Metodi Statistici e computazionali

Stefania Spagnolo
Dipartimento di Matematica e Fisica, Univ. del Salento

Dipartimento di Matematica e Fisica
"Ennio De Giorgi"

UNIVERSITAS STUDIORUM LUPIENSIS

INFN
Lecce

LEZIONE 3

Esercitazione

ESERCITAZIONE

- Gestione istogrammi (errori massimi e statistici e loro propagazione)- riempire istogrammi di frequenze per i seguenti
  - esempi:
    - generazione di **N numeri reali casuali uniformemente distribuiti** tra -10. e 10.
      - N = 100 (10 sequenze differenti, come possiamo valutarne la compatibilità statistica ?),
      - N = 1000, 10000
    - generazione di N numeri reali casuali distribuiti secondo una **gaussiana** con media 1.2 e sigma 3
    - generazione di **N coppie** di numeri reali casuali uniformemente distribuiti tra -10. e 10.; ***distribuzione della somma***
      - *Quale distribuzione statistica ??*
    - Simulazione della stima dell'area di un triangolo sulla base di N misure (simulate) di base b = 30 mm e altezza h=11 mm, effettuate ripetutamente (N=100) con un calibro ventesimale (errore massimo 0.05 mm)

ESERCITAZIONE

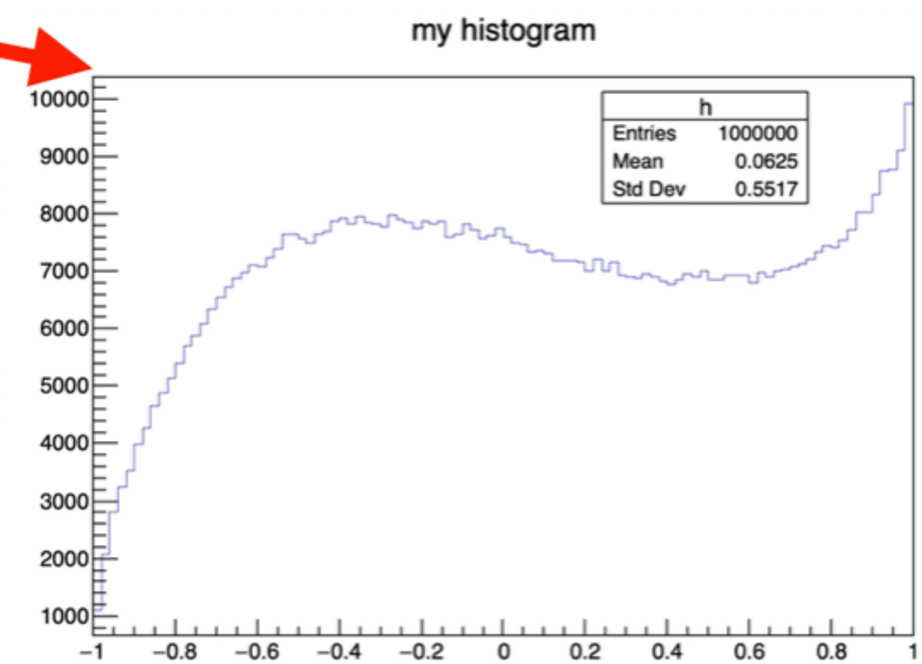
- Stima numerica di integrali
  - esempi:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} \qquad I = \int_0^3 f(x)\, dx$$

  - Calcoliamo *I* con il metodo di integrazione Monte Carlo
    - Quale N per ottenere un errore relativo < 1% ?
  - Calcoliamo *I* con il metodo di reiezione
    - Quale N per ottenere un errore relativo < 1% ?
      - Qual è l'efficienza del metodo se l'errore relativo è 1% ?

ESERCITAZIONE

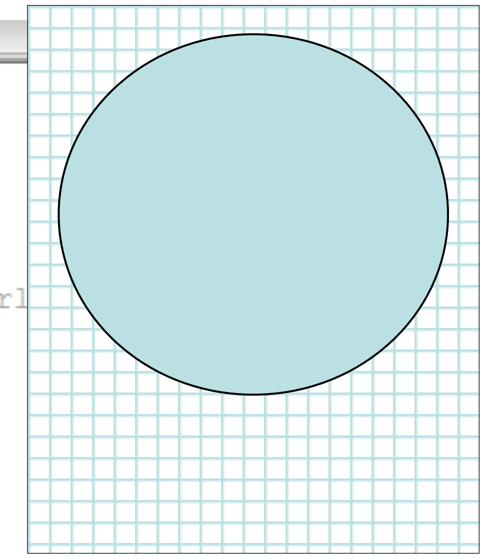
- Generazione di numeri casuali secondo una distribuzione di probabilità non uniforme
  - esempi:
    - Pdf: $p(x)dx = \frac{1}{\cos^2 x}dx$ x tra -4π/9 e 4π/9
      - Metodo del rigetto e dell'inversione
    - Pdf data da un istogramma (magari sperimentale) invece che da un'espressione analitica
      - Metodo del rigetto e dell'inversione

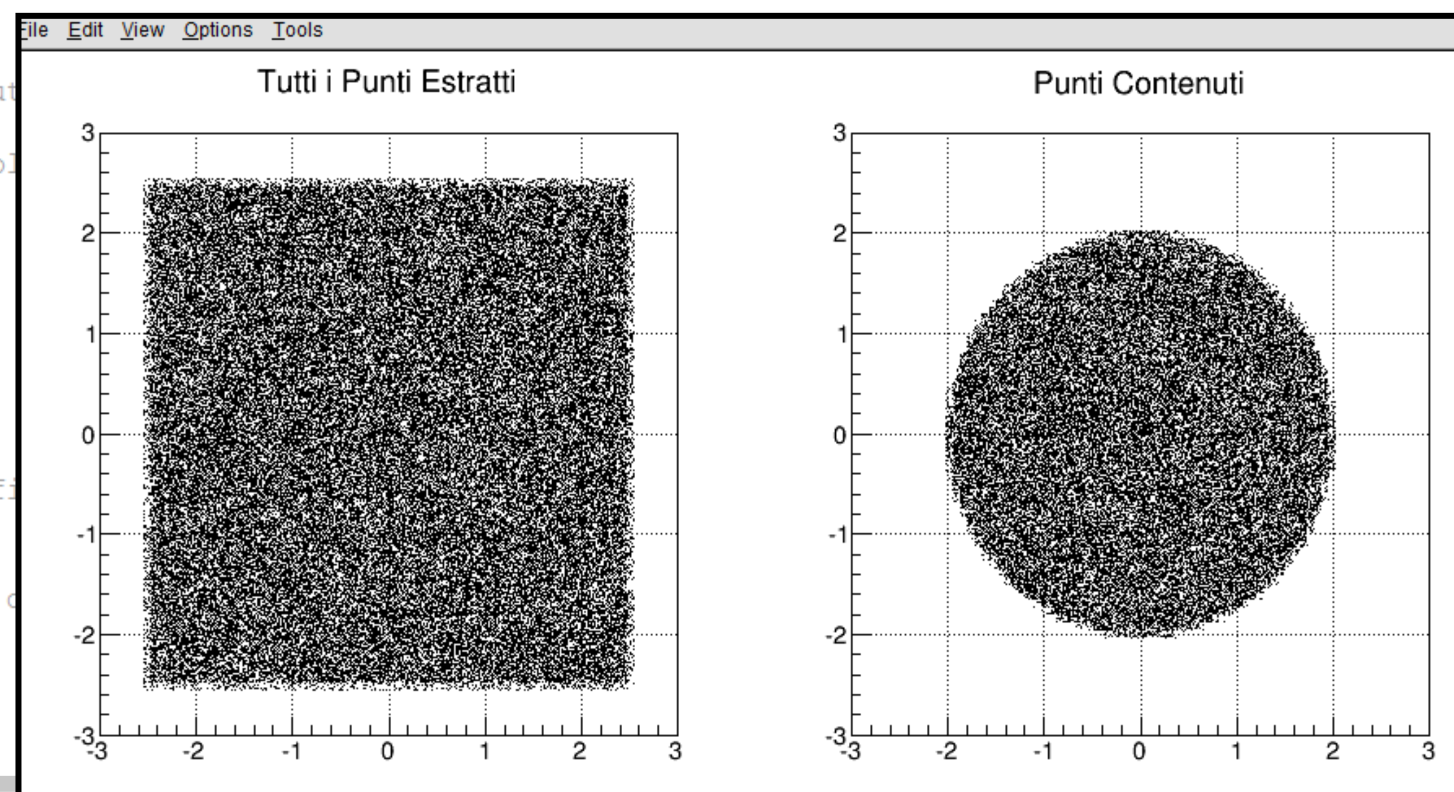


A VOI

UN ESEMPIO DI MONTE CARLO: L'AREA DEL CERCHIO

```
re | Generatore1.C | Generatore2.C | Generatore3.C | Generatore4.C | Dado.C | Cerchio.C
#include "TFile.h"
// Creo una script di nome Cerchio
void Cerchio(){
// creo un "oggetto" generatore di numeri random
   TRandom R(344545);
   int N=100000;
// creo un oggetto file lo collego al file di nome esempio1.root e gli dico di crearlo (ricrearl
   TFile f("cerchio.root","RECREATE");
// Raggio del cerchio
   double raggio=2.;
// creo un oggetto histogramma
   TH2D * h1 = new TH2D ("h1","Tutti i Punti Estratti",80,-3.,3.,80,-3.,3.);
   TH2D * h2 = new TH2D ("h2","Punti Contenuti",80,-3.,3.,80,-3.,3.);
// inizializzo sequenza di conteggio
   int In=0;
   for (int i=0; i<N ; i++) {
      double x,y;
// Uso l'oggetto generatore per generare punti in maniera uniforme
// su un quadrato di lato 5 centrato in 0,0
      x=R.Uniform()*5.-2.5;
      y=R.Uniform()*5.-2.5;
// Riempio l'oggetto histogramma con tut
      h1->Fill(x,y);
// Riempio l'oggetto histogramma con sol
      if (sqrt(x*x+y*y)<raggio) {
         h2->Fill(x,y);
         In++;
      }
   }
// Calcolo area
   double area=5.*5.*In/N;
   printf("Area cerchio %lf\n",area);
// scrivo gli oggetti histogramma nel fi
   h1->Write();
   h2->Write();
// chiudo il file attraverso il metodo c
   f.Close();
}
```



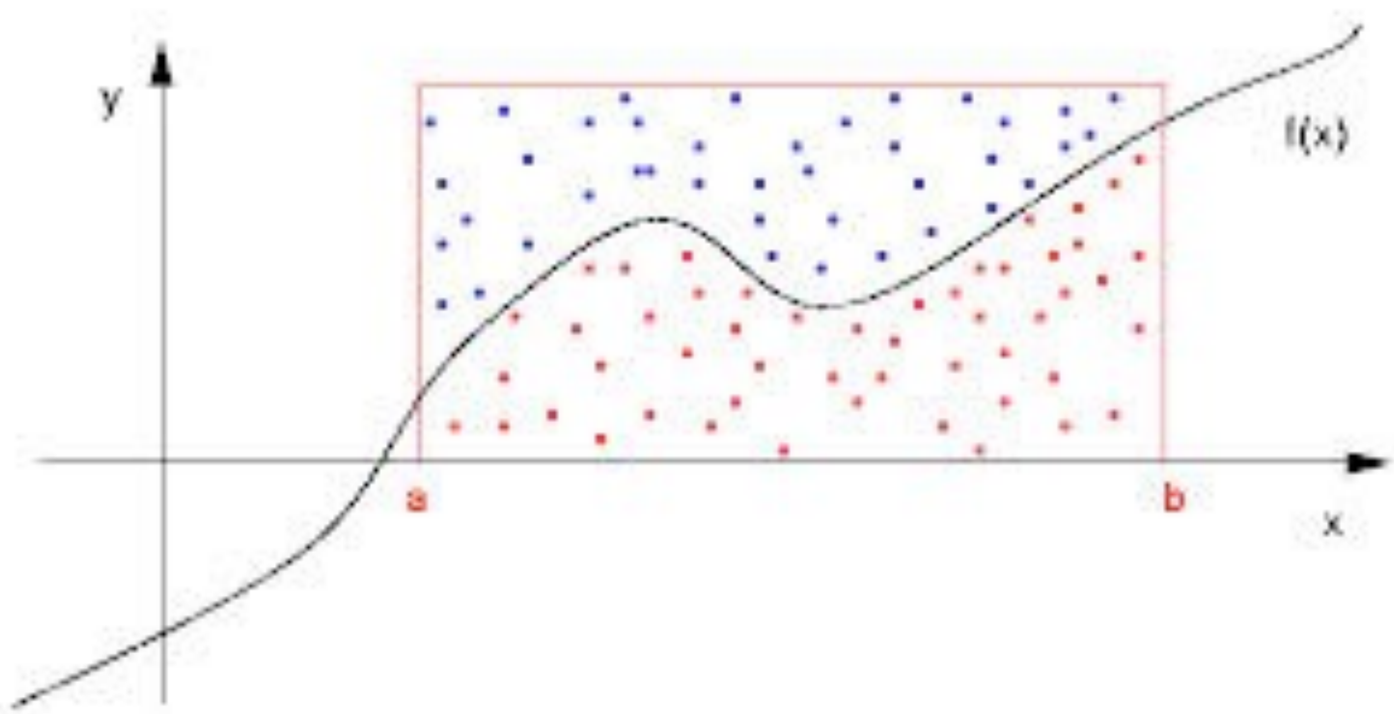


MISURA DI INTEGRALI CON IL METODO DELLA REIEZIONE O RIGETTO

- La tecnica Monte Carlo che abbiamo usato per determinare la superficie di un cerchio può essere usata per calcolare un integrale

Calcoliamo l'integrale $\int_{1}^{10}(2x^2+1)dx = 675$

$$= \left[(2/3)x^3 + x\right]_1^{10} = 2000/3 + 10 - 2/3 - 1$$

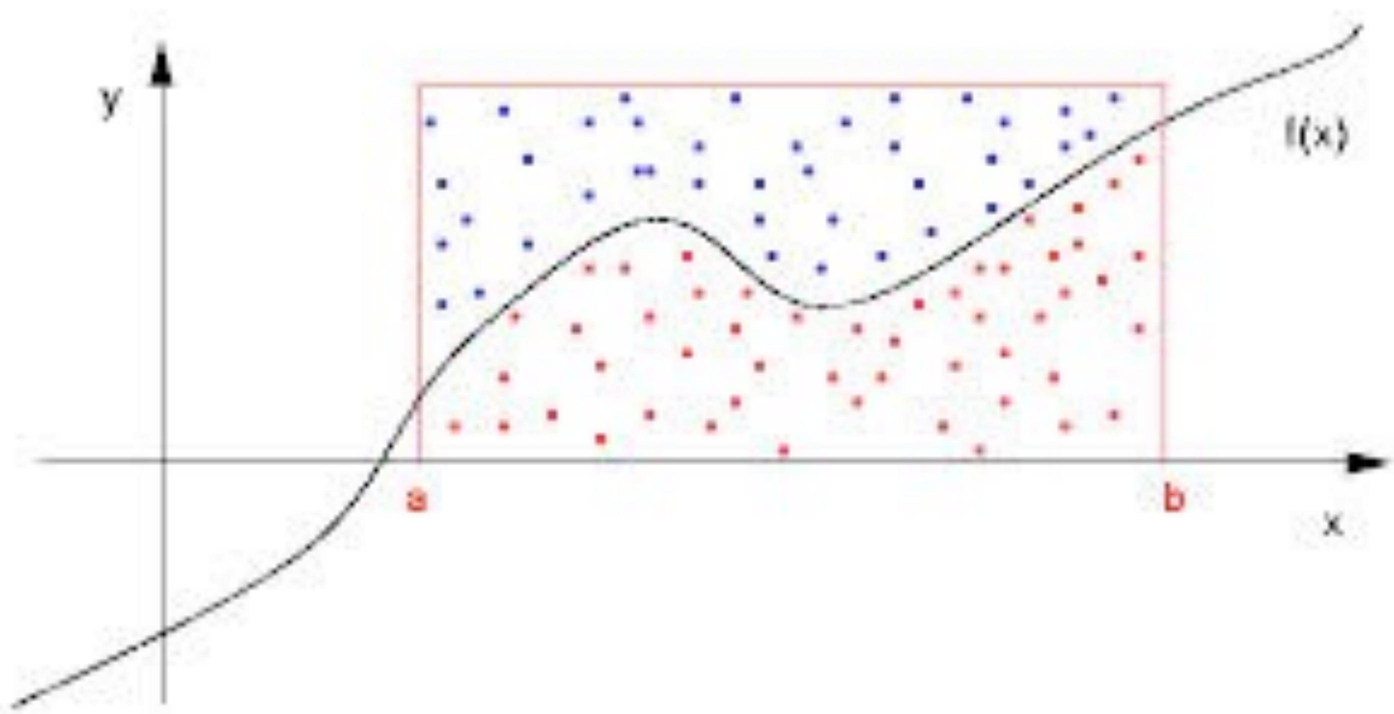


MISURA DI INTEGRALI CON IL METODO DELLA REIEZIONE O RIGETTO

- La tecnica Monte Carlo che abbiamo usato per determinare la superficie di un cerchio può essere usata per calcolare un integrale

Calcoliamo l'integrale $\int_1^{10}(2x^2+1)dx = 675$

$$= \left[(2/3)x^3 + x\right]_1^{10} = 2000/3 + 10 - 2/3 - 1$$



Misura di integrali con il metodo della reiezione o rigetto

- **Primo passo**: identificare un rettangolo (di area A) che inscrive la funzione nell'intervallo di integrazione.
- **Secondo passo**: estrarre N punti casuali all'interno del rettangolo e contare il numero N_a di punti (accettati) che cadono sotto la curva che rappresenta la funzione
- **Terzo passo**: la frazione di punti accettati sul totale moltiplicata per A da il valore dell' integrale

hitormiss.C | FiguraIntegrale.C | Cerchio.C

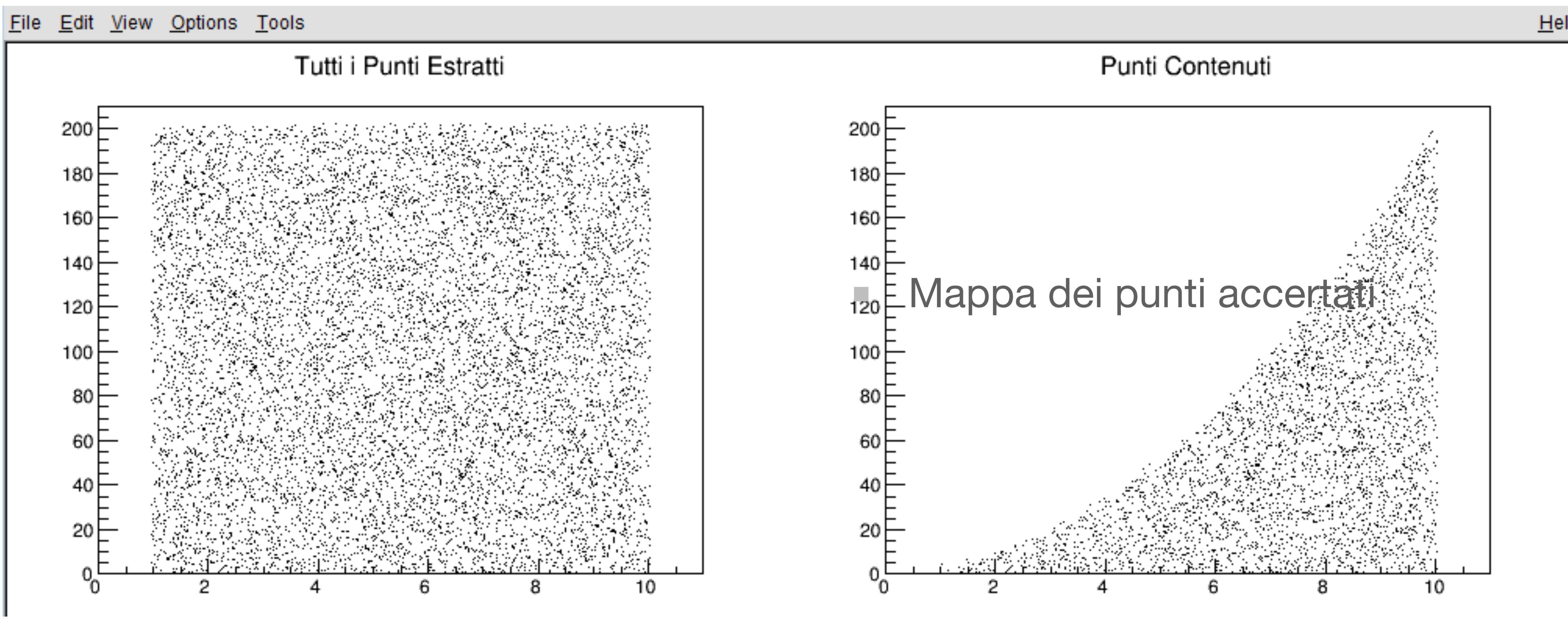
```
//
// calcoliamo l'integrale di questa funzione
double f(double x) {
    return 2.*x*x+1.;
}
void Reiezione(){
// creo un "oggetto" generatore di numeri random
  TRandom R(12345);
  int N=10000;
// creo un oggetto file lo collego al file di nome Reiezione.root
// e gli dico di crearlo (ricrearlo) quindi è un output
  TFile f("Reiezione.root","RECREATE");
  TH2D * h1 = new TH2D ("h1","Tutti i Punti Estratti",80,0.,11.,80,0.,210);
  TH2D * h2 = new TH2D ("h2","Punti Contenuti",80,0.,11.,80,0.,210);
// inizializzo sequenza di conteggio
  int In=0;
  for (int i=0; i<N ; i++) {
    double x,y;
// Uso l'oggetto generatore di numeri random per generare numeri random in maniera uniforme
    x=R.Uniform()*9+1;
    y=R.Uniform()*201;

// Riempio l'oggetto histogramma con tutti numeri random generati
    h1->Fill(x,y);
// Riempio l'oggetto histogramma con solo i punti contenuti
    if (y<f(x)) {
        h2->Fill(x,y);
        In++;
    }
  }
// Calcolo area
  double area=9.*201.*In/N;
  printf("Integrale = %lf\n",area);
// scrivo gli oggetti histogramma nel file
  h1->Write();
  h2->Write();
// chiudo il file attraverso il metodo dell'oggetto di tipo file.
  f.Close();
}
```

MISURA DI INTEGRALI CON IL METODO DELLA REIEZIONE O RIGETTO

- Quale rettangolo ?

- Mappa dei punti estratti casualmente



- Mappa dei punti accertati

MISURA DI INTEGRALI CON IL METODO DELLA REIEZIONE O RIGETTO

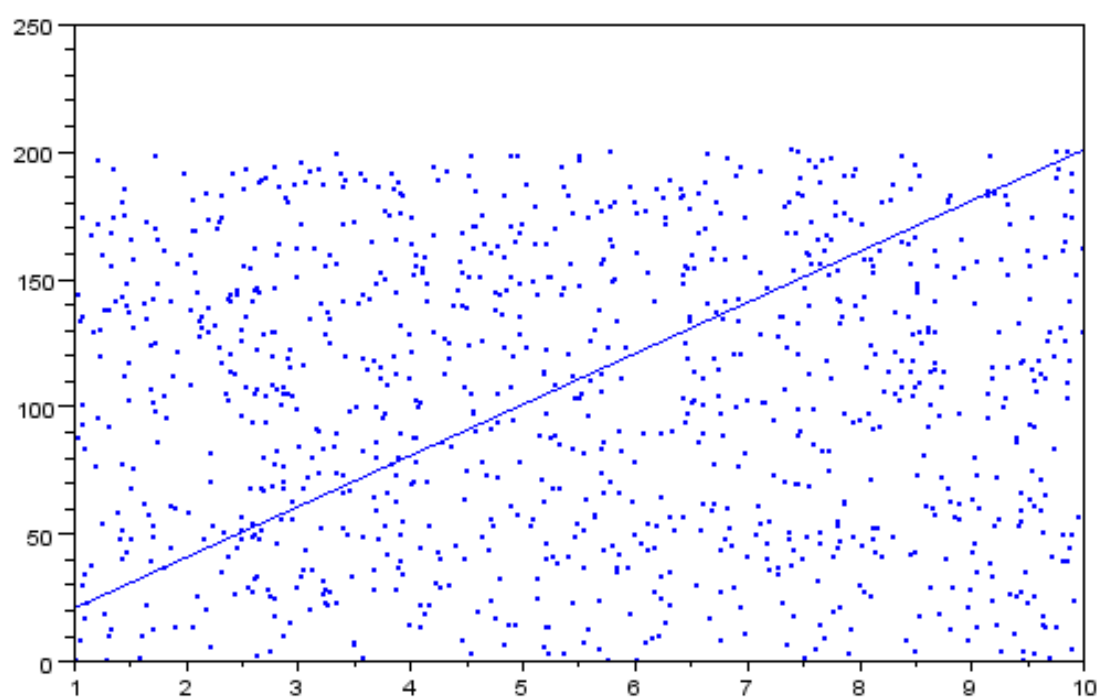
- Con il metodo del rigetto è possibile calcolare integrali definiti anche di funzioni non definite positive, basta, infatti, considerare la funzione: sempre nel dominio di integrazione se e' il minimo di

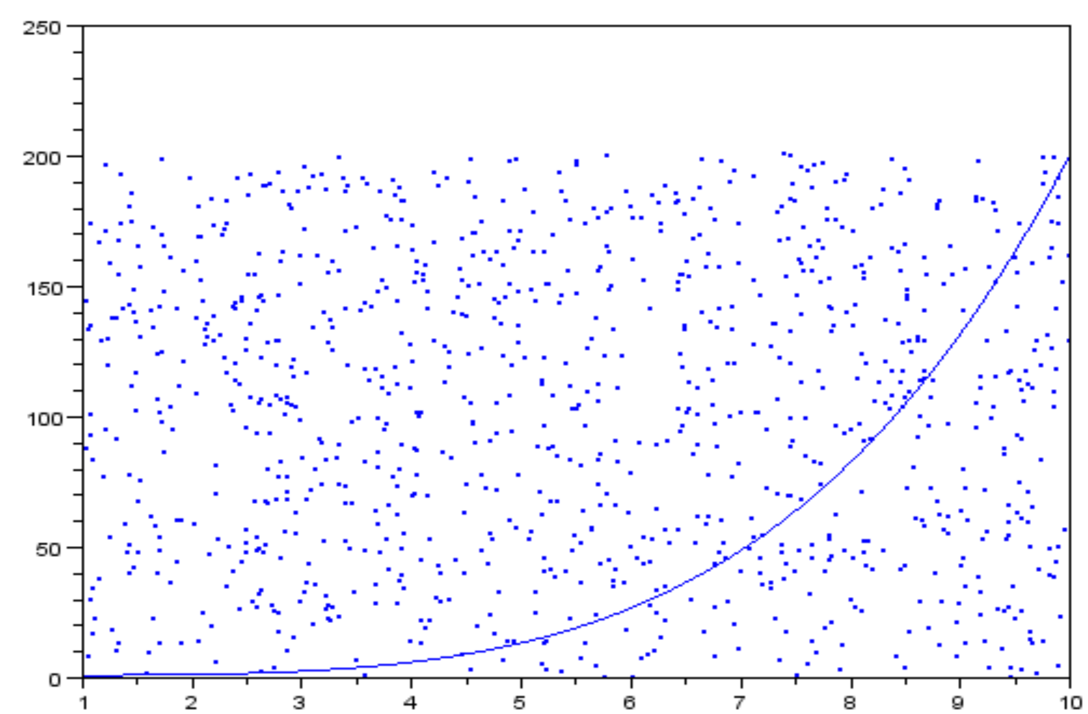
- Non e' possibile calcolare con questo metodo integrali di funzioni con singolarità anche se matematicamente (analiticamente) integrabili
  - Solo per funzioni limitate nel dominio di definizione e' possibile determinare il minimo e il massimo, necessari alla costruzione del rettangolo

MISURA DI INTEGRALI CON IL METODO DELLA REIEZIONE O RIGETTO

- Efficienza del metodo:

- E’ evidente che il metodo è tanto più efficiente quanto più l’area del rettangolo che include la funzione è prossima alla superficie che si deve determinare.





METODI MONTE CARLO

- Il metodo Monte Carlo è in sostanza un metodo di integrazione numerica
- Le basi matematiche dell'integrazione Monte Carlo sono le basi della statistica
  - Definizione di una variabile casuale
  - Distribuzioni delle variabili casuali. Media, varianza, covarianza…
  - La legge dei grandi numeri
  - Il teorema del limite centrale
- *Questo è il motivo che mi ha spinto a partire dai Metodi Monte Carlo in questo corso (prof. D. Martello)*

torniamo su questo concetto

INTEGRAZIONE CON IL METODO MONTE CARLO

LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

- La legge dei grandi numeri mi garantisce di poter calcolare un integrale con tecniche Monte Carlo.
- In termini generici, ***per la legge dei grandi numeri*** si può dire che:
  - la media di una sequenza di variabili aleatorie indipendenti e caratterizzate dalla stessa distribuzione di probabilità (n misure della stessa grandezza, n lanci della stessa moneta ecc.) è una approssimazione, che migliora al crescere di n, della media della distribuzione

Variabile aleatoria	Distribuzione di probabilità	Media (o valore di aspettazione)
x	$g(x)$	$\mu = \int_a^b g(x)x\,dx$
$y = f(x)$	$g(x)$	$\mu = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONE CON IL METODO MC

Supponiamo di voler valutare il seguente integrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2.2}$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale, ovviamente integrabile in $[a, b]$, con $b > a$. Consideriamo la seguente funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Densita' di probabilita' uniforme tra a e b della variabile casuale x

L'integrale può essere riscritto nella forma

$$\boxed{\langle F \rangle}$$

$$I = (b-a) \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Valore di aspettazione μ=<F> di f(x) per x variabile casuale distribuita con probabilita' uniforme tra a e b

$g(x)$ rappresenta una distribuzione di probabilità uniforme in $[a, b]$; possiamo quindi considerare l'integrale come valore di aspettazione di $f(x)$, con x variabile aleatoria distribuita secondo $g(x)$.

INTEGRAZIONE DI FUNZIONE CON IL METODO MC

- Per la legge dei grandi numeri, estratti N valori di x, $\{x_i\}$, la media campionaria (aritmetica) di $f(x_i)$ tende a <F> per N->infinito

Media sul campione di N valori di x

N->infinito

- **L'integrale *I* sull'intervallo [a,b] di una funzione f(x) può essere stimato come con approssimazione tanto maggiore quanto più grande è N**
  - *Qual è l'errore che commetto ?*

Integrale di f(x)

IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

- ***La somma di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite*** con media μ e varianza σ^2, ***indipendentemente dalla distribuzione di probabilità*** di partenza, al tendere della dimensione del campione a infinito tende a distribuirsi come una ***variabile casuale gaussiana***

si distribuisce secondo una pdf gaussiana con media
μ = <F> e varianza var()
= σ^2 = var(f) / N

La deviazione standard σ di sarà

INTEGRAZIONE DI FUNZIONE CON IL METODO MC

Lo stimatore MC dell'integrale I, cioè
, è affetto da un errore pari a

che possiamo stimare dal campione
come (b-a) RMS({f(x_i)}) / sqrt(N)

Stima campionaria della deviazione standard di f

- **L'integrale *I* sull'intervallo [a,b] di una funzione f(x) può essere stimato come con approssimazione tanto maggiore quanto più grande è N**
  - *Qual è l'errore che commetto ?*

INTEGRAZIONE DI FUNZIONE CON IL METODO MC

- ESEMPIO

Calcoliamo l'integrale $\int_{1}^{10}(2x^2+1)dx = 675$

- Per le considerazioni appena illustrate (da legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale) ho

x_i valori della variabile casuale x distribuita in maniera uniforme tra a e b

- Quindi se estraggo N numeri casuali {xi} calcolo la f(xi) e ne faccio la media ottengo asintoticamente il valore dell'integrale diviso l'ampiezza dell'intervallo.
- Nel nostro esempio: 675/9=75

INTEGRAZIONE DI FUNZIONE CON IL METODO MC

```
//
//  Calcolo integrale con Metodo Monte Carlo
//
// calcoliamo l'integrale di questa funzione
double f(double x) {
     return 2.*x*x+1.;
}
void Integrale(){
// creo un "oggetto" generatore di numeri random
   TRandom R(345345);
   int N=100000;
// Inizializzo somma e somma2
   double somma=0,somma2=0;
   for (int i=0; i<N ; i++) {
      double x,y;
// Uso l'oggetto generatore di numeri random per generare numeri random in maniera uniforme
      x=R.Uniform()*9+1;
      y=f(x);
      somma+=y;
      somma2+=y*y;
   }
// Calcolo medie
   double media=somma/N;
   double media2=somma2/N;
// Calcolo Area
   double area=media*(10.-1.);
// Calcolo errore
   double sigma=sqrt(media2-media*media);
   double errore=sigma*(10.-1.)/sqrt(N);
   printf("Integrale = %lf  +/- %lf\n",area,errore);
}
```

Una formula alternativa per la varianza è

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Questa formula è più pratica per calcolare la varianza.

GENERATORE DI NUMERI PSEUDO-CASUALI NON UNIFORMEMENTE DISTRIBUITI

ANCORA SUL

METODO DI REIEZIONE

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / RIGETTO

- Nel simulare un processo spesso è necessario estrarre numeri casuali in modo tale da seguire una specifica distribuzione.

- Serve, cioè, che i numeri estratti seguano una distribuzione di probabilità assegnata.

- Nei corsi precedenti avete incontrato alcune distribuzioni probabilità molto usate (Binomiale, Poisson, Gauss), ma in generale possono esserci processi aleatori (e Fisici) che seguono funzioni di probabilità di tipo diverso.

- Per simulare questi processi, quindi, occorre estrarre numeri casuali in modo tale che essi seguano un'arbitraria distribuzione di probabilità.

- Una qualunque funzione definita in un intervallo (a,b), continua e derivabile N volte, definita positiva e tale che il suo integrale in (a,b) sia pari ad 1 può rappresentare una distribuzione di probabilità di una qualche variabile aleatoria (o processo fisico)

$$g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b] \; ; \qquad \int_a^b g(x)dx = 1$$

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / RIGETTO

- L'idea di base è molto semplice: dato un insieme di numeri casuali, ne vogliamo eliminare una parte in maniera che i rimanenti siano distribuiti secondo una certa densità di probabilità.

- Supponiamo di voler estrarre numeri che seguano la distribuzione di probabilità g(x) definita in (a,b) e supponiamo che in (a,b) la funziona abbia massimo g_{max} o che esista un g_{max} tale che

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / RIGETTO

- La ***sequenza ottenuta {xi'}*** risulta distribuita secondo una ***distribuzione di probabilità*** pari al prodotto delle probabilità di estrazione e di accettazione

Probabilità di estrazione di x_i

probabilità che $y_i < g(x_i)$

Probabilità di accettazione di x_i

p(x) e g(x) differiscono solo per la normalizzazione

Generatori per PDF non uniformi / rigetto

- La ***sequenza ottenuta {xi'}*** risulta distribuita secondo una ***distribuzione di probabilità*** pari al prodotto delle probabilità di estrazione e di accettazione

Probabilità di estrazione di x_i

probabilità che $y_i < g(x_i)$

Probabilità di accettazione di x_i

NOTA: ritroviamo il metodo di integrazione con la tecnica del rigetto

$I =$

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / RIGETTO

In pratica

- Si estraggono punti uniformemente distribuiti su un rettangolo che racchiude la funzione densità di probabilità g(x) che si vuole riprodurre
- Si accettano come valori random validi della variabile x, le ascisse dei punti che cadono sotto la curva della funzione densità di probabilità.

```
//
//  Estraggo numeri secondo questa distribuzione di probabilità
double f(double x) {
      return (2.*x*x+1.)/675.;
}
void Generatore(){
// creo un "oggetto" generatore di numeri random
   TRandom R(345345);
   int N=1000000;
// creo un oggetto file lo collego al file di nome Reiezione.root
// e gli dico di crearlo (ricrearlo) quindi è un output
   TFile f("Reiezione.root","RECREATE");
   TH1D * h1 = new TH1D ("h1","Istrogramma di frequenze",80,0.,11.);
// inizializzo sequenza di conteggio
   int In=0;
   for (int i=0; i<N ; i++) {
      double x,y;
// Uso l'oggetto generatore di numeri random per generare numeri random in maniera uniforme
      x=R.Uniform()*9+1;
      y=R.Uniform()*201;

// Riempio l'oggetto histogramma con solo i punti contenuti
      if (y<f(x)) {
          h1->Fill(x);
          In++;
      }
   }
   printf("Ho estratto n=%g valori utili\n",In);
// scrivo gli oggetti histogramma nel file
   h1->Write();
// chiudo il file attraverso il metodo dell'oggetto di tipo file.
   f.Close();
}
```

GENERATORE DI NUMERI PSEUDO-CASUALI NON UNIFORMEMENTE DISTRIBUITI
-
METODO DELL'INVERSIONE

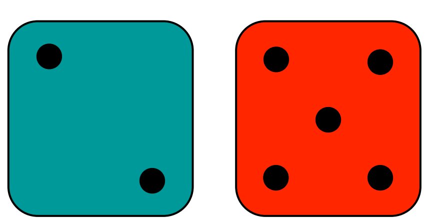
GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

- Il metodo di reiezione è semplice ma scarsamente efficiente.
- Se si vogliono ottenere N valori estratti casualmente occorre generare molto più di 2N numeri casuali. Esistono altri algoritmi che permettono, per certi tipi di distribuzioni, di ottenere gli N valori ricorrendo a un numero molto inferiore di estrazioni.

- Cominciamo col considerare una variabile aleatoria discreta, cioè in grado di assumere solo un numero N finiti di valori.

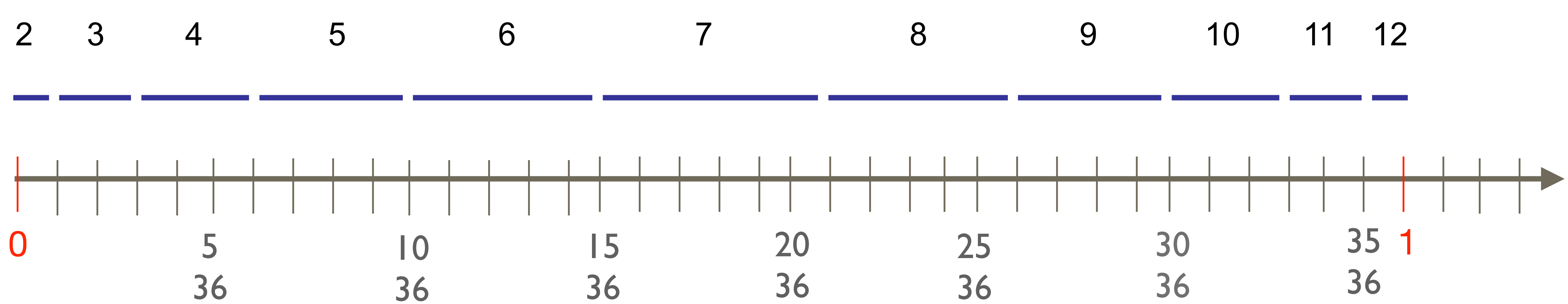
Quale è la distribuzione di probabilità della somma dei numeri sulle facce di due dadi?

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



- Se costruisco una successione di segmenti ognuno di lunghezza $p(x_i)$ otterrò un segmento la cui lunghezza totale sarà 1
  - Infatti

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

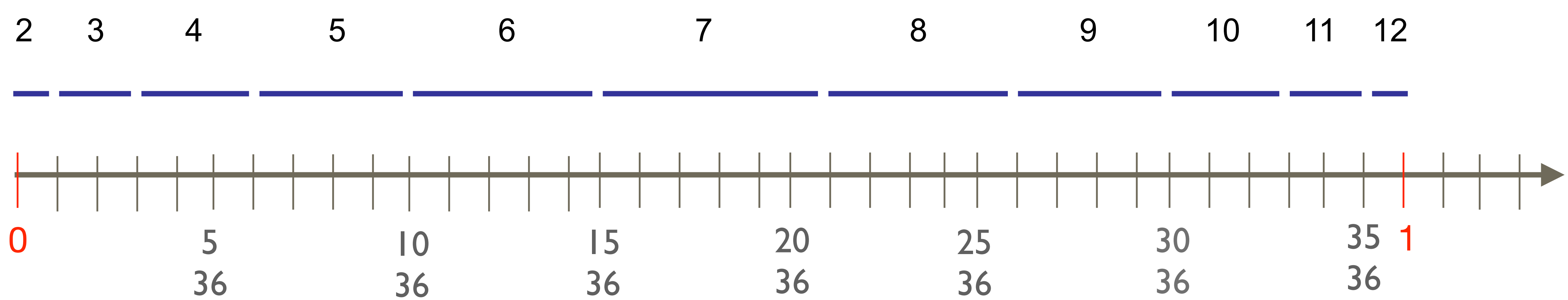


Lunghezza totale =1

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

- Se estraggo un numero casuale η_i uniformemente tra 0 e 1 questo cadrà in un sotto-segmento con probabilità proporzionale alla lunghezza del sotto-segmento.
- Quindi, gli esiti x_i, estratti sulla base dell'intervallo in cui cade η_i (uniformemente distribuito in [0,1]) seguendo la distribuzione di probabilità discreta $p(x_i)$.

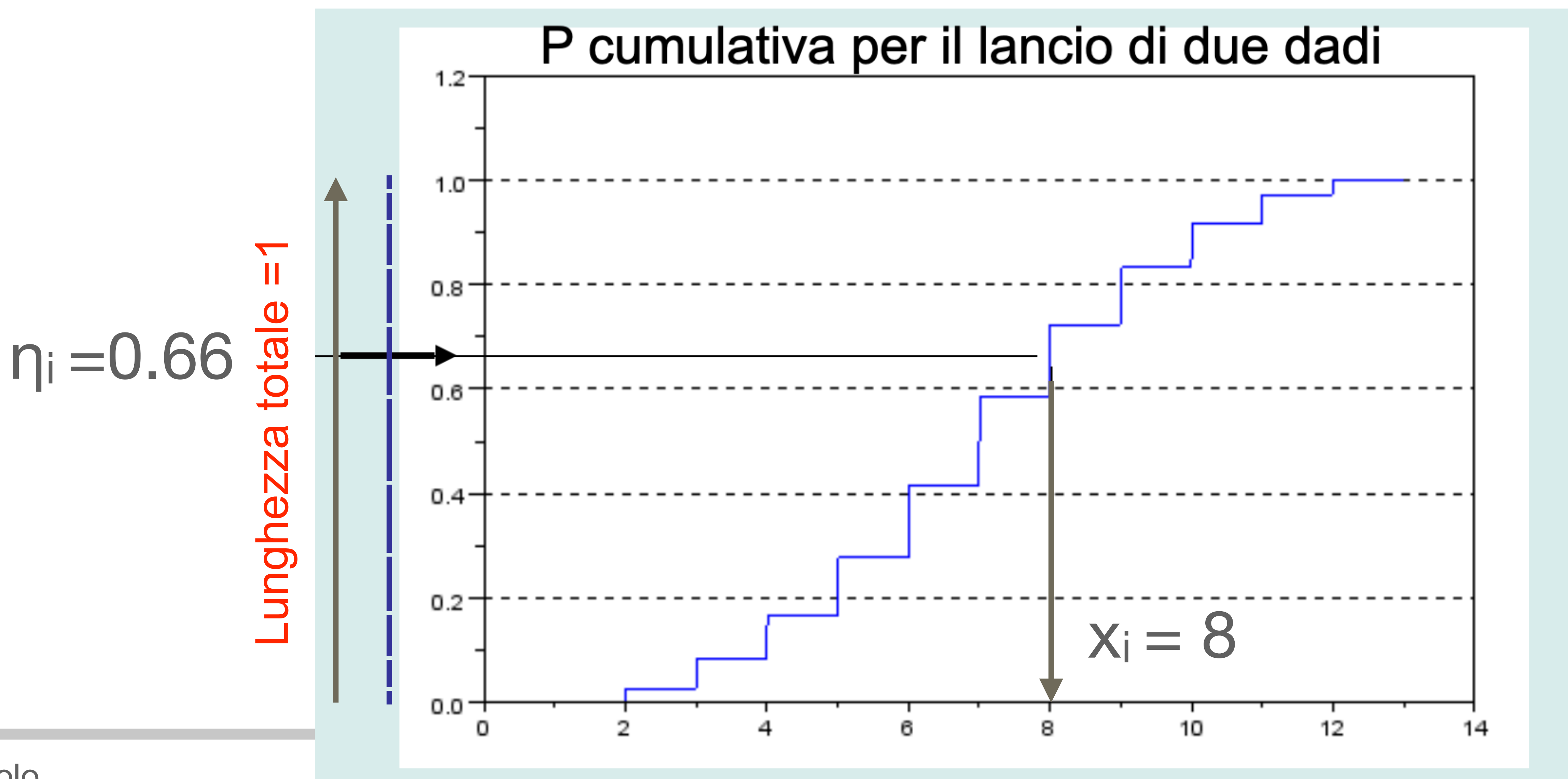
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



Lunghezza totale =1

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

- Consideriamo ora la ***probabilità cumulativa***, cosi' definita:
  - la probabilità cumulativa del valore x_k è la probabilità di ottenere un qualsiasi valore compreso tra x_1 a x_k
  - questa è data da:
  - ovviamente per k=N avremmo $P(x_N) = 1$



GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

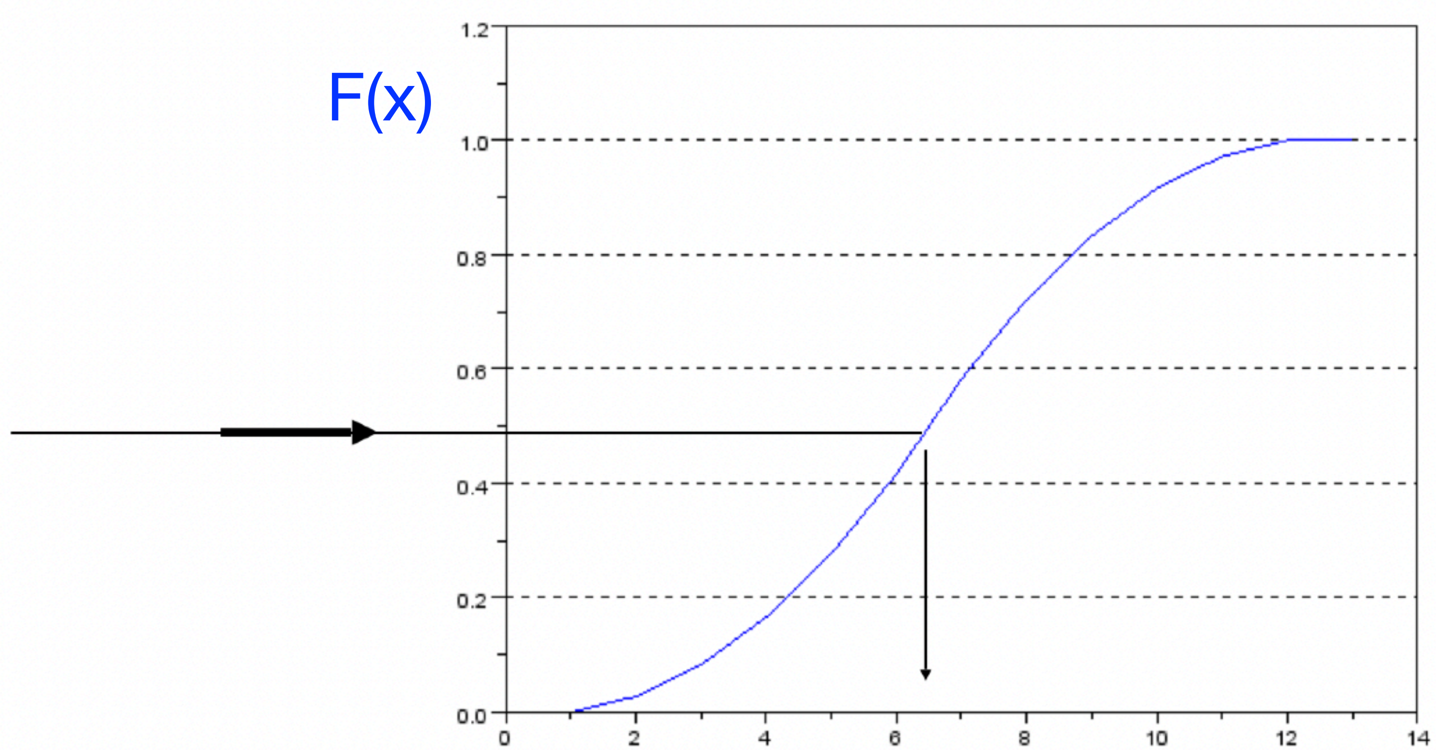
Nel caso di variabili aleatorie continue posso utilizzare lo stesso metodo. Supponiamo di avere una distribuzione di probabilità g(x) di una variabile aleatoria continua. La sua distribuzione cumulativa sarà:

voglio generare secondo la pdf ***g(x)***

Cumulativa di ***g(x)*** $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$

Trattandosi di una distribuzione cumulativa essa sarà una funzione monotona crescente che assume valori in [0,1].

F(x)



Posso procedere allo stesso modo.

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

- Come fare passo per passo:
  - ***Fase preliminare analitica:***
    - Determinare una primitiva (=cumulativa F) della distribuzione di probabilità che si vuole campionare
    - Invertire la primitiva:
  - ***Fase numerica di estrazione dei valori***
    - Estrarre un numero casuale y in maniera uniforme in (0,1)
    - Calcolare x = h(y) a partire da y utilizzando l'inversa della primitiva

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

ESEMPIO

Consideriamo la distribuzione di probabilità:

$$g(x) = 2x \qquad [0,1]$$

Definita nell'intervallo [0,1].
Questa possiede tutti i requisiti di una distribuzione di probabilità.

- Definita positiva
- Integrale uguale a 1
- Continua e derivabile.

Calcolarne una sua primitiva è semplice cosi come è semplice invertire quest'ultima.

Primitiva $y=F(x)= x^2$

$$x = F^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Inversa della primitiva

GENERATORI PER PDF NON UNIFORMI / INVERSIONE

- Si determina analiticamente l'inversa della funzione cumulativa.
- Si estraggono numeri casuali in maniera uniforme tra 0 e 1
- Si utilizza la funzione inversa per ottenere il valore casuale voluto.

```
//
//  estraggo valori secondo una distribuzione data
// usando il metodo dell'inversione
//
// distribuzione di probabilità o di frequenze
//
double f(double x) {
     return 2.*x;
}
double inv(double y) {
     return sqrt(y);
}
void Inversione(){
// creo un "oggetto" generatore di numeri random
   TRandom R(12345);
   int N=100000;
// creo un oggetto file lo collego al file di nome inversione.root
// e gli dico di crearlo (ricrearlo) quindi è un output
   TFile f("inversione.root","RECREATE");
// creo un oggetto histogramma
   TH1D * h = new TH1D ("h","Istogramma delle Frequenze",80,0,1.);
   for (int i=0; i<N ; i++) {
      double x,y;
//estraggo numeri in maniera uniforme tra 0 e 1
      y=R.Uniform();
// uso l'inversa della primitiva
      x=inv(y);

// Riempio l'oggetto histogramma con i numeri random generati
      h->Fill(x);
   }
// scrivo l'oggetto histogramma nel file
   h->Write();
// chiudo il file attraverso il metodo dell'oggetto di tipo file.
   f.Close();
}
```

FINE