - Definita tra 0 e 10
 - $5 = 10/2 = n/2$ e' un punto di simmetria
 - se t non è intero e $t < n/2$ allora
 - $|\pi_{n+1}(t-1)| > |\pi_{n+1}(t)|$.
 - per la proprietà di simmetria combinata con la 3 risulta che per $t > n/2$ non interi $|\pi_{n+1}(t+1)| > |\pi_{n+1}(t)|$



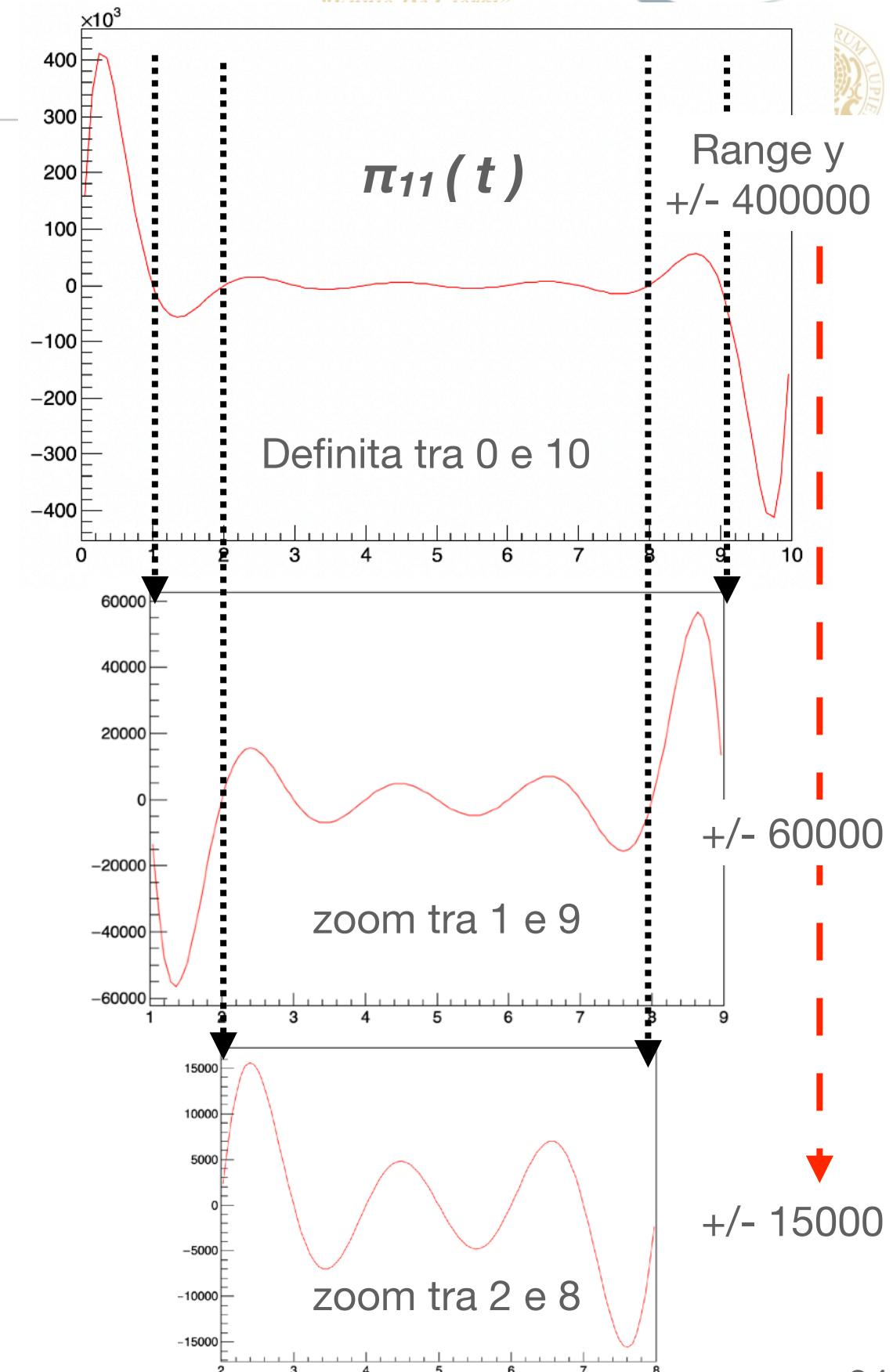
+/- 15000

zoom tra 2 e 8

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

■ Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$

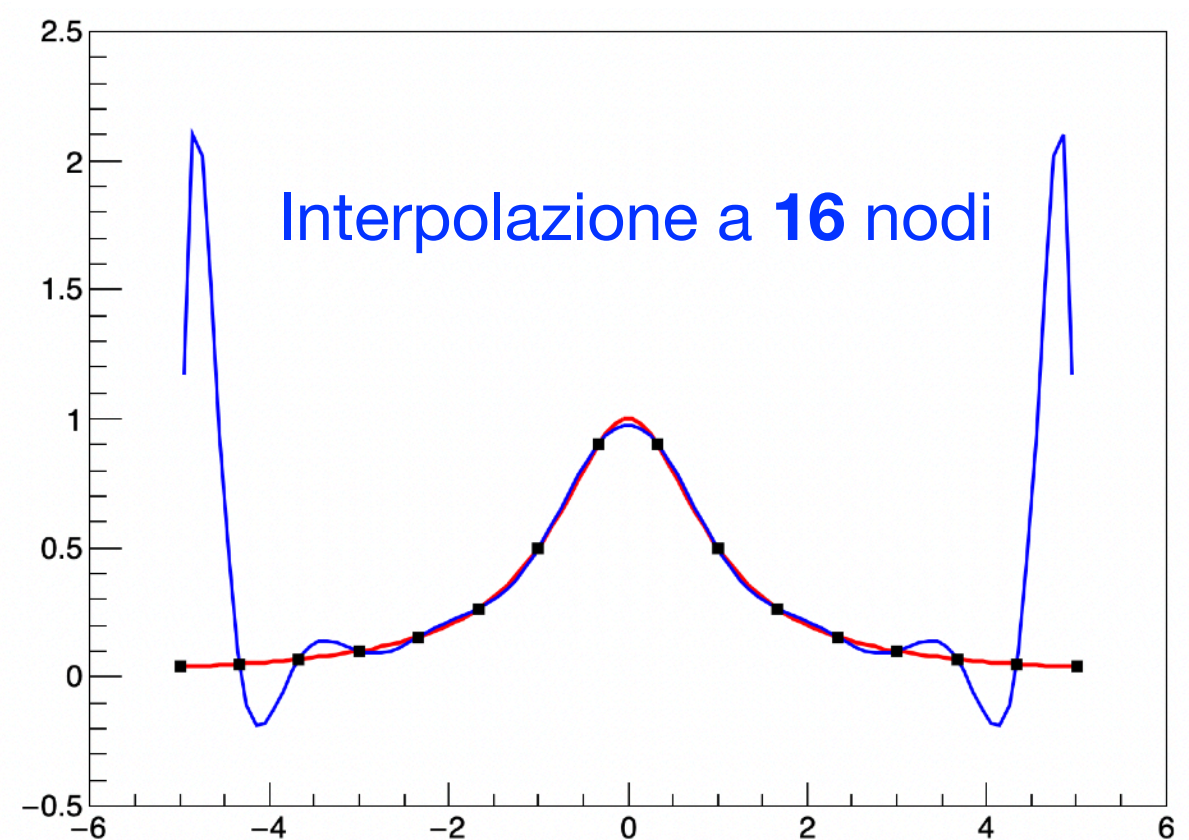
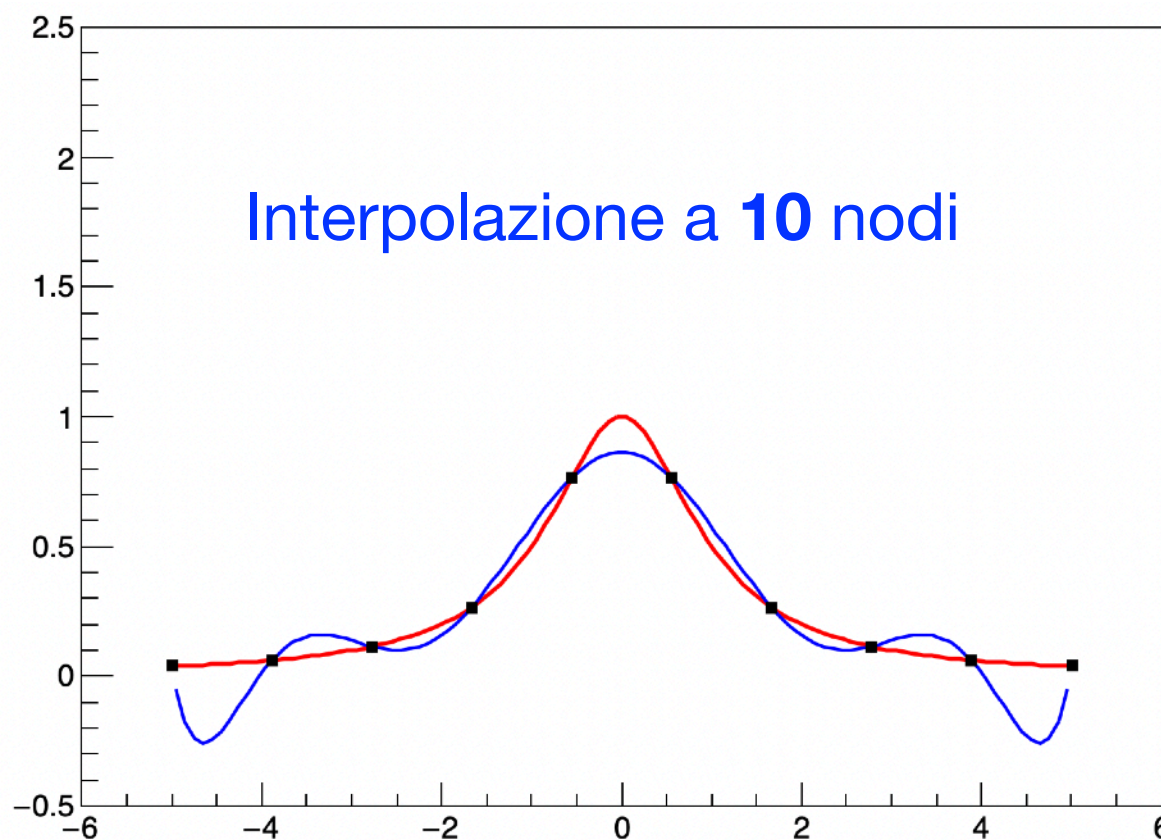
- Esempio $\pi_{11}(t)$
- Definita tra 0 e 10
- $5 = 10/2 = n/2$ e' un punto di simmetria
- se t non è intero e $t < n/2$ allora
 - $|\pi_{n+1}(t-1)| > |\pi_{n+1}(t)|$.
 - per la proprietà di simmetria combinata con la 3 risulta che per $t > n/2$ non interi $|\pi_{n+1}(t+1)| > |\pi_{n+1}(t)|$
 - $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow$ il polinomio assume sempre valori (assoluti) maggiori man mano che ci si sposta verso l'estremo dell'intervallo in cui è definito ed assume valori minimi al centro dell'intervallo.



INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Vediamo le conseguenze:
 - Consideriamo la **funzione di Runge**

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



- **L'errore** commesso **ai bordi** della regione in esame **cresce con il grado del polinomio interpolante**. La funzione interpolante **non converge** alla funzione da interpolare al tendere di n ad infinito **in tutto l'intervallo**.

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Consideriamo la funzione errore nel caso di nodi equidistanti

$$|r(x_0 + ht)| = |\pi_{n+1}(t)| h^{n+1} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \leq |\pi_{n+1}(t)| h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

- Affinché l'interpolazione converga occorre che l'errore tenda a 0 al tendere ad infinito nel numero di punti. Questo avviene se M_{n+1} tende a zero più rapidamente di

$$\frac{(n+1)!}{|\pi_{n+1}(t)| h^{n+1}}$$

- Una condizione verificata solo per alcune funzioni

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Sino ad ora abbiamo ignorato l'effetto degli errori di arrotondamento dovuti alla precisione della macchina.
 - L'errore di arrotondamento dipende dalla complessità del polinomio che occorre utilizzare per l'approssimazione. Polinomi di grado maggiore presentano una complessità computazionale maggiore e quindi sono soggetti a maggior errore di arrotondamento.
- Non sempre, quindi, utilizzare polinomi di grado maggiore è conveniente.
- Si preferisce eseguire un'interpolazione mediante ***polinomi composti***
 - Al singolo polinomio interpolante si sostituisce una serie di polinomi di grado inferiore che approssimano la funzione in un sotto-insieme di punti. La funzione interpolante così ottenuta non è necessariamente continua, ma l'errore che si commette è più uniforme in tutto l'intervallo di interpolazione.

LEZIONE 16

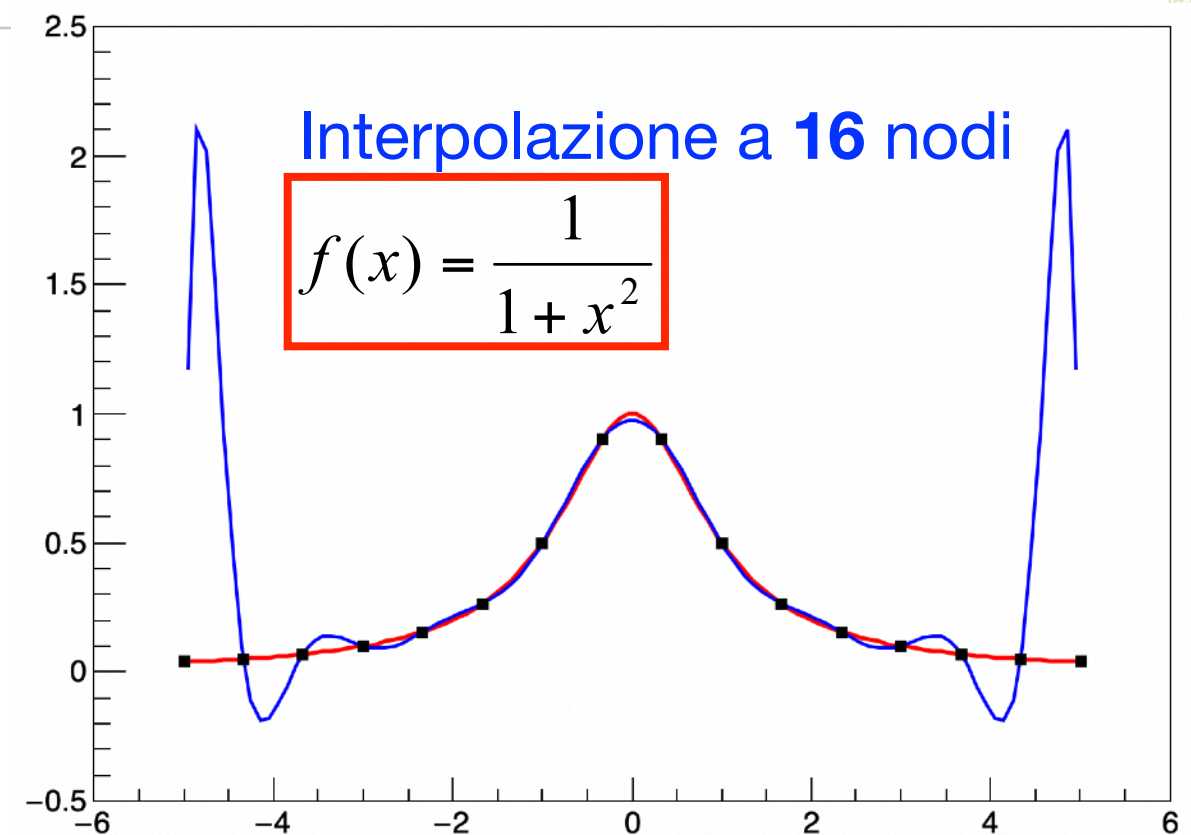
INTERPOLAZIONE

Polinomi composti

INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

L'errore commesso *ai bordi* della regione in esame **cresce con il grado del polinomio interpolante**.

La funzione interpolante **non converge** alla funzione da interpolare al tendere di n ad infinito **in tutto l'intervallo**.

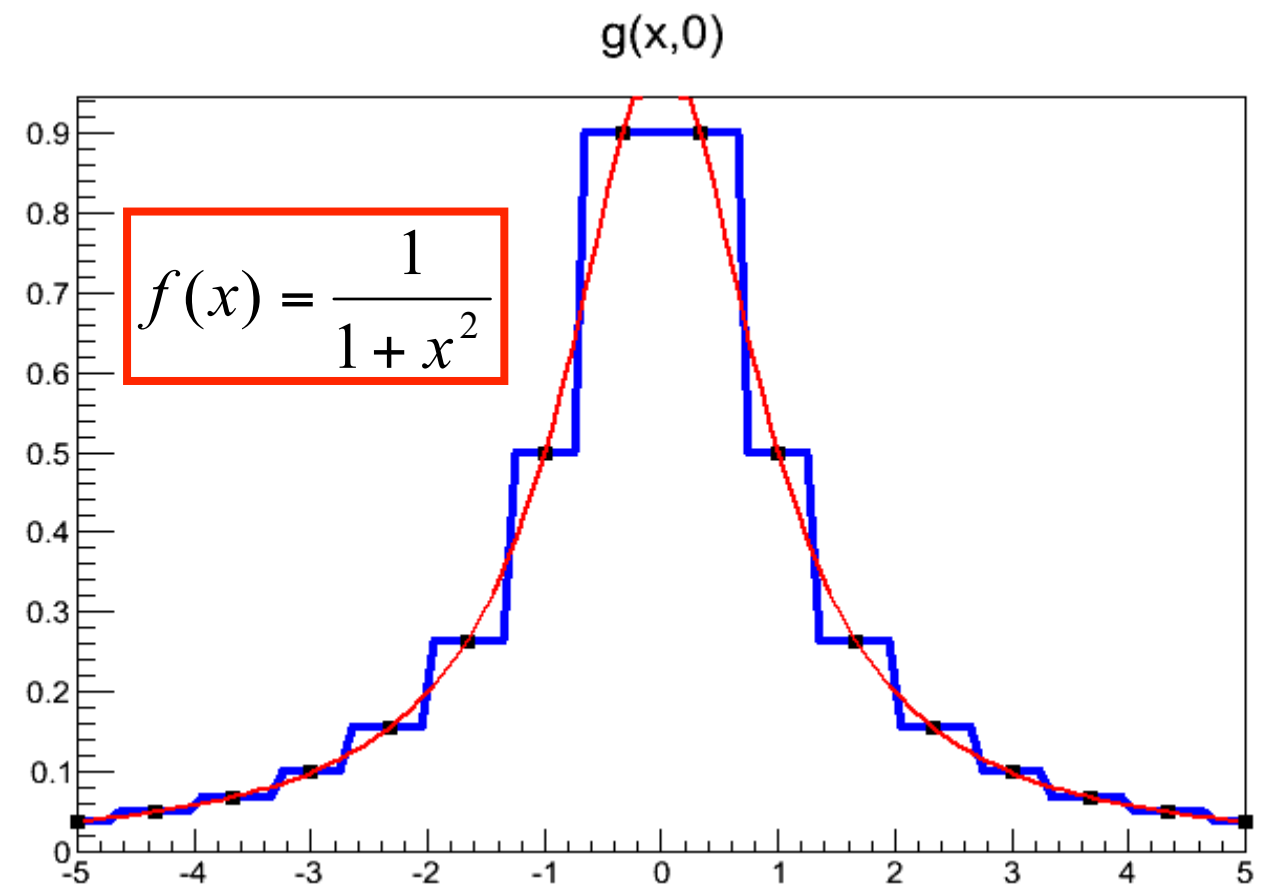


- L'errore di arrotondamento dipende dalla complessità del polinomio che occorre utilizzare per l'approssimazione. Polinomi di grado maggiore presentano una complessità computazionale maggiore e quindi sono soggetti a maggior errore di arrotondamento.
- Si preferisce eseguire un'interpolazione mediante **polinomi composti**
 - Al singolo polinomio interpolante si sostituisce una **serie di polinomi di grado inferiore che approssimano la funzione in un sotto-insieme di punti**. La funzione interpolante così ottenuta non è necessariamente continua, ma l'errore che si commette è più uniforme in tutto l'intervallo di interpolazione.

INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

- Una tecnica spesso usata consiste nel partire da un'approssimazione con polinomi composti (o a tratti) di grado basso e "correggere" progressivamente l'approssimazione passando a polinomi di grado superiore.
- In questo modo possibile tenere sotto controllo il potenziale errore introdotto dall'algoritmo

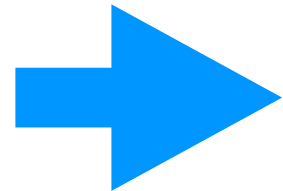
- Consideriamo come prima approssimazione un'**interpolazione di grado zero**. Questa consiste nell'**identificare per ogni x il punto della griglia più vicino e attribuire come valore interpolante proprio quel valore**.
- Si ottiene una funzione a gradini. Questa funzione, tuttavia, agli estremi dell'intervallo commette sicuramente un errore minore che non l'interpolazione con un polinomio di grado 15 in tutto l'intervallo.



INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

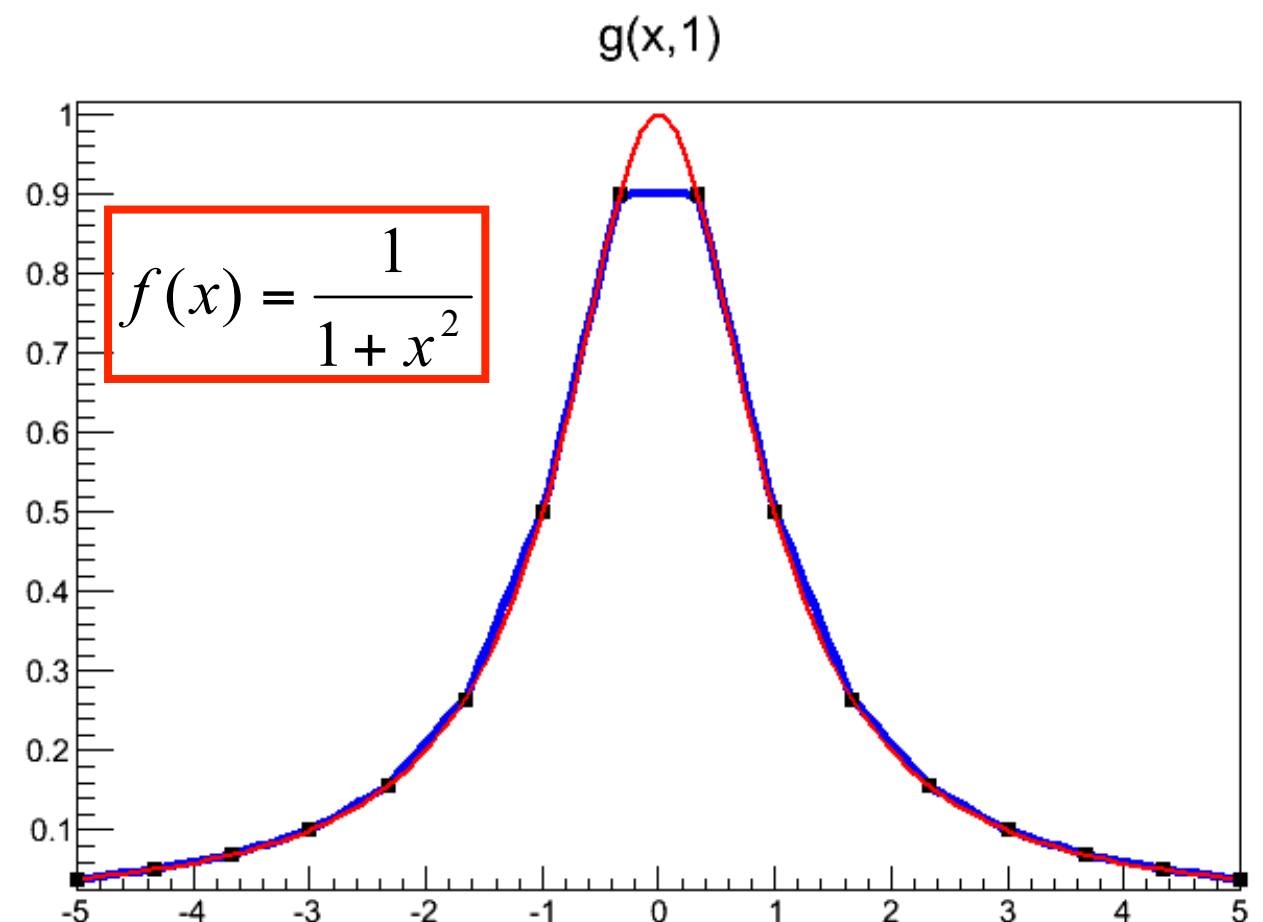
- Passiamo ora ad un'interpolazione con un **polinomio a tratti di grado 1** (una spezzata)

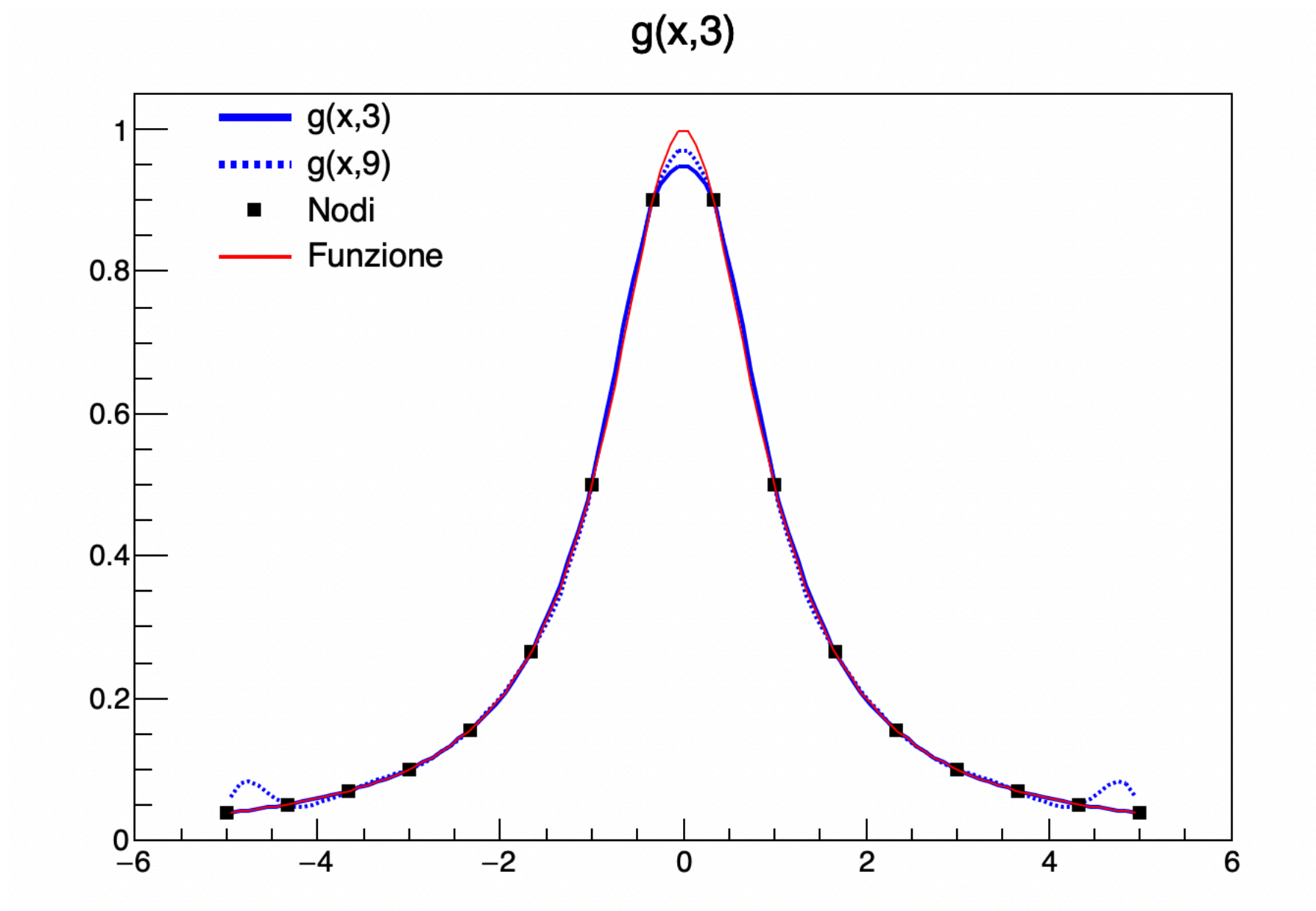
$$\frac{g - y_i}{x - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$



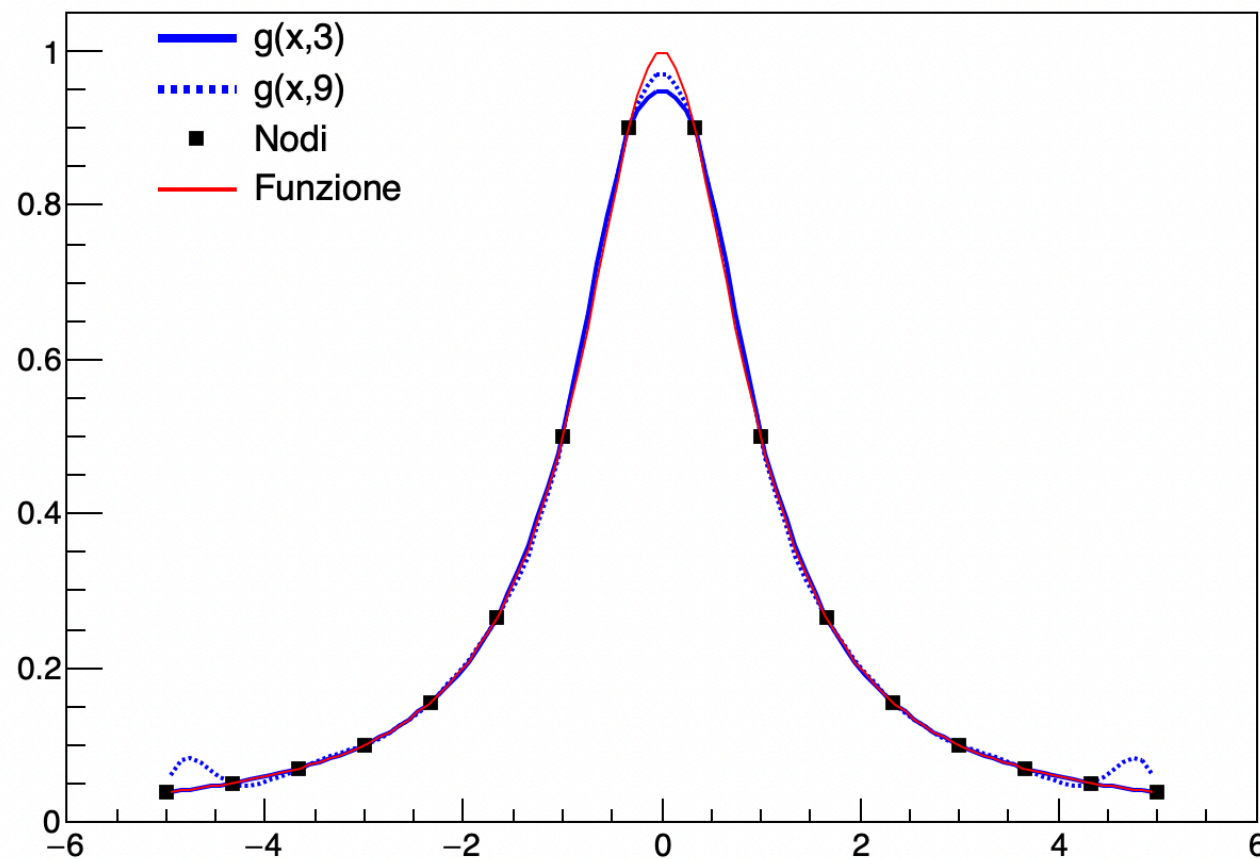
$$g = y_i + (x - x_i) \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right)$$

- **NOTA:** La nuova interpolazione può essere scritta come la vecchia (ordine 0) più un termine correttivo proporzionale alla distanza tra il punto x e il punto x_i che si era usato per la precedente interpolazione
- **GENERALIZZANDO:**
 - si può mettere a punto una procedura che consiste nella progressiva successione di correzioni alla prima interpolazione di ordine via via crescente.
 - Al passo 2 il termine correttivo rispetto al passo 1 sarà proporzionale a $(x - x_i)^2$
 - Non si tratta, però, di un reale sviluppo in serie





$g(x,3)$



root [0] .x Interpolazione4.c

```
-5.000000 0.038462
-4.333333 0.050562
-3.666667 0.069231
-3.000000 0.100000
-2.333333 0.155172
-1.666667 0.264706
-1.000000 0.500000
-0.333333 0.900000
0.333333 0.900000
1.000000 0.500000
1.666667 0.264706
2.333333 0.155172
3.000000 0.100000
3.666667 0.069231
4.333333 0.050562
5.000000 0.038462
```

Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>: created default TCanvas with name c1

----- x = 4.66667

```
grado=0 g(x)=0.038462 diff w.r.t previous iteration = 999.038462
grado=1 g(x)=0.044512 diff w.r.t previous iteration = 0.006050
grado=2 g(x)=0.043691 diff w.r.t previous iteration = -0.000821
grado=3 g(x)=0.044036 diff w.r.t previous iteration = 0.000346
grado=4 g(x)=0.043772 diff w.r.t previous iteration = -0.000265
grado=5 g(x)=0.044069 diff w.r.t previous iteration = 0.000298
grado=6 g(x)=0.043805 diff w.r.t previous iteration = -0.000265
grado=7 g(x)=0.042023 diff w.r.t previous iteration = -0.001782
grado=8 g(x)=0.045807 diff w.r.t previous iteration = 0.003784
grado=9 g(x)=0.077724 diff w.r.t previous iteration = 0.031917
grado=10 g(x)=0.177014 diff w.r.t previous iteration = 0.099289
grado=11 g(x)=0.389576 diff w.r.t previous iteration = 0.212563
grado=12 g(x)=0.742962 diff w.r.t previous iteration = 0.353386
grado=13 g(x)=1.203652 diff w.r.t previous iteration = 0.460689
grado=14 g(x)=1.614981 diff w.r.t previous iteration = 0.411330
```